СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.988.54

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Д. А. Борзых

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
Россия, 119049, г. Москва, ул. Шаболовка, 28;
e-mail: borzykh.dmitriy@gmail.com

В работе приводится альтернативное доказательство известной формулы Тейлора для операторов, действующих в нормированных пространствах. В качестве способа доказательства используется метод интегрирования по частям. Этот способ ранее применялся при выводе формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для функции одной переменной. В данной работе показано, что этим же способом можно получить формулу Тейлора и для случая операторов.

Ключевые слова: формула Тейлора, оператор, нормированное пространство, производная Фреше, метод интегрирования по частям.

1. Предварительные сведения

Приведем необходимые определения и факты.

Отображение x, определенное на отрезке $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$ и принимающее значения в нормированном пространстве X, будем называть *абстрактной функцией*. Непрерывность и равномерная непрерывность таких функций определяется стандартным способом. Абстрактная функция x называется *непрерывной в точке* $t_0 \in [a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из условий $t \in [a;b]$ и $|t - t_0| < \delta$ вытекает неравенство $\|x(t) - x(t_0)\| < \varepsilon$. Если абстрактная функция непрерывна в каждой точке отрезка $[a;b]$, то она называется *непрерывной*. Абстрактная функция x называется *равномерно непрерывной* на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из условий t_1, $t_2 \in [a;b]$ и $|t_1 - t_2| < \delta$ следует неравенство $\|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon$. Для абстрактных функций справедлива теорема Кантора (см. [1, гл. VI, § 25, с. 254]): всякая непрерывная на отрезке абстрактная функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

Производной абстрактной функции $x\colon [a;b] \to X$ в точке $t_0 \in (a;b)$ называется предел

$$\frac{d}{dt}\, x(t_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}\,.$$

Все основные свойства производных, известные из курса математического анализа, справедливы и для абстрактных функций (см. [1, гл. III, § 13, с. 137]).

Производные более высоких порядков от абстрактных функций вводятся индуктивно:

$$\frac{d^n}{dt^n}\,x(t) := \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\,x(t)\right), \quad n \geq 2.$$

Понятие интеграла Римана также переносится на случай абстрактных функций $x\colon [a;b] \to X$. При этом предположение о полноте нормированного пространства X является существенным. Рассмотрим произвольный фиксированный набор точек $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$. Совокупность $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ называется *разбиением отрезка* $[a;b]$. Отрезки $[t_{i-1};t_i]$ называются *частичными отрезками* разбиения T. Диаметром разбиения T будем называть величину $\operatorname{diam}(T) = \max\limits_{1\leq i\leq N} \Delta t_i$, где $\Delta t_i := t_i - t_{i-1}$. На каждом частичном отрезке $[t_{i-1};t_i]$ выберем по точке θ_i. Эти точки будем называть *промежуточными точками. Интегральной суммой* Римана для абстрактной функции x, отвечающей разбиению T с отмеченными точками $\theta_1, \ldots, \theta_N$, называется сумма

$$S(x;\, T;\, \theta_1, \ldots, \theta_N) := \sum_{i=1}^{N} x(\theta_i)\,\Delta t_i.$$

Абстрактная функция x называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a;b]$, если существует такой элемент $I \in X$, что для любой последовательности разбиений отрезка $[a;b]$

$$T_n = \{t_{0,n}, t_{1,n}, \ldots, t_{N_n,n}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

диаметры которых стремятся к нулю, и для любого выбора промежуточных точек $\theta_{i,n} \in [t_{i-1,n};\, t_{i,n}]$, $i = 1, 2, \ldots, N_n$, $n = 1, 2, \ldots$, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} S(x;\, T_n;\, \theta_{1,n}, \ldots, \theta_{N_n,n}) = I.$$

При этом элемент I называется *интегралом Римана* от функции x на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b x(t)\,dt$.

Так же, как и для вещественных функций одной переменной, доказывается теорема о том, что всякая непрерывная на отрезке абстрактная функция является интегрируемой по Риману (см. [1, гл. VI, § 25, стр. 255]). При этом оказываются справедливыми и все основные свойства интеграла Римана (см. там же, гл. VI, § 25, стр. 256–258). Ниже мы перечислим некоторые свойства интеграла, которые нам потребуются в дальнейшем.

1. Если x — непрерывная на отрезке $[a;b]$ абстрактная функция, то справедлива следующая оценка:

$$\left\| \int\limits_a^b x(t)\,dt \right\| \leq \int\limits_a^b \bigl\| x(t) \bigr\|\,dt.$$

2. Для непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$ абстрактных функций имеет место *формула Ньютона – Лейбница*:

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\, x(t)\, dt = x(b) - x(a).$$

3. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, и для элементов $x \in X$ определено умножение справа на элементы $y \in Y$, т. е. задан некоторый ограниченный билинейный оператор $B\colon X \times Y \to Z$, с помощью которого определяется операция $xy := B(x,y)$, именуемая операцией *умножения справа*. Тогда если абстрактные функции x и y непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то справедлива *формула интегрирования по частям*:

$$\int_a^b x(t)\, \frac{d}{dt}\, y(t)\, dt = x(t)\, y(t)\big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{d}{dt}\, x(t)\, y(t)\, dt.$$

Теперь перейдем к теории дифференцирования операторов, действующих в нормированных пространствах. Оператор F, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, называется *дифференцируемым по Фреше* в точке $\hat{x} \in X$, если существует линейный ограниченный оператор $A \in L(X,Y)$[1], для которого имеет место соотношение

$$F(\hat{x}+h) - F(\hat{x}) = Ah + \omega(\hat{x},h),$$

где $\|\omega(\hat{x},h)\| = o(\|h\|)$, $h \to 0$, а именно, $\dfrac{\|\omega(\hat{x},h)\|}{\|h\|} \to 0$ $(h \to 0)$. При этом линейный ограниченный оператор A называется *производной Фреше* оператора F в точке $\hat{x} \in X$ и обозначается $F'(\hat{x})$. Значение линейного ограниченного оператора $F'(\hat{x}) \in L(X,Y)$ на элементе $h \in X$ будем обозначать $F'(\hat{x})[h] \in Y$.

Оператор F, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, называется *дважды дифференцируемым по Фреше* в точке $\hat{x} \in X$, если первая производная Фреше $F'(\cdot)$ определена в некоторой окрестности точки $\hat{x}$ и существует линейный ограниченный оператор $A \in L\big(X, L(X,Y)\big)$, для которого

$$F'(\hat{x}+h) - F'(\hat{x}) = Ah + \omega(\hat{x},h),$$

где $\|\omega(\hat{x},h)\| = o(\|h\|)$, $h \to 0$. Данный оператор A называется *второй производной Фреше* оператора F в точке $\hat{x}$ и обозначается $F''(\hat{x})$. Значение оператора $F''(\hat{x})$ на элементе $h_1 \in X$ будем обозначать $F''(\hat{x})[h_1] \in L(X,Y)$; в свою очередь, значение оператора $F''(\hat{x})[h_1]$ на элементе $h_2 \in X$ есть $\big(F''(\hat{x})[h_1]\big)[h_2] \in Y$, при этом удобно использовать запись:

$$F''(\hat{x})[h_1,h_2] := \big(F''(\hat{x})[h_1]\big)\,[h_2].$$

[1] $L(X,Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y.

Помимо краткости, дополнительная причина для данного обозначения состоит в том, что определенное таким образом отображение $F''(\hat{x})[\,\cdot\,,\cdot\,]\colon X \times \times X \to Y$ является ограниченным билинейным оператором (см. [2, гл. X, § 1, стр. 505] или [3, гл. 2, § 2.2, стр. 136].

Аналогично вводится понятие производной Фреше более высокого порядка. А именно, оператор $F\colon X \to Y$ называется *n раз* ($n \geq 3$) *дифференцируемым по Фреше* в точке $\hat{x} \in X$, если производная $(n-1)$-го порядка $F^{(n-1)}(\cdot)$ определена в некоторой окрестности точки $\hat{x}$ и существует линейный ограниченный оператор

$$A \in L\Big(\underbrace{X, L\Big(X, L\big(X, \ldots, L(X, Y)\big)\Big)}_{X \text{ участвует } n \text{ раз}}\Big),$$

для которого

$$F^{(n-1)}(\hat{x}+h) - F^{(n-1)}(\hat{x}) = Ah + \omega(\hat{x}, h),$$

где $\|\omega(\hat{x}, h)\| = o(\|h\|)$, $h \to 0$. Оператор A называется *производной Фреше n-го порядка* оператора F в точке $\hat{x}$, обозначается $F^{(n)}(\hat{x})$, и аналогично случаю производной второго порядка, пишем

$$F^{(n)}(\hat{x})[h_1, h_2, \ldots, h_n] := \Bigg(\Big(\big(F^{(n)}(\hat{x})[h_1]\big)[h_2]\Big) \ldots\Bigg)[h_n],$$

где $h_1, \ldots, h_n \in X$. Для вывода формулы Тейлора нам понадобится следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\big\|F^{(n)}(\hat{x})[h_1, \ldots, h_{n-1}, h_n]\big\| &= \Bigg\|\Bigg(\Big(\big(F^{(n)}(\hat{x})[h_1]\big) \ldots\Big)[h_{n-1}]\Bigg)[h_n]\Bigg\| \leq \\ &\leq \Bigg\|\Big(\big(F^{(n)}(\hat{x})[h_1]\big) \ldots\Big)[h_{n-1}]\Bigg\| \cdot \|h_n\| \leq \ldots \leq \big\|F^{(n)}(\hat{x})\big\| \cdot \|h_1\| \cdot \ldots \cdot \|h_n\|. \quad (1)\end{aligned}$$

2. Формула Тейлора

Лемма. *Если оператор $F\colon X \to Y$ является n раз дифференцируемым по Фреше в точке $\hat{x} + \hat{t}\hat{h}$ ($\hat{x}$, $\hat{h} \in X$, $\hat{t} \in \mathbb{R}$), то*

$$\frac{d^n}{dt^n}\, F(\hat{x} + t\hat{h})\big|_{t=\hat{t}} = F^{(n)}(\hat{x} + \hat{t}\,\hat{h})\,[\underbrace{\hat{h}, \ldots, \hat{h}}_{n}]. \quad (2)$$

Доказательство. Докажем лемму для случая $n = 1$. Согласно определению производной абстрактной функции

$$\frac{d}{dt}\, F(\hat{x} + t\hat{h})\Big|_{t=\hat{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F\big(\hat{x} + (\hat{t} + \Delta t)\hat{h}\big) - F(\hat{x} + \hat{t}\hat{h})}{\Delta t}\,. \quad (3)$$

Далее, поскольку оператор F дифференцируем по Фреше в точке $\hat{x}+\hat{t}\hat{h}$, имеет место соотношение

$$F\big(\hat{x} + (\hat{t} + \Delta t)\hat{h}\big) - F(\hat{x} + \hat{t}\hat{h}) = F'(\hat{x} + \hat{t}\hat{h})\,[\Delta t\,\hat{h}] + \omega(\hat{x} + \hat{t}\hat{h}, \Delta t\,\hat{h}),$$

где $\dfrac{\|\omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\,\hat{h})\|}{\|\Delta t\,\hat{h}\|} \to 0$ при $\Delta t \to 0$, которое с учетом равенства (3) дает требуемое:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,F(\hat{x}+t\hat{h})\Big|_{t=\hat{t}} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{F'(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})\,[\Delta t\hat{h}]}{\Delta t} + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\hat{h})}{\Delta t}}_{=0} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t\,F'(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})[\hat{h}]}{\Delta t} = F'(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})\,[\hat{h}].\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{\omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\,\hat{h})}{\Delta t}\right\| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\|\omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\,\hat{h})\|}{\|\Delta t\hat{h}\|}\|\hat{h}\| = 0.$$

Теперь получим утверждение леммы при $n = 2$. По доказанному выше для $n = 1$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\,F(\hat{x}+t\hat{h})\Big|_{t=\hat{t}} &= \frac{d}{dt}\,F'(\hat{x}+t\hat{h})[\hat{h}]\Big|_{t=\hat{t}} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{F'\big(\hat{x}+(\hat{t}+\Delta t)\hat{h}\big)[\hat{h}] - F'(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})[\hat{h}]}{\Delta t}\,.\end{aligned}\tag{4}$$

Из дифференцируемости по Фреше оператора $F'(\cdot)$ в точке $\hat{x}+\hat{t}\hat{h}$, следует

$$F'\big(\hat{x}+(\hat{t}+\Delta t)\hat{h}\big) - F'(\hat{x}+\hat{t}\hat{h}) = F''(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})\,[\Delta t\hat{h}] + \omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\,\hat{h}),$$

где $\dfrac{\|\omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\,\hat{h})\|}{\|\Delta t\hat{h}\|} \to 0$ при $\Delta t \to 0$, откуда

$$\begin{aligned}F'\big(\hat{x}+(\hat{t}+\Delta t)\hat{h}\big)[\hat{h}] \;-\; & F'(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})[\hat{h}] = \\ &= \underbrace{\big(F''(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})[\Delta t\,\hat{h}]\big)[\hat{h}]}_{=F''(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})[\Delta t\,\hat{h},\hat{h}]} + \omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\,\hat{h})[\hat{h}],\end{aligned}\tag{5}$$

где $\dfrac{\|\omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\,\hat{h})\,[\hat{h}]\|}{\|\Delta t\,\hat{h}\|} \to 0$ при $\Delta t \to 0$. С учетом формулы (5) равенство (4) может быть переписано в виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,F(\hat{x}+t\hat{h})\Big|_{t=\hat{t}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{F''(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})\,[\Delta t\,\hat{h},\hat{h}]}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\,\hat{h})[\hat{h}]}{\Delta t}.\tag{6}$$

Тогда из соотношений

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F''(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})[\Delta t\hat{h},\hat{h}]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t\,F''(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})[\hat{h},\hat{h}]}{\Delta t} = F''(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})[\hat{h},\hat{h}],$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{\omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\,\hat{h})[\hat{h}]}{\Delta t}\right\| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\|\omega(\hat{x}+\hat{t}\hat{h},\Delta t\,\hat{h})[\hat{h}]\|}{\|\Delta t\,\hat{h}\|}\,\|\hat{h}\| = 0$$

и равенства (6), получаем требуемое:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,F(\hat{x}+t\hat{h})\Big|_{t=\hat{t}} = F''(\hat{x}+\hat{t}\hat{h})[\hat{h},\hat{h}].$$

Доказательство общего случая аналогично случаю $n=2$. ∎

Теорема (формула Тейлора). *Пусть X, Y — банаховы пространства, и производная $F^{(n+1)}(\cdot)$ оператора $F\colon X\to Y$ непрерывна в некоторой выпуклой окрестности U точки $\hat{x}\in X$, $n\ge 0$. Тогда для любого элемента h такого, что $\hat{x}+h\in U$, имеет место формула Тейлора:*

$$\begin{aligned} F(\hat{x}+h)-F(\hat{x}) &= F'(\hat{x})[h]+\frac{1}{2!}\,F''(\hat{x})[h,h]+\ldots \\ &\ldots+\frac{1}{n!}\,F^{(n)}(\hat{x})[\underbrace{h,\ldots,h}_{n}]+\omega(\hat{x},h), \end{aligned} \tag{7}$$

где остаточный член

$$\omega(\hat{x},h):=\int\limits_0^1 F^{(n+1)}(\hat{x}+th)[\underbrace{h,\ldots,h}_{n+1}]\cdot\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt$$

и при этом $\|\omega(\hat{x},h)\| = o\big(\|h\|^n\big)$, $h\to 0$.

Доказательство. Докажем соотношение (7). Используя формулу Ньютона–Лейбница, формулу интегрирования по частям, а также равенство (2), получаем

$$\begin{aligned} F(\hat{x}+h)-F(\hat{x}) &= F(\hat{x}+th)\Big|_{t=0}^{t=1} = \int\limits_0^1 F'(\hat{x}+th)[h]\,dt = \\ &= \int\limits_0^1 F'(\hat{x}+th)[h]\cdot\frac{d}{dt}\,(t-1)\,dt = \\ &= F'(\hat{x}+th)[h]\cdot(t-1)\Big|_{t=0}^{t=1} - \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\big(F'(\hat{x}+th)[h]\big)\cdot(t-1)\,dt = \\ &= F'(\hat{x})[h] - \int\limits_0^1 F''(\hat{x}+th)[h,h]\cdot(t-1)\,dt = \\ &= F'(\hat{x})[h] - \int\limits_0^1 F''(\hat{x}+th)[h,h]\cdot\frac{d}{dt}\,\frac{(t-1)^2}{2}\,dt = \\ &= F'(\hat{x})[h] - F''(\hat{x}+th)[h,h]\cdot\frac{(t-1)^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=1} + \\ &\quad + \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\,\big(F''(\hat{x}+th)[h,h]\big)\cdot\frac{(t-1)^2}{2}\,dt = \\ &= F'(\hat{x})[h]+\frac{1}{2}\,F''(\hat{x})[h,h]+\int\limits_0^1 F'''(\hat{x}+th)[h,h,h]\cdot\frac{(t-1)^2}{2}\,dt = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2}F''(\hat{x})[h,h] + \int\limits_0^1 F'''(\hat{x}+th)[h,h,h]\cdot\frac{d}{dt}\,\frac{(t-1)^3}{2\cdot 3}\,dt = \\
&= F'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2}\,F''(\hat{x})[h,h] + F'''(\hat{x}+th)[h,h,h]\cdot\frac{(t-1)^3}{2\cdot 3}\bigg|_{t=0}^{t=1} - \\
&\qquad - \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\big(F'''(\hat{x}+th)[h,h,h]\big)\cdot\frac{(t-1)^3}{2\cdot 3}\,dt = \\
&= F'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2}\,F''(\hat{x})[h,h] + \frac{1}{2\cdot 3}\,F'''(\hat{x})[h,h,h] - \\
&\qquad - \int\limits_0^1 F^{(4)}(\hat{x}+th)[h,h,h,h]\cdot\frac{(t-1)^3}{2\cdot 3}\,dt = \ldots \\
&\qquad \ldots = F'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2!}F''(\hat{x})[h,h] + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\hat{x})[\underbrace{h,\ldots,h}_{n}] + \\
&\qquad \underbrace{+\,(-1)^n\int\limits_0^1 F^{(n+1)}(\hat{x}+th)[\underbrace{h,\ldots,h}_{n+1}]\cdot\frac{(t-1)^n}{n!}\,dt}_{=\,\omega(\hat{x},h)}\,.
\end{aligned}
$$

Теперь докажем оценку остаточного члена: $\|\omega(\hat{x},h)\| = o\big(\|h\|^n\big)$, $h\to 0$. Поскольку производная $F^{(n+1)}(\,\cdot\,)$ непрерывна в выпуклой окрестности U точки $\hat{x}$, для любой фиксированной точки h ($\hat{x}+h\in U$) абстрактная функция $F^{(n+1)}(\hat{x}+th)$ является непрерывной по t на отрезке $[0;1]$. Поэтому по теореме Вейерштрасса найдется такая константа $C>0$, что для всех $t\in$ $\in[0;1]$ справедливо неравенство $\|F^{(n+1)}(\hat{x}+th)\|\le C$. Кроме того, в силу неравенства (1) справедлива оценка

$$
\big\|F^{(n+1)}(\hat{x}+th)[\underbrace{h,\ldots,h}_{n+1}]\big\| \le \big\|F^{(n+1)}(\hat{x}+th)\big\|\,\big\|h\big\|^{n+1}.
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\|\omega(\hat{x},h)\| \;&=\; \left\|\int\limits_0^1 F^{(n+1)}(\hat{x}+th)[\underbrace{h,\ldots,h}_{n+1}]\cdot\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt\right\| \le \\
&\le \int\limits_0^1 \big\|F^{(n+1)}(\hat{x}+th)[\underbrace{h,\ldots,h}_{n+1}]\big\|\cdot\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt \le \\
&\le \int\limits_0^1 \big\|F^{(n+1)}(\hat{x}+th)\|\,\|h\|^{n+1}\cdot\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt \le \\
&\le -C\,\|h\|^{n+1}\cdot\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{C}{(n+1)!}\,\|h\|^{n+1},
\end{aligned}
$$

откуда получаем требуемое: $\|\omega(\hat{x},h)\| = o(\|h\|^n)$ при $h\to 0$. ∎

ЛИТЕРАТУРА

1. Треногин В. А. Функциональный анализ. Изд. 3-е. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7-е. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. Изд. 3-е. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Поступила 31.01.2016

TAYLOR FORMULA IN NORMED SPACES AND THE METHOD OF INTEGRATION BY PARTS

D. A. Borzykh

The paper provides an alternative proof of the well-known Taylor formula for operators mapping in normed spaces. As a method of the proof we use the method of integration by parts. This approach was previously applied to the derivation of Taylor formula with the residual member in the integral form for a function of one variable. In this article it is shown that the same method can be applied to obtain a Taylor formula for operators.

Keywords: Taylor formula, operator, normed space, the Frechet derivative, the method of integration by parts.