

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
Санкт-Петербург

ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ОСНОВАНИЯ

Пусть у нас имеется ортотропная оболочка на упругом изотропном основании, находящаяся под действием безмоментных начальных усилий (T_1^0, T_2^0, S^0) . Введем параметр нагружения λ : $(T_1^0, T_2^0, S^0) = -\lambda(t_1, t_2, t_3)$. Прогиб w будем рассматривать в виде двойко – периодической функции, характеризуемой волновыми числами p, q :

$$w = w_0 e^{(px+qy)i/R}$$

Здесь R – характерный линейный размер срединной поверхности, $(x, y) = (\alpha A, \beta B)$, A, B – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки, (α, β) – координатные линии срединной поверхности оболочки, направления которых совпадают с направлениями главных кривизн. Главные радиусы кривизны срединной поверхности в точке (x, y) равны соответственно R_1, R_2 . Реакцию основания P примем в виде, указанном в [1]:

$$P = \sigma_{33}(0) = -\frac{c_{33} r w}{R} \quad (1)$$

где

$$c_{33} = G_0 \frac{4(1 - \nu_0)}{3 - 4\nu_0} + \sigma_0^0 \frac{13 - 28\nu_0 + 16\nu_0^2}{2(3 - 4\nu_0)^2} - \sigma_{33}^0 \frac{5 - 20\nu_0 + 16\nu_0^2}{2(3 - 4\nu_0)^2} \quad (2)$$

Упругое основание характеризуется модулем Юнга E_0 , модулем сдвига G_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 , $\sigma_{33}^0, \sigma_{33}$ – компоненты тензоров предварительного и дополнительного напряжений соответственно. Толщина оболочки равна h , модули Юнга материала оболочки вдоль направлений α и β равны соответственно E_1 и E_2 , модуль сдвига в касательной плоскости – G_{12} , модули сдвига в трансверсальном направлении – G_{13}, G_{23} . Коэффициенты Пуассона ν_{12}, ν_{21} связаны с E_1, E_2 соотношением $E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$. Подставляя функцию прогиба $w(x, y)$, а также дополнительно введенную функцию нагружения и функции углов поворота в уравнение устойчивости (см. [2]), мы получаем следующее неявное выражение функции нагружения $\Lambda'(s, \varphi, \omega, x, y)$:

$$\Lambda' = \frac{1}{f_T(\varphi)} \left(\frac{f_R(\varphi)}{s^2 f(\varphi)} + \frac{s^2}{12n_\nu} \frac{g_1(s, \varphi) \cos^2 \varphi + g_2(s, \varphi) \sin^2 \varphi}{g_3(s, \varphi)} + \frac{\hat{\omega}}{s} \right) \quad (3)$$

где $\hat{\omega} = \frac{c_{33}}{E_1 h_*^{3/2}}$ Здесь $\Lambda' = \frac{\lambda R}{E_1 h^2}$ – новый параметр нагружения, в общем

случае зависящий от волновых чисел, координат на срединной поверхности и жесткости основания, $n_\nu = 1 - \nu_{12}\nu_{21}$, h_* – безразмерная толщина оболочки, $\rho_i = \frac{R}{R_i}$ ($i = 1, 2$) – безразмерные параметры кривизны, параметры c_1, c_2 , равны отношениям упругих характеристик оболочки: $c_1 = \frac{E_2}{E_1}$, $c_2 = \frac{G_{12}}{E_1}$. Волновые числа s, φ связаны с волновыми числами p, q подстановками

$$p = \frac{s \cos \varphi}{h_*^{1/2}}, \quad q = \frac{s \sin \varphi}{h_*^{1/2}} \quad (4)$$

Коэффициенты a_1, a_2 определяют величину сдвига,

$$\begin{aligned} f_R(\varphi) &= (\rho_2 \cos^2 \varphi + \rho_1 \sin^2 \varphi)^2, \quad f_T(\varphi) = t_1 \cos^2 \varphi + 2t_3 \cos \varphi \sin \varphi + t_2 \sin^2 \varphi, \\ f(\varphi) &= \sin^4 \varphi + \frac{\cos^4 \varphi}{c_1} + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{\nu_{12}}{c_1} - c_1 \nu_{12} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ g_1(s, \varphi) &= c_1 c_2 a_2 n_\nu s^2 \sin^4 \varphi + c_2 a_2 n_\nu s^2 \cos^4 \varphi + \\ &+ c_1 a_2 (1 - 2c_2 \nu_{12}) n_\nu s^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (2c_2 n_\nu + c_1 \nu_{12}) \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \\ g_2(s, \varphi) &= c_1 c_2 a_1 n_\nu s^2 \sin^4 \varphi + c_2 a_1 n_\nu s^2 \cos^4 \varphi + \\ &+ c_1 a_1 (1 - 2c_2 \nu_{12}) n_\nu s^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (2c_2 n_\nu + c_1 \nu_{12}) \cos^2 \varphi + c_1 \sin^2 \varphi \\ g_3(s, \varphi) &= c_1 c_2 a_1 a_2 n_\nu s^4 \sin^4 \varphi + c_2 a_1 a_2 n_\nu s^4 \cos^4 \varphi + \\ &+ c_1 a_1 a_2 (1 - 2c_2 \nu_{12}) n_\nu s^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (c_1 a_2 + c_2 a_1 n_\nu) s^2 \sin^2 \varphi + \\ &+ (a_1 + c_2 a_2 n_\nu) s^2 \cos^2 \varphi + 1 \end{aligned}$$

Для ортотропной сферической оболочки с наполнителем выражение параметра нагружения (3) принимает явную форму

$$\Lambda' = \frac{s}{s f_T(\varphi) + \zeta} \left(\frac{f_R(\varphi)}{s^2 f(\varphi)} + \frac{s^2}{12 n_\nu} \frac{g_1(s, \varphi) \cos^2 \varphi + g_2(s, \varphi) \sin^2 \varphi}{g_3(s, \varphi)} + \frac{\omega}{s} \right) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \zeta &= \frac{E_0 \gamma'}{h_*^{1/2}}, \quad \omega = \frac{E_0 a_0}{E_1 h_*^{3/2}}, \quad \gamma' = \frac{4(1 - \nu_0)}{(3 - 4\nu_0)^2} \gamma, \quad a_0 = \frac{2(1 - \nu_0)}{(1 + \nu_0)(3 - 4\nu_0)} \\ \gamma &= \frac{2(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{(1 - 2\nu_0)(E_1(1 + \nu_{21}) + E_2(1 + \nu_{12}))}. \end{aligned}$$

Значение параметра критической нагрузки получаем минимизацией функции нагружения (5) по волновым числам s, φ . В качестве примера рассмотрим трансверсально изотропная сферическая оболочка радиуса $R = 1$ с упругим наполнителем, подвергнутая однородному сжатию ($t_1 = t_2 = 1, t_3 = 0$). Коэффициенты Пуассона у материала оболочки – $\nu = 0.3$, у основания – $\nu_0 = 0.4$.

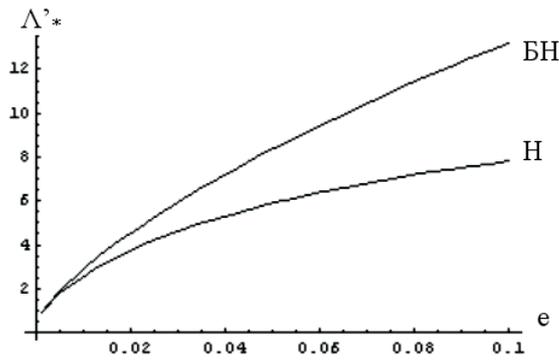


Рис. 1

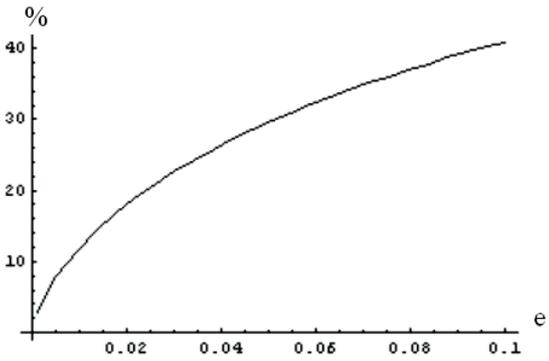


Рис. 2

На рисунке 1 приведены зависимости параметров критической нагрузки от относительной жесткости основания $e = \frac{E_0}{E_1}$ с учетом (Н) и без учета (БН) предварительных напряжений в основании при относительной толщине оболочки $h_* = 0.01$. При больших значениях относительной жесткости основания разница между двумя моделями становится весьма существенной. Чтобы проиллюстрировать их отличие, определим **относительное приращение** параметров критической нагрузки следующим образом:

$$\Delta_{OTN} = \frac{\Lambda'_{2*} - \Lambda'_{1*}}{\Lambda'_{2*}}$$

Здесь Λ'_{1*} – значение параметра критической нагрузки, полученное в модели с учетом предварительных напряжений заполнителя, Λ'_{2*} – значение аналогичного параметра в модели без учета таковых. Графическая зависимость $\Delta_{OTN}(e)$ приведена на рисунке 2. Из этой зависимости явно следует, что с увеличением жесткости основания e величина $\Delta_{OTN}(e)$ также увеличивается. Так, при $e = 0.001$ значения обеих нагрузок весьма близки – они отличаются всего лишь на $\Delta_{OTN}(0.001) = 0.1\%$, а при $e = 0.1$, когда жесткость заполнителя всего лишь в 10 раз меньше жесткости материала оболочки, Λ'_{1*} меньше Λ'_{2*} уже на 40%.

Библиографический список

1. Товстик, П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Известия РАН, 2005, Вып. 1, С. 147-160.
2. Михеев, А.В. Исследование локальной устойчивости пологих ортотропных оболочек на упругом основании // Вестник Санкт-Петербургского ун-та, сер. матем., механ., астрон. 2007, Вып. 2, С. 128-133.