

Laumon 空間の幾何学

Michael Finkelberg

(訳／柳田 伸太郎)

1. 基本的性質

1.1 歴史的背景

C を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された非特異射影曲線とする. $K := \mathbb{F}_q(C)$ を C 上の有理関数体とし, A を K のアデール環とする. Langlands プログラムは $GL_n(A)$ の $L^2(GL_n(A)/GL_n(K))$ 上の表現を研究するものである. A. Weil の考察により, $GL_n(A)/GL_n(K)$ は C 上の階数 n のベクトル束にレベル構造を付加したもののモジュライ・スタックの点の集合と思える. $\text{Bun}_n(C)$ で C 上の階数 n のベクトル束のモジュライ・スタックを表すことにすると, 特に $L^2(GL_n(A)/GL_n(K))$ の球関数部分は $\text{Bun}_n(C)$ 上の関数のなす空間と思える. 1970 年代, V. Drinfeld は幾何学的 Langlands プログラムを立ち上げたが, そこでは A. Grothendieck の function-sheaf dictionary に従って $\text{Bun}_n(C)$ 上の関数が構成可能層の茎での Frobenius 写像の跡と見なされている. この考え方に基づいて $GL_n(A)$ の場合の Langlands 相互律の証明が得られている. 幾何学的 Langlands プログラムの大切なポイントとして, 関数に対する自然な操作 (例えば積分) は全て構成可能層 (の複体) に対する幾何学的操作に翻訳できる一方で, 幾何学的操作には関数の世界では得られない非自明なもの (例えば Goresky-MacPherson 拡大や消滅輪体) が含まれる, という事が挙げられる.

$GL_n(A)/GL_n(K)$ 上の保型的 Hecke 固有函数

の例として Eisenstein 級数がある. 対応する層は $\text{Bun}_B(C)$ から $\text{Bun}_n(C)$ への順像を用いて定義される. ここで $\text{Bun}_B(C)$ は C 上の階数 n のベクトル束に (完全) 旗構造を入れたもの達のモジュライ・スタックである. 射 $\varpi : \text{Bun}_B(C) \rightarrow \text{Bun}_n(C)$ は固有ではないので順像も自己双対ではないが, この事が Eisenstein 級数の満たす函数等式の複雑さに反映されている. V. Drinfeld は 1980 年代初頭 ϖ の相対コンパクト化を発見し, それとは独立に G. Laumon は 1980 年代後半に別の ϖ の相対コンパクト化を発見した. 前者の利点は GL_n の代りに任意の簡約群 G で考えても意味がある事があり, 後者の利点は非特異性にある. (実は後者は前者の特異点の small resolution になっている.)

本稿では Laumon によるコンパクト化空間に関する研究のうちのごく一部分を扱う. 底曲線 C が射影直線 $\mathbf{C}$ の場合, $\text{Bun}_n(\mathbf{C})$ は階数 n の自明束からなる開部分スタックを持つ. この部分スタック上での ϖ のファイバーは非特異射影多様体になすが, それが我々の議論における主人公である. 以下では基礎体は複素数体 $\mathbb{C}$ とする.

1.2 局所 Laumon 空間と大域 Laumon 空間

$\mathbf{C}$ 上の座標 z を一つ固定し, $v(z) = v^{-2}z$ で定まる $\mathbf{C}$ 上への $\mathbb{C}^*$ の作用を考える. 固定点集合は $\mathbf{C}^{\mathbb{C}^*} = \{0, \infty\}$ となる.

n 次元ベクトル空間 W を考え, $w_1, \dots, w_n$ をその基底とする. 附随する GL_n の極大トーラスを $T \subset G = GL_n \subset \text{Aut}(W)$ と記す. 更にその 2^n

重被覆 $\tilde{T}$ を考え、以下の様に W に作用させる：
 $\tilde{T} \ni \underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$ について $\underline{t}(w_i) = t_i^2 w_i$. G の旗多様体を $\mathcal{B}$ と記す.

$(n-1)$ 組の非負整数 $\underline{d} = (d_1, \dots, d_{n-1})$ に対し、Laumon の quasiflag の空間 $\mathcal{Q}_{\underline{d}}$ を本稿では **大域 Laumon 空間** と呼ぶことにする. これは局所自由部分層による旗

$$0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \dots \subset \mathcal{W}_{n-1} \subset \mathcal{W} = W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$$

であって $\text{rank}(\mathcal{W}_k) = k$ かつ $\deg(\mathcal{W}_k) = -d_k$ となるもの達のモジュライ・スタックであった. 詳細は文献 9) の 4.2 節を参照して欲しい.

$\mathcal{Q}_{\underline{d}}$ は次元 $2d_1 + \dots + 2d_{n-1} + \dim \mathcal{B}$ の非特異射影多様体であることが知られている. 詳しくは文献 8) の 2.10 節を参照されたい.

$\mathcal{Q}_{\underline{d}}$ の局所閉部分多様体 $\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \subset \mathcal{Q}_{\underline{d}}$ ($\infty \in \mathbf{C}$ に基点を持つ quasiflag の空間. 本稿では **局所 Laumon 空間** と呼ぶ.) も考える. $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ がパラメトライズするのは旗

$$0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \dots \subset \mathcal{W}_{n-1} \subset \mathcal{W} = W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$$

であって, $\mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}$ が $\infty \in \mathbf{C}$ の近傍で部分ベクトル束であり, 更に ∞ での $\mathcal{W}_i$ のファイバーが部分ベクトル空間 $\text{Span}\langle w_1, \dots, w_i \rangle \subset W$ と一致するもの達である.

$\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ は次元 $2d_1 + \dots + 2d_{n-1}$ の非特異準射影多様体である事が知られている.

1.3 固定点集合

群 $G \times \mathbf{C}^*$ は $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ に自然に作用し, 群 $\tilde{T} \times \mathbf{C}^*$ は $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ に自然に作用する. $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ 上の $\tilde{T} \times \mathbf{C}^*$ 作用の固定点集合は有限である. その記述の仕方を参考文献 5) の 2.11 節に従って説明する.

$\tilde{\underline{d}}$ を非負整数の組 $(d_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n-1}$ であって $\sum_{j=1}^i d_{ij} = d_i$ かつ $j \leq k \leq i$ なら $d_{kj} \geq d_{ij}$ となるものとする. 各 $\tilde{\underline{d}}$ には次の記述で与えられる $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ 上の $\tilde{T} \times \mathbf{C}^*$ 固定点に対応する.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{11} \cdot 0)w_1, \\ \mathcal{W}_2 &= \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{21} \cdot 0)w_1 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{22} \cdot 0)w_2, \\ &\dots \dots \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{n-1} &= \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,1} \cdot 0)w_1 \\ &\oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,2} \cdot 0)w_2 \\ &\oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,n-1} \cdot 0)w_{n-1}. \end{aligned}$$

この固定点を以降では $[\tilde{\underline{d}}]$ と記すことにする.

1.4 対応

$1 \leq i \leq n-1$ なる自然数 i と非負整数の組 $\underline{d} = (d_1, \dots, d_{n-1})$ に対し, $\underline{d} + i := (d_1, \dots, d_i + 1, \dots, d_{n-1})$ と定義する. 対応 $\mathbf{E}_{\underline{d},i} \subset \mathcal{Q}_{\underline{d}} \times \mathcal{Q}_{\underline{d}+i}$ を次の条件を満たす旗の対 $(\mathcal{W}_{\bullet}, \mathcal{W}'_{\bullet})$ 達のなす部分多様体として定義する: $j \neq i$ なら $\mathcal{W}_j = \mathcal{W}'_j$, 及び $\mathcal{W}'_i \subset \mathcal{W}_i$. つまり $\mathbf{E}_{\underline{d},i}$ は局所自由層の旗

$$\begin{aligned} 0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \dots \subset \mathcal{W}_{i-1} \subset \mathcal{W}'_i \\ \subset \mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}_{i+1} \subset \dots \subset \mathcal{W}_{n-1} \subset \mathcal{W} \end{aligned} \quad (1)$$

であって, $k \neq i$ なら $\text{rank}(\mathcal{W}_k) = k$, $\deg(\mathcal{W}_k) = -d_k$ 及び $\text{rank}(\mathcal{W}'_i) = i$, $\deg(\mathcal{W}'_i) = -d_i - 1$ を満たすもの達のモジュライ空間である. 詳しくは文献 5) の 3.1 節を参照して欲しい.

文献 8) の 2.10 節より, $\mathbf{E}_{\underline{d},i}$ は次元 $2d_1 + \dots + 2d_{n-1} + \dim \mathcal{B} + 1$ の非特異射影多様体である.

以下 $\mathbf{p}$ 及び $\mathbf{q}$ で自然な射影 $\mathbf{E}_{\underline{d},i} \rightarrow \mathcal{Q}_{\underline{d}}$ 及び $\mathbf{E}_{\underline{d},i} \rightarrow \mathcal{Q}_{\underline{d}+i}$ を記す. また射 $\mathbf{r} : \mathbf{E}_{\underline{d},i} \rightarrow \mathbf{C}$ を次の様に定義する:

$$\begin{aligned} (0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \dots \subset \mathcal{W}_{i-1} \subset \mathcal{W}'_i \\ \subset \mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}_{i+1} \subset \dots \subset \mathcal{W}_{n-1} \subset \mathcal{W}) \\ \longmapsto \text{supp}(\mathcal{W}_i / \mathcal{W}'_i). \end{aligned}$$

対応 $\mathbf{E}_{\underline{d},i}$ には, (1) で表される点でのファイバーが $\Gamma(\mathbf{C}, \mathcal{W}_i / \mathcal{W}'_i)$ で与えられる自然な直線束 L_i が附随する.

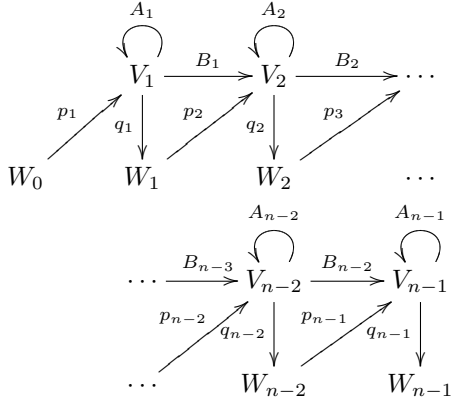
最後に, 転置してできる対応を ${}^T\mathbf{E}_{\underline{d},i} \subset \mathcal{Q}_{\underline{d}+i} \times \mathcal{Q}_{\underline{d}}$ と記すことにする.

$\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \subset \mathcal{Q}_{\underline{d}}$ に制限することで, 対応 $\mathbf{E}_{\underline{d},i} \subset \mathfrak{Q}_{\underline{d}} \times \mathfrak{Q}_{\underline{d}+i}$ とその上の直線束 L_i 及び自然な射 $\mathbf{p} : \mathbf{E}_{\underline{d},i} \rightarrow \mathfrak{Q}_{\underline{d}}$, $\mathbf{q} : \mathbf{E}_{\underline{d},i} \rightarrow \mathfrak{Q}_{\underline{d}+i}$, $\mathbf{r} : \mathbf{E}_{\underline{d},i} \rightarrow \mathbf{C} - \{\infty\}$ が得られる. 転置対応 ${}^T\mathbf{E}_{\underline{d},i} \subset \mathfrak{Q}_{\underline{d}+i} \times \mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ も定義できる. ${}^T\mathbf{E}_{\underline{d},i}$ は次元 $2d_1 + \dots + 2d_{n-1} + 1$ の非特異準射影多様体である.

1.5 籠による記述

籠による Ω_d の記述法は有用で、例えば Drinfeld コンパクト化の正規性の証明に役立つ。

以下の様な手鋸籠 Q を考えよう：



線形写像達に課す関係式は $A_{k+1}B_k - B_kA_k + p_{k+1}q_k = 0$ ($k = 1, \dots, n-2$) である。 $\dim W_0 = \dots = \dim W_{n-1} = 1$ かつ $\dim V_k = d_k$ ($k = 1, \dots, n-1$) の場合に、これらの関係式を満たす線形写像達 $(A_\bullet, B_\bullet, p_\bullet, q_\bullet)$ の集合を M_d と記す。 $M_d^s \subset M_d$ を次の安定条件を満たすもの達からなる部分集合とする： $A_\bullet$ と $B_\bullet$ の作用で保たれかつ $p_\bullet(W_\bullet)$ を含むような次数付き真部分空間 $V'_k \subset V_k$ は存在しない。群 $G_d := \prod_{k=1}^n GL(V_k)$ は自然に M_d に作用する。この作用は M_d^s 上で自由であり、商 M_d^s/G_d は代数多様体の構造を持ち Ω_d に同型である。詳しくは文献 6) 及び 11) を見て欲しい。

2. 同変 K 群への量子ループ代数の作用

この節の内容は文献 1) と 13) に従う。直線束 L_i による捩りが入った対応 $E_{d,i}$ は局所 Laumon 空間の局所化同変 K 群の直和上の作用素と思える。この作用素達は量子ループ代数 $U_v(\mathbf{Lsl}_n)$ (の Drinfeld new realization) の作用を生成する。これは中島啓による籠多様体の同変 K 群への量子アフィン代数の作用の構成¹⁰⁾ に非常に良く似ている。得られた作用を有限部分 $U_v(\mathbf{sl}_n) \subset U_v(\mathbf{Lsl}_n)$ に制限すれば、考えている加群は普遍 Verma 加群に一致する。局所化同変 K 群の固定点に対応した

基底は $U_v(\mathbf{sl}_n)$ 上の普遍 Verma 加群の Gelfand-Tsetlin 基底に他ならない。同変 K 群の代りに通常同変コホモロジー群を考えれば、同じ対応達から Yangian $Y(\mathbf{sl}_n)$ の作用が得られる⁴⁾。

2.1 同変 K 群

' M で局所 Laumon 空間の $(\tilde{T} \times \mathbb{C}^*)$ 同変 (複素化) K 群の直和を記す：

$$'M := \bigoplus_d K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\Omega_d).$$

これは 1 点の同変 K 群

$$K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt) = \mathbb{C}[T \times \mathbb{C}^*] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, v]$$

上の加群になる。' M の局所化とは

$$M := 'M \bigotimes_{K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt)} \text{Frac}(K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt))$$

のことである。 M には自然な次数付け

$$M = \bigoplus_d M_d,$$

$$M_d := K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\Omega_d) \bigotimes_{K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt)} \text{Frac}(K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt))$$

が入る。

2.2 M 上の $U_v(\mathbf{Lsl}_n)$ の作用

$0 \leq i \leq n$ なる自然数 i に対し $\mathcal{W}_i$ で $\Omega_d \times \mathbf{C}$ 上の tautological な i 次元ベクトル束を記す。Künneth 公式により

$$K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\Omega_d \times \mathbf{C}) = K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\Omega_d) \otimes 1 \oplus K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\Omega_d) \otimes \tau$$

となる。ここで $\tau \in K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{C})$ は $\mathcal{O}(1)$ の同変 K 群での類である。

この分解より外積 $\Lambda^j(\mathcal{W}_i)$ を

$$\Lambda^j(\mathcal{W}_i) = \Lambda_{(j)}^j(\mathcal{W}_i) \otimes 1 + \Lambda_{(j-1)}^j(\mathcal{W}_i) \otimes \tau$$

と表せる。ここで $\Lambda_{(j)}^j(\mathcal{W}_i)$ と $\Lambda_{(j-1)}^j(\mathcal{W}_i)$ は共に $K^{\tilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\Omega_d)$ の元である。

次に $0 \leq m \leq n$ なる自然数 m に対して Ω_d の同変 K 群に係数を持つ級数 $\mathbf{b}_m(z)$ を次の様に定義する：

$$\mathbf{b}_m(z) := 1 + \sum_{1 \leq j \leq m} (-z)^{-j} \left(\Lambda_{(j)}^j(\underline{\mathcal{W}}_m) - v \Lambda_{(j-1)}^j(\underline{\mathcal{W}}_m) \right).$$

特に $\mathbf{b}_0(z) := 1$ と約束する.

v で $\tilde{T} \times \mathbb{C}^* : (t, v) \mapsto v$ の指標を記す. 対応 $\mathbf{E}_{\underline{d}, k}$ 上の同変直線束 $L'_k := v^k L_k$ を考える. L'_k と L_k は直線束としては同型であり, L'_k の同変構造は L_k の同変構造を指標 v^k で振ったものである.

更に作用素

$$e_{k,r} := t_{k+1}^{-1} v^{d_{k+1}-d_k+1-k} \mathbf{p}_*((L'_k)^{\otimes r} \otimes \mathbf{q}^*)$$

及び

$$f_{k,r} := -t_k^{-1} v^{d_k-d_{k-1}-1+k} \mathbf{q}_*(L_k \otimes (L'_k)^{\otimes r} \otimes \mathbf{p}^*)$$

を考える. $e_{k,r} : M_{\underline{d}} \rightarrow M_{\underline{d}-k}$ 及び $f_{k,r} : M_{\underline{d}} \rightarrow M_{\underline{d}+k}$ に注意する.

そして次の様な M 上の作用素の級数を考える:

$$x_k^+(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_{k,r} z^{-r} : M_{\underline{d}} \rightarrow M_{\underline{d}-k}[[z^{\pm 1}]],$$

$$x_k^-(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{k,r} z^{-r} : M_{\underline{d}} \rightarrow M_{\underline{d}+k}[[z^{\pm 1}]].$$

また以下の級数も考える:

$$\begin{aligned} \psi_k^+(z) |_{M_{\underline{d}}} &= \sum_{r=0}^{\infty} \psi_{k,r}^+ z^{-r} \\ &:= t_{k+1}^{-1} t_k v^{d_{k+1}-2d_k+d_{k-1}-1} (\mathbf{b}_k(zv^{-k-2})^{-1} \\ &\quad \mathbf{b}_k(zv^{-k})^{-1} \mathbf{b}_{k-1}(zv^{-k}) \mathbf{b}_{k+1}(zv^{-k-2}))^+, \\ \psi_k^-(z) |_{M_{\underline{d}}} &= \sum_{r=0}^{-\infty} \psi_{k,r}^- z^{-r} \\ &:= t_{k+1}^{-1} t_k v^{d_{k+1}-2d_k+d_{k-1}-1} (\mathbf{b}_k(zv^{-k-2})^{-1} \\ &\quad \mathbf{b}_k(zv^{-k})^{-1} \mathbf{b}_{k-1}(zv^{-k}) \mathbf{b}_{k+1}(zv^{-k-2}))^-. \end{aligned}$$

ここで $()^+, ()^-$ は各々 $z = \infty, 0$ での展開を意味する. $\psi_k^{\pm}(z) |_{M_{\underline{d}}} \in M_{\underline{d}}[[z^{\mp 1}]]$ に注意する.

定理 2.3. 上で定義された M 上の作用素 $\psi_k^{\pm}(z), x_k^{\pm}(z)$ は $U_v(\mathbf{L}\mathfrak{sl}_n)$ の関係式を満たす. つまりこれらの作用素は M 上の $U_v(\mathbf{L}\mathfrak{sl}_n)$ の作用を導く.

定義 2.4. 非負整数の組 $\tilde{\underline{d}} = (d_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n-1}$ に対してウェイトの組 $(s_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n-1}$ を $s_{ij} := t_j^2 v^{-2d_{ij}}$ で定める.

命題 2.5. a) 作用素 $f_{i,r}, e_{i,r}$ の固定点基底 $\{\tilde{\underline{d}}\}$ に関する行列要素は以下の通り. ある $j \leq i$ に対し $d'_{i,j} = d_{i,j} + 1$ なら

$$\begin{aligned} f_{i,r}[\tilde{\underline{d}}, \tilde{\underline{d}}'] &= -t_i^{-1} v^{d_i-d_{i-1}-1+i} (1-v^2)^{-1} \\ &\quad \times s_{i,j} (s_{i,j} v^i)^r \\ &\quad \times \prod_{j \neq k \leq i} (1 - s_{i,j} s_{i,k}^{-1})^{-1} \\ &\quad \times \prod_{k \leq i-1} (1 - s_{i,j} s_{i-1,k}^{-1}), \end{aligned}$$

ある $j \leq i$ に対し $d'_{i,j} = d_{i,j} - 1$ なら

$$\begin{aligned} e_{i,r}[\tilde{\underline{d}}, \tilde{\underline{d}}'] &= t_{i+1}^{-1} v^{d_{i+1}-d_i+1-i} (1-v^2)^{-1} \\ &\quad \times (s_{i,j} v^{i+2})^r \\ &\quad \times \prod_{j \neq k \leq i} (1 - s_{i,k} s_{i,j}^{-1})^{-1} \\ &\quad \times \prod_{k \leq i+1} (1 - s_{i+1,k} s_{i,j}^{-1}), \end{aligned}$$

その他の $e_{i,r}, f_{i,r}$ の行列要素は全て 0.

b) 各 $\{\tilde{\underline{d}}\}$ は $\psi_i^{\pm}(z)$ の固有ベクトルであり, その固有値は

$$\begin{aligned} &t_{i+1}^{-1} t_i v^{d_{i+1}-2d_i+d_{i-1}-1} \\ &\quad \times \prod_{j \leq i} (1 - z^{-1} v^{i+2} s_{i,j})^{-1} (1 - z^{-1} v^i s_{i,j})^{-1} \\ &\quad \times \prod_{j \leq i+1} (1 - z^{-1} v^{i+2} s_{i+1,j}) \\ &\quad \times \prod_{j \leq i-1} (1 - z^{-1} v^i s_{i-1,j}). \end{aligned}$$

3. 差分方程式, q -Whittaker 関数と Macdonald 多項式

3.1 q 差分戸田方程式

以下ではトーラスの座標として $q = v^2$ 及び $z_i = t_i^2$ ($i = 1, \dots, n$) を用いる. 正則函数環 $\mathbb{C}[\Omega_{\underline{d}}]$ の指標は $(\mathbb{C}^* \times T)$ 上の有理函数 $\mathfrak{J}_{\underline{d}}(q, z)$ で表される. 自然数 $i = 1, \dots, n-1$ に対し

ω_i を $SL_n \subset G = GL_n$ の極大トーラスの基本指標とする. 不定元 $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ を用意し, $Q^d := Q_1^{d_1} \cdots Q_{n-1}^{d_{n-1}}$ と定める. そして形式的級数

$$J(q, z, Q) := \sum_{\underline{d}} Q^{\underline{d}} \mathfrak{J}_{\underline{d}},$$

$$\mathfrak{J}(q, z, Q) := J(q, z, Q) \prod_{i=1}^{n-1} Q_i^{\log \omega_i / \log q}$$

を導入する. また $k = 1, \dots, n$ に対し差分作用素

$$\begin{aligned} T_k(F(q, z, Q_1, \dots, Q_{n-1})) \\ := F(q, z, Q_1, \dots, Q_{k-2}, q^{-1}Q_{k-1}, \\ qQ_k, Q_{k+1}, \dots, Q_{n-1}) \end{aligned}$$

を考える. 但し $Q_0 := Q_{n-1}$ と約束する.

以下の定理は, 文献 1) において, 局所 Laumon 空間の局所化同変 K 群と $U_v(\mathfrak{sl}_n)$ の普遍 Verma 加群とが同一視できることの結果として示された.

定理 3.2. 作用素 $\mathfrak{S}$ を

$$\mathfrak{S} := T_1 + T_2(1 - Q_1) + \cdots + T_n(1 - Q_{n-1})$$

で定義すると

$$\mathfrak{S}\mathfrak{J}(q, z, Q) = (z_1 + \cdots + z_n)\mathfrak{J}(q, z, Q).$$

3.3 q -Whittaker 関数

上で導入した不定元 Q を $(n-1)$ 次元トーラス $\check{T}$ 上の座標と見なし, 更に $\check{T}$ を $SL_n \subset G = GL_n$ の極大トーラスの双対と思うことにする. SL_n のウェイト $\lambda \in \Lambda$ について, q^λ は $\check{T}$ の元と見なすことができる. 実際, 単純ルートを使って λ を $\lambda = a_1\alpha_1 + \cdots + a_{n-1}\alpha_{n-1}$ と表せば, $q^\lambda = Q_1^{a_1} \cdots Q_{n-1}^{a_{n-1}}$ となる. こうして差分作用素 $\mathfrak{S}$ を格子 $q^\Lambda \subset \check{T}$ 上の関数に作用させることができる. 次の命題は文献 7) で示された.

命題 3.4. 以下の性質を満たす $z \in T$ の $\mathbb{C}(q)$ 値多項式 $\Psi_\lambda(q, z)$ が唯一存在する.

- a) λ がドミナントでなければ $\Psi_\lambda(q, z) = 0$,
- b) $\Psi_0(q, z) = 1$,
- c) $\{\Psi_\lambda(q, z) \mid \lambda \in \Lambda\}$ をまとめて一つの $z \in T$ の関数 $\Psi(q, z) : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}(q)$ と見なすと

$$\mathfrak{S}\Psi(q, z) = (z_1 + \cdots + z_n)\Psi(q, z),$$

d) 多項式 $\Psi_\lambda(q, z)$ は対称.

3.5 大域 Laumon 空間上の直線束の大域切断

$\Omega_{\underline{d}}$ の点 $(0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_{n-1} \subset W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}})$ に対し次数 $(-d_i)$ の可逆部分層 $\Lambda^i \mathcal{W}_i \subset \Lambda^i W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ を考える ($i = 1, \dots, n-1$). この部分層は $\mathbb{P}\Gamma(\mathbf{C}, \Lambda^i W(d_i))$ の点と考えるので, 射影射 $\pi : \Omega_{\underline{d}} \rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\Gamma(\mathbf{C}, \Lambda^i W(d_i))$ を得る. 実は π の像は, $\mathbf{C}$ から $\mathcal{B}$ への次数 $\underline{d}$ の写像の空間の Drinfeld コンパクト化になる. SL_n の基本指標 ω_i を思い出そう. ウェイト $\lambda = l_1\omega_1 + \cdots + l_{n-1}\omega_{n-1}$ に対し $\Omega_{\underline{d}}$ 上の直線束 $\mathcal{O}(\lambda)$ を $\pi^*(\mathcal{O}(l_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{O}(l_{n-1}))$ で定義する. $\psi_\lambda(q, z)^{\underline{d}}$ を $\mathcal{O}(\lambda)$ の同変 Euler 指標 $\chi(\Omega_{\underline{d}}, \mathcal{O}(\lambda))$ とする. これは $(\mathbb{C}^* \times T)$ 上の有理関数と思える. 実は $\underline{d}$ が増大すると $\psi_\lambda(q, z)^{\underline{d}}$ の q 展開の係数が安定するので, 極限をとって関数 $\psi_\lambda(q, z)$ を定義することができる. 次に述べるのは文献 2) で定理 3.2 から導かれた定理である.

定理 3.6. $\psi_\lambda(q, z) = \Psi_\lambda(q, z)$.

3.7 Macdonald 差分作用素

この副節では 3.1 節の t 類似を考える. ここで変数 t は Laumon 空間の de Rham 複体の次数を数えるものである. まず

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_\alpha(q, t, z) &= [H^\bullet(\Omega_{\underline{d}}, \Omega_{\Omega_{\underline{d}}}^\bullet)] \\ &:= \sum_{i,j} (-1)^{i+j} t^j [H^i(\Omega_{\underline{d}}, \Omega_{\Omega_{\underline{d}}}^j)] \end{aligned}$$

と置く. ここで $[H^i(\Omega_{\underline{d}}, \Omega_{\Omega_{\underline{d}}}^j)]$ は $H^i(\Omega_{\underline{d}}, \Omega_{\Omega_{\underline{d}}}^j)$ の $(\mathbb{C}^* \times T)$ 加群としての指標, つまり $q \in \mathbb{C}^*$ と $z \in T$ の関数, を意味する. 更に既に導入してある不定元 Q を用いて

$$J(q, t, z, Q) := \sum_{\underline{d}} Q^{\underline{d}} \mathfrak{J}_{\underline{d}}(q, t, z),$$

$$\mathfrak{J}(q, t, z, Q) := J(q, t, z, Q) \prod_{i=1}^{n-1} Q_i^{\log(\omega_i) / \log q}$$

と置く. 次の定理は文献 3) で直接計算により証明された. 尚, 文献 12) は局所 Laumon 空間の局所化同変コホモロジー上の $U(\mathfrak{sl}_n)$ の作用を用いて,

次の定理のコホモロジー版の公式を導出している.

定理 3.8. 作用素 D を

$$D := \sum_{i=1}^n \prod_{j < i} \frac{1 - q^{-1} t^{i-j-1} Q_j \cdots Q_{i-1}}{1 - t^{i-j} Q_j \cdots Q_{i-1}} \\ \times \prod_{k > i} \frac{1 - q t^{k-i+1} Q_i \cdots Q_{k-1}}{1 - t^{k-i} Q_i \cdots Q_{k-1}} T_i^{-1}.$$

と定義すると,

$$D\mathfrak{J}(q, t, z, Q) = (z_1 + \cdots + z_n) \mathfrak{J}(q, t, z, Q).$$

3.9 Macdonald 多項式

Macdonald 多項式 $P_\lambda(q, t, z)$ はドミナントウェイト λ と 2 変数 q, t に依存する $z \in T$ の対称多項式であった. 次に述べる定理は文献 3) において定理 3.8 から導かれたものである.

定理 3.10. a) ウェイト $\lambda \in \Lambda$ はドミナントでないと仮定する. $j, k \in \mathbb{N}$ を固定する. この時十分大きい $\underline{d}$ に対して次が成立する.

$$H^k(Q_{\underline{d}}, \Omega_{Q_{\underline{d}}}^j \otimes \mathcal{O}(\lambda)) = 0.$$

b) 任意の $\lambda \in \Lambda$ について極限

$$\lim_{\underline{d} \rightarrow \infty} [H^\bullet(Q_{\underline{d}}, \Omega_{Q_{\underline{d}}}^\bullet \otimes \mathcal{O}(\lambda))]$$

が存在する. この極限を $H_\lambda(q, t, z)$ と記す. 主張 a) より λ がドミナントでなければ $H_\lambda = 0$ である事に注意する.

c)

$$H_0(q, t, z) = \frac{(1+t)(1+t+t^2) \cdots}{(1-t^{n-1})^2(1-t^{n-2})^4 \cdots} \\ \frac{\cdots (1+t+\cdots+t^{n-1})}{\cdots (1-t^3)^{2n-6}(1-t^2)^{2n-4}} \\ \times \frac{1}{(1-t^n)(1-t)^{n-2}}.$$

d) $\lambda = \sum l_i \omega_i$ がドミナントウェイトなら

$$H_\lambda = P_\lambda H_0 \prod_{1 \leq i \leq j \leq n-1} \frac{(t^{j-i+1}; q)_{l_i + \cdots + l_j}}{(t^{j-i} q; q)_{l_i + \cdots + l_j}}.$$

つまり H_λ は明示的に書ける因子を除いて Macdonald 多項式 P_λ と一致する.

参考文献

- 1) A. Braverman, M. Finkelberg, *Finite difference quantum Toda lattice via equivariant K-theory*, Transformation Groups **10** (2005), 363–386.
- 2) A. Braverman, M. Finkelberg, *Weyl modules and q -Whittaker functions*, arXiv:1203.1583.
- 3) A. Braverman, M. Finkelberg, J. Shiraishi, *Macdonald polynomials, Laumon spaces and perverse coherent sheaves*, arXiv:1206.3131.
- 4) B. Feigin, M. Finkelberg, A. Negut, L. Rybnikov, *Yangians and cohomology rings of Laumon spaces*, Selecta Math., New Series **17** (2011), 573–607.
- 5) M. Finkelberg, A. Kuznetsov, *Global Intersection Cohomology of Quasimaps' spaces*, Intern. Math. Res. Notices **7** (1997), 301–328.
- 6) M. Finkelberg, L. Rybnikov, *Quantization of Drinfeld zastava in type A*, arXiv:1009.0676.
- 7) A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Obladin, *On q -deformed $\mathfrak{gl}_{l+1}$ -Whittaker function. I, II*, Comm. Math. Phys. **294** (2010), 97–119, 121–143.
- 8) G. Laumon, *Un Analogue Global du Cône Nilpotent*, Duke Math. Journal **57** (1988), 647–671.
- 9) G. Laumon, *Faisceaux Automorphes Liés aux Séries d'Eisenstein*, Perspect. Math. **10** (1990), 227–281.
- 10) H. Nakajima, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, Journal of the AMS **14**, no. 1 (2001), 145–238.
- 11) H. Nakajima, *Handsaw quiver varieties and finite W -algebras*, arXiv:1107.5073.
- 12) A. Negut, *Laumon spaces and the Calogero-Sutherland integrable system*, Inv. Math. **178** (2009), 299–331.
- 13) A. Tsymbaliuk, *Quantum affine Gelfand-Tsetlin vases and quantum toroidal algebra via K -theory of affine Laumon spaces*, Selecta Math., New Series **16** (2010), 173–200.

(M. フィンケルバーグ, ロシア国立大学経済高等学校)