УДК 511

О геометрии кубических полей Галуа[1]

Ю.Ю. Кочетков

1. Введение

Мы будем изучать кубические поля Галуа. Такое поле является полем разложения неприводимого многочлена $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$, дискриминант которого полный квадрат. Пусть α — вещественный корень многочлена p. Так как два других корня p принадлежат полю $\mathbb{Q}(\alpha)$, то все корни нашего многочлена вещественны. Заменяя x на $x - a_2/3$, приведем наш многочлен к виду $x^3 + b_1x + b_0$. А заменяя далее x на x/d_1d_0, где d_1 и d_0 — знаменатели дробей b_1 и b_0, приведем его к виду $x^3 + kx + l \in \mathbb{Z}[x]$. Дискриминант такого многочлена равен $-4k^3 - 27l^2$. Следовательно, $k < 0$. Заменяя x на $-x$, если это необходимо, мы можем считать, что наш многочлен имеет вид $x^3 - kx + l$, где k, l — целые положительные числа. У такого многочлена Галуа два корня положительны, а один отрицателен.

Вот список кубических многочленов Галуа $p(x) = x^3 - kx + l \in \mathbb{Z}[x]$, $0 < k, l < 50$:

1. $x^3 - 3x + 1$;	5. $x^3 - 13x + 13$;	9. $x^3 - 21x + 28$;	13. $x^3 - 37x + 37$;
2. $x^3 - 7x + 7$;	6. $x^3 - 19x + 19$;	10. $x^3 - 21x + 35$;	14. $x^3 - 39x + 19$;
3. $x^3 - 9x + 9$;	7. $x^3 - 21x + 7$;	11. $x^3 - 27x + 27$;	15. $x^3 - 39x + 26$;
4. $x^3 - 12x + 8$;	8. $x^3 - 21x + 17$;	12. $x^3 - 21x + 37$;	16. $x^3 - 49x + 49$.

Различных полей в этом списке значительно меньше — два многочлена Галуа задают одно и то же поле, если в поле разложения первого многочлена содержится корень второго. Иными словами, пусть p и q — два кубических многочлена Галуа и α — корень многочлена p. Если некоторое число вида $r_2\alpha^2 + r_1\alpha + r_0$, $r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, является корнем многочлена q, то поля разложения многочленов p и q совпадают.

Обозначим через K_i поле, определяемое многочленом p_i с номером i (в нашем списке выше). Тогда $K_1 = K_3 = K_4 = K_8 = K_{11} = K_{12} = K_{14}$, $K_2 = K_7 = K_{16}$. Иными словами, в нашем списке 8 попарно различных полей: $K_2, K_3, K_5, K_6, K_9, K_{10}, K_{13}, K_{15}$.

Определение. Кубическое поле Галуа K мы будем называть *регулярным*, если существует элемент $\beta \in K$ такой, что его минимальный многочлен имеет вид $x^3 - kx + k$, где k — целое положительное число. Если такого элемента не существует, то поле K мы будем называть *нерегулярным*.

Замечание. Поле K_{10} регулярно: пусть $p_{10}(\alpha) = 0$, тогда элемент $-\alpha^2 - \alpha + 14$ является корнем многочлена $x^3 - 63x + 63$.

Пусть $x^3 - kx + k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$, — многочлен, задающий регулярное поле Галуа. Так как его дискриминант $4k^3 - 27k^2$ — полный квадрат, то $4k - 27 = m^2$. Следовательно, $m = 2n + 1$ и $k = n^2 + n + 7$, $n \geqslant 0$. Таким образом, если $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, то $k = 7, 9, 13, 19, 27, 37, 49$, и 63, соответственно. Через RF_n мы будем обозначать регулярное поле, заданное многочленом $x^3 - (n^2 + n + 7)x + n^2 + n + 7$.

Пусть K — кубическое поле Галуа. Элемент $u \in K$ мы будем называть *вполне положительным*, если он сам и элементы, сопряженные ему, положительны. Нас будут интересовать *целые* вполне положительные элементы поля K. Они образуют полугруппу по сложению в K, которое мы будем рассматривать как трехмерное пространство над $\mathbb{Q}$. Пусть C — выпуклая оболочка множества целых вполне положительных элементов. Она является выпуклым многогранным телом в K. Граница $\Gamma(C)$ тела C —- это бесконечный выпуклый многогранник. Группа E_+ вполне положительных единиц поля K действует на C и, в частности, на $\Gamma(C)$. (Мультипликативная группа единиц поля K является прямым произведением свободной абелевой группы ранга два на группу $\{-1, 1\}$ [3].) Фактор $\Gamma(C)/E_+$ — это тор. Задача о структуре фундаментальной области действия E_+ на $\Gamma(C)$ изучалась в работе [2]. Она является переформулировкой задачи В.И. Арнольда о „парусах“ (см. напр. [1]). Наша цель — описать структуру фундаментальной области O этого действия для регулярных полей из нашего списка и сформулировать гипотезу о структуре такой области для произвольного регулярного поля.

2. Результаты вычислений

Поле RF_0 (поле K_2). Через α здесь и далее будет обозначаться некоторый корень многочлена $p(x) = x^3 - nx + n$ (здесь $n = 7$). Другие два корня — это элементы $3\alpha^2 + 4\alpha - 14$ и $-3\alpha^2 - 5\alpha + 14$. Целые элементы поля RF_0 — это элементы вида $k\alpha^2 + l\alpha + m$, $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Элементы $y = \alpha - 1$ и $z = 2\alpha^2 + 3\alpha - 9$ являются образующими мультипликативной группы единиц, а элементы y^2 и z^2 — образующими мультипликативной группы вполне положительных единиц.

[1] Работа поддержана РФФИ, грант № 04-01-00647.

Целый элемент $k\alpha^2+l\alpha+m$ вполне положителен, если $k\alpha_1^2+l\alpha_1+m>0$, $k\alpha_2^2+l\alpha_2+m>0$ и $k\alpha_3^2+l\alpha_3+m>0$, где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ — корни многочлена p ($\alpha_1\approx-3.05$, $\alpha_2\approx1.36$, $\alpha_3\approx1.69$). Здесь и далее целые точки $k\alpha^2+l\alpha+m\in\Gamma(C)$ мы будем изображать их проекциями на плоскость (k,l).

Фундаментальная область O состоит из двух треугольников Δ_1 и Δ_2 с вершинами $\Delta_1=\{1,y^{-2}z^{-4},y^{-2}z^{-2}\}$ и $\Delta_2=\{1,y^{-2}z^{-4},z^{-2}\}$ (на плоскости (k,l) вершины этих треугольников имеют следующие координаты $\Delta_1:\{(0,0),(-2,-3),(0,-1)\}$ и $\Delta_2:\{(0,0),(0,-1),(-3,-4)\}$). Внутри треугольников и на их сторонах других целых точек нет. Умножение на z^2 отождествляет сторону $\{y^{-2}z^{-4},z^{-2}\}$ со стороной $\{y^{-2}z^{-2},1\}$, а умножение на y^2z^2 отождествляет сторону $\{y^{-2}z^{-2},y^{-2}z^{-4}\}$ со стороной $\{1,z^{-2}\}$.

Поле RF_1 (поле K_3). Другие два корня многочлена $p(x)=x^3-9x+9$ — это $\alpha^2+\alpha-6$ и $-\alpha^2-2\alpha+6$. Целые элементы поля RF_1 имеют вид $k\alpha^2/3+l\alpha+m$, $k,l,m\in\mathbb{Z}$. Элементы $y=\alpha-1$ и $z=-\alpha^2/3+1$ являются образующими мультипликативной группы единиц, а элементы y^2 и z^2 — образующими мультипликативной группы вполне положительных единиц.

Фундаментальная область O состоит из двух треугольников Δ_1 и Δ_2 с вершинами $\Delta_1=\{1,z^2,y^2z^{-2}\}$ и $\Delta_2=\{1,y^2z^{-2},y^2z^{-4}\}$ (на плоскости (k,l) вершины этих треугольников имеют следующие координаты $\Delta_1:\{(0,0),(1/3,-1),(2/3,1)\}$ и $\Delta_2:\{(0,0),(2/3,1),(4/3,3)\}$). Кроме того, в плоскости треугольника Δ_1 есть целая точка $\alpha^2/3$ (т.е. точка с (k,l) координатами $(1/3,0)$). Эта точка находится в центре треугольника (в точке пересечения медиан), т.е. в точке с барицентрическими координатами $(1/3,1/3,1/3)$. Внутри треугольников и на их сторонах других целых точек нет.

Поле RF_2 (поле K_5). Другие два корня многочлена $p(x)=x^3-13x+13$ — это $3\alpha^2/5+2\alpha/5-26/5$ и $-3\alpha^2/5-7\alpha/5+26/5$. Целые элементы поля RF_2 имеют вид $k\alpha^2+l\alpha+m+d(\alpha^2+4\alpha+3)/5$, $k,l,m\in\mathbb{Z}$, $d=0,1,2,3,4$. Элементы $y=(-\alpha^2+\alpha+7)/5$ и $z=(-\alpha^2-4\alpha+7)/5$ являются образующими мультипликативной группы единиц, а элементы y^2 и z^2 — образующими мультипликативной группы вполне положительных единиц.

Фундаментальная область O состоит из двух треугольников Δ_1 и Δ_2 с вершинами $\Delta_1=\{1,y^2,z^{-2}\}$ и $\Delta_2=\{1,y^2,y^2z^2\}$ (на плоскости (k,l) вершины этих треугольников имеют следующие координаты $\Delta_1:\{(0,0),(0,-1),(-7/5,-8/5)\}$ и $\Delta_2:\{(0,0),(0,-1),(2/5,-7/5)\}$). Кроме того, в плоскости треугольника Δ_1 есть три целых точки

$$A=(-4\alpha^2-6\alpha+53)/5,\quad B=(-\alpha^2-4\alpha+22)/5,\quad C=(-2\alpha^2-3\alpha+29)/5.$$

Их барицентрические координаты таковы:

$$A=\frac{1}{7}\,1+\frac{2}{7}\,y^2+\frac{4}{7}\,z^{-2},\quad B=\frac{2}{7}\,1+\frac{4}{7}\,y^2+\frac{1}{7}\,z^{-2},\quad C=\frac{4}{7}\,1+\frac{1}{7}\,y^2+\frac{2}{7}\,z^{-2}.$$

Точки $1,C,A$ лежат на одной прямой, причем точка C — середина отрезка $[1,A]$. Точки y^2,B,C лежат на одной прямой, причем точка B — середина отрезка $[y^2,C]$. Точки z^{-2},A,B лежат на одной прямой, причем точка A — середина отрезка $[z^{-2},B]$. Прямые AB, BC и CA делят стороны треугольника Δ_1 в отношении 2:1. Внутри треугольников и на их сторонах других целых точек нет.

Поле RF_3 (поле K_6). Другие два корня многочлена $p(x)=x^3-19x+19$ — это $3\alpha^2/7+\alpha/7-38/7$ и $-3\alpha^2/7-8\alpha/7+38/7$. Целые элементы поля RF_2 имеют вид $k\alpha^2+l\alpha+m+d(\alpha^2+5\alpha+6)/7$, $k,l,m\in\mathbb{Z}$, $d=0,1,2,3,4,5,6$. Элементы $y=(-\alpha^2+2\alpha+1)/7$ и $z=(-\alpha^2-5\alpha^2/3+1)/7$ являются образующими мультипликативной группы единиц, а элементы y^2 и z^2 — образующими мультипликативной группы вполне положительных единиц.

Фундаментальная область $O\subset\Gamma(C)$ состоит из двух треугольников Δ_1 и Δ_2 с вершинами $\Delta_1=\{1,y^{-2}z^{-2},z^{-2}\}$ и $\Delta_2=\{1,y^2,z^{-2}\}$ (на плоскости (k,l) вершины этих треугольников имеют следующие координаты $\Delta_1:\{(0,0),(1/7,-9/7),(-9/7,-10/7)\}$ и $\Delta_2:\{(0,0),(1/7,-9/7),(3/7,-13/7)\}$). Кроме того, в плоскости треугольника Δ_1 есть шесть целых точек

$$\begin{aligned}
A=&\frac{1}{7}\,(-6\alpha^2-9\alpha+118) \qquad & B=&\frac{1}{7}\,(-3\alpha^2-8\alpha+73) \qquad & C=&-\alpha+4\\
D=&\frac{1}{7}\,(-4\alpha^2-6\alpha+81) \qquad & E=&\frac{1}{7}\,(-\alpha^2-5\alpha+36) \qquad & F=&\frac{1}{7}\,(-2\alpha^2-3\alpha+44).
\end{aligned}$$

Точки 1, F, D и A находятся на одной прямой, причем точка F делит отрезок $[1,A]$ в отношении 1:2, а точка D делит тот же отрезок в отношении 2:1. То же самое справедливо для точек $y^{-2}z^{-2}$, A, B и C, и для точек z^{-2}, C, E и F. Другими словами, треугольник BDE является срединным треугольником треугольника ACF. Барицентрические координаты точек A, C и F таковы:

$$A=\frac{1}{13}\,1+\frac{3}{13}\,z^{-2}+\frac{9}{13}\,y^{-2}z^{-2},\quad C=\frac{3}{13}\,1+\frac{9}{13}\,z^{-2}+\frac{1}{13}\,y^{-2}z^{-2},\quad F=\frac{9}{13}\,1+\frac{1}{13}\,z^{-2}+\frac{3}{3}\,y^{-2}z^{-2}.$$

Прямые AC, CF и FA делят стороны треугольника Δ_1 в отношении 3:1. Внутри треугольников и на их сторонах других целых точек нет.

3. Гипотеза

В этом разделе будет сформулирована гипотеза о строении фундаментальной области в случае регулярного поля.

Лемма 1. *Многочлен $x^3 - ax + a$, где a — целое положительное число, неприводим при $a \neq 8$.*

Доказательство. Если этот многочлен приводим, он имеет целый корень x_0: $x_0^3 - ax_0 + a = 0$. Мы видим, что если простое число q делит a, то q делит и x_0, и обратно, если простое число q делит x_0, то q делит a. Пусть $a = q^k a_1$, $x_0 = q^m x_1$, где $(q, a_1) = (q, x_1) = 1$. Тогда $q^{3m} x_1^3 - q^{k+m} a_1 x_1 + q^k a_1 = 0$. Это равенство может быть выполнено только в том случае, когда $\min(3m, k+m, k)$ встречается в списке $\{3m, m+k, k\}$ хотя бы два раза. Это означает, что $3m = k$. Так как это равенство верно для любого простого делителя числа a, то $a = b^3$, $x_0 = b$. Но из равенства $b^3 - b^4 + b^3 = 0$ следует, что $b = 2$, $a = 8$. □

Лемма 2. *Пусть α — корень многочлена $x^3 - (n^2+n+7)x + n^2 + n + 7$. Тогда другие два корня — это элементы*

$$\alpha_1 = \frac{1}{2n+1}\left(3\alpha^2 + (4-n)\alpha - (2n^2+2n+14)\right) \quad и \quad \alpha_2 = \frac{1}{2n+1}\left(-3\alpha^2 - (5+n)\alpha + 2n^2 + 2n + 14\right).$$

Элементы $e_1 = \alpha_1 - 1$, $e_2 = \alpha_2 - 1$ и $e_3 = \alpha - 1$ — единицы поля RF_n. Каждая единица вида e_i/e_j, $i \neq j$, является кубом некоторой единицы. Пусть $a_1^3 = e_1/e_2$ и $a_2^3 = e_3/e_1$. Тогда

$$a_1 = \frac{1}{2n+1}\left(\alpha^2 + (1-n)\alpha - n - 5\right), \quad a_2 = \frac{1}{2n+1}\left(\alpha^2 + (n+2)\alpha - n - 5\right).$$

Доказательство. Проверка. □

Гипотеза. *Пусть поле RF_n не совпадает ни с каким полем RF_m при $m < n$. Тогда*

- *Элементы вида*

$$k\alpha^2 + l\alpha + m + \frac{d}{2n+1}\left(\alpha^2 + (n+2)\alpha + n - 4\right), \quad k, l, m \in \mathbb{Z}, \quad d = 0, 1, \ldots, 2n$$

  и только они являются целыми элементами поля RF_n.
- *Элементы a_1 и a_2 из леммы 2 являются фундаментальными единицами, а элементы a_1^2 и a_2^2 — образующими группы вполне положительных единиц.*
- *Фундаментальная область образована двумя треугольниками Δ_1 с вершинами в точках $(1, a_1^2 a_2^2, a_2^2)$ и Δ_2 с вершинами в точках $(1, a_1^2, a_1^2 a_2^2)$. Кроме вершин в треугольниках Δ_1 и Δ_2 находится еще $n(n+1)/2$ целых точек. Это точки вида $(uA + vB + wC)/(n-1)$, где*

$$\begin{aligned} A =& \frac{1}{n^2+n+1}\left(n^2 \cdot 1 + n a_1^2 a_2^2 + a_2^2\right) = \frac{1}{2n+1}\left(\alpha^2 - (n-1)\alpha + 3n - 3\right), \\ B =& \frac{1}{n^2+n+1}\left(1 + n^2 a_1^2 a_2^2 + n a_2^2\right) = \frac{1}{2n+1}\left(n\alpha^2 - (n^2-n)\alpha + n^2 - 2n + 1\right), \\ C =& \frac{1}{n^2+n+1}\left(n \cdot 1 + a_1^2 a_2^2 + n^2 a_2^2\right) = \frac{1}{2n+1}\left(n\alpha^2 + (n^2-1)\alpha - n^2 - n + 2\right), \end{aligned}$$

  а u, v, w — целые неотрицательные числа, такие, что $u + v + w = n - 1$. Эти $n(n+1)/2$ точек лежат строго внутри треугольника Δ_1.

Замечание. Вершины треугольников Δ_1 и Δ_2 — вполне положительные единицы.

Справедливость гипотезы проверена при $n \leqslant 7$.

4. Нерегулярные поля

Рассмотрим поле $K = K_9$, заданное многочленом $p(x) = x^3 - 21x + 28$. Поле K, предположительно, нерегулярно. Пусть α — некоторый корень многочлена p, тогда элементы $\alpha^2/2 + \alpha/2 - 7$ и $-\alpha^2/2 - 3\alpha/2 + 7$ — остальные корни. Целые элементы поля K — это числа вида $k\alpha^2 + l\alpha + m + d(\alpha^2 + \alpha)/2$, $k, l, m \in \mathbb{Z}$, $d = 0, 1$. Элементы $y = -2\alpha + 3$ и $z = \alpha^2 - 5\alpha + 5$ являются образующими мультипликативной группы единиц, а элементы y^2 и z^2 — образующими мультипликативной группы вполне положительных единиц.

Фундаментальная область O в этом случае устроена гораздо сложнее, чем для рассмотренных регулярных полей. O состоит из нескольких треугольников и трех шестиугольников. Внутри шестиугольников расположены целые точки. Внешний контур области образуют вершины $A, B, \ldots, S, T$, кроме того, внутри области есть три вершины U, V, W:

$$
\begin{array}{lll}
A = -21\alpha^2/2 - 31\alpha/2 + 198, & B = -2\alpha^2 - 3\alpha + 38, & C = -6\alpha^2 - 9\alpha + 113, \\
D = -15\alpha^2/2 - 23\alpha/2 + 142, & E = -13\alpha^2/2 - 21\alpha/2 + 125, & F = -3\alpha + 11, \\
G = 3\alpha^2/2 - 23\alpha/2 + 22, & H = 5\alpha^2/2 - 27\alpha/2 + 16, & I = \alpha^2/2 - 5\alpha/2 + 3, \\
J = 3\alpha^2/2 - 15\alpha/2 + 8, & K = 17\alpha^2/2 - 87\alpha/2 + 46, & L = 2\alpha^2 - 9\alpha + 9, \\
M = 2\alpha^2 - 7\alpha + 6, & N = 3\alpha^2/2 + 9\alpha/2 - 10, & O = 8\alpha^2 + 29\alpha - 61, \\
P = 3\alpha^2/2 + 11\alpha/2 - 11, & Q = 9\alpha^2/2 + 33\alpha/2 - 34, & R = 11\alpha^2/2 + 41\alpha/2 - 40, \\
S = 9\alpha^2/2 + 35\alpha/2 - 29, & T = -3\alpha^2/2 - 3\alpha/2 + 32, & U = -\alpha^2/2 - \alpha/2 + 11, \\
V = -\alpha + 4, & W = \alpha^2/2 + 3\alpha/2 - 3. &
\end{array}
$$

Группа вполне положительных единиц действует на границу области следующим образом:

- действие единицы y^2 отождествляет участок $ABCD$ границы с участком $KLMN$, при этом $y^2(A) = N$, $y^2(B) = M$, $y^2(C) = L$ и $y^2(D) = K$;
- действие единицы y^2z^{-2} отождествляет участок $DEFG$ границы с участком $NOPQ$, при этом $y^2z^{-2}(D) = Q$, $y^2z^{-2}(E) = P$, $y^2z^{-2}(F) = O$ и $y^2(G) = N$;
- действие единицы z^{-2} отождествляет участок $GHIJK$ границы с участком $QRSTA$, при этом $z^{-2}(G) = A$, $z^{-2}(H) = T$, $z^{-2}(I) = S$, $z^{-2}(J) = R$ и $z^{-2}(K) = Q$.

Сама область состоит из треугольников $\{1, U, P\}$, $\{1, P, W\}$, $\{1, W, I\}$, $\{1, I, V\}$, $\{1, V, B\}$, $\{1, B, U\}$, $\{P, W, O\}$, $\{W, O, N\}$, $\{J, K, L\}$, $\{H, I, V\}$, $\{F, H, V\}$, $\{F, G, H\}$, $\{A, B, U\}$ и $\{A, T, U\}$ и шестиугольников $\{B, C, D, E, F, V\}$, $\{I, J, L, M, N, W\}$ и $\{P, Q, R, S, T, U\}$.

Список литературы

(1) Арнольд В.И. Задачи семинара 2003-2004, М., МЦНМО, 2005.
(2) Tsuchihashi H. Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities. Tohoku Math. J., Ser. 2, 1983, V. 35(4), 607-639.
(3) Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел, М., Наука, 1985.