Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\frac{5x-11}{x-3} \le x-1.$$

2. Решить неравенство

$$2^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x < 32.$$

3. Решить уравнение

$$\left|x^2-4x-8\right| = x-2.$$

4. Решить неравенство

$$\log_2(x-1)+\log_2(x+5) \le 4.$$

5. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Найти радиус этой окружности, если меньшее основание трапеции равно 10, а большая боковая сторона равна 13.

6. Решить уравнение

$$10\sin x + 4\sin 2x = 3\operatorname{tg} x.$$

7. Решить уравнение

$$\log_{x^2}\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

8. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (AB = 4, AD=3, AA_1=3). На ребре CC_1 взята точка M так, что $C_1M = 1$. Через точки A_1, D, M проведена плоскость. Найти площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью.

9. Найти все значения a, при которых система неравенств

$$\begin{cases}\sqrt{x+1} \ge x-1 \\ x^2+ax-6>0\end{cases},$$

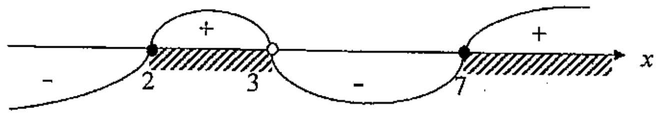
имеет хотя бы одно решение.

Решение варианта 1

Задача 1.

$$\frac{5x-11}{x-3} \le x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5x-11}{x-3}-x+1 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+9x-14}{x-3} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+9x-14}{x-3} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)(x-7)}{x-3} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2;3)\cup[7;+\infty)$$



Ответ: $x \in [2;3)\cup[7;+\infty)$.

Задача 2.

$$2^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x < 32 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x^2} \cdot \left(2^{-4}\right)^x < 2^5 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x^2-4x} < 2^5$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-4x-5<0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-5)<0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1;5).$$

Ответ: $x \in (-1;5)$.

Задача 3.

$$|x^2-4x-8|=x-2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4x-8=x-2 \\ x-2\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-4x-8=-x+2 \\ x-2\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5x-6=0 \\ x\ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x-10=0 \\ x\ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=6 \end{array}\right. \\ x\ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=5 \end{array}\right. \\ x\ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=5 \end{array}\right..$$

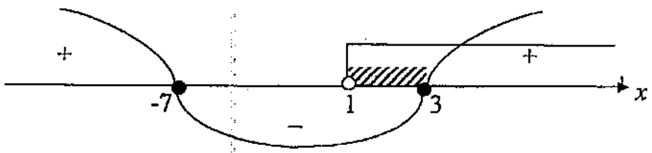
Ответ: $x\in\{5;6\}$.

Задача 4.

$$\log_2(x-1)+\log_2(x+5)\le 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_2(x-1)(x+5)\le \log_2 16 \\ x-1>0 \\ x+5>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)(x+5)\le 16 \\ x>1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+4x-21\le 0 \\ x>1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+7)(x-3)\le 0 \\ x>1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in(1;3].$$



Ответ: $x\in(1;3]$.

Задача 5.

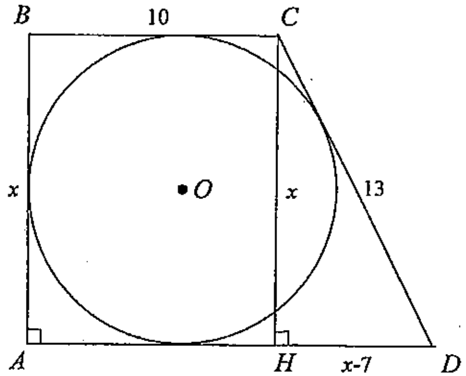


Рис. 1.

$ABCD$ – прямоугольная трапеция (рис. 1); $BC=10$, $CD=13$; O – центр вписанной окружности. Проведем $CH\perp AD$. Тогда $AH=BC=10$. Обозначим $AB = CH = x$. Поскольку окружность вписана в четырехугольник $ABCD$, то $AB+CD=BC+AD \Rightarrow x+13=10+AD \Rightarrow AD=x+3$. Так как $AH=10$, то $HD=x+3-10=x-7$.

Применим теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику CHD:

$$CH^2+HD^2=CD^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+(x-7)^2=13^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-7x-60=0$$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-5 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x=12 \text{ (по смыслу задачи).}$$

Значит $AB=12$, но AB равно диаметру вписанной окружности, таким образом, $R=6$.

Ответ: 6.

Задача 6.

$$10\sin x+4\sin 2x=3\operatorname{tg}x \quad \Leftrightarrow \quad 10\sin x+4\sin 2x=\frac{3\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x(10\cos x + 8\cos^2 x - 3) = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 8\cos^2 x + 10\cos x - 3 = 0 \end{array}\right. \\ \cos \neq 0 \end{cases}$$

1) $\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi n, n \in Z$;

2) $8\cos^2 x + 10\cos x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{D}{4} = 49 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \dfrac{-5 \pm 7}{8}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{4} \\ \cos x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \pm\arccos\dfrac{1}{4} + 2\pi n \end{array}\right., \ n \in Z.$

Задача 7.

$$\log_{x^2}\left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \log_{x^2}\left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) = \log_{x^2}\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} = |x| \\ x^2 \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

$$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = |x| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} = x \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} = -x \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 + x - 3 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 = 0 \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

Поскольку $x = 1$ не удовлетворяет условию $x^2 \neq 1$, то ответом будет $x = -3$.

Ответ: $x = -3$.

Задача 8.

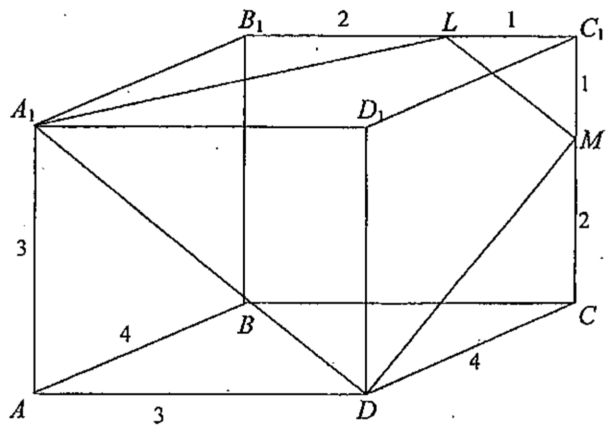


Рис. 2.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед (рис. 2); $AB = 4$; $AD = 3$; $AA_1 = 3$; $C_1M = 1$; $CM = 2$. Пусть A_1LMD – сечение параллелепипеда. Поскольку боковые грани AA_1D_1D и BB_1C_1C параллельны, то $LM \,||\, A_1D$. Следовательно $C_1L = 1$ (угол $C_1ML = 45°$); $B_1L = MC = 2$. Значит четырехугольник A_1LMD будет равнобочной трапецией (рис. 3) со сторонами: 1) $LM = \sqrt{C_1M^2 + C_1L^2} = \sqrt{2}$;

2) $A_1D=\sqrt{AD^2+AA_1^{\,2}}=3\sqrt{2}$;

3) $DM=\sqrt{DC^2+MC^2}=\sqrt{20}$.

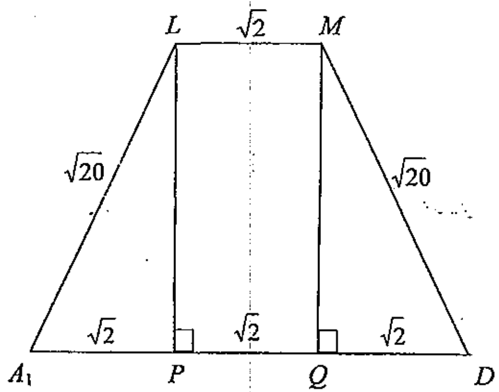


Рис. 3.

Найдем высоту этой трапеции. Для этого опустим перпендикуляры $LP\perp A_1D$ и $MQ\perp A_1D$. Тогда $PQ=LM=\sqrt{2}$; $QD=\dfrac{A_1D-PQ}{2}=\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора

$MQ=\sqrt{MD^2-QD^2}=\sqrt{20-2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Осталось вычислить площадь трапеции:

$$S_{A_1LMD}=\frac{(LM+A_1P)}{2}\cdot MD=\frac{(\sqrt{2}+3\sqrt{2})}{2}\cdot 3\sqrt{2}=6.$$

Ответ: 6.

Задача 9.

Решим первое неравенство системы

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}\ge x-1\\ x^2+ax-6>0\end{cases}$$

1) $\sqrt{x+1}\ge x-1 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\ge 0\\ x+1\ge (x-1)^2\end{cases}\\ \begin{cases}x-1<0\\ x+1\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ x(x-3)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ x\ge -1\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}1\le x\le 3\\ -1\le x<1\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad x\in[-1;3]$.

2) Далее определим, при каких значениях a неравенство $f(x)=x^2+ax-6>0$ выполняется хотя бы при одном значении $x\in[-3;1]$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы на одном из концов отрезка $[-1;3]$ функция $y=f(x)$ принимала положительное значение. Это ясно из того, что в противном случае, т.е. когда

$$\begin{cases}f(-1)\le 0\\ f(3)\le 0\end{cases},$$

график функции $y=f(x)$ будет расположен как показано на рис. 4. Тогда

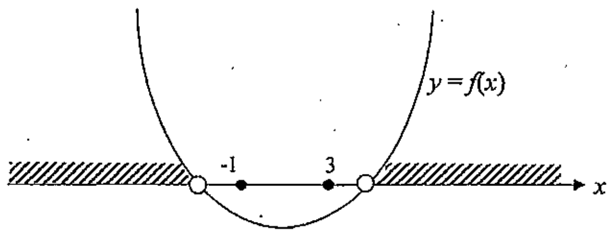


Рис. 4.

множества решений двух неравенств не пересекаются, следовательно, система не имеет решений (на рис. 4 множество решений второго неравенства отмечено штриховкой).

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l}f(-1)>0\\ f(3)>0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}1-a-6>0\\ 9+3a-6>0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}a<-5\\ a>-1\end{array}\right..$$

Ответ: $a\in(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$3^x - 3^{1-x} = 2.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{y} = 4 \\ 2y - x = -1 \end{cases}.$$

3. Дано: $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$.

4. Найти длину промежутка возрастания функции

$$y = -x^3 + 9x^2 + 21x - 7.$$

5. В треугольнике ABC дано: $AB = 9$; $AC = 10$; площадь равна 36. Найти BC, если известно, что $\angle A$ – тупой.

6. Решить неравенство

$$\log_x\left(\frac{3}{14x - 8}\right) \le -2.$$

7. Решить уравнение

$$\left|\frac{3}{2}\cos 2x - \cos x\right| + \cos x = \frac{1}{2}.$$

8. Дана правильная четырехугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной 4. Высота пирамиды равна 6. Через сторону основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45°. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{13 + 12x - x^2} = a$$

имеет единственное решение.

Решение варианта 2

Задача 1.

Обозначим $3^x = y > 0$. Тогда уравнение примет вид:

$$y - \frac{3}{y} = 2 \;\Rightarrow\; y^2 - 2y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} y = -1 < 0 \\ y = 3 > 0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; y = 3.$$

Значит $3^x = 3 \;\Rightarrow\; x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Задача 2.

Сложив уравнения системы, мы получим уравнение относительно y: $2y + \sqrt{y} = 3$. Обозначив $\sqrt{y} = t \ge 0$, приходим к квадратному уравнению:

$$2t^2 + t - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} t = 1 > 0 \\ t = -\frac{3}{2} < 0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; t = 1.$$

Следовательно, $\sqrt{y} = 1 \;\Rightarrow\; y = 1$. Подставив найденное значение y в первое уравнение, получим $x = 3$.

Ответ: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

Задача 3.

Сначала найдем $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \;\Rightarrow\; \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\left(\text{т.к. } -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}\right)$. Значит

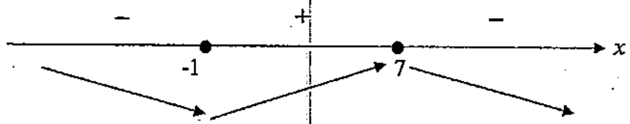
$$\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad \text{tg}2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}=\frac{4}{3}$$

Ответ: $\text{tg}2\alpha=\frac{4}{3}$.

Задача 4.

Найдем знаки производной $y'=-3x^2+18x+21$:

$$y'=0\quad\Rightarrow\quad -3x^2+18x+21=0\quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=7\end{array}\right..$$



Следовательно, на промежутке $[-1;7]$ функция возрастает. Длина этого промежутка равна 8.

Ответ: 8.

Задача 5.

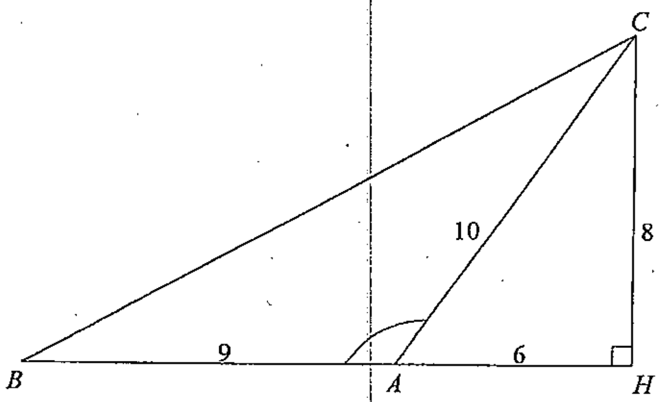


Рис. 5.

Найдем CH:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{CH\cdot AB}{2}=36\quad\Rightarrow\quad CH=\frac{72}{AB}=8.$$

Тогда $AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{36}=6$.

Применив еще раз теорему Пифагора, найдем BC:

$$BC=\sqrt{HB^2+BH^2}=\sqrt{64+225}=\sqrt{289}=17.$$

Ответ: 17.

Задача 6.

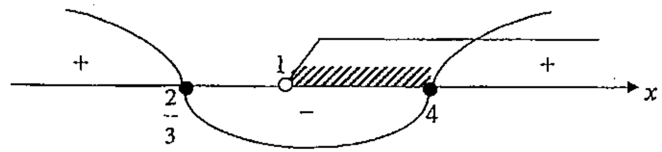
$$\log_x\left(\frac{3}{14x-8}\right)\le -2\quad\Leftrightarrow\quad \log_x\left(\frac{3}{14x-8}\right)\le \log_x\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ \frac{3}{14x-8}\le\frac{1}{x^2}\\ 14x-8>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\ \frac{3}{14x-8}\ge\frac{1}{x^2}\\ 14x-8>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x>1\\ 3x^2-14x+8\le 0\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}0<x<1\\ 3x^2-14x+8\ge 0\\ x>\frac{4}{7}\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

1. Решим систему (1):

$$\begin{cases}x>1\\ x^2-14x+8\le 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x\in(1;4]$$

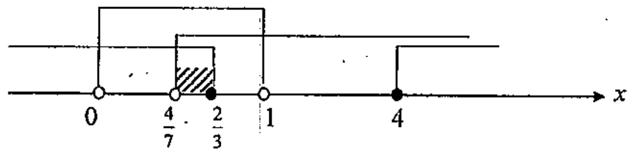
$$3x^2-14x+8=0\quad\Rightarrow\quad x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{3}=\left[\begin{array}{l}4\\ \frac{2}{3}\end{array}\right..$$



2. Решим систему (2):

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 14x + 8 \ge 0 \\ x > \dfrac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{4}{7}; \frac{2}{3}\right].$$

Окончательный ответ получается объединением найденных решений.



Ответ: $x \in \left(\frac{4}{7}; \frac{2}{3}\right] \cup (1;4]$.

Задача 7.

$$\left|\frac{3}{2}\cos 2x - \cos x\right| + \cos x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{3}{2}\cos 2x - \cos x\right| = \frac{1}{2} - \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3}{2}\cos 2x - \cos x = \dfrac{1}{2} - \cos x \\ \dfrac{1}{2} - \cos x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3}{2}\cos 2x - \cos x = -\dfrac{1}{2} + \cos x \\ \dfrac{1}{2} - \cos x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \underset{\Leftrightarrow}{t = \cos x} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3}{2}(2t^2 - 1) = \dfrac{1}{2} - t \\ t \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3}{2}(2t^2 - 1) = -\dfrac{1}{2} + t \\ t \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t^2 = \dfrac{2}{3} \\ t \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 3t^2 - 2t - 1 = 0 \\ t \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \\ t \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ \cos x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) + 2\pi n \\ x = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi n \end{array}\right., n \in Z.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) + 2\pi n \\ x = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi n \end{array}\right., n \in Z.$

Задача 8.

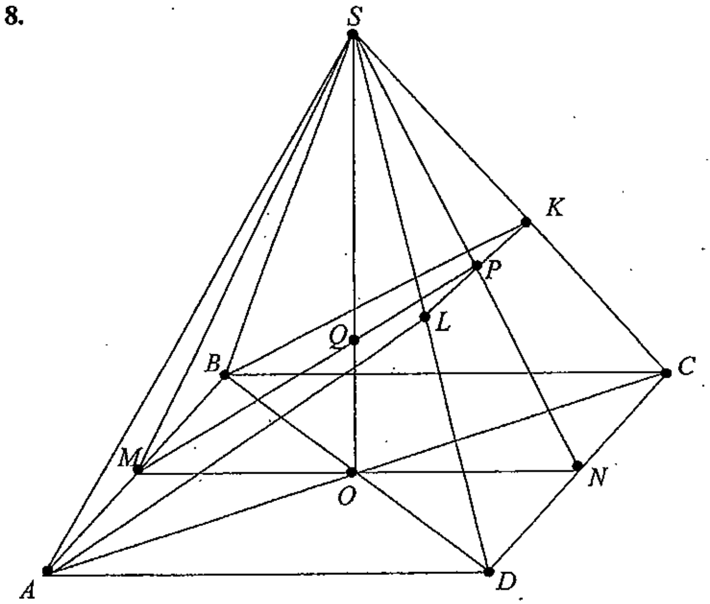


Рис. 6.

Пусть $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида (рис. 6); $ABCD$ – квадрат со стороной 4; SO=6 – высота пирамиды; $ABKL$ – сечение пирамиды плоскостью; угол между плоскостями $ABKL$ и $ABCD$ равен 45°.

1) Так как $KL \parallel CD$, то $ABKL$ будет трапецией (рис. 8), причем трапеция будет равнобочная. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью SMN (рис. 7), где M, N – середины сторон AB и CD соответственно.

Если P – точка пересечения SN и KL, то P является серединой KL и PM будет высотой трапеции $ABKL$, а угол PMN равен 45°.

2) Найдем в каком отношении точка P делит отрезок SN. Если Q – точка пересечения MP и SO, то $QO = OM = 2$ (т.к. $\Delta\ MQO$ равнобедренный прямоугольный). Тогда $SQ = SO - OQ = 4$. Продолжим MP до пересечения в точке F с прямой, проходящей через точку S и параллельной MN. Тогда $\Delta\ SQF$ тоже будет равнобедренным прямоугольным, следовательно, $SF = MQ = 4$. Из равенства треугольников

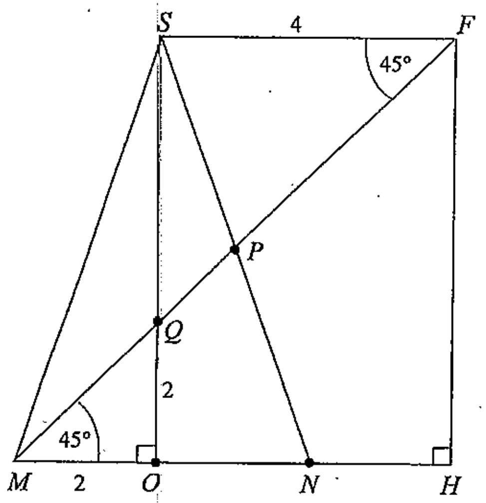


Рис. 7.

MPN и SPF (они подобны и $MN = SF = 4$) вытекает, что P – середина SN. Поэтому KL будет средней линией треугольника SDC, значит $KL = \frac{CD}{2} = 2$.

3) Найдем PM – высоту трапеции $ABKL$. Проведем $FH \perp MN$ (рис. 7). Тогда $FH = SO = 6$; $MF = \sqrt{2} \cdot FN = 6\sqrt{2}$ ($\Delta\ MFH$ – равнобедренный прямоугольный). Так как P – середина MF, то $PM = \frac{MF}{2} = 3\sqrt{2}$.

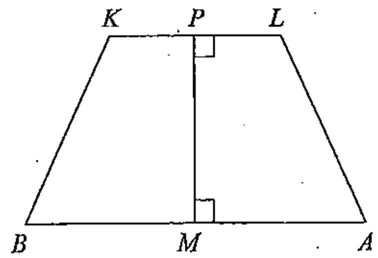


Рис. 8.

4) Теперь мы имеем все необходимое для нахождения площади сечения пирамиды:

$$S_{ABKL} = \frac{(AB + KL)}{2} \cdot PM = \frac{(2+4)}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

Ответ: $9\sqrt{2}$.

Задача 9.

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{13 + 12x - x^2} = a - \sqrt{9 - x^2}. \qquad (1)$$

Будем решать задачу графическим методом, построив графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения (1).

1) График левой части:

$$y = \sqrt{13 + 12x - x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 13 + 12x - x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 = 49 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ (x-6)^2 + y^2 = 7^2 \end{cases}.$$

Из этих преобразований получаем, что графиком левой части будет верхняя полуокружность (т.к. $y \geq 0$) с центром в точке (6; 0) и радиусом 7 (рис. 9).

2) Аналогичным образом получаем, что графиком правой части уравнения (1) будет нижняя полуокружность с центром в точке (0;0) и радиусом 3, сдвинутая по оси Oy на величину a (рис. 9).

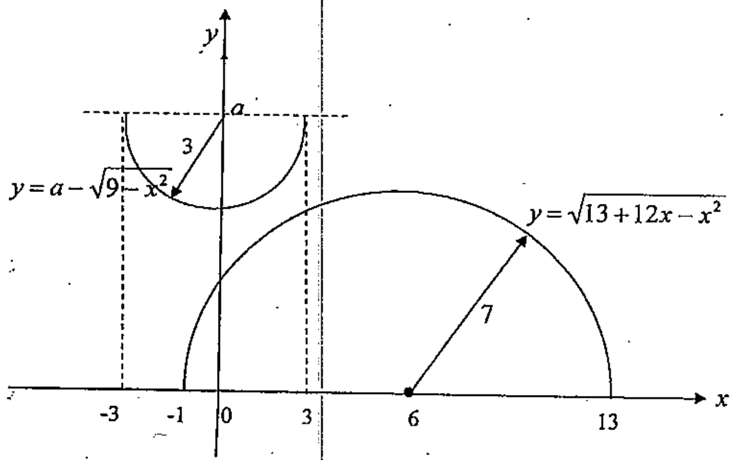


Рис. 9.

3) Единственным решение уравнения (1) будет при тех значениях a, при которых полуокружности (графики левой и правой частей уравнения) пересекаются лишь в одной точке. Такая ситуация будет в одном из следующих случаев.

Случай 1. Полуокружности касаются (рис. 10) в точке M. В этом случае $AB = 3 + 7 = 10$; $OB = 6$; $OA = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Значит, этот случай реализуется при $a = OA = 8$.

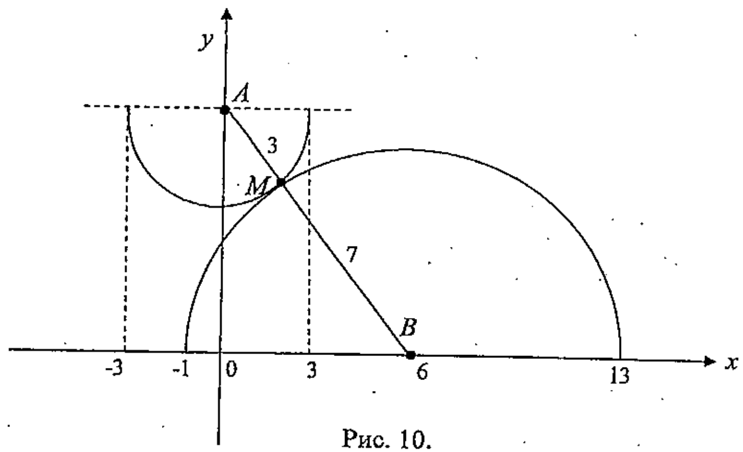


Рис. 10.

Случай 2. Полуокружность $y = a - \sqrt{9 - x^2}$ расположена между крайними положениями, изображенными на рис. 11 и рис. 12.

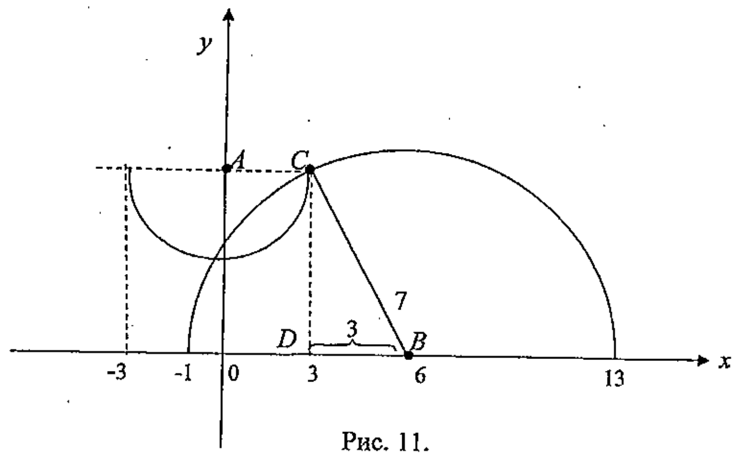


Рис. 11.

Для рис. 11 найдем OA: $CB = 7$; $DB = 3$; $OA = CD = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40}$. Следовательно, случай, изображенный на рис. 11, реализуется при $a = OA = \sqrt{40}$.

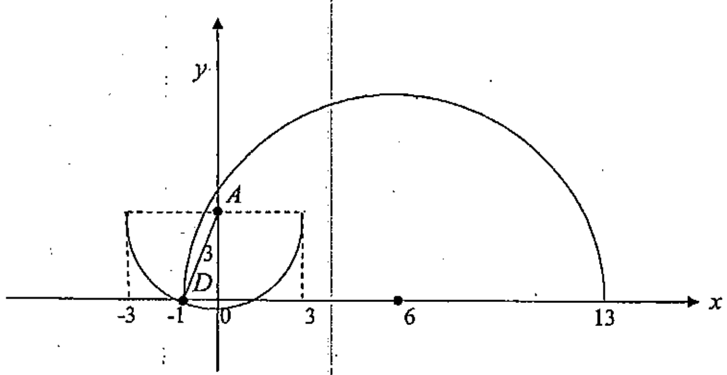


Рис. 12.

Для рис. 12 найдем OA: $AD=3$; $DO=1$; $AO=\sqrt{3^2-1^1}=\sqrt{8}$. Следовательно, случай, изображенный на рис. 12, реализуется при $a=OA=\sqrt{8}$.

Таким образом, промежуточное (между изображенными на рис. 11 и 12) положение полуокружности $y=a-\sqrt{9-x^2}$ будет при $a\in\left[\sqrt{8};\sqrt{40}\right)$.

Следовательно, уравнение (1) будет иметь единственное решение при $a\in\left[\sqrt{8};\sqrt{40}\right)\cup\{8\}$.

Ответ: $a\in\left[\sqrt{8};\sqrt{40}\right)\cup\{8\}$.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x\right)\geq\log_{\frac{1}{2}}(x+4).$$

2. Решить уравнение

$$\left(5x^2-8x-4\right)\cdot\sqrt{2x-1}=0.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{5x+4}+x=4.$$

4. Найти $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

5. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности, до высоты, опущенной на гипотенузу.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=x^2-x-4|x-2|$$

на отрезке [–5; 4].

7. Решить уравнение

$$\log_3(4\sin x)+\log_3(-\cos x)=\frac{1}{2}.$$

8. Нижним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC ($\angle B=90°$; $AB=4$; $BC=6\sqrt{3}$); $AA_1=BB_1=CC_1=4$. Точка M – середина бокового ребра AA_1. Через точки M, B_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 30°, которая пересекает ребро CC_1 в точке E. Найти CE.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_3(5-9\cos 2x-6\sin x)=\log_3(a+12\sin x)$$

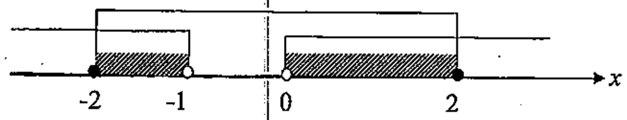
имеет хотя бы одно решение.

Решение варианта 3

Задача 1.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x)\ge\log_{\frac{1}{2}}(x+4)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x^2+x\le x+4\\x^2+x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2\le 4\\x(x+1)>0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-2\le x\le 2\\x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x\in[-2;-1)\cup(0;2]$$



Ответ: $x\in[-2;-1)\cup(0;2]$.

Задача 2.

$$(5x^2-8x-4)\cdot\sqrt{2x-1}=0\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x^2-8x-4=0\\2x-1\ge 0\end{cases}\\2x-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{2}{5}\end{array}\right.\\x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$.

Задача 3.

$$\sqrt{5x+4}+x=4\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{5x+4}=4-x\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}5x+4=(4-x)^2\\4-x\le 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2-13x+12=0\\x\le 4\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=12\end{array}\right.\\x\le 4\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=1.$$

Ответ: $x=1$.

Задача 4.

Так как $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{4}{5}\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Значит $\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{1}{2}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{-\dfrac{1}{2}-1}{1-\dfrac{1}{2}}=-3.$$

Ответ: -3.

Задача 5.

Пусть ABC – прямоугольный треугольник (рис. 13); $\angle B=90°$; $AB=15$; $BC=20$; BH – высота, опущенная на гипотенузу; O – центр вписанной окружности; K, L, M – точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Опустим перпендикуляр OD на BH. Требуется найти длину OD.

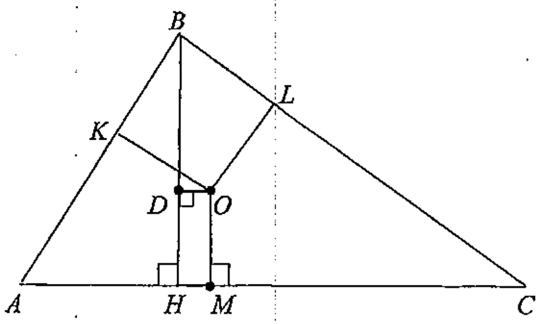


Рис. 13.

1) Найдем AC:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25.$$

2) Найдем $r = OM = OK = OL$ –радиус вписанной в треугольник окружности:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC}{\frac{1}{2}(AB + BC + AC)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20}{\frac{1}{2}(15 + 20 + 25)} \Rightarrow r = 5.$$

3) $AM = AK = AB - KB = 15 - 5 = 10 \quad (KB = r = 5)$.

4) Из подобия треугольников ABH и ABC найдем AH:

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{15^2}{25} = 9.$$

5) Теперь можно найти OD:

$$OD = HM = AM - AH = 10 - 9 = 1$$

Ответ: 1.

Задача 6.

Построим график функции $y = x^2 - x - 4|x - 2|$, где $x \in [-5; 4]$. Наличие модуля вызывает необходимость рассмотрения двух случаев.

Случай 1 $x - 2 \geq 0$. Так как $x \in [-5; 4]$, то $x \in [2; 4]$.

Тогда $y = x^2 - x - 4(x - 2) = x^2 - 5x + 8$.

Графиком этой функции будет парабола (рис. 14), ветви которой направлены вверх; $x_в = \frac{5}{2}; y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{4}; y(2) = 2; y(4) = 4$

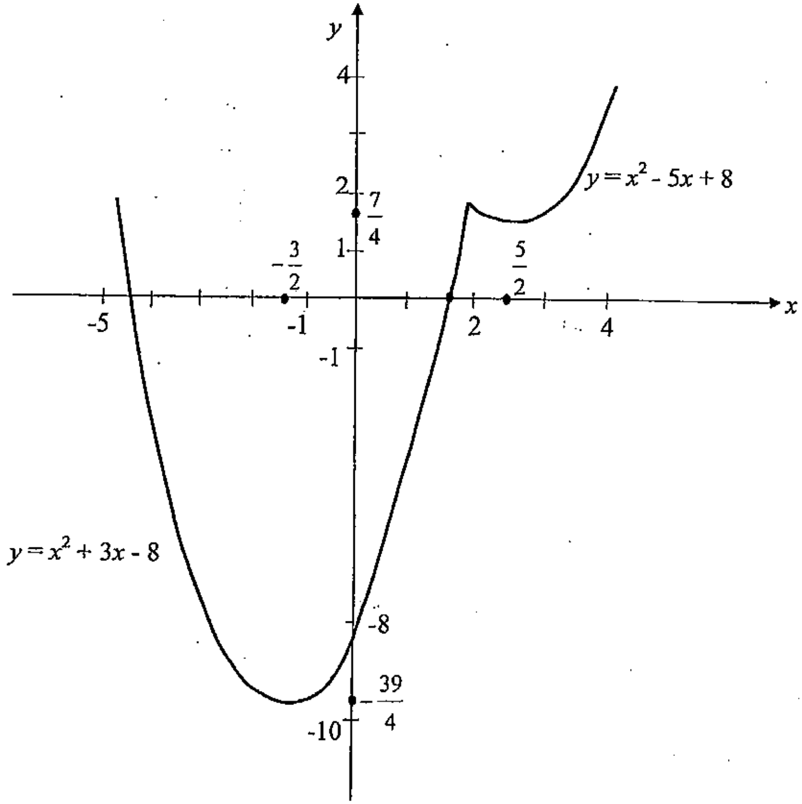


Рис. 14.

Случай 2 $x - 2 \leq 0$. Так как $x \in [-5; 4]$, то $x \in [-5; 2]$.

Тогда $y = x^2 - x + 4(x-2) = x^2 + 3x - 8$.

Графиком этой функции будет парабола (рис. 14), ветви которой направлены вверх; $x_в = -\frac{3}{2}$; $y\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{39}{4}$; $y(2) = 2$; $y(-5) = 2$.

Из графика функции видно, что

$$\max_{x\in[-5;4]} y = 4; \quad \min_{x\in[-5;4]} y = -\frac{39}{4}.$$

Ответ: $4; -\frac{39}{4}$.

Задача 7.

$$\log_3(4\sin x) + \log_3(-\cos x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4\sin x > 0 \\ -\cos x < 0 \\ \log_3(-4\sin x\cos x) = \log_3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \\ -4\sin x\cos x = \sqrt{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

Решим уравнение (1):

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right., \ n \in Z.$$

Изобразим решения уравнения на тригонометрическом круге (рис. 15).

Из полученных решений условию $\sin x > 0$ и $\cos x < 0$ удовлетворяют те, которые лежат во II четверти, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right., \ n \in Z$$

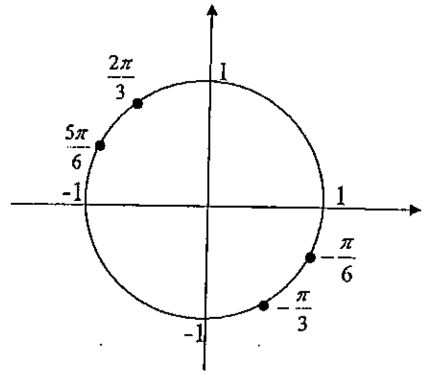


Рис. 15.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right., \ nZ.$

Задача 8.

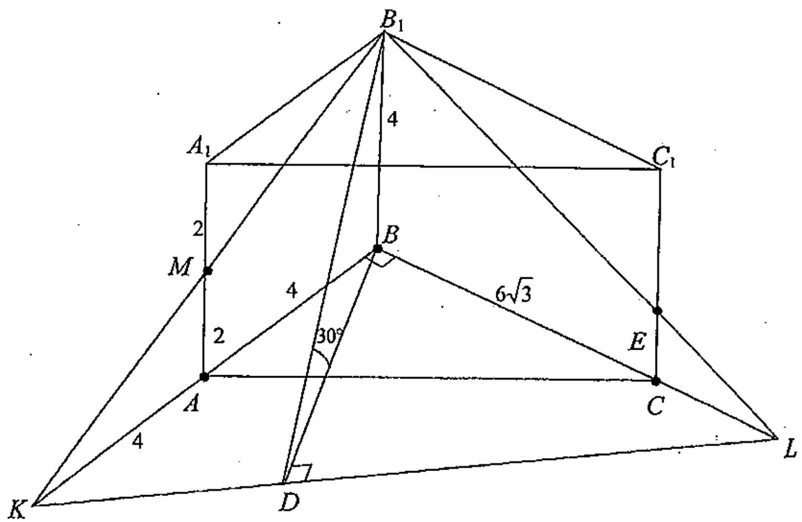


Рис. 16.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма (рис. 16); $\angle B = 90°$; $AB = 4$; $BC = 6\sqrt{3}$; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 4$; M – середина AA_1 ($AM = MA_1 = 2$). Если K – точка пересечения прямых B_1M, BA и L – точка пересечения прямых B_1E и BC; то KL – прямая, по которой пересекаются плоскость, фигурирующая в условии задачи, и плоскость основания ABC.

Проведем $BD \perp KL$, тогда по теореме о трех перпендикулярах, $B_1D \perp KL$ и $\angle B_1DB = 30°$.

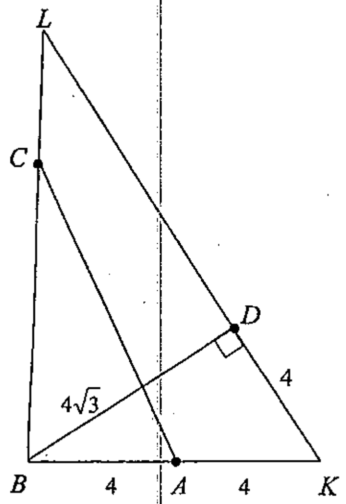


Рис. 17.

По теореме Пифагора найдем DK:

$$DK = \sqrt{BK^2 - BD^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4.$$

Поскольку $\Delta\, BDK \sim \Delta\, LBK$, то

$$\frac{BL}{BD} = \frac{BK}{DK} \Rightarrow \frac{BL}{4\sqrt{3}} = \frac{8}{4} \Rightarrow BL = 8\sqrt{3} \Rightarrow CL = BL - BC = 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Из подобия треугольников ELC и B_1LB следует, что

$$\frac{EC}{B_1C} = \frac{CL}{BL} \Rightarrow \frac{EC}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \Rightarrow EC = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 9.

$$\log_3(5 - 9\cos 2x - 6\sin x) = \log_3(a + 12\sin x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5 - 9\cos 2x - 6\sin x = a + 12\sin x \\ 5 - 9\cos 2x - 6\sin x > 0 \\ a + 12\sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 9\cos 2x - 6\sin x > 0 \\ 5 - 9\cos 2x - 18\sin x = a \end{cases}$$

После обозначения $t = \sin x$ $(t \in [-1;1])$, система перепишется в виде:

$$\begin{cases} 5 - 9(1 - 2t^2) - 6t > 0 \\ 5 - 9(1 - 2t^2) - 18t = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18t^2 - 6t - 4 > 0 \\ 18t^2 - 18t - 4 = a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9t^2 - 3t - 2 > 0 & (1) \\ 18t^2 - 18t - 4 = a & (2) \end{cases}$$

Решим неравенство (1):

$$9t^2 - 3t - 2 > 0 \Rightarrow 9\left(t + \frac{1}{3}\right)\left(t - \frac{2}{3}\right) > 0 \Rightarrow t \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right].$$

Для решения задачи необходимо определить, при каких значениях a уравнение (2) будет иметь хотя бы одно решение $t \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right]$.

Чтобы это определить, изобразим график функции $y = 18t^2 - 18t - 4$, где $t \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right]$ (рис. 18). Этим графиком будет парабола, ветви которой направлены вверх; $t_в = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; $y(-1) = 32$; $y\left(-\frac{1}{3}\right) = 4$; $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{2}$; $y\left(\frac{2}{3}\right) = -8$; $y(1) = -4$.

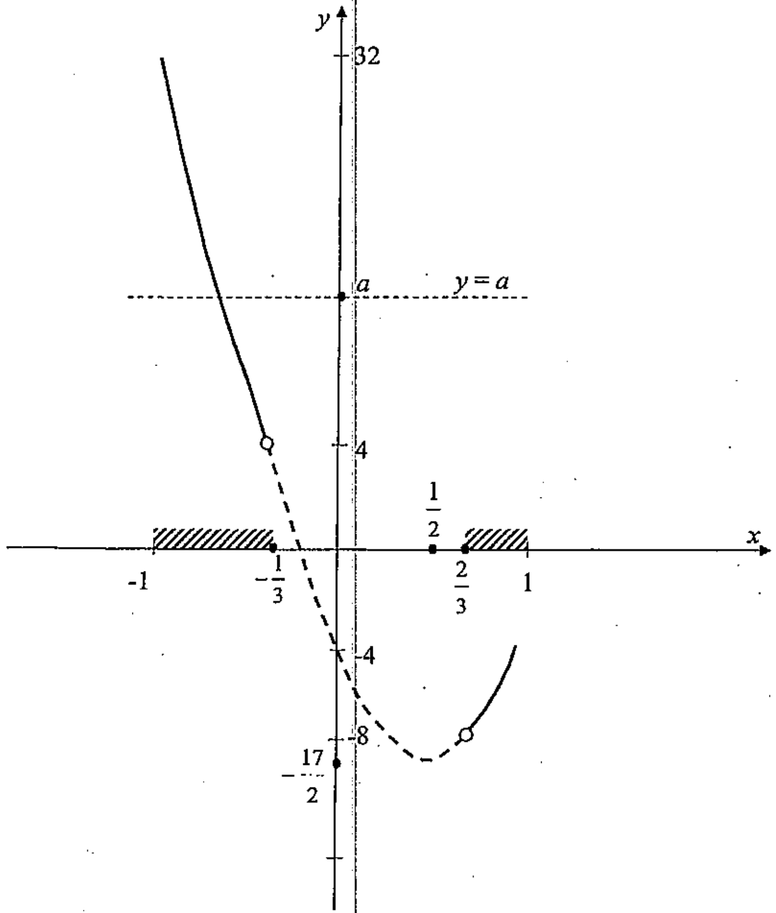


Рис. 18.

Уравнение (2) имеет хотя бы одно решение при таких значениях a, при которых горизонтальная прямая $y = a$ пересекает график функции. Это будет при $a \in (-8;-4] \cup (4;32]$ (одна из таких прямых изображена на рис. 18).

Ответ: $a \in (-8;-4] \cup (4;32]$.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\frac{1-x}{x+3} \le x+2.$$

2. Решить неравенство

$$9^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > 27.$$

3. Решить уравнение

$$\left|x^2 - 6x - 11\right| = x - 3.$$

4. Решить неравенство

$$\log_3(x-3) + \log_3(x+5) \le 2.$$

5. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Найти радиус этой окружности, если меньшее основание трапеции равно 12, а большая боковая сторона равна 17.

6. Решить уравнение

$$2\sin 2x - 11\cos x = 3\operatorname{ctg} x.$$

7. Решить уравнение

$$\log_{x^2}\left(2x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

8. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (AB = 4, AD=14, AA_1=14). Точка M – середина ребра CC_1. Через точки A_1, D, M проведена плоскость. Найти площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью.

9. Найти все значения a, при которых система неравенств

$$\begin{cases}\sqrt{x+6} \geq x \\ x^2 - ax - 24 > 0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответы:

1. $x \in [-5;-3) \cup [-1;+\infty)$;
2. $x \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{3}{2};+\infty\right)$;
3. $x \in \{7;8\}$;
4. $x \in (3;4]$;
5. $\frac{15}{2}$;
6. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n \end{array}\right.$, $n \in Z$;
7. $x = -3$;
8. $\frac{189}{2}$;
9. $a \in (-\infty;-5) \cup (-2;+\infty)$.

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$4^x - 4^{2-x} = 15.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2y + \sqrt{x} = 5 \\ x - y = -1\end{cases}.$$

3. Дано: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$.

4. Найти длину промежутка возрастания функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 24x + 3.$$

5. В треугольнике ABC дано: $AB = 3$; $AC = 4\sqrt{13}$; площадь равна 12. Найти BC, если известно, что $\angle A$ – тупой.

6. Решить неравенство

$$\log_x\left(\frac{3}{10x-3}\right) \leq -2.$$

7. Решить уравнение

$$\left|\frac{5}{2}\cos 2x - \sin x\right| + \sin x = \frac{1}{2}.$$

8. Дана правильная четырехугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной 8. Высота пирамиды равна 9. Через сторону основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания $arctg\frac{3}{4}$. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{25-x^2}+\sqrt{19+18x-x^2}=a$$

имеет единственное решение.

Ответы:

1. $x=2$;
2. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$;
3. $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{24}{7}$;
4. 6;
5. 17;
6. $\left(\frac{3}{10};\frac{1}{3}\right]\cup(1;3]$;
7. $\left[\begin{array}{l} x=(-1)^{n+1}\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}+\pi n \\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n \end{array}\right., n\in Z$;
8. 45;
9. $a\in\left[\sqrt{24};\sqrt{84}\right]\cup\{12\}$.

Вариант 6

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-x\right)\geq\log_{\frac{1}{5}}(9-x).$$

2. Решить уравнение

$$\left(4x^2+5x-6\right)\cdot\sqrt{1-3x}=0.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{7x+2}+x=6.$$

4. Найти $\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{13}}$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

5. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности, до высоты, опущенной на гипотенузу.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=-x^2+5x+4|x-3|$$

на отрезке [–1; 5].

7. Решить уравнение

$$\log_2(-\sin x)+\log_2(-\cos x)=\frac{1}{2}.$$

8. Нижним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC ($\angle B=90°$; $AB=10$; $BC=10$); $AA_1=BB_1=CC_1=12$. Точка M – середина бокового ребра AA_1. Через точки M, B_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 45°, которая пересекает ребро CC_1 в точке E. Найти CE.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_4(3\cos 2x + \cos x + 1) = \log_4(a + 5\cos x),$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответы:

1. $x \in [-3; 0) \cup (1; 3]$;
2. $x \in \left\{-2; \frac{1}{3}\right\}$;
3. $x = 2$;
4. $-\frac{1}{5}$;
5. $\frac{14}{13}$;
6. $\frac{49}{4}, 6$;
7. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi n \\ x = \frac{17\pi}{12} + 2\pi n \end{array}\right., \ n \in Z$;
8. 4;
9. $a \in \left(-\frac{5}{2}; 0\right] \cup \left(\frac{10}{3}; 8\right]$.