

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2007–2008 гг.

Под редакцией *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2008

ББК 22.25
Т78

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ),
д-р техн. наук, проф. *В. И. Сливкер* (Гипростроймост,
ПГУПС)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

**Труды семинара «Компьютерные методы в ме-
ханике сплошной среды». 2007–2008 гг. / Под ред.
Т78 А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко. — СПб.: Изд-во С.-Петерб.
ун-та, 2008. — 1xx с.
ISBN 5-288-03941-0**

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ББК 22.25

© А. Л. Смирнов, Е. Ф. Жигалко,
сост., 2008

© Издательство С.-Петербургского
университета, 2008

ISBN 5-288-03941-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

9 сентября 2008 г. открылся пятый сезон работы Межуниверситетского семинара ‘Компьютерные методы в механике сплошной среды’. Организаторам приятно отметить, что за время прошедшее от первого заседания семинара число участников и представительство учебных заведений возросло. В работе семинара принимают участие руководители научных школ профессора П.Е.Товстик, М.А. Нарбут, С.М. Бауэр, С.Б. Филиппов (СПбГУ, мат-мех), Ю.М. Даль (СПбГУ, ПМ-ПУ), А.И. Боровков, Б.А.Смольников (СПбГТУ), В.Н. Емельянов (БГТУ), П.И. Бегун (ЛЭТИ), В.И. Сливкер (Гипростроймост) и их ученики. Семинар обзавелся свой страницей в Интернете (www.seminar.student.su) и группой в Контакте (<http://vkontakte.ru/club969133>), а 25 марта 2008 г. состоялось юбилейное 50-е заседание семинара.

Несмотря на то, что сборник трудов семинара ‘Компьютерные методы в механике сплошной среды’ адресован, в основном, молодым ученым, мы сочли целесообразным, начиная с третьего выпуска, в котором была опубликована статья проф. Л.Н. Ясницкого (ПГУ), открывать Труды семинара работами ведущих ученых-механиков. В четвертый выпуск включена статья проф. П.Е. Товстика (СПбГУ) и Т.П. Товстик (ИПМ РАН), посвященную возможности применения двумерных моделей типа Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера к анизотропным пластинам. Эта статья развивает идеи, изложенные П.Е. Товстиком в докладе ‘Неклассические модели балок, пластин и оболочек’ на заседании семинара 6 ноября 2007 г..

А.Л. Смирнов и Е.Ф. Жигалко

ДВУХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ПЛАСТИН ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

П. Е. Товстик, Т. П. Товстик

В статье дается вывод двухмерной приближенной модели пластины из анизотропного материала с косой анизотропией при плоском напряженном состоянии. Показано, что использование гипотез Кирхгофа–Лява либо Тимошенко–Рейсснера о сохранении прямолинейности нормального до деформации волокна не дает удовлетворительных результатов при сравнении с асимптотическим решением трехмерных уравнений теории упругости. Различие наблюдается уже в главном члене асимптотического разложения в ряд по степеням малого параметра тонкостенности, равного отношению толщины пластины к длине волны деформации.

1. ВВЕДЕНИЕ.

Выводу двухмерных приближенных моделей пластин и оболочек из трехмерных уравнений теории упругости посвящены многочисленные исследования, из которых назовем монографии [1–3]. Ниже для задач статики и свободных колебаний обсуждаются модели Кирхгофа–Лява (КЛ) и Тимошенко–Рейсснера (ТР) в сравнении с трехмерной теорией упругости. Для трансверсально-изотропного материала указанная задача рассмотрена в [4, 5]. Здесь основное внимание уделяется случаю анизотропии общего вида. При сравнении двухмерных моделей с результатами асимптотического решения трехмерной задачи предполагается, что внешняя нагрузка, а вместе с ней и решение являются гармоническими функциями по тангенциальным координатам, что позволяет понизить порядок системы и в то же время ввести малый параметр, равный отношению толщины пластины к длине волны тангенциальной деформации. Рассмотрение ограничено случаем плоского напряженного состояния. Установлено, что использование моделей КЛ и ТР в случае

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07.01.00250а.

© П. Е. Товстик, Т. П. Товстик, 2008

анизотропии общего вида (в отличие от трансверсальной изотропии (см. [4, 5])) является некорректным, ибо даже в главных асимптотических приближениях модели КЛ и ТР дают ошибочные эквивалентные упругие модули. Предложены уточненные кинематические гипотезы, обобщающие модель ТР, принятие которых дает в главных членах совпадение результатов по двумерной и трехмерной моделям. В качестве примера рассмотрена пластина, армированная системой наклонных малорастяжимых нитей.

2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И СООТНОШЕНИЯ УПРУГОСТИ

Рассмотрим задачу о деформации (или свободных колебаниях) пластины $-\infty < x < \infty$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ из анизотропного материала, находящейся в условиях плоского напряженного состояния (иными словами, речь идет о балке). Лицевые плоскости считаем свободными, а граничные условия на краях не рассматриваем. Уравнения равновесия и соотношения упругости после отделения зависящего от времени t множителя $e^{i\omega t}$ (ω — частота колебаний) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + \rho\omega^2 u + f_1(x, z) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + \rho\omega^2 w + f_3(x, z) &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E_{11}\varepsilon_{11} + H_1\varepsilon_{13} + E_{13}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{13} &= H_1\varepsilon_{11} + G_{13}\varepsilon_{13} + H_3\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= E_{13}\varepsilon_{11} + H_3\varepsilon_{13} + E_{33}\varepsilon_{33}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3)$$

где $u(x, z)$, $w(x, z)$ — проекции перемещения, $\sigma_{jk}(x, z)$, $\varepsilon_{jk}(x, z)$ — напряжения и деформации.

Здесь

$$E_{11}, E_{13}, E_{33}, G_{13}, H_1, H_3 \quad (4)$$

— модули упругости, причем для ортотропного материала $H_1 = H_3 = 0$. Предполагается, что плотность упругой энергии

$$2\Pi = E_{11}\varepsilon_{11}^2 + G_{13}\varepsilon_{13}^2 + E_{33}\varepsilon_{33}^2 + 2E_{13}\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + 2H_1\varepsilon_{11}\varepsilon_{13} + 2H_3\varepsilon_{13}\varepsilon_{33}$$

является положительно определенной.

Граничные условия на лицевых поверхностях имеют вид

$$\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h/2. \quad (5)$$

3. УРАВНЕНИЯ КИРХГОФА–ЛЯВА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ.

Рассмотрим сначала модель КЛ. В соответствии с гипотезами Кирхгофа нормальное до деформации волокно остается после деформации прямолинейным и нормальным к деформированной срединной линии, и нормальными напряжениями можно пренебречь, что дает

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad u = u_0(x) - z \frac{dw}{dx} \quad \text{и} \quad \sigma_{33} = 0. \quad (6)$$

В связи с анизотропией общего вида изгибные и продольные деформации связаны между собой, поэтому введено слагаемое $u_0(x)$. В силу (6) первое и третье соотношения (2) после исключения деформации ε_{33} дают

$$\sigma_{11} = E_{11}^* \left(\frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2} \right), \quad E_{11}^* = E_{11} - \frac{E_{13}^2}{E_{33}}.$$

Проинтегрируем оба уравнения (1) по z в пределах $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$, далее умножим первое уравнение (1) на z и также проинтегрируем.

В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dx} + \rho h \omega^2 u_0 + F_1(x) &= 0, \\ \frac{dQ_1}{dx} + \rho h \omega^2 w + F_3(x) &= 0, \\ \frac{dM_1}{dx} - Q_1 - J \omega^2 \frac{dw}{dx} + m_1(x) &= 0, \quad J = \frac{\rho h^3}{12},\end{aligned}\tag{7}$$

где введены продольное усилие $P_1(x)$, перерезывающее усилие $Q_1(x)$, и изгибающий момент $M_1(x)$:

$$\begin{aligned}P_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz = E_{11}^* h \frac{du_0}{dx}, \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dz, \\ M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{11} dz = -D_1 \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad D_1 = \frac{E_{11}^* h^3}{12},\end{aligned}\tag{8}$$

а также внешние интегральные силы и момент

$$F_k(x) = \int_{-h/2}^{h/2} f_k(x, z) dz, \quad k = 1, 3, \quad m_1(x) = \int_{-h/2}^{h/2} z f_1(x, z) dz.$$

При выводе третьего уравнения (7) использовано равенство

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} dz = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dz = -Q_1,$$

получающееся при интегрировании по частям с учетом граничных условий (5).

Систему уравнений (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned}E_{11}^* h \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \rho h \omega^2 u_0 + F_1(x) &= 0, \\ -D_1 \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho h \omega^2 w + F_3(x) - J \omega^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{dm_1}{dx} &= 0.\end{aligned}\tag{9}$$

Уравнения (9) суть уравнения продольных и поперечных колебаний балки Бернулли. В уравнение поперечных колебаний включены обычно не учитываемые последние два слагаемых (силы инерции вращательного движения элемента и внешний распределенный момент). Видим, что модель КЛ не учитывает не только анизотропию общего вида, но и ортотропию материала балки. В рамках этой модели продольные и изгибные колебания независимы.

4. УРАВНЕНИЯ ТИМОШЕНКО–РЕЙССНЕРА (ТР) ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

В отличие от модели КЛ эта модель вводит в рассмотрение угол сдвига γ между нормалью к деформированной срединной поверхности и нормальным до деформации волокон, которое по предположению остается прямолинейным и после деформации. Соотношения (6) заменяются на

$$\varepsilon_{13} = \gamma \quad \text{или} \quad u = u_0 + \varphi z, \quad \varphi = -\frac{dw}{dx} + \gamma \quad \text{и} \quad \sigma_{33} = 0, \quad (10)$$

где φ — угол поворота нормального до деформации волокна. В силу равенства $\sigma_{33} = 0$ исключаем из соотношений (2) деформацию ε_{33} . Тогда

$$\sigma_{11} = E_{11}^* \left(\frac{du_0}{dx} + z \frac{d\varphi}{dx} \right) + H_1^* \gamma, \quad \sigma_{13} = H_1^* \left(\frac{du_0}{dx} + z \frac{d\varphi}{dx} \right) + G_{13}^* \gamma,$$

где

$$H_1^* = H_1 - \frac{H_3 E_{13}}{E_{33}}, \quad G_{13}^* = G_{13} - \frac{H_3^2}{E_{33}}.$$

Уравнения (1) интегрируем по толщине пластины по той же схеме, что и для модели КЛ. Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dx} + \rho h \omega^2 u_0 + F_1(x) &= 0, \\ \frac{dQ_1}{dx} + \rho h \omega^2 w + F_3(x) &= 0, \\ \frac{dM_1}{dx} - Q_1 + J \omega^2 \varphi + m_1(x) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

отличающуюся от системы (7) лишь инерционным членом в третьем уравнении. Однако теперь

$$P_1 = E_{11}^* h \frac{du_0}{dx} + H_1^* h \gamma, \quad Q_1 = H_1^* h \frac{du_0}{dx} + G_{13}^* h \gamma, \quad M_1 = D_1 \frac{d\varphi}{dx}, \quad (12)$$

а остальные обозначения те же, что и в (8).

Первые два уравнения (11) преобразуем к виду

$$Kh \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \rho h \omega^2 (G_{13}^* u_0 - H_1^* w) + G_{13}^* F_1 - H_1^* F_3 = 0, \quad (13)$$

$$Kh \frac{d\gamma}{dx} + \rho h \omega^2 (E_{11}^* w - H_1^* u_0) + E_{11}^* F_3 - H_1^* F_1 = 0, \quad (14)$$

где $K = E_{11}^* G_{13}^* - (H_1^*)^2$. Тогда третье уравнение (11) после дифференцирования по x и исключения углов φ и γ запишется в виде

$$\begin{aligned} & -D_1 \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho h \omega^2 w + F_3 + \frac{dm_1}{dx} - \\ & - \left(\frac{D_1 E_{11}^* \rho}{K} + J \right) \omega^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{D_1 H_1^* \rho}{K} \omega^2 \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{J \rho \omega^4}{K} (E_{11}^* w - H_1^* u_0) - \\ & - \frac{D_1}{Kh} \frac{d^2 (E_{11}^* F_3 - H_1^* F_1)}{dx^2} - \frac{J \omega^2}{Kh} (E_{11}^* F_3 - H_1^* F_1) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Модель ТР приводит к системе уравнений (13), (15) относительно неизвестных функций u и w , связанной через силы инерции. В статическом случае (при $\omega = 0$) эти уравнения можно интегрировать независимо друг от друга.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (1)–(3)

Построим теперь решение системы уравнений (1)–(3), не прибегая к гипотезам о распределении перемещений по толщине пластины. Для построения приближенного решения используется метод асимптотического интегрирования, основанный на предположении о малости толщины пластины по отношению к длине волны продольной деформации. Предполагаем, что внешняя нагрузка меняется в тангенциальном направлении по гармоническому закону:

$$f_j(x, z) = f_j(z) e^{irx}, \quad j = 1, 3,$$

и будем искать периодическое решение в виде

$$\{u, w, \sigma_{jk}, \varepsilon_{jk}\}(x, z) = \{u, w, \sigma_{jk}, \varepsilon_{jk}\}(z)e^{irx}.$$

Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка. Приведем эту систему к виду, удобному для асимптотического интегрирования. Для этого проведем растяжение масштаба $z = hz_1$, $|z_1| \leq 1/2$:

$$\begin{aligned} i\mu\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}'_{13} + \rho h^2 \omega^2 u + h^2 f_1(z) &= 0, \\ i\mu\hat{\sigma}_{13} + \hat{\sigma}'_{33} + \rho h^2 \omega^2 w + h^2 f_3(z) &= 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11} &= E_{11}i\mu u + H_1(u' + i\mu w) + E_{13}w', \\ \hat{\sigma}_{13} &= H_1i\mu u + G_{13}(u' + i\mu w) + H_3w', \\ \hat{\sigma}_{33} &= E_{13}i\mu u + H_3(u' + i\mu w) + E_{33}w', \end{aligned} \quad (17)$$

где $\hat{\sigma}_{jk} = h\sigma_{jk}$, $(\cdot)' = d(\cdot)/dz_1$, $\mu = rh = 2\pi h/L$ — малый параметр, пропорциональный отношению толщины h пластины к длине L волны деформации.

Имеют место порядковые соотношения:

$$u = O(w), \quad \sigma_{11} = O(E\mu^2 w), \quad \sigma_{13} = O(E\mu^3 w), \quad \sigma_{33} = O(E\mu^4 w),$$

где E — общий порядок упругих модулей (4).

Решение системы (16), (17) ищем в виде разложений в ряды по степеням параметра μ . Приведем соотношения (17) к виду, удобному для применения метода итераций. Разрешим второе и третье соотношения (17) относительно u' и w' и преобразуем первое соотношение (17). Тогда система (16), (17) запишется в виде, в котором правые части малы:

$$\begin{aligned} u' &= -i\mu w + K_1 i\mu u + \frac{E_{33}\hat{\sigma}_{13} - H_3\hat{\sigma}_{33}}{\Delta}, \\ w' &= K_2 i\mu u + \frac{G_{13}\hat{\sigma}_{33} - H_3\hat{\sigma}_{13}}{\Delta}, \quad \Delta = E_{33}G_{13} - H_3^2, \\ \hat{\sigma}'_{13} &= -i\mu\hat{\sigma}_{11} - \rho h^2 \omega^2 u - h^2 f_1(z), \\ \hat{\sigma}'_{33} &= -i\mu\hat{\sigma}_{13} - \rho h^2 \omega^2 w - h^2 f_3(z), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11} &= K_3 i\mu u - K_1 \hat{\sigma}_{13} - K_2 \hat{\sigma}_{33}, \quad K_3 = E_{11} + H_1 K_1 + E_{13} K_2, \\ K_1 &= \frac{E_{13} H_3 - E_{33} H_1}{\Delta}, \quad K_2 = \frac{H_1 H_3 - E_{13} G_{13}}{\Delta}.\end{aligned}\tag{19}$$

Причем для выполнения граничных условий (5) необходимо потребовать, чтобы средние значения правых частей третьего и четвертого уравнений (18) были равны нулю:

$$\begin{aligned}&\int_{-1/2}^{1/2} (i\mu \hat{\sigma}_{11} + \rho h^2 \omega^2 u + h f_1(z)) dz = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} (i\mu \hat{\sigma}_{13} + \rho h^2 \omega^2 w + h f_3(z)) dz = 0.\end{aligned}\tag{20}$$

Рассмотрим частные случаи.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ЗАДАЧА СТАТИКИ

Рассмотрим сначала статическую задачу о прогибе под действием равномерной по толщине периодической нагрузки. Положим

$$\omega = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_3 = f_3^0 = \text{const}.$$

Приведем первые слагаемые в асимптотическом решении системы (18):

$$\begin{aligned}u &= \left(-\mu z + \frac{\mu^2 K_1}{24} + O(\mu^3) \right) w_0, \\ w &= \left(1 + \frac{\mu^2 K_2 z^2}{2} + O(\mu^3) \right) w_0, \\ \hat{\sigma}_{11} &= \left(\mu^2 K_3 z + i\mu^3 K_1 K_3 \frac{12z^2 - 1}{12} + O(E\mu^4) \right) w_0, \\ \hat{\sigma}_{13} &= \left(K_3 \mu^3 (-1 + 4z^2) \left(\frac{i}{48} + \frac{K_1 \mu z}{12} \right) + O(E\mu^5) \right) w_0.\end{aligned}$$

Из условия (20) находим прогиб w_0 :

$$\left(\frac{K_3 \mu^4}{12} + \frac{K_4 \mu^6}{1440} \right) w_0 = f_3 h^2, \quad K_4 = K_3 \left(4K_1^2 + 3 \left(K_2 - \frac{4E_{33}K_3}{\Delta} \right) \right). \quad (21)$$

Для сравнения приведем выражения для прогиба, получающиеся соответственно из моделей КЛ и ТР:

$$\frac{E_{11}^* \mu^4}{12} w_0 = f_3 h^2, \quad (22)$$

$$\frac{E_{11}^* \mu^4}{12} w_0 = f_3 h^2 \left(1 + \frac{(E_{11}^*)^2 \mu^2}{12K} \right). \quad (23)$$

Главные по μ члены выражений (21), (22) и (23) совпадают лишь при $H_1 = H_3 = 0$. Это говорит о неприемлемости гипотез КЛ и ТР в случае анизотропии общего вида.

7. ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть теперь $f_1 = f_3 = 0$. Приведем уравнение для частоты колебаний ω , вытекающее из условия совместности (15):

$$\begin{aligned} & \frac{K_3 \mu^4}{12} + \frac{K_4 \mu^6}{1440} - \lambda \left(1 + \mu^2 \left(\frac{K_2}{24} + \frac{1}{12} \right) + O(\mu^4) \right) - \\ & - \lambda^2 \mu^2 \left(\frac{E_{33}}{120\Delta} + O(\mu^2) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\lambda = \rho h^2 \omega^2$.

Модели КЛ и ТР приводят соответственно к уравнениям

$$\begin{aligned} & \frac{E_{11}^* \mu^4}{12} = \lambda \left(1 + \frac{\mu^2}{12} \right), \\ & \frac{E_{11}^* \mu^4}{12} - \lambda \left(1 + \frac{\mu^2}{12} + \frac{\mu^2 (E_{11}^*)^2}{12K} + \frac{\mu^2 E_{11}^* (H_1^*)^2 \lambda}{12K(K\mu^2 - \lambda G_{13}^*)} \right) + \\ & + \frac{\lambda^2 E_{11}^*}{12K} + \frac{\lambda^3 (H_1^*)^2}{12K(K\mu^2 - \lambda G_{13}^*)} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (25) является кубическим относительно частотного параметра λ , ибо в системе (13), (15) изгибные и продольные колебания связаны.

8. УТОЧНЕННЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ

Рассмотренные примеры говорят о неприемлемости гипотез как КЛ, так и ТР в случае анизотропии общего вида, ибо при их применении различия с асимптотическими решениями имеют место уже в главных по μ слагаемых. Поэтому здесь вводятся гипотезы, позволяющие устранить эти различия.

Вместо (10) положим

$$\varepsilon_{13} = \gamma + \gamma_1 z \quad \text{или} \quad u = u_0 + \varphi z + \gamma_1 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{24} \right),$$

$$\varphi = \gamma - \frac{dw}{dx} \quad \text{и} \quad \sigma_{33} = 0,$$

Тогда

$$\sigma_{11} = E_{11}^* \left(\frac{du_0}{dx} + z \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\gamma_1}{dx} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{24} \right) \right) + H_1^* (\gamma + \gamma_1 z),$$

$$\sigma_{13} = H_1^* \left(\frac{du_0}{dx} + z \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\gamma_1}{dx} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{24} \right) \right) + G_{13}^* (\gamma + \gamma_1 z).$$

Из условий $\sigma_{13} = 0$ при $z = \pm 1/2$ находим

$$\gamma_1 = -\frac{H_1^*}{G_{13}^*} \frac{d\varphi}{dx}.$$

Система (11) сохраняет свой вид, причем величины P_1 и Q_1 имеют прежние значения (12), а величина M_1 определяется формулой

$$M_1 = D_1^* \frac{d\varphi}{dx}, \quad (26)$$

где $D_1^* = \frac{K_3 h^3}{12}$, $K_3 = E_{11}^* - \frac{(H_1^*)^2}{G_{13}^*}$, а K_3 задается выражением (19).

Уравнения (13) и (14) не изменяются, а коэффициент D_1 в уравнении (15) следует заменить на D_1^* . Формулы (23) и (25) принимают

соответственно вид

$$\frac{K_3\mu^4}{12}w_0 = f_3h^2 \left(1 + \frac{E_{11}^*K_3\mu^2}{12K}\right), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{K_3\mu^4}{12} - \lambda \left(1 + \frac{\mu^2}{12} + \frac{\mu^2 E_{11}^* K_3}{12K} + df\mu^2 K_3 (H_1^*)^2 \lambda 12K (K\mu^2 - \lambda G_{13}^*)\right) + \\ + \frac{\lambda^2 E_{11}^*}{12K} + \frac{\lambda^3 (H_1^*)^2}{12K (K\mu^2 - \lambda G_{13}^*)} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Главные по μ слагаемые в выражениях (21) и (27), а также в выражениях (24) и (28) совпадают. На совпадение младших по μ слагаемых рассчитывать не приходится, ибо, как показано в [5], они не совпадают даже для трансверсально-изотропной пластины.

Следовательно, в случае анизотропии общего вида для построения двумерной модели, дающей в нулевом приближении правильные результаты, следует отказаться от гипотезы о сохранении прямолинейности нормального до деформации волокна.

9. ПЛАСТИНА, АРМИРОВАННАЯ МАЛОРАСТЯЖИМЫМИ НИТЯМИ

Рассмотрим пластину из анизотропного материала, полученного осреднением изотропного материала, армированного системой малорастяжимых нитей, наклоненных под углом α к оси x . Плотность потенциальной энергии анизотропного материала определяется формулой

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \frac{E(1-\delta)}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{11}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}^2 \right) + \\ + \frac{1}{2} \delta E_n (\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha)^2, \end{aligned}$$

где E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона матрицы, E_n — модуль Юнга нитей, δ — доля объема, занятого нитями.

Напряжения σ_{ij} получаем по формуле

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

В результате находим модули упругости (4) анизотропного материала:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{E(1-\delta)}{1-\nu^2} + E_n \delta \cos^4 \alpha, & E_{13} &= \frac{E\nu(1-\delta)}{1-\nu^2} + E_n \delta \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\ E_{33} &= \frac{E(1-\delta)}{1-\nu^2} + E_n \delta \sin^4 \alpha, & G_{13} &= \frac{E(1-\delta)}{2(1+\nu)} + E_n \delta \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\ H_1 &= E_n \delta \sin \alpha \cos^3 \alpha, & H_3 &= E_n \delta \sin^3 \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

В качестве примера сравним коэффициенты изгибных жесткостей изотропного материала и анизотропного материала при различных значениях угла α (таблица). Возьмем

$$E = 1, \quad \nu = 0.3, \quad E_n = 100, \quad \delta = 0.1.$$

Коэффициент изгибной жесткости

α	E_{11}^*	K_3
0°	10.900	10.900
15°	8.872	3.823
30°	3.672	1.646
45°	1.247	1.014
60°	0.901	0.901
75°	0.946	0.939
90°	0.981	0.981

В таблице для ряда углов наклона нитей α приведены значения коэффициентов изгибной жесткости. Коэффициент E_{11}^* входит в формулу (8) и дает жесткость по моделям КЛ и ТР. Коэффициент K_3 входит в асимптотические формулы (21), (24) и в формулу (26) и определяет жесткость по улучшенной кинематической модели. При $\alpha = 0^\circ$ и при $\alpha = 90^\circ$ значения E_{11}^* и K_3 совпадают, ибо в этих случаях материал является ортотропным.

Результаты таблицы показывают, что для анизотропного материала общего вида гипотеза о сохранении прямолинейности нормального до деформации волокна не дает удовлетворительных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доннелл Л. Г. . Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
3. Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб: Изд-во СПбГУ, 1996. 280 с.
4. Товстик П. Е. Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. №3. С. 49–54.
5. Tovstik P. E., Tovstik T. P. On the 2D models of plates and shells including the shear // ZAMM. 2007. **87**. N 2. P. 160–171.

ФРАКТАЛЬНОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО В ЗАДАЧАХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Б. А. Смольников

Предлагается новая модель твердого тела — фрактальное твердое тело (ФТТ), позволяющая исследовать динамику эволюционного процесса под действием внутренней диссипации механической энергии. Строится математическая модель ФТТ, содержащая нелинейные диссипативные слагаемые, в состав которых входят третьи производные от координат по времени. Предлагаемое описание эволюционной динамики ФТТ представляет интерес для теории нелинейных колебаний и устойчивости движения твердых тел.

1. ОБСУЖДЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Почти за 400-летнюю историю теоретической механики (если отсчитывать ее от основополагающих работ Галилея и Кеплера) в ней сложилась довольно четкая классификация механических систем, их элементов, связей и проч. В рамках этой классификации важное значение имеет разделение на системы консервативные и диссипативные, так как оно зачастую позволяет прогнозировать предельное поведение системы без проведения детального анализа ее математической модели. Разумеется, проведение границы между консервативными и диссипативными системами далеко не однозначная процедура, строго консервативных систем в природе и технике не существует. Наиболее близко к консервативным системам приближаются объекты небесной механики, в “земной” же механике силы трения настолько велики и вездесущи, что пренебрегать ими уместно только на сравнительно небольших интервалах динамического поведения системы. Тем не менее консервативные модели технических устройств и конструкций широко используются как

Доклад на семинаре 5 сентября 2007 г.

© Б. А. Смольников, 2008

в учебной литературе по теоретической и технической механике, так и во многих научно-инженерных разработках и исследованиях [4]. В тех задачах, где необходим учет диссипативных эффектов, обусловленных силами, пропорциональными нулевой, первой или второй степени относительной скорости, для построения математической модели используется хорошо известная диссипативная функция Рэлея, выражающая мощность диссипативных сил поверхностного трения. Однако, кроме хорошо изученного и сравнительно легко задаваемого поверхностного трения в реальных механических телах, существует и внутренняя диссипация энергии, обусловленная переменными внутренними деформациями и напряжениями. В механике деформируемого твердого тела уделяется достаточно серьезное внимание явлению внутреннего механического гистерезиса и его воздействию на процесс упругих колебаний тела [1]. В общей же механике модель твердого тела, построенная Эйлером, лишена упругодеформационных свойств, а потому лишена и способности диссипировать энергию движения тела. В “земной” механике эта ущербность модели Эйлера практически не заметна, однако в небесной механике ситуация резко изменяется. В условиях полного отсутствия поверхностного трения силы внутреннего (объемного) трения являются единственным диссипативным фактором, и именно они определяют эволюционно необратимый характер вращательных движений искусственных и естественных небесных тел.

Разумеется, для описания подобного эволюционного поведения твердого тела можно снабдить его набором внутренних диссипативных степеней свободы (например, диссипативных осцилляторов), как это сделано в ряде работ Ф. Л. Черноусько и др. [2, 3]. Однако при этом возрастает размерность задачи и существенно усложняется ее математическая модель. В настоящей работе обсуждается и демонстрируется другой подход к построению эволюционной математической модели твердого тела, не требующий введения дополнительных степеней свободы, хотя и несколько повышающий ее порядок.

Прежде чем перейти к описанию подобного диссипативного твердого тела, рассмотрим механизм объемной диссипации при колебаниях упруговязкого тела. Возникающие при этом упругие смещения или деформации носят, как известно, гистерезисный харак-

тер, причем “амплитуды” этого гистерезиса имеют примерно тот же масштаб, что и амплитуда упругих колебаний. Ввиду этого процесс диссипации энергии колебаний происходит достаточно интенсивно, и колебания затухают за несколько десятков или сотен периодов низшей частоты. Такой гистерезис можно назвать быстрым, упругим или макроскопическим.

Наряду с упругим гистерезисом в реальном твердом теле существует и неупругий микроскопический гистерезис, обусловленный вращательно-поступательным движением тела, при котором внутри него возникает слабовыраженное поле переменных внутренних усилий или напряжений. Вызванные этим полем микроперемещения (или микродеформации) необязательно будут упругими, однако они в любом случае рассеивают механическую энергию движения тела. Разумеется, мощность такого микрогистерезиса будет на несколько порядков меньше, чем мощность обычного макрогистерезиса, так что процесс динамической эволюции движения тела оказывается весьма продолжительным, что и наблюдается в задачах небесной механики. Предельным режимом такой эволюции будет режим перманентного вращения тела вокруг его максимального момента инерции, так как в этом режиме все внутренние усилия и напряжения становятся постоянными и диссипация энергии прекращается. Этим внутренняя диссипация отличается от внешней, поскольку внешняя, как правило, приводит к полному прекращению всяких движений. В силу сказанного можно предложить следующую концепцию диссипативного тела (ДТ): это обычное твердое тело, которое отличается от классической эйлеровской модели только в одном отношении — оно обладает внутренней (объемной) диссипацией энергии. Физически такое тело можно представить различными моделями — это может быть жесткая микропористая структура, поры которой заполнены сыпучей или жидкой диссипативной средой, играющей роль внутреннего диссипатора. Другим вариантом ДТ может служить модель фрактального твердого тела (ФТТ). Его внутренние элементы, играющие роль внутренних диссипаторов, имеют фрактальную структуру [6]. Наконец, в сплошном твердом теле роль внутренних диссипаторов играют атомно-молекулярные структуры, на тепловые микродвижения которых накладываются диссипативные составляющие, обусловленные по-

лем гравитационно-инерционных ускорений точек тела.

Важно отметить, что здесь отчетливо проявляется взаимодействие механических движений совершенно разных масштабов: наномасштабные (тепловые) движения атомно-молекулярных структур оказывают тормозящее воздействие на макромасштабные движения несущего твердого тела. Аналогичный процесс наблюдается при неупругом ударе твердых тел, когда часть их кинетической энергии переходит в тепловые колебания молекул.

2. Эволюционная динамика математического маятника

В качестве примера ДТ можно привести обыкновенный физический или математический маятник, совершающий колебания в условиях отсутствия внешнего трения (трения в подвесе или в окружающей воздушной среде). При качаниях математического маятника в его нити возникают переменные усилия от действия центробежных и гравитационных сил. Эти переменные микроусилия вызывают столь же малые переменные удлинения и укорочения самой нити, а следовательно, и продольные микродвижения качающегося груза. Образующаяся при этом кориолисова сила и обеспечивает эволюционное затухание качаний маятника [5].

Из перечисленных выше трех возможных физических моделей диссипативного процесса здесь наиболее естественной представляется модель упругого микрогистерезиса в нити (стержне) маятника. Формально для описания этого гистерезиса можно было бы ввести свою степень свободы, как это часто и делается. Однако этот путь не учитывает микромасштабной специфики этой степени свободы, что усложняет весь последующий анализ. Специфика состоит в том, что микродвижения груза маятника по этой степени свободы фактически не вносят никакого вклада в баланс инерционно-гравитационных и упругих сил, но вместе с тем непрерывно рассеивают энергию его макроскопических колебаний.

Ограничиваясь поэтому учетом только этого фактора, выразим мощность диссипации как квадратичную функцию от микроскорости перемещения груза. Считая, что само микроперемещение про-

порционально натяжению N нити маятника, а его микроскорость пропорциональна $\dot{N}$, запишем диссипативную функцию S в виде

$$S = \frac{1}{2}bl\dot{N}^2, \quad (1)$$

где b — коэффициент диссипации, а l — длина нити. Тогда уравнение движения маятника с учетом внутренней диссипации в его нити и при отсутствии внешнего (рэлеевского) трения следующее:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = -\frac{1}{ml^2} \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}}; \quad k^2 = \frac{g}{l}, \quad (2)$$

где φ — угол отклонения нити от вертикали, а k — частота малых колебаний. Далее, учитывая, что

$$\begin{aligned} N &= m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi), \\ \dot{N} &= m\dot{\varphi}(2l\dot{\varphi} - g \sin \varphi), \end{aligned} \quad (3)$$

представим производящую функцию S в виде

$$S = \frac{1}{2}m^2bl^3\dot{\varphi}^2(2\ddot{\varphi} - k^2 \sin \varphi)^2, \quad (4)$$

и тогда эволюционное уравнение маятника примет вид

$$\ddot{\varphi} + mbl\dot{\varphi}(2\ddot{\varphi} - k^2 \sin \varphi)^2 + k^2 \sin \varphi = 0. \quad (5)$$

Как и следовало ожидать, диссипативное слагаемое входит сюда нелинейно, имея третий порядок малости (внешнее трение обычно имеет первый порядок). В отличие от задач консервативной динамики уравнение (5) содержит $b\ddot{\varphi}^2$. Это означает, что внутренняя диссипация зависит не только от первых производных, но также от вторых и даже (как будет показано ниже) от третьих.

Домножая уравнение (5) на $\dot{\varphi}$, нетрудно получить энергетическое соотношение

$$\frac{d(T + \Pi)}{dt} = -2S, \quad (6)$$

аналогичное соотношению для диссипативных функций поверхностного (рэлеевского) трения (здесь T — кинетическая, а Π —

потенциальная энергия маятника). Из (6) нетрудно видеть, что согласно (4) при $t \rightarrow \infty$ макроскопическое движение полностью затухает, хотя закон этого затухания отличается от затухания при внешнем трении. Чтобы показать это, воспользуемся аппроксимацией функции S , рассматривая ее на невозмущенном движении при $b = 0$. Исключая из нее $\ddot{\varphi}$ посредством соотношения $\ddot{\varphi} = -k^2 \sin \varphi$, получим

$$S \approx \frac{1}{2} \beta m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + k^2 \sin \varphi, \quad (7)$$

где $\beta = 9mblk^4$. После подстановки (7) в (2) приходим к более простому уравнению

$$\ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} \sin^2 \varphi + k^2 \sin \varphi = 0, \quad (8)$$

которое для малых амплитуд колебаний примет вид

$$\ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} \varphi^2 + k^2 \varphi = 0. \quad (9)$$

Для построения решения этого уравнения используем метод вариации произвольных постоянных из решения невозмущенного уравнения, имеющего форму

$$w = A e^{ikt} + \bar{A} e^{-ikt}. \quad (10)$$

Здесь A — комплексная константа, а $\bar{A}$ — ее комплексное сопряжение. Полагая, что в возмущенном движении A и $\bar{A}$ есть медленно изменяющиеся функции времени и следуя методу Лагранжа после стандартных выкладок и допущений, приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} \dot{A} e^{ikt} - \dot{\bar{A}} e^{-ikt} = -\beta (A e^{ikt} - \bar{A} e^{-ikt}) (A e^{ikt} + \bar{A} e^{-ikt})^2, \\ \dot{A} e^{ikt} + \dot{\bar{A}} e^{-ikt} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

из которой находим

$$\begin{aligned} \dot{A} = & -\frac{1}{2} \beta e^{-ikt} (A^3 e^{3ikt} + 2|A|^2 A e^{ikt} + |A|^2 \bar{A} e^{-ikt} - \\ & - |A|^2 A e^{ikt} - 2|A|^2 \bar{A} e^{-ikt} - \bar{A}^3 e^{-3ikt}). \end{aligned} \quad (12)$$

Производя усреднение правой части по “быстрому” времени с учетом того, что

$$\frac{k}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} A e^{nikt} dt = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq 0, \\ \langle A \rangle, & \text{при } n = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где $\langle A \rangle$ — среднее значение A на интервале $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{k}$, получим для $\langle A \rangle$ следующее несложное уравнение:

$$\dot{A} = -\frac{1}{2}\beta|A|^2 A, \quad (14)$$

в котором уже опущены угловые скобки. Присоединяя к нему комплексно-сопряженное уравнение и рассматривая их совместно, придем к окончательному соотношению для $|A|^2$:

$$|\dot{A}|^{-2} = -\beta|A|^4. \quad (15)$$

Интегрируя его, находим закон затухания амплитуд, т.е. закон эволюционного поведения математического маятника:

$$|A|^2 = \frac{1}{|A_0|^{-2} + \beta t}. \quad (16)$$

Видно, что эволюционное затухание амплитуд происходит медленнее, чем в случае вязкого внешнего трения, когда амплитуды убывают по экспоненте. Разумеется, это объясняется более высоким порядком малости внутреннего трения. На фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi}/k)$ вместо хорошо известной логарифмической спирали получим траекторию вида

$$|A| = \frac{A_0}{\sqrt{1 + k\alpha}}, \quad (17)$$

где k — коэффициент, пропорциональный β , а $\alpha = \arctg(\dot{\varphi}/k)$ — фазовый угол, пропорциональный времени t . Нетрудно видеть (рис. 1), что скручивание этой спирали к началу координат ($A = 0$) происходит гораздо медленнее, чем у логарифмической спирали,

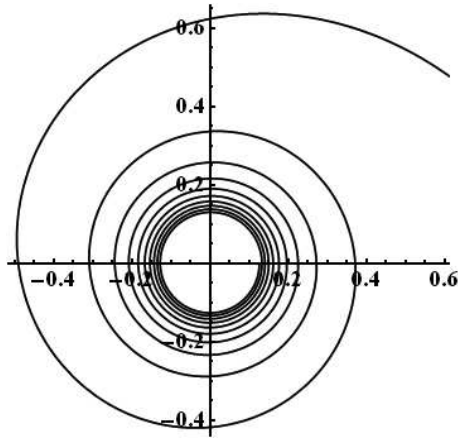


Рис. 1. Эволюционная спираль математического маятника.

так как она является эквиангулярной, т.е. пересекает любой радиус-вектор под постоянным углом, тогда как “эволюционная” спираль (17) с уменьшением радиуса пересекает его под углом, стремящимся к $\pi/2$.

3. ЭВОЛЮЦИЯ ТРАЕКТОРИИ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Ограничимся изучением эволюционных движений сферического маятника (СМ) при достаточно малом уровне его начальной механической энергии, когда его невозмущенное движение описывается в неподвижном базисе $Oxyz$ (рис. 2) линейными уравнениями

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad \ddot{y} + k^2 y = 0, \quad k^2 = \frac{g}{l}. \quad (18)$$

Здесь x, y — проекции апекса СМ на горизонтальную плоскость, l — длина маятника, m — масса его концевой груза. Как и выше, учтем внутреннюю диссипацию только в нити маятника, считая, что внешнее трение полностью отсутствует. Для диссипативной функции S примем прежнее соотношение (1), в котором для N

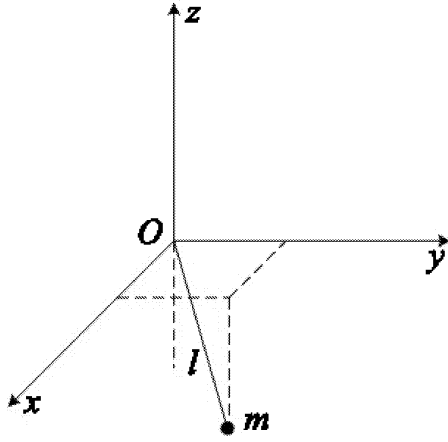


Рис. 2. Схема сферического маятника.

и $\dot{N}$ следует использовать значения

$$\begin{aligned} N &= \frac{m}{l} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - k^2(x^2 + y^2 - l^2)), \\ \dot{N} &= \frac{2m}{l} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - k^2(x\dot{x} + y\dot{y})). \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда для S получим формулу

$$S = 2mb (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - k^2(x\dot{x} + y\dot{y}))^2, \quad (20)$$

после чего эволюционные уравнения малых колебаний СМ примут вид

$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = -\frac{\partial S}{\partial \dot{x}} = -4mb (\ddot{x} - k^2 x) (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - k^2(x\dot{x} + y\dot{y})), \\ \ddot{y} + k^2 y = -\frac{\partial S}{\partial \dot{y}} = -4mb (\ddot{y} - k^2 y) (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - k^2(x\dot{x} + y\dot{y})). \end{cases} \quad (21)$$

Как и для математического маятника, здесь вместо интеграла энергии получается соотношение (6). Однако здесь оно не означает прекращения колебаний СМ, так как функция S , как нетрудно видеть из (20), обращается в нуль при равномерном круговом движении апекса. Это, в свою очередь, означает сохранение момента количества движения СМ относительно оси z . Формально этот интеграл вытекает из системы (21), если домножить ее первое и второе уравнения на y и x соответственно, после чего вычесть их друг из друга, получив соотношение

$$(x\dot{y} - \dot{x}y)' = -4mb(x\dot{y} - \dot{x}y)' [\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - k^2(x\dot{x} + y\dot{y})]^2.$$

Отсюда и следует искомый интеграл

$$(x\dot{y} - \dot{x}y) = L = \text{const.} \quad (22)$$

Эволюционные уравнения (21) можно несколько упростить, если построить функцию S на невозмущенном движении (18). Тогда она примет вид

$$S = 8mbk^4 (x\dot{x} + y\dot{y})^2, \quad (23)$$

а упрощенные эволюционные уравнения таковы:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = -\beta x (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}), \\ \ddot{y} + k^2 y = -\beta y (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}), \end{cases} \quad (24)$$

где $\beta = 16mbk^4$ — приведенный диссипативный коэффициент. Видно, что в частном случае качаний маятника в вертикальной плоскости xz или yz из (24) следует уравнение (9). Аналогично этому уравнению система (24) также допускает построение аналитического решения. Для этого перейдем к комплексной переменной $w = x + iy$, заменим (24) одним уравнением

$$\ddot{w} + k^2 w = -\frac{\beta}{2} w (w\dot{w} + \bar{w}\dot{w}) \quad (25)$$

и, как и выше, будем искать его решение путем варьирования констант в невозмущенном решении:

$$w = Ae^{ikt} + Be^{-ikt}. \quad (26)$$

После проведения стандартных процедур метода Лагранжа приходим к следующей системе уравнений для медленно изменяющихся переменных $A(t)$ и $B(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{A}e^{ikt} + \dot{B}e^{-ikt} &= 0, \\ \dot{A}e^{ikt} - \dot{B}e^{-ikt} &= \beta F,\end{aligned}\tag{27}$$

где

$$F = \frac{w}{ik} (w\dot{w} + \bar{w}\dot{w}) = - (A|B|^2 e^{ikt} - B|A|^2 e^{-ikt}),$$

причем здесь в правой части опущены те слагаемые, которые содержат множитель e^{inkt} , $n \neq \pm 1$, так как они обратятся в нуль при операции усреднения F по “быстрому времени” на интервале $2\pi/k$. В результате система (27) для уже усредненных “медленных переменных” A и B приведет к виду

$$\dot{A} = -\frac{\beta}{2} A|B|^2, \quad \dot{B} = -\frac{\beta}{2} B|A|^2$$

или к вещественной форме

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = -\beta|A|^2|B|^2, \quad \frac{d}{dt}|B|^2 = -\beta|A|^2|B|^2.$$

Из этой системы вытекает интеграл

$$|A|^2 - |B|^2 = \text{const} = \frac{L}{k},\tag{28}$$

представляющий собой, как нетрудно показать, интеграл момента (22), записанный в медленных переменных. Пользуясь им, легко проинтегрировать уравнения (28). Так, для первого из них, исключив $|B|^2$ и проинтегрировав, получим

$$|A|^2 = |A_0|^2 \frac{H}{1 - (1 - H)e^{-\beta Lt/k}}, \quad H = \frac{L}{k|A_0|^2},\tag{29}$$

где A_0 — начальное значение $A(t)$. Из (29) видно, что при $t \rightarrow \infty$ имеем $|A|^2 \rightarrow \frac{L}{k}$, а, следовательно, согласно (28) $|B| \rightarrow 0$. Учитывая, что в невозмущенном движении (18) траектория алекса СМ

представляет собой эллипс с полуосями a и b , которые связаны с константами A и B соотношениями

$$a = |A| + |B|, \quad b = ||A| - |B||, \quad (30)$$

видим, что в возмущенном движении процесс эволюции завершается превращением эллипса в окружность радиуса $a = b$ и площадью, равной площади исходного эллипса, пропорциональной L . Конкретная картина эволюционного процесса, построенная по результатам компьютерного интегрирования системы (21), представлена на рис. 3.

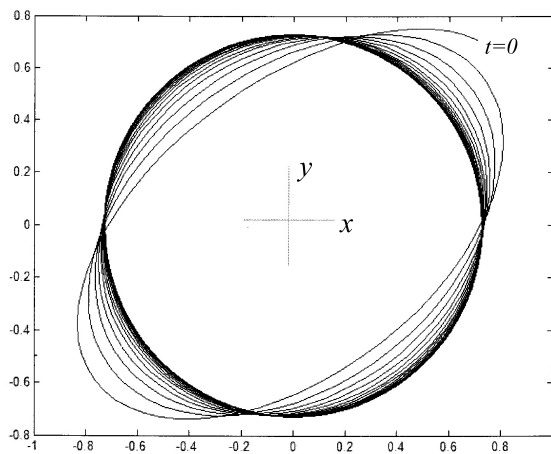


Рис. 3. Эволюционная траектория апекса сферического маятника.

4. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРОВА ДВИЖЕНИЯ

Эйлерово движение свободного абсолютно твердого тела давно является классическим примером аналитической механики и теории устойчивости, а в последние десятилетия находит и практическое применение в задачах динамики космических аппаратов. Од-

нако именно эти задачи впервые и продемонстрировали недостаточность и даже некорректность эйлеровых вращений твердых тел, так как даже весьма слабая внутренняя диссипация может принципиально менять суждение об их устойчивости или неустойчивости. Поэтому для корректного решения многих задач космической механики необходимо использовать диссипативные модели твердых тел и отвечающие им эволюционные уравнения движения.

Для построения математической модели диссипативного тела (ДТ) рассмотрим поле внутренних ускорений, обусловленных его вращательным движением:

$$w = G \cdot r, \quad (31)$$

где $r = [x, y, z]^T$ — радиус-вектор произвольной точки ДТ, а $G = \tilde{\varepsilon} + \dot{\omega}^2$ — тензор его угловых ускорений, имеющий вид

$$G = \begin{bmatrix} -\omega_2^2 - \omega_3^2 & \omega_1\omega_2 - \dot{\omega}_3 & \omega_3\omega_1 + \dot{\omega}_2 \\ \omega_1\omega_2 + \dot{\omega}_3 & -\omega_3^2 - \omega_1^2 & \omega_3\omega_2 - \dot{\omega}_1 \\ \omega_3\omega_1 - \dot{\omega}_2 & \omega_3\omega_2 + \dot{\omega}_1 & -\omega_1^2 - \omega_2^2 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора угловой скорости тела ω на его главные оси инерции, а $\tilde{\varepsilon} = \dot{\omega}$. Если вращение ДТ происходит в поле сил тяжести, то к ускорениям w необходимо добавить и гравитационное ускорение g . Отвлекаясь в данной задаче от этого фактора, построим поле метаускорений

$$s = \dot{w}, \quad (33)$$

т.е. поле относительных производных от абсолютных ускорений w , так как именно они определяют поле внутренних микросмещений и микроскоростей точек ДТ, на которых и происходит диссипация его механической энергии. Мощность диссипации в отдельной точке ДТ будем задавать квадратичной функцией от относительных микроскоростей, которые в свою очередь будем считать пропорциональными метаускорениям в данной точке. Тогда полная мощность диссипации выразится диссипативной функцией

$$S = \frac{1}{2} \int_V s^T B s \, ds, \quad (34)$$

которая в дальнейшем будет играть роль производящей функции для внутренних диссипативных моментов, определяющих характер эволюционного процесса ДТ. Заменяя в (34) значения метаускорений s их выражениями (31) и (33), придем к следующей записи:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_V r^T \dot{G}^T B \dot{G} r dV = \frac{\beta}{2} \int_V r^T D R dV = \\ &= \frac{\beta}{2} \left(D_{11} \int x^2 \rho dV + D_{22} \int y^2 \rho dV + D_{33} \int z^2 \rho dV \right), \end{aligned} \quad (35)$$

где матрица диссипативных коэффициентов $B = \beta E$, а матрица D есть

$$D = \dot{G}^T \dot{G}, \quad (36)$$

причем

$$\dot{G} = \begin{bmatrix} -2(\omega_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \dot{\omega}_3) & \omega_1 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \dot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_3 & \omega_1 \dot{\omega}_3 + \omega_3 \dot{\omega}_1 + \ddot{\omega}_2 \\ \omega_1 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \dot{\omega}_1 + \ddot{\omega}_3 & -2(\omega_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \dot{\omega}_1) & \omega_2 \dot{\omega}_3 + \omega_3 \dot{\omega}_2 - \ddot{\omega}_1 \\ \omega_1 \dot{\omega}_3 + \omega_3 \dot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_2 & \omega_2 \dot{\omega}_3 + \omega_3 \dot{\omega}_2 + \ddot{\omega}_1 & -2(\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Также здесь принято, что β — скалярный коэффициент диссипации, а через ρ обозначена эффективная плотность материала ДТ. В выражение (35) входят только диагональные элементы матрицы D , для которых из (36) нетрудно получить следующее выражение:

$$D_{11} = 4(\omega_2 \dot{\omega}_3)^2 + (\ddot{\omega}_3 + \omega_1 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \dot{\omega}_3)^2 + (-\ddot{\omega}_3 + \omega_1 \dot{\omega}_3 + \omega_3 \dot{\omega}_1)^2. \quad (38)$$

Выражения для D_{22} , D_{33} получаются из D_{11} посредством циклической перестановки индексов ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$). Что касается интегралов, стоящих при D_{kk} , то они таковы:

$$\begin{aligned} \int x^2 \rho dV &= \frac{1}{2}(A_2 + A_3 - A_1), \quad \int y^2 \rho dV = \frac{1}{2}(A_3 + A_1 - A_2), \\ \int z^2 \rho dV &= \frac{1}{2}(A_1 + A_2 - A_3), \end{aligned} \quad (39)$$

где A_k , ($k = 1, 2, 3$) — моменты инерции ДТ относительно его главных осей.

Переходя теперь к построению диссипативной функции, представим ее в виде суммы

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_1 = \frac{\beta}{2} A_1 [4\omega_1\dot{\omega}_2(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2) + 4\omega_3\dot{\omega}_3(\omega_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\dot{\omega}_2) + 2\dot{\omega}_2(\omega_1\dot{\omega}_3 + \omega_3\dot{\omega}_1) - 2\dot{\omega}_3(\omega_1\dot{\omega}_2 + \omega_2\dot{\omega}_1) + \dot{\omega}_1^2 + (\omega_2\dot{\omega}_3 + \omega_3\dot{\omega}_2)^2], \quad (40)$$

а S_2, S_3 получаются отсюда циклической перестановкой индексов. После этого остается подставить S в правые части эйлеровых уравнений:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 &= -\frac{\partial S}{\partial \omega_1}, \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_3\omega_1 &= -\frac{\partial S}{\partial \omega_2}, \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 &= -\frac{\partial S}{\partial \omega_3}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для конкретности выпишем явно первое уравнение этой системы:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 &= -\beta \{ \omega_1(4A_1\dot{\omega}_1^2 + A_2\dot{\omega}_3^2 + A_3\dot{\omega}_2^2) + \\ &+ \dot{\omega}_1^2 [\omega_3\dot{\omega}_3(2A_3 + 2A_1 - A_2) + \omega_2\dot{\omega}_2(2A_1 + 2A_2 - A_3)] + \\ &+ (A_2 - A_1)\dot{\omega}_2\dot{\omega}_3 + (A_1 - A_3)\dot{\omega}_3\dot{\omega}_2 \}. \end{aligned} \quad (42)$$

Остальные получаются отсюда посредством циклической перестановки индексов. Видно, что от обычных уравнений динамики полученные эволюционные уравнения отличаются наличием третьих производных от обобщенных координат. Учитывая, что они характеризуют именно диссипативные силы, можно сказать, что

эволюционные уравнения принадлежат к классу уравнений с малым параметром при старшей производной. Эта особенность заметно усложняет анализ и численный расчет эволюционных процессов. Тем не менее и без проведения детального исследования можно сказать, что предельным режимом этих процессов всегда будет режим перманентного вращения ДТ вокруг главной оси с наибольшим моментом инерции, когда $\dot{\omega}_k = 0$, а энергия вращения достигает своего наименьшего допустимого значения.

Рассмотренные примеры наглядно демонстрируют роль внутренней микродиссипации в динамическом поведении твердых тел и ее влияние на постановку и решение задач на устойчивость тех или иных предельных режимов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем/ Ред. Г.С. Писаренко. Киев, 1963. 376 с.
2. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
3. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
5. Смольников Б.А.. Эволюционная динамика маятниковых систем // Теория механизмов и машин. 2008. № 1(11). Т. 6. С. 41-47.
6. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 262 с.

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСНОВАНИИ НА ЛОКАЛЬНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

А. В. МИХЕЕВ

Рассматривается модель ортотропной оболочки на упругом основании, учитывающая предварительные напряжения в основании. В качестве объекта исследования берется сфера с изотропным заполнителем. Сравниваются численные результаты, полученные в моделях с учетом и без учета напряжений заполнителя.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть у нас имеется ортотропная оболочка на упругом изотропном основании, находящаяся под действием безмоментных начальных усилий (T_1^0, T_2^0, S^0) . Введем параметр нагружения λ : $(T_1^0, T_2^0, S^0) = -\lambda(t_1, t_2, t_3)$. Прогиб w будем рассматривать в виде двоякопериодической функции, характеризуемой волновыми числами p, q :

$$w = w_0 e^{(px+qy)i/R}.$$

Здесь R — характерный линейный размер срединной поверхности, $(x, y) = (\alpha A, \beta B)$, A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки, (α, β) — координатные линии срединной поверхности оболочки, направления которых совпадают с направлениями главных кривизн. Главные радиусы кривизны срединной поверхности в точке (x, y) равны соответственно R_1, R_2 . Реакцию основания P примем в виде, указанном в [1]:

$$P = \sigma_{zz}(0) = -\frac{c_{zz} r w}{R}, \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07.01.00250а.

Доклад на семинаре 17 октября 2006 г.

© А. В. Михеев, 2008

где

$$c_{33} = G_0 \frac{4(1 - \nu_0)}{3 - 4\nu_0} + \sigma^0 \frac{13 - 28\nu_0 + 16\nu_0^2}{2(3 - 4\nu_0)^2} - \sigma_{33}^0 \frac{5 - 20\nu_0 + 16\nu_0^2}{2(3 - 4\nu_0)^2}. \quad (2)$$

Упругое основание характеризуется модулем Юнга E_0 , модулем сдвига G_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 ; σ_{ij}^0 , σ_{ij} — компоненты тензоров предварительного и дополнительного напряжений соответственно, величина σ_0 зависит от волнообразования при деформации основания и σ_{11} , σ_{22} . Толщина оболочки равна h , модули Юнга материала оболочки вдоль направлений α и β равны соответственно E_1 и E_2 , модуль сдвига в касательной плоскости — G_{12} , модули сдвига в трансверсальном направлении — G_{13} , G_{23} . Коэффициенты Пуассона ν_{12} , ν_{21} связаны с E_1 , E_2 соотношением $E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}$. Введем новую нормировку параметра нагружения: $\Lambda' = \frac{\lambda R}{E_1 h^2}$. Подставляя функцию прогиба $w(x, y)$, а также дополнительно введенную функцию нагружения и функции углов поворота в уравнение устойчивости ([2]), мы получаем следующее неявное выражение функции нагружения $\Lambda'(s, \varphi, \omega, x, y)$:

$$\Lambda' = \frac{1}{f_T(\varphi)} \left(\frac{f_R(\varphi)}{s^2 f(\varphi)} + \frac{s^2}{12n_\nu} \frac{g_1(s, \varphi) \cos^2 \varphi + g_2(s, \varphi) \sin^2 \varphi}{g_3(s, \varphi)} + \frac{\hat{\omega}}{s} \right), \quad (3)$$

где $\hat{\omega} = \frac{c_{33}}{E_1 h_*^{3/2}}$. Определим новые параметры: $n_\nu = 1 - \nu_{12}\nu_{21}$, h_* —

безразмерная толщина оболочки, $\rho_i = \frac{R}{R_i}$ ($i = 1, 2$) — безразмерные параметры кривизны, параметры c_1 , c_2 равны отношениям упругих характеристик оболочки: $c_1 = \frac{E_2}{E_1}$, $c_2 = \frac{G_{12}}{E_1}$. Волновые числа s , φ связаны с волновыми числами p , q подстановками:

$$p = \frac{s \cos \varphi}{h_*^{1/2}}, \quad q = \frac{s \sin \varphi}{h_*^{1/2}}. \quad (4)$$

Коэффициенты a_1, a_2 определяют величину сдвига:

$$\begin{aligned}
 f_R(\varphi) &= (\rho_2 \cos^2 \varphi + \rho_1 \sin^2 \varphi)^2, \\
 f_T(\varphi) &= t_1 \cos^2 \varphi + 2t_3 \cos \varphi \sin \varphi + t_2 \sin^2 \varphi, \\
 f(\varphi) &= \sin^4 \varphi + \frac{\cos^4 \varphi}{c_1} + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{\nu_{12}}{c_1} - c_1 \nu_{12} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\
 g_1(s, \varphi) &= c_1 c_2 a_2 n_\nu s^2 \sin^4 \varphi + c_2 a_2 n_\nu s^2 \cos^4 \varphi + \\
 &+ c_1 a_2 (1 - 2c_2 \nu_{12}) n_\nu s^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (2c_2 n_\nu + c_1 \nu_{12}) \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi, \\
 g_2(s, \varphi) &= c_1 c_2 a_1 n_\nu s^2 \sin^4 \varphi + c_2 a_1 n_\nu s^2 \cos^4 \varphi + \\
 &+ c_1 a_1 (1 - 2c_2 \nu_{12}) n_\nu s^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (2c_2 n_\nu + c_1 \nu_{12}) \cos^2 \varphi + c_1 \sin^2 \varphi, \\
 g_3(s, \varphi) &= c_1 c_2 a_1 a_2 n_\nu s^4 \sin^4 \varphi + c_2 a_1 a_2 n_\nu s^4 \cos^4 \varphi + \\
 &+ c_1 a_1 a_2 (1 - 2c_2 \nu_{12}) n_\nu s^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (c_1 a_2 + c_2 a_1 n_\nu) s^2 \sin^2 \varphi + \\
 &+ (a_1 + c_2 a_2 n_\nu) s^2 \cos^2 \varphi + 1.
 \end{aligned}$$

Для ортотропной сферической оболочки с заполнителем выражение параметра нагружения (3) принимает явную форму:

$$\Lambda' = \frac{s}{s f_T(\varphi) + \zeta} \left(\frac{f_R(\varphi)}{s^2 f(\varphi)} + \frac{s^2}{12 n_\nu} \frac{g_1(s, \varphi) \cos^2 \varphi + g_2(s, \varphi) \sin^2 \varphi}{g_3(s, \varphi)} + \frac{\omega}{s} \right), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{E_0 \gamma'}{h_*^{1/2}}, \quad \omega = \frac{E_0 a_0}{E_1 h_*^{3/2}}, \quad \gamma' = \frac{4(1 - \nu_0)}{(3 - 4\nu_0)^2} \gamma; \\
 a_0 &= \frac{2(1 - \nu_0)}{(1 + \nu_0)(3 - 4\nu_0)}, \quad \gamma = \frac{2(1 - \nu_{12} \nu_{21})}{(1 - 2\nu_0)(E_1(1 + \nu_{21}) + E_2(1 + \nu_{12}))}.
 \end{aligned}$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Значение параметра критической нагрузки получаем минимизацией функции нагружения (5) по волновым числам s, φ . В качестве примера рассмотрим трансверсально-изотропную сферическую оболочку радиуса $R = 1$ с упругим заполнителем, подвергнутую однородному сжатию ($t_1 = t_2 = 1, t_3 = 0$). Коэффициенты Пуассона у материала оболочки — $\nu = 0.3$, у основания — $\nu_0 = 0.4$.

На рис. 1 и в таблице приведены зависимости параметров критической нагрузки от относительной жесткости основания $e = \frac{E_0}{E_1}$ с учетом предварительных напряжений в основании (график, заданный сплошной линией, в таблице — Н) и без учета таковых (на графике — пунктирная линия, в таблице — БН) при относительной толщине оболочки $h_* = 0.01$.

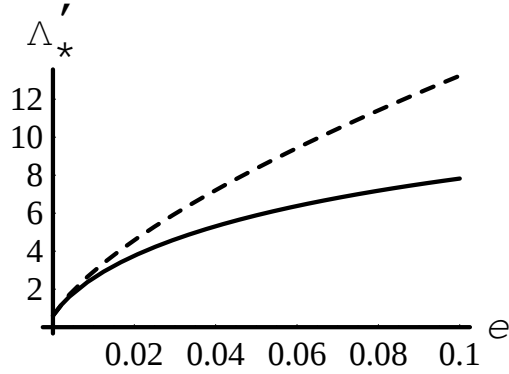


Рис. 1. График зависимости параметра критической нагрузки Λ'_* от относительной жесткости основания $e = E_0/E_1$ при $h_* = 0.01$ с учетом предварительных напряжений в заполнителе (Н) и без учета таковых (БН).

При больших значениях относительной жесткости основания разница между двумя моделями становится весьма существенной. Чтобы проиллюстрировать их отличие, определим **относительное приращение** параметров критической нагрузки следующим образом:

$$\Delta_R = \frac{\Lambda'_{2*} - \Lambda'_{1*}}{\Lambda'_{2*}} \cdot 100\%.$$

Здесь Λ'_{1*} — значение параметра критической нагрузки, полученное в модели с учетом предварительных напряжений заполнителя, Λ'_{2*} — значение аналогичного параметра в модели без учета таковых. Графическая зависимость $\Delta_R(e)$ приведена на рис. 2.

Таблица 1. Параметры критической нагрузки Λ'_{1*} , Λ'_{2*}
и волнообразования p, q

e	Н		БН	
	Λ'_{1*}	$p = q$	Λ'_{2*}	$p = q$
0.0001	0.634	13.013	0.635	13.021
0.0005	0.756	13.666	0.765	13.711
0.001	0.899	14.420	0.918	14.519
0.005	1.792	18.793	1.934	19.429
0.01	2.595	22.197	2.939	23.528
0.05	5.888	32.931	8.357	39.157
0.1	7.822	37.894	13.234	49.219

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из рис. 2 и таблицы, с увеличением жесткости основания e величина $\Delta_R(e)$ также увеличивается.

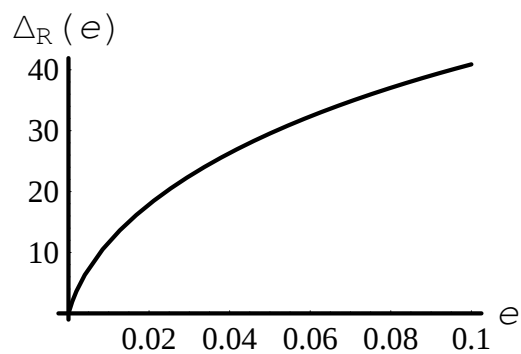


Рис. 2. График зависимости относительного приращения параметров критической нагрузки Δ_{OTH} от относительной жесткости основания $e = E_0/E_1$.

Так, при $e = 0.001$ значения обеих нагрузок весьма близки — они отличаются всего лишь на $\Delta_R(0.001) = 0.1\%$, а при $e = 0.1$, когда жесткость заполнителя в 10 раз меньше жесткости материала

оболочки, Λ'_{1*} меньше Λ'_{2*} уже на 40%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Известия РАН. 2005. Вып. 1. С. 147–160.
2. Михеев А.В. Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих ортотропных оболочек на упругом основании // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. Матем., механ., астрон. 2007. Вып. 3. С. 137–143.

РАСЧЕТ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ С. П. ТИМОШЕНКО

В. Я. ПАВИЛАЙНЕН, А. Н. ТУЛКИНА

Получены уравнения свободных колебаний консольной балки С. П. Тимошенко, дан вывод частотного уравнения, выполнен расчет частот и форм свободных колебаний. Результаты расчета представлены в виде таблиц и графиков.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В динамических задачах расчета колебаний консольной балки по теории С. П. Тимошенко необходим, по сравнению с классической теорией, дополнительный учет инерционных нагрузок при повороте элемента поперечного сечения, а также деформаций сдвига.

Рассмотрим балку длины l с защемленным левым и свободным правым концом, ось которой лежит в вертикальной плоскости симметрии xOy (рис. 1) и направлена по оси Ox . Положительные направления изгибающего момента M и поперечной силы Q в сечениях x и $x + dx$, а также распределенной на оси инерционной поперечной нагрузки $q(x, t)$ и распределенного инерционного момента $m(x, t)$ при повороте элемента показаны на рис. 1.

Уравнения равновесия малого элемента балки имеют вид

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q + m(x, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q(x, t), \quad (1.2)$$

отличающийся от уравнений С. П. Тимошенко [1] только знаками некоторых слагаемых вследствие принятого противоположного на-

Доклад на семинаре 25 сентября 2007 г.

© В. Я. Павилайнен, А. Н. Тулкина, 2008

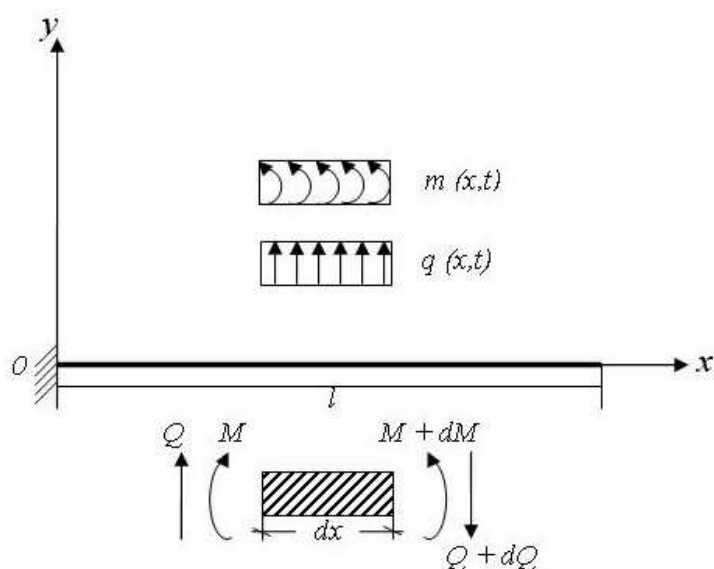


Рис. 1. Система координат, действующие нагрузки

правления оси Oy (рис. 1). Если $y = y(x, t)$ — уравнение изогнутой оси балки, то $q(x, t)$ и $m(x, t)$ определяются формулами

$$q(x, t) = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad m(x, t) = -\rho J \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x}, \quad (1.3)$$

в которых ρ, F, J — соответственно плотность материала стержня, площадь и момент инерции его поперечного сечения.

2. КЛАСИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ БЕРНУЛЛИ–ЭЙЛЕРА И УЧЕТ ИНЕРЦИИ ПОВОРОТА В ТЕОРИИ С. П. ТИМОШЕНКО

В классической теории изгиба момент M и кривизна изогнутой оси связаны соотношением

$$M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

Дифференцируя (1.1) и учитывая равенства (1.2),(1.3), получаем уравнение равновесия

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho J \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \quad (2.2)$$

При изучении нормальных форм гармонических колебаний применением к функции $y(x, t)$ метода Фурье $y(x, t) = X(x) \sin \omega t$ и введением безразмерного аргумента $\xi = x/l$ ($0 \leq \xi \leq 1$) уравнение (2.2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^4 X}{\partial \xi^4} - \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4 X + \frac{\rho}{E} \omega^2 l^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.3)$$

и позволяет получить решение как без учета инерционной нагрузки от поворота сечения, так и с его учетом.

В том и другом случаях решение должно удовлетворять граничным условиям

$$X(0, t) = \frac{\partial X}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad (2.4)$$

$$M(1, t) = Q(1, t) = 0. \quad (2.5)$$

В классическом случае Бернулли–Эйлера имеем уравнение

$$\frac{\partial^4 X}{\partial \xi^4} - \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4 X = 0, \quad (2.6)$$

решение которого дается здесь в кратком изложении, что необходимо для показа его применения и обобщения в дальнейших задачах. Если обозначить

$$\frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4 = k^4, \quad (2.7)$$

то для (2.6) имеет место характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - k^4 = 0, \quad (2.8)$$

корни которого $\lambda_{1,2} = \pm k$, $\lambda_{3,4} = \pm \imath k$, а общее решение

$$X(\xi) = A_1 \cosh k\xi + B_1 \sinh k\xi + C_1 \cos k\xi + D_1 \sin k\xi. \quad (2.9)$$

Из граничных условий (2.4) следует $C_1 = -A_1$, $D_1 = -B_1$, тогда (2.9) примет вид

$$X(\xi) = A_1(\cosh k\xi - \cos k\xi) + B_1(\sinh k\xi - \sin k\xi). \quad (2.10)$$

С учетом граничных условий (2.5)

$$X''(1) = k^2[A_1(\cosh k + \cos k) + B_1(\sinh k + \sin k)] = 0, \quad (2.11)$$

$$X'''(1) = k^3[A_1(\sinh k - \sin k) + B_1(\cosh k + \cos k)] = 0. \quad (2.12)$$

Из (2.11), (2.12) следует частотное уравнение

$$(\cosh k + \cos k)^2 - (\sinh k - \sin k)^2 = 0$$

или в окончательном виде, известное в литературе [1]:

$$1 + \cosh k \cos k = 0. \quad (2.13)$$

Значения k из уравнения (2.13) можно найти численным методом, после чего из (2.7) определяется спектр собственных круговых частот:

$$\omega_i = \frac{k_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.14)$$

где i — номера корней уравнения (2.13) и соответствующей собственной частоты. Формы свободных колебаний определяются из (2.10), где, согласно (2.11) или (2.12), следует принять

$$B_1 = -A_1 \frac{\cosh k + \cos k}{\sinh k + \sin k} \quad \text{или} \quad B_1 = -A_1 \frac{\sinh k - \sin k}{\cosh k + \cos k}$$

(равенство этих значений B_1 выполняется в силу частотного уравнения (2.13)).

Таким образом, амплитуды свободных колебаний определяются формулой

$$X(\xi) = A_1 \left[\cosh k\xi - \cos k\xi - \frac{\sinh k - \sin k}{\cosh k + \cos k} (\sinh k\xi - \sin k\xi) \right], \quad (2.15)$$

где A_1 — произвольная постоянная размерности длины (в дальнейшем $A_1 = 1$).

При учете инерции поворота сечений исходными являются уравнения (2.2), (2.3), из которых следует характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + k^4 \alpha \lambda^2 - k^4 = 0. \quad (2.16)$$

В (2.16) $\alpha = \frac{1}{12}(\frac{l}{l})^2$ — малый параметр. При $\lambda^2 = \beta$ получаем решение

$$\beta_{1,2} = -\frac{k^4 \alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{k^8 \alpha^2}{4} + k^4}, \quad (2.17)$$

и корнями уравнения (2.16) являются $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\beta_1} = \pm \gamma_1$ при $\beta_1 > 0$ и $\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{|\beta_2|} = \pm i \gamma_2$ при $\beta_2 < 0$.

Как и в случае Бернулли–Эйлера (формула (2.9)), решение $X(\xi)$ определяется формулой

$$X(\xi) = A_1 \cosh \gamma_1 \xi + B_1 \sinh \gamma_1 \xi + C_1 \cos \gamma_2 \xi + D_1 \sin \gamma_2 \xi. \quad (2.18)$$

Из граничных условий (2.4) получаем $C_1 = -A_1$, $D_1 = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} B_1$, и (2.18) примет вид

$$X(\xi) = A_1 (\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi) + B_1 (\sinh \gamma_1 \xi - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin \gamma_2 \xi). \quad (2.19)$$

Для получения частотного уравнения необходимо учесть граничные условия (2.5), которым должно удовлетворять решение (2.19) при $\xi = 1$:

$$M(1) = \frac{EJ}{l^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=1} = 0, \quad (2.20)$$

$$Q(1) = \left\{ \frac{EJ}{l^3} \frac{\partial^3 X}{\partial \xi^3} + \frac{\rho J \omega^2}{l} \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\} \Big|_{\xi=1} = 0. \quad (2.21)$$

Условия (2.20) и (2.21) приводят к равенствам

$$A_1 (\gamma_1^2 \cosh \gamma_1 + \gamma_2^2 \cos \gamma_2) + B_1 (\gamma_1^2 \sinh \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2 \sin \gamma_2) = 0, \quad (2.22)$$

$$A_1 \left\{ \gamma_1^3 \sinh \gamma_1 - \gamma_2^3 \sin \gamma_2 + \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} (\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2) \right\} +$$

$$+B_1 \left\{ \gamma_1^3 \cosh \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2^2 \cos \gamma_2 + \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} (\gamma_1 \cosh \gamma_1 - \gamma_1 \cos \gamma_2) \right\} = 0, \quad (2.23)$$

из которых следует частотное уравнение

$$\begin{aligned} & (\gamma_1^2 \cosh \gamma_1 + \gamma_2^2 \cos \gamma_2) \{ \gamma_1^3 \cosh \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2^2 \cos \gamma_2 + \\ & + \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} (\gamma_1 \cosh \gamma_1 - \gamma_1 \cos \gamma_2) \} - \gamma_1 (\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2) \{ \gamma_1^3 \sinh \gamma_1 - \\ & - \gamma_2^3 \sin \gamma_2 + \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} (\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2) \} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

В силу вытекающего из (2.7), (2.16) равенства $\frac{\rho \omega^2 l^2}{E} = k^4 \alpha$, и после выполнения строгих математических выкладок уравнение (2.24) запишется в виде

$$\begin{aligned} & (\gamma_1^5 + \gamma_1^3 k^4 \alpha) (\cosh^2 \gamma_1 - \sinh^2 \gamma_1) + (\gamma_1 \gamma_2^4 - \gamma_1 \gamma_2^2 k^4 \alpha) (\cos^2 \gamma_2 + \sin^2 \gamma_2) + \\ & + [2\gamma_1^3 \gamma_2^2 - \gamma_1 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) k^4 \alpha] \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + \\ & + \gamma_1^2 \gamma_2 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2 - 2k^4 \alpha) \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

или, в окончательной форме,

$$\begin{aligned} & \gamma_1^5 + \gamma_1 \gamma_2^4 + \gamma_1 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) k^4 \alpha + [2\gamma_1^3 \gamma_2^2 - \gamma_1 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) k^4 \alpha] \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + \\ & + \gamma_1^2 \gamma_2 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2 - 2k^4 \alpha) \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Отметим, что уравнение (2.26) содержит, как частный случай, частотное уравнение (2.13), соответствующее классическому решению Бернулли–Эйлера, не учитывающего инерции поворота сечений. При отсутствии в (2.16) и (2.26) величины $k^4 \alpha$, а также равенства $\gamma_1 = \gamma_2 = k$, имеющего место для классического решения, из (2.26) сразу следует равенство $2k^5 + 2k^5 \cosh k \cos k = 0$, т.е. уравнение (2.13).

3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННЫХ НАГРУЗОК ПРИ ПОВОРОТЕ СЕЧЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА

При учете инерционных нагрузок и деформаций сдвига уравнения равновесия элемента балки (1.1), (1.2) сохраняют свой вид,

а угол поворота поперечного сечения в теории С. П. Тимошенко записывается в виде суммы

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \gamma, \quad (3.1)$$

где γ — угол сдвига, а ψ — угол поворота, определяющий величину изгибающего момента (касательные напряжения, соответствующие углу γ , момента не вызывают). Тогда связь момента M и угла поворота ψ представима формулой

$$M = EJ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.2)$$

а соотношение между поперечной силой Q и углом сдвига γ , полученное по формуле Д. И. Журавского, будет иметь вид

$$\frac{nQ}{F} = \tau = -G\gamma = -G \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right), \quad (3.3)$$

откуда следует

$$Q = -\frac{GF}{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right). \quad (3.4)$$

Здесь G — модуль сдвига, n — коэффициент формы поперечного сечения, имеющий значение $n = 3/2$ в случае прямоугольника [4]. Знак «минус» в формуле (3.3) необходим для соблюдения равенства знаков в левой и правой частях формулы (3.4), так как при положительных значениях поперечной силы Q (рис. 1) угол сдвига в плоскости xOy будет отрицательным.

Такой же вид имеет аналогичная формула в работе [3].

С учетом (3.2), (3.4), а также (1.3), уравнения равновесия (1.1), (1.2), связывающие статические величины M , Q с функцией прогиба $y = y(x, t)$ и угла поворота $\psi = \psi(x, t)$, примут вид

$$EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{GF}{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) - \rho J \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} = 0, \quad (3.5)$$

$$-\frac{GF}{n} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

и представляют собой систему уравнений равновесия в перемещениях с искомыми функциями $y(x, t)$ и $\psi(x, t)$.

Решение системы (3.5), (3.6) должно удовлетворять граничным условиям:

$$y(0, t) = \psi(0, t) = 0, \quad (3.7)$$

$$M(l, t) = Q(l, t) = 0. \quad (3.8)$$

Исключая из системы (3.5), (3.6) функцию $\psi(x, t)$, получаем разрешающее уравнение относительно функции $y(x, t)$:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(\frac{\rho}{E} + \frac{n\rho}{G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho F}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (3.9)$$

а при исключении из (3.5), (3.6) функции $y(x, t)$ — разрешающее уравнение относительно угла поворота $\psi(x, t)$:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \left(\frac{\rho}{E} + \frac{n\rho}{G} \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho F}{EJ} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.10)$$

в котором оператор в левой части относительно $\psi(x, t)$ точно совпадает с оператором относительно $y(x, t)$ в (3.9).

Что касается частных случаев разрешающего уравнения (3.9), то при неучете угла сдвига ($\gamma \rightarrow 0$ при $G \rightarrow \infty$) функция $\psi(x, t)$ не вводится, а уравнение (3.9) переходит в приведенное выше уравнение (2.2), данное С. П. Тимошенко [1].

Относительно уравнений (3.9), (3.10) необходимо отметить, что при выводе разрешающих уравнений системы (3.5), (3.6) С. П. Тимошенко принимает в (3.5) инерционный момент $m(x, t)$ в виде

$$m(x, t) = -\rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

не приводя в [1] никаких объяснений или ссылок по поводу такой замены. При этом в уравнении (3.9) появляется дополнительный член вида $\frac{n\rho^2}{EG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4}$, содержащий четвертую производную по времени t . Аналогичное слагаемое относительно $\psi(x, t)$ появляется также в уравнении (3.10). Таким образом, указанная выше единственная замена вида слагаемого $m(x, t)$ в исходном уравнении равновесия

(1.1) качественно меняет тип разрешающего уравнения (3.9) (а также (3.10)), переводя его, как указано в работе В. В. Новожилова и Л. И. Слепяна [2], из уравнения, описывающего стационарный процесс, к уравнению «волнового» типа. Обстоятельный анализ причин перехода к другому типу разрешающего уравнения требует дополнительного рассмотрения, выходящего за рамки данной работы. Поэтому поставленная выше задача исследования колебаний консольной балки будет рассматриваться в дальнейшем на основе уравнений (3.9), (3.10), которые после применения метода Фурье, примут вид:

$$\frac{\partial^4 X}{\partial \xi^4} + \left(\frac{\rho}{E} + \frac{n\rho}{G} \right) \omega^2 l^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} - \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4 X = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \xi^4} + \left(\frac{\rho}{E} + \frac{n\rho}{G} \right) \omega^2 l^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4 \Psi = 0 \quad (3.12)$$

(в (3.12) $\Psi(\xi)$ — амплитудное значение угла $\psi(\xi, t) = \Psi(\xi) \sin \omega t$) и имеют одинаковые характеристические уравнения

$$\lambda^4 + \left(\frac{\rho}{E} + \frac{n\rho}{G} \right) \omega^2 l^2 \lambda^2 - \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4 = 0. \quad (3.13)$$

После исключения ω^2 из (3.13) с использованием формулы (2.7) это уравнение примет вид

$$\lambda^4 + \left(1 + \frac{nE}{G} \right) k^4 \alpha \lambda^2 - k^4 = 0,$$

и при $\lambda^2 = \beta$ находим

$$\beta_{1,2} = - \left(1 + \frac{nE}{G} \right) \frac{k^4 \alpha}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{nE}{G} \right)^2 \frac{k^8 \alpha^2}{4} + k^4}.$$

Корни уравнения (3.13) $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\beta_1} = \pm \gamma_1$ при $\beta_1 > 0$ и $\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{|\beta_2|} = \pm i \gamma_2$ при $\beta_2 < 0$.

Таким образом, системой фундаментальных решений уравнений (3.11), (3.12), как и ранее, будут функции

$$\cosh \gamma_1 \xi, \quad \sinh \gamma_1 \xi, \quad \cos \gamma_2 \xi, \quad \sin \gamma_2 \xi,$$

а их общими решениями —

$$X(\xi) = A_1 \cosh \gamma_1 \xi + B_1 \sinh \gamma_1 \xi + C_1 \cos \gamma_2 \xi + D_1 \sin \gamma_2 \xi \quad (3.14)$$

$$\Psi(\xi) = A_2 \cosh \gamma_1 \xi + B_2 \sinh \gamma_1 \xi + C_2 \cos \gamma_2 \xi + D_2 \sin \gamma_2 \xi \quad (3.14)'$$

где $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ — произвольные постоянные. Из граничных условий $X(0) = \Psi(0) = 0$ следует $C_1 = -A_1, C_2 = -A_2$.

Систему (3.5), (3.6) после применения метода Фурье можно записать в виде

$$\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} = a_{21} \Psi + a_{22} \frac{dX}{d\xi}, \quad (3.15)$$

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} = a_{11} X + a_{12} \frac{d\Psi}{d\xi}. \quad (3.16)$$

где a_{ij} ($i, j = 1, 2$) — постоянные коэффициенты

$$a_{11} = -\frac{n\rho\omega^2 l^2}{G}, \quad a_{12} = l, \quad a_{21} = \frac{FGl^2}{nEJ}, \quad a_{22} = -\frac{FGl}{nEJ} - \frac{\rho\omega^2 l}{E}. \quad (3.17)$$

После приравнивания коэффициентов при соответствующих фундаментальных функциях в (3.15), (3.16) получаем выражения для постоянных A_2, B_2, D_1, D_2 через две постоянные A_1, B_1 :

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 l} B_1, \quad B_2 = \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 l} A_1, \\ D_1 &= -\frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_2^2 + a_{11}} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} B_1, \quad D_2 = \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2 l} A_1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Таким образом, решения (3.14), (3.14') определяются выражениями

$$\begin{aligned} X(\xi) &= A_1 (\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi) + B_1 \sinh \gamma_1 \xi - \\ &\quad - \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_2^2 + a_{11}} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} B_1 \sin \gamma_2 \xi, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\Psi(\xi) = \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 l} B_1 (\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi) + \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 l} A_1 \sinh \gamma_1 \xi +$$

$$+ \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2 l} A_1 \sin \gamma_2 \xi, \quad (3.20)$$

что позволяет перейти к составлению уравнения частот, используя два граничных условия на свободном правом конце консоли:

$$M = \frac{EJ}{l} \frac{d\Psi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = 0, \quad (3.21)$$

$$Q = \left\{ \frac{EJ}{l^2} \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \frac{\rho J \omega^2}{l} \frac{dX}{d\xi} \right\} \Big|_{\xi=1} = 0. \quad (3.22)$$

Из (3.21) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 l} B_1 (\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2) + \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 l} \gamma_1 A_1 \cosh \gamma_1 + \\ & + \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_1 l} \gamma_2 A_1 \cos \gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

или, после преобразований — первое уравнение

$$\begin{aligned} & [(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 + (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2] A_1 + \\ & + \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} (\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2) B_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Аналогично из (3.22) имеем равенство

$$\begin{aligned} & \frac{EJ}{l^2} \left\{ \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 l} B_1 (\gamma_1^2 \cosh \gamma_1 + \gamma_2^2 \cos \gamma_2) + \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 l} A_1 \gamma_1^2 \sinh \gamma_1 - \right. \\ & \left. - \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2 l} A_1 \gamma_2^2 \sin \gamma_2 \right\} + \frac{\rho J \omega^2}{l} \left\{ A_1 (\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2) + \right. \\ & \left. + B_1 (\gamma_1 \cosh \gamma_1 - \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_2^2 + a_{11}} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \cos \gamma_2) \right\} = 0, \end{aligned}$$

которое дает второе уравнение

$$\left\{ (\gamma_1^2 - a_{11}) \gamma_1 \sinh \gamma_1 - (\gamma_2^2 + a_{11}) \gamma_2 \sin \gamma_2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} (\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2) \Big\} A_1 + \Big\{ \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} (\gamma_1^2 \cosh \gamma_1 + \gamma_2^2 \cos \gamma_2) + \\
& + \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} (\gamma_1 \cosh \gamma_1 - \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_2^2 + a_{11}} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \cos \gamma_2) \Big\} B_1 = 0. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Записывая уравнения (3.23), (3.24) в виде

$$\alpha_{11} A_1 + \alpha_{12} B_1 = 0, \quad (3.25)$$

$$\alpha_{21} A_1 + \alpha_{22} B_1 = 0. \quad (3.26)$$

где α_{ij} ($i, j = 1, 2$) — соответствующие коэффициенты уравнений в (3.23), (3.24), из (3.25), (3.26) следует уравнение для определения частот:

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0.$$

После выполнения строгих и достаточно громоздких вычислений получаем

$$\begin{aligned}
& \Big\{ (\gamma_1^2 - a_{11}) \gamma_1 \left[\gamma_1^2 + \rho\omega^2 l^2 \left(\frac{1}{E} + \frac{n}{G} \right) \right] \Big\} (\cosh^2 \gamma_1 - \sinh^2 \gamma_1) + \\
& + \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} \gamma_2^2 \Big\{ \gamma_2^2 - \rho\omega^2 l^2 \left(\frac{1}{E} + \frac{n}{G} \right) \Big\} (\cos^2 \gamma_2 + \sin^2 \gamma_2) + \\
& + \Big\{ \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} \left[(\gamma_1^2 - a_{11}) \gamma_2^2 + (\gamma_2^2 + a_{11}) \gamma_1^2 \right] - \\
& - \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \left[\frac{(\gamma_1^2 - a_{11})^2 \gamma_2^2 - (\gamma_2^2 + a_{11})^2 \gamma_1^2}{(\gamma_2^2 + a_{11}) \gamma_1} \right] \Big\} \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + \\
& + \Big\{ (\gamma_1^2 - a_{11}) \gamma_2 \left[\gamma_2^2 - \gamma_1^2 - 2\rho\omega^2 l^2 \left(\frac{1}{E} + \frac{n}{G} \right) \right] \Big\} \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Таким образом, окончательный вид частотного уравнения

$$A + B + C \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + D \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0, \quad (3.28)$$

коэффициенты которого равны

$$A = (\gamma_1^2 - a_{11}) \gamma_1 \left\{ \gamma_1^2 + \rho\omega^2 l^2 \left(\frac{1}{E} + \frac{n}{G} \right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} \gamma_2^2 \left\{ \gamma_2^2 - \rho \omega^2 l^2 \left(\frac{1}{E} + \frac{n}{G} \right) \right\}, \\
C &= \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} \left\{ (\gamma_1^2 - a_{11}) \gamma_2^2 + (\gamma_2^2 + a_{11}) \gamma_1^2 \right\} - \\
&\quad - \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} \left\{ \frac{(\gamma_1^2 - a_{11})^2 \gamma_2^2 - (\gamma_2^2 + a_{11})^2 \gamma_1^2}{(\gamma_2^2 + a_{11}) \gamma_1} \right\}, \\
D &= (\gamma_1^2 - a_{11}) \gamma_2 \left\{ \gamma_2^2 - \gamma_1^2 - 2 \rho \omega^2 l^2 \left(\frac{1}{E} + \frac{n}{G} \right) \right\}. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что уравнение (3.28) в частных случаях учета только инерционного момента при повороте сечения или в классическом случае Бернулли–Эйлера переходит в соответствующие частотные уравнения.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На основе полученных в §2 и §3 решений выполнен расчет для девяти геометрических вариантов балки прямоугольного поперечного сечения $F = bh$ с различными значениями длины $l = 15, 20, 25$ см и высоты $h = 1.2; 1.0; 0.8$ см. Параметры гибкости $\lambda = l \sqrt{\frac{E}{J}}$ для указанных вариантов представлены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры гибкости λ

h , см	$l = 15$, см	$l = 20$, см	$l = 25$, см
1.2	43.30	57.74	72.17
1.0	51.96	69.28	86.60
0.8	64.95	86.60	108.30

Для каждого геометрического варианта вычислены первые девять собственных круговых частот колебаний консольных балок в трех постановках задачи:

- (1) классический вариант (Бернулли–Эйлера),
- (2) учет инерции поворота сечений,

(3) общий случай при учете инерции поворота сечений и деформаций сдвига.

Результаты представлены в табл. 2, табл. 3, табл. 4, в которых для принятого параметра длины l даны круговые частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_9$ при высотах сечения $h = 1.2; 1.0; 0.8$. Для вариантов (2), (3) справа от столбцов частот показано соответствующее уменьшение частоты в процентах (по сравнению с классическим случаем).

Из содержания таблиц следует, что для принятых геометрических вариантов консолей снижение частот при учете только инерции поворота сечения меньше, чем при учете деформаций сдвига. Для начальных частот ω_1, ω_2 снижение составляет от долей процента до двух-трех процентов, что отмечено С. П. Тимошенко для задачи о колебаниях двухшарнирной балки в работе [1].

При гибкостях $43.3 \leq \lambda \leq 64.95$ (табл.2) с ростом номера частоты это уменьшение может достигать десятков процентов.

Наибольшее снижение частоты (в рассматриваемых примерах) имеет место при геометрических размерах $l = 15$ см, $h = 1.2$ см и составляет при учете инерции поворота 14.88%, в общем случае (при дополнительном учете сдвига) 40.91%. При увеличении параметра λ снижение меньше и в случае $\lambda = 108.3$ составляет для частоты ω_9 соответственно 2.91 и 12.23%.

Данные табл. 3 ($l = 20$ см) и 4 ($l = 25$ см) также подтверждают снижение величины ω_i в интервале $64.95 \leq \lambda \leq 108.3$.

Графики спектров частот (рис. 2, рис. 3, рис. 4) показывают их геометрическое подобие, а также качественное согласование их взаимного расположения и характер изменения для всех трех видов задач. На рис. 2 представлены графики спектров частот ω_n ($n = 1, 2, \dots, 9$) для геометрического варианта $l = 15$ см, $h = 1.2$ см, $\lambda = 43.3$.

Верхний график соответствует классическому случаю, средний — случаю учета инерции поворота сечений, нижний — общему случаю учета инерции поворота сечений и деформаций сдвига.

Графики на рис. 3 и рис. 4 иллюстрируют аналогичные результаты для вариантов $l = 20$ см, $h = 1.0$ см, $\lambda = 69.28$ и $l = 25$ см, $h = 0.8$ см, $\lambda = 108.3$, что отражает влияние увеличения гибкости консоли на изменение спектра частот.

На рис. 5 и рис. 6 представлены формы свободных колебаний

Таблица 2. Собственные круговые частоты при $l = 15$ см

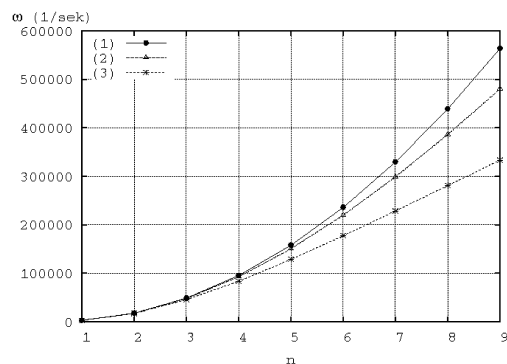
ω_i , 1/сек	h , см	(1)	(2)	в %	(3)	в %
ω_1	1.2	2782.0	2779.3	0.10	2771.3	0.39
	1.0	2318.3	2316.8	0.07	2312.1	0.27
	0.8	1854.7	1853.9	0.04	1851.5	0.17
ω_2	1.2	17434.5	17329.2	0.60	16938.4	2.85
	1.0	14528.8	14467.6	0.42	14238.0	2.00
	0.8	11623.0	11591.6	0.27	11472.6	1.29
ω_3	1.2	48817.2	48033.5	1.61	45306.0	7.19
	1.0	40681.0	40224.1	1.12	38581.1	5.16
	0.8	32544.8	32309.4	0.72	31439.2	3.40
ω_4	1.2	95662.1	92718.5	3.08	83389.1	12.83
	1.0	79718.4	77990.8	2.17	72189.9	9.44
	0.8	63774.8	62879.8	1.40	59718.9	6.36
ω_5	1.2	158136.4	150326.6	4.94	128168.2	18.95
	1.0	131780.3	127157.6	3.51	112888.0	14.34
	0.8	105424.2	103012.2	2.29	94975.3	9.91
ω_6	1.2	236228.3	219404.6	7.12	177048.8	25.05
	1.0	196856.9	186799.4	5.11	207441.2	19.47
	0.8	157485.6	152192.1	3.36	135704.4	13.83
ω_7	1.2	329938.8	298419.0	9.55	228237.3	30.82
	1.0	274949.0	255897.2	6.93	207441.2	24.55
	0.8	219959.2	209833.1	4.60	180541.4	17.92
ω_8	1.2	439267.6	385843.4	12.16	280589.6	36.12
	1.0	366056.3	333382.4	8.93	258355.2	29.42
	0.8	292845.1	275291.0	5.99	228338.5	22.03
ω_9	1.2	564214.8	480237.2	14.88	333422.0	40.91
	1.0	470179.0	418187.9	11.06	310424.5	33.98
	0.8	376143.2	347889.1	7.51	278187.6	26.04

Таблица 3. Собственные круговые частоты при $l = 20$ см

ω_i , 1/сек	h , см	(1)	(2)	в %	(3)	в %
ω_1	1.2	1564.9	1564.0	0.05	1561.5	0.22
	1.0	1304.1	1303.6	0.04	1302.1	0.15
	0.8	1043.3	1043.0	0.02	1042.2	0.10
ω_2	1.2	9806.9	9773.4	0.34	9647.0	1.63
	1.0	8172.4	8153.0	0.24	8079.2	1.14
	0.8	6537.9	6528.0	0.15	6489.9	0.73
ω_3	1.2	27459.6	27209.1	0.91	26294.6	4.24
	1.0	22883.0	22737.4	0.64	22195.6	3.00
	0.8	18306.4	18231.6	0.41	17948.7	1.95
ω_4	1.2	53809.9	52859.5	1.77	49583.3	7.85
	1.0	44841.6	44287.2	1.24	42306.5	5.65
	0.8	35873.3	35587.5	0.80	34535.1	3.73
ω_5	1.2	88951.7	86399.0	2.87	78202.5	12.08
	1.0	74126.4	72629.6	2.02	67554.6	8.87
	0.8	59301.1	58526.4	1.31	55771.6	5.95
ω_6	1.2	132878.4	127299.5	4.20	110775.0	16.63
	1.0	110732.0	107440.9	2.97	96940.4	12.45
	0.8	88585.6	86873.3	1.93	81034.3	8.52
ω_7	1.2	185590.6	174968.6	5.72	146130.6	21.26
	1.0	154658.8	148349.0	4.08	129527.9	16.25
	0.8	123727.0	120424.5	2.67	109684.9	11.35
ω_8	1.2	247088.0	228770.3	7.41	183350.5	25.80
	1.0	205906.7	194941.5	5.33	164502.6	20.11
	0.8	164725.3	158947.5	3.51	141110.3	14.34
ω_9	1.2	317370.8	288052.0	9.24	221757.2	30.13
	1.0	264475.7	246779.5	6.69	201197.2	23.93
	0.8	211580.5	202187.0	4.44	174753.8	17.41

Таблица 4. Собственные круговые частоты при $l = 25$ см

ω_i , 1/сек	h , см	(1)	(2)	в %	(3)	в %
ω_1	1.2	1001.5	1001.2	0.03	1000.1	0.14
	1.0	834.6	834.4	0.02	833.8	0.10
	0.8	667.7	667.6	0.02	667.3	0.06
ω_2	1.2	6276.4	6262.7	0.22	6210.4	1.05
	1.0	5230.4	5222.4	0.15	5192.0	0.73
	0.8	4184.3	4180.2	0.10	4164.5	0.47
ω_3	1.2	17574.2	17471.0	0.59	17085.9	2.78
	1.0	14645.1	14585.3	0.41	14359.0	1.95
	0.8	11716.1	11685.4	0.26	11568.0	1.26
ω_4	1.2	34438.4	34045.4	1.14	32632.2	5.24
	1.0	28698.6	28470.0	0.80	27628.1	3.73
	0.8	22958.9	22841.3	0.51	22399.6	2.44
ω_5	1.2	56929.1	55867.2	1.87	52230.0	8.25
	1.0	47440.9	46821.1	1.31	44617.3	5.95
	0.8	37952.7	37633.1	0.84	36459.8	3.93
ω_6	1.2	85042.2	82704.7	2.75	75141.4	11.64
	1.0	70868.5	69498.7	1.93	64827.4	8.52
	0.8	56694.8	55986.1	1.25	53456.2	5.71
ω_7	1.2	118778.0	114290.7	3.78	100662.6	15.25
	1.0	98981.6	96339.6	2.67	87747.9	11.35
	0.8	79185.3	77813.0	1.73	73070.9	7.72
ω_8	1.2	158136.3	150327.2	4.94	128168.5	18.95
	1.0	131780.3	127158.0	3.51	112888.3	14.34
	0.8	105424.2	103012.4	2.29	94975.5	9.91
ω_9	1.2	203117.3	190495.0	6.21	157136.2	22.64
	1.0	169264.4	161749.6	4.44	139803.0	17.41
	0.8	135411.6	131470.6	2.91	118847.8	12.23

Рис. 2. Графики частот для $l = 15$, $h = 1, 2$

консоли с геометрическими параметрами $l = 20,0$ см, $h = 1,0$ см для двух первых ω_1, ω_2 и двух последних ω_8, ω_9 частот соответственно.

Формы даны для классического и общего случаев. На графиках сплошная линия соответствует классическому случаю, а пунктирная — общему случаю учета инерции поворота сечений и деформаций сдвига.

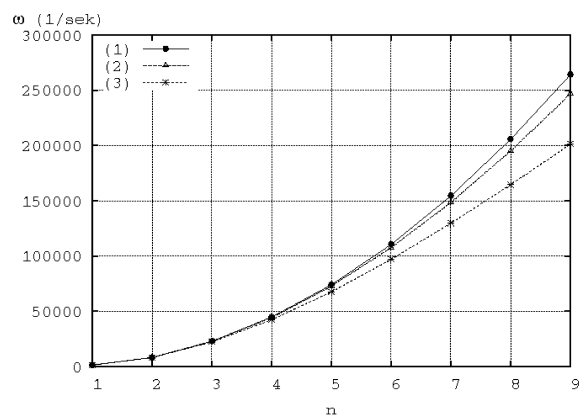


Рис. 3. Графики частот для $l = 20$, $h = 1.0$

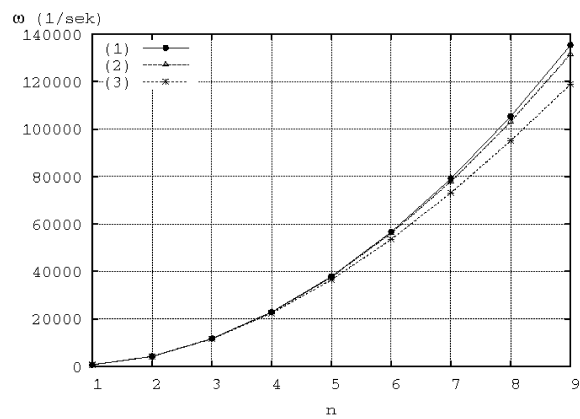


Рис. 4. Графики частот для $l = 25$, $h = 0.8$

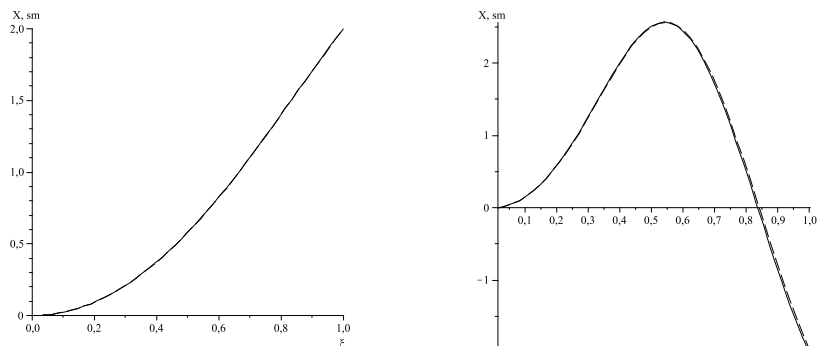


Рис. 5. Первая (слева) и вторая (справа) формы собственных колебаний.

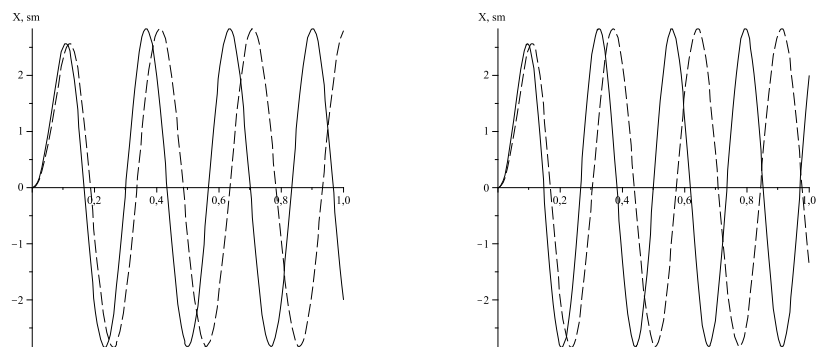


Рис. 6. Восьмая (слева) и девятая (справа) формы собственных колебаний.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Полученные в работе теоретические результаты и их численная реализация при различных параметрах гибкости консольной балки представлены сравнительными графиками спектров собственных круговых частот и форм свободных колебаний в случаях теории Бернулли–Эйлера, а также теории С. П. Тимошенко при учете инерции поворота сечений и деформаций сдвига. Для расчетов использовался математический пакет Maple, показавший, в частности, полное отсутствие сбоя при решении частотного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959.
2. Новожиллов В.В., Слепян Л.И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней. М., ПММ, 1965, Том 29, Вып. 2, С. 261–281
3. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.Н. Расчеты на прочность в машиностроении. М., Машгиз, 1959, Том III, С. 320.
4. Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов. М., Физматгиз, 1959. С. 424.

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ПРЕДОПЕРАЦИОННОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ СТРУКТУР В ГЕРНИОЛОГИИ.

Е. А. ЛЕБЕДЕВА

Построены компьютерные модели, учитывающие реальную геометрию и механические характеристики структур областей тела, проведены экспериментальные исследования их механических свойств и напряженно-деформированного состояния. Разработаны биомеханический метод предоперационного прогнозирования результатов реконструктивных операций на основе компьютерного моделирования и клинических исследований и новое информационное обеспечение для предоперационного прогнозирования состояния структур в герниологии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема лечения грыж брюшной стенки до сих пор привлекает внимание хирургов всего мира. Это можно объяснить большой распространенностью данной патологии и частичной неудовлетворенностью результатами операций, которые обусловлены увеличением числа людей пожилого и старческого возраста с присущими им хроническими заболеваниями, приводящими к периодическому повышению внутрибрюшного давления, а также болезнями обмена веществ, что способствует расхождению футляра мышц передней брюшной стенки. С другой стороны, расширение объема оперативных вмешательств на органах брюшной полости уже само по себе привело к большому количеству грыж в области послеоперационного рубца вследствие как нарушения анатомо-физиологической целостности брюшной стенки, так и возможных дефектов оперативной техники [1, 2]. Наличие грыж нарушает общее состояние больных, снижает их трудоспособность и нередко приводит к тяжелым осложнениям, самым грозным из которых является ущем-

Доклад на семинаре 23 октября 2007 г.

© Е. А. Лебедева, 2008

ление. Послеоперационная летальность при этом неотложном состоянии составляет от 3 до 12 %, а для больных старше 60 лет она возрастает до 16–20 % [1, 3].

Для хирургического лечения различных грыж живота в настоящее время разработаны многочисленные методики – от простых способов за счет собственных тканей больного до сложных реконструктивных операций с использованием биологических и искусственных материалов. Однако, как показывает клинический опыт, ни один из предложенных способов не гарантирует от рецидивов, что может свидетельствовать в ряде случаев о несовершенстве используемых методов лечения.

При хирургических операциях для определения величины и характера воздействия на патологическую структуру при обеспечении минимально возможного повреждения необходимо располагать информацией о ее гистологических, патолого-физиологических, морфологических, геометрических и механических характеристиках и о процессах реконструкции структур как следствия различных режимов воздействия на биологическую структуру при определенном физиологическом состоянии организма пациента в целом. Основным принципом оперативного лечения грыж в настоящее время является индивидуальный, дифференцированный подход к выбору методов сечения. Это связано с тем, что: 1) существует большое количество разных форм и различных сочетаний поражений одних и тех же мышечно-апоневротических структур брюшной стенки; 2) один и тот же патологический процесс протекает по-разному в различных организмах; 3) диагностические методы отражают только состояние, в котором реконструируемые структуры находятся до и после операции; 4) часто технологию проведения реконструкции структур брюшной стенки приходится менять прямо во время операции в связи с выявлением новых диагностических признаков после вскрытия дефекта. Отсутствие необходимых знаний о поведении мышечно-апоневротических структур и возникающего в них напряженно-деформированного состояния объясняет тот факт, что в герниологии из-за отсутствия необходимого информационного обеспечения до настоящего времени не сложилось общего мнения о технологических принципах операций, не изучены условия минимальной травматизации биологических структур. По

сути, операции выполняются "вслепую". Создание новых надежных оперативных методик невозможно без применения методов предоперационного прогнозирования результатов операций. Цель исследования — повышение эффективности предоперационного прогнозирования результатов реконструктивных операций путем совершенствования информационного обеспечения. Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи: 1) построены компьютерные модели, учитывающие реальную геометрию и механические характеристики структур брюшной стенки и паховой области; 2) проведены экспериментальные исследования механических свойств структур передней брюшной стенки и паховой области; 3) проведены исследования напряженно-деформированного состояния, возникающего в структурах брюшной стенки и паховой области при развитии патологии и после реконструкции; 4) разработан биомеханический метод предоперационного прогнозирования результатов реконструктивных операций в герниологии на основе компьютерного моделирования и клинических исследований; 5) усовершенствовано информационное обеспечение системы предоперационного прогнозирования состояния мышечно-апоневротических структур в герниологии.

2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе использованы методы компьютерного моделирования и механики твердого деформированного тела. Компьютерные модели для исследования напряженно-деформированного состояния при хирургических воздействиях на рассматриваемые биологические структуры были реализованы при использовании модуля конечно-элементного анализа COSMOSWorks, интегрированного в систему пространственного моделирования SolidWorks. Для создания информационного обеспечения для системы предоперационного прогнозирования были: 1) выделены основополагающие биомеханические признаки структур; 2) проведены экспериментальные исследования механических свойств структур футляров мышц брюшной стенки; 3) построены компьютерные модели, учитывающие реальную геометрию и механические характеристики струк-

тур, и проведены исследования возникающего в этих структурах напряженно-деформированного состояния при развитии патологии и после реконструкции; 4) разработан метод прогнозирования поведения реконструированных после герниопластики структур при заданных внешних воздействиях.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Строение и функционирование мышечных структур брюшной стенки и паховой области изучены на основании имеющихся в литературе сведений. Проанализированы: 1) диапазон изменения геометрических параметров структур; 2) характер патологических изменений в структурах и способы их коррекции; 3) возможность диагностики геометрических и механических параметров структур, необходимых для построения моделей. Коррекция грыжевого дефекта — это перестройка конструкции мышечных структур брюшной стенки или паховой области в зоне патологического изменения, направленная на формирование новой брюшной стенки в этой зоне или нового пахового канала, максимально приближенных к нормальному состоянию. Структуры брюшной стенки и паховой области могут иметь разную толщину, высоту, гибкость, подвижность, радиус патологического отверстия, выраженность патологических изменений. Поэтому, для того чтобы судить о воздействии на корректируемые структуры, необходимо принимать во внимание три основных фактора: реальную конструкцию патологически измененных структур, механические характеристики тканей структур и значения допускаемых напряжений. Геометрические параметры корректируемых структур можно определить в клинических условиях на компьютерных томограммах брюшной полости или на герниорентгенограммах. В литературе отсутствуют статистически достоверные сведения о модуле нормальной упругости некоторых структур брюшной стенки, паховой области и какие-либо сведения о механических свойствах патологически измененных структур. Для получения этих сведений были проведены экспериментальные исследования модулей нормальной упругости и допускаемых напряжений различных тканей. Анализ показал возможность

рассматривать материал тканей как однородный, изотропный и упругий.

Экспериментальные исследования проведены на образцах, вырезанных при помощи штампа из иссеченных во время хирургических операций структур. Для сохранения жизнеспособности образцы сразу после иссечения помещались в специальный раствор и содержались в нем до начала испытаний [4]. Длина образца 10 мм, ширина 2 мм; толщина варьировалась в зависимости от расположения места, из которого был вырезан образец. Исследования образцов проводили на установке, разработанной совместно с сотрудниками ИТМО, в лаборатории кафедры хирургических болезней № 2 СПб. ГМА им. И. И. Мечникова. Образцы тканей пациентов были разделены на 3 группы. Первую и вторую группы составили образцы белой линии живота (рис.1). В первой группе образцы пациентов, которые не имели патологии со стороны брюшной стенки, во второй тех, которые были оперированы по поводу грыж передней брюшной стенки. В третью группу вошли образцы апоневротических футляров прямых мышц пациентов, которые имели нарушения со стороны брюшной стенки.

Модуль нормальной упругости структур белой линии в норме равен 2.48 ± 0.13 МПа. Модуль нормальной упругости структур белой линии при патологическом состоянии равен 1.61 ± 0.21 МПа. Модуль нормальной упругости структур апоневротических футляров мышц при патологическом состоянии равен 1.37 ± 0.65 МПа. Решение задач биомеханики для тел сложной формы и неоднородной структуры определяет необходимость применения численных сеточных методов. Метод конечных элементов является одним из наиболее эффективных методов расчета напряжений и деформаций в структурах сложной конфигурации. Компьютерные модели для исследования перемещений и напряжений, возникающих в структурах при реконструктивной герниопластике, реализуются при использовании модуля конечно-элементного анализа COSMOSWorks, интегрированного в систему пространственного моделирования SolidWorks [5].

В пакете прикладных программ COSMOSWorks выполняются: 1) имитация процесса исследования объекта при разнообразных вариантах его геометрии и условий нагружения; 2) наглядное графиче-

ческое отображение результатов исследования напряжений и перемещений объекта.

На рис. 1 приведена схема патологического образования в белой линии живота: 1 – брюшина; 2 – прямые мышцы; 3 – апоневрозы прямых мышц; 4 – подкожно-жировая клетчатка; 5 – кожа; 6 – белая линия живота; 7 – патологическое отверстие.

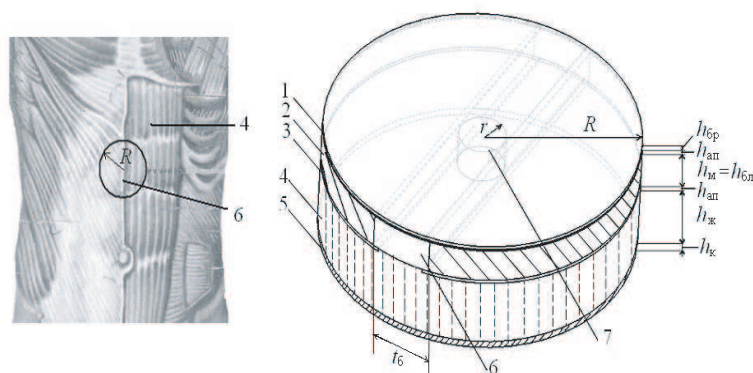


Рис. 1. Схема патологического образования в белой линии живота.

На вклейке на рис. 1 и 2 приведены эпюры напряжений и перемещений в структурах брюшной стенки при исследовании развития патологического отверстия в белой линии живота.

Оценка погрешностей вычисления проведена при сравнении значений перемещений и напряжений в гибких элементах конструкций, полученных конечно-элементным методом при использовании программы COSMOSWorks и аналитическим методом. Аналитический расчет произведен для тонкостенного цилиндра с толщиной h и модулем нормальной упругости E , находящегося под действием внутреннего давления p . Разность результатов экстремальных значений напряжений по безмоментной теории оболочек и трехмерного тела составила 30 %. Проведен анализ влияния внешних воздействий и механических свойств тканей на напряжения и перемещения в структурах передней брюшной стенки человека в норме, при развитии патологических образований в белой линии жи-

вота, при изменении формы патологического образования в белой линии, при ущемлении грыжевых ворот, после проведения различных видов герниопластики белой линии [6], в структурах паховой области при развитии косых и прямых грыж различной степени. При ущемлении грыжи разрушаются ткани в зоне грыжевых ворот. С увеличением жесткости срединного шва при герниопластике белой линии напряжения и перемещения в структурах уменьшаются. Проведен сравнительный биомеханический анализ целесообразности применения герниопластики белой линии живота с использованием сетчатых имплантатов и герниопластики белой линии живота с применением собственных тканей: применение имплантата позволяет значительно снизить напряженно-деформированное состояние в области шва и, следовательно, снизить вероятность возникновения рецидива. Исследования напряжений и перемещений при герниопластике с различным расположением сетчатого имплантата по отношению к апоневротическим футлярам мышц проведены в зависимости от модуля упругости шва (рубца) грыжевого дефекта [7]. Результаты приведены на рис. 2 (1 – под апоневротическими футлярами, 2 – внутри апоневротических футляров, 3 – над апоневротическими футлярами мышц). Наиболее оптимальным, при равных прочих параметрах, является третий вариант.

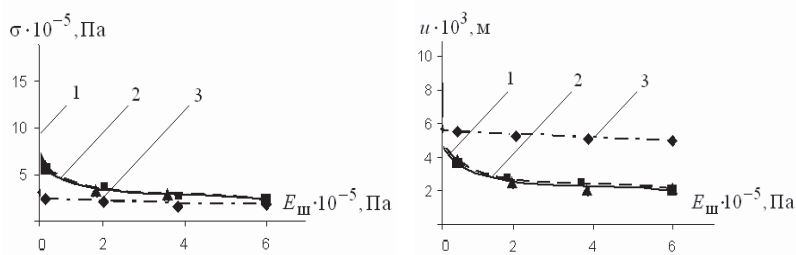


Рис. 2. Зависимости напряжений и перемещений от модуля упругости шва грыжевого дефекта при герниопластике с различным расположением сетчатого имплантата.

Далее был проведен анализ влияния внешних воздействий и механических свойств тканей на напряжения и перемещения в струк-

турах паховой области в норме, при развитии патологического расширения пахового канала, при косой и прямой паховых грыжах различной степени выраженности. При герниопластике пахового канала необходимо восстановление задней стенки пахового канала и нормальных размеров глубокого пахового кольца. При анализе поведения модели варьирование значениями параметров дало возможность определить роль каждого из них на проявление синдрома и, следовательно, рассмотреть множество его вариантов и сочетаний с другими симптомами.

Проведенные исследования влияния геометрических параметров и механических свойств мышечно-апоневротических структур на результат коррекции грыжевого дефекта определяют необходимость, а вводимые при этом погрешности вычислений — возможность создания метода предоперационного прогнозирования результатов реконструктивных герниопластик [8]. Составной биомеханической частью нового информационного обеспечения являются таблицы, содержащие сведения о механических свойствах биологических структур в норме и патологии, компьютерные модели реконструированных передней брюшной стенки и паха, геометрическая программа SolidWorks, программа для расчета напряженно-деформированного состояния методом конечных элементов COSMOSWorks, алгоритмы проведения исследований и предоперационного прогнозирования результатов операций при использовании системы предоперационного прогнозирования состояния структур [9].

Определение необходимых для исследования геометрических размеров выполняется по компьютерным томограммам в вычислительном комплексе томографа. Информация о геометрических размерах структур, представленных к коррекции, передается в систему предоперационной диагностики результатов реконструктивных герниопластик. По базе данных механических свойств подбираются свойства в соответствии с введенными клиническими данными пациента по разработанному в работе алгоритму. Основными критериями являются: 1) пол пациента; 2) возраст; 3) телосложение; 4) срок заболевания. По соответствующим комбинациям этих критериев определяются механические свойства исследуемой ткани. Выбирается модель герниопластики и проводится анализ. Если напря-

жения в структурах превышают допустимые, то производится повторный выбор модели в соответствии с разработанным алгоритмом до тех пор, пока не будет найдена технология хирургического вмешательства, обеспечивающая оптимальный результат операции для данного пациента. Результаты прогноза выводятся на печатающее устройство или на накопитель информации. По результатам проведенного прогноза составляются рекомендации по выбору технологии хирургического вмешательства. Полученный прогноз не является окончательным и требует заключения врача-хирурга.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Усовершенствование информационного обеспечения системы прогнозирования состояния структур позволило учесть индивидуальные особенности геометрических размеров структур брюшной стенки и патологии конкретного пациента, определить величину механического воздействия и технологию оперативного вмешательства, необходимого для восстановления брюшной стенки или паха, при сохранении их функциональных свойств и тем самым осуществить предоперационное прогнозирование результатов реконструктивных операции и состояния структур в герниологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жебровский В.В. Хирургия грыж живота. М.: МИА, 2005.
2. Тимошин А.Д., Юрасов А.В. Хирургическое лечение паховых и послеоперационных грыж брюшной стенки. М.: Триада-Х, 2003.
3. Орозовский В.И. Основные грыжесечения., МУНЦЭХ, КИТИС, 2000.
4. Фын Ю.Ч. Теоретическая и прикладная механика. Труды 14 международного конгресса IUTAM. М.: Мир, 1997. С. 100–135
5. Алямовский А.А. SolidWorks. Компьютерное моделирование в инженерной практике. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
6. Бегун П.И., Е.А. Лебедева Е.А. Биомеханические исследования состояния биологических структур в герниологии. Биомеханика-2006. Тез. докл. VIII Всеросс. конф. по биомеханике. Н.Новгород, 2006. С. 174–175
7. Лебедева Е.А. Компьютерное моделирование биологических структур в герниологии// Известия ТРТУ. Сер. «Медицинские информационные системы». 2006. № 11. С.90–94
8. Бегун П.И., Лазарев С.М., Лебедева Е.А. Информационное обеспечение исследований и коррекции в герниологии// Информационно-управляющие системы. Сер. «Управление в медицине и биологии». 2006. № 2 (21). С. 47–52.

9. *Лебедева Е.А.* Предоперационное прогнозирование результатов операции в герниологии. Физика и радиоэлектроника в медицине и экологии. ФРЭМЭ-2008. Доклады VIII междунар. науч.-техн. конф. Владимир, 2008. С. 290–292.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ЧЕТВЕРТИ КОЛЬЦА ПРИ ДЕЙСТВИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СИЛЫ

М. С. Сайкова

Рассматривается сильный изгиб четверти кругового кольца, один конец которого жестко закреплён, а на другом действует горизонтальная сила, не меняющая своего направления в процессе деформации. Методом эллиптических параметров получены решение нелинейной задачи и соответствующие расчетные формулы. Проведены расчеты на основе найденного аналитического решения, а также численным методом конечных элементов, результаты которых представлены в виде таблиц и графиков.

1. ВВЕДЕНИЕ

Упругие гибкие элементы широко применяются в современной технике. Особенностью сильного изгиба тонких стержней являются большие перемещения, сравнимые с длиной стержня, которые существенно нелинейно зависят от внешних усилий. При этом деформации остаются малыми и материал работает в области упругости, что позволяет использовать соотношения упругости линейной теории. Точная теория сильного плоского изгиба тонких упругих стержней была разработана в работах В. З. Власова, В. В. Новожилова, Е. П. Попова, В. А. Светлицкого [1, 2, 3, 4]. При построении теории сильного изгиба плоских криволинейных стержней принимаются следующие допущения:

- а) поперечные нормальные сечения стержня, плоские до деформации, остаются нормальными и плоскими после деформации;
- б) размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной и радиусом кривизны оси стержня;

Доклад на семинаре 25 октября 2007 г.

© М. С. Сайкова, 2007

- с) стержень работает в области упругих деформаций: деформации малы, а напряжения не превышают предела пропорциональности; при этом на перемещения не накладывается ограничений;
- д) осевая линия стержня считается нерастяжимой.

2. Постановка задачи. Вывод основных соотношений

Рассмотрим сильный изгиб стержня в виде четверти дуги кольца начальной кривизны $1/a$, имеющего вид тонкой полоски с прямоугольным сечением толщины h и ширины b , что при $h \ll b$ обеспечивает изгиб и возможную потерю устойчивости в плоскости оси. Длина стержня равна s_1 , а положение произвольной точки $B(s)$ оси, лежащей в плоскости поперечного сечения, определяется координатой s в интервале $0 \leq s \leq s_1$, где s — длина дуги, отсчитываемая от начальной точки 0. Стержень нагружен сосредоточенной силой P_1 на конце $s = s_1$. Распределенные силовая и моментная нагрузки отсутствуют. В точке заделки $s = 0$ действуют сила реакции P_0 , равная по величине P_1 , и момент реакции M_0 , который является неизвестным (рис. 1).

Введем локальную систему координат с единичными векторами касательной к упругой линии $\vec{e}_t$ и нормали $\vec{e}_n$. Продольная сила N и внутренний изгибающий момент M в произвольной точке $B(s)$ (рис. 1) связаны с деформацией ε и изменением кривизны $\varkappa$ в соответствующей точке оси стержня следующим образом:

$$N = EF\varepsilon, \quad M = EJ\varkappa, \quad (1)$$

где $F = bh$ — площадь сечения, $J = bh^3/12$ — момент инерции. Для кривизны упругой линии $1/\rho$ принимается точное выражение

$$\varkappa = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}, \quad (2)$$

где θ — угол наклона касательной в результате деформации.

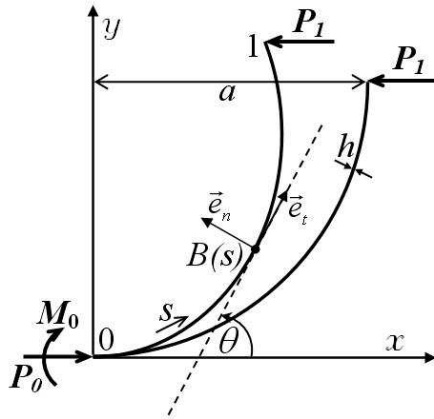


Рис. 1. Система координат. Действующие нагрузки.

Координаты точки $B(s)$ оси стержня в декартовой системе координат xOy , связанной с начальной точкой стержня 0 (рис. 1), после деформации определяются соотношениями

$$x(s) = \int_0^s \cos \theta ds, \quad y(s) = \int_0^s \sin \theta ds. \quad (3)$$

Составим условия равновесия стержня для деформированного состояния. Рассмотрим малый элемент стержня длины ds (рис. 2).

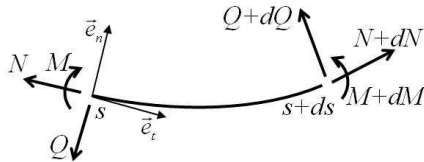


Рис. 2. Положительные направления усилий N , Q и момента M в сечениях s и $s + ds$ стержня.

Будем пренебрегать растяжением стержня [3].

Нелинейные уравнения равновесия элемента стержня (уравнения Кирхгофа–Клебша), выведенные в предположении нерастяжимости оси, в случае плоского поперечного изгиба [4] имеют вид

$$\frac{dN}{ds} - Q \frac{d\theta}{ds} = 0, \quad \frac{dQ}{ds} - N \frac{d\theta}{ds} = 0, \quad \frac{dM}{ds} + Q = 0. \quad (4)$$

Отнесем индекс 0 к величинам в начальной точке $s = 0$, а индекс 1 – к значениям в конечной точке $s = s_1$. Граничные условия в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} s = 0: \quad \theta_0 = 0, \quad N_0 = -P_1, \quad Q_0 = 0, \\ s = s_1: \quad N_1 = -P_1 \cos \theta_1, \quad Q_1 = P_1 \sin \theta_1, \quad M_1 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем искать решение для внутренних усилий из первых двух уравнений системы (4) как функцию от $\theta(s)$. Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} N(s) &= -C_1 \cos \theta(s) + C_2 \sin \theta(s), \\ Q(s) &= C_1 \sin \theta(s) + C_2 \cos \theta(s). \end{aligned} \quad (6)$$

Константы интегрирования C_1, C_2 определим, подставляя выражения для усилий (6) в граничные условия (5):

$$C_1 = P_1, \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, формулы (6) принимают вид

$$N(s) = -P_1 \cos \theta(s), \quad Q(s) = P_1 \sin \theta(s). \quad (7)$$

Подставляя поперечную силу в уравнение моментов (4), имеем

$$\frac{dM}{ds} = -P_1 \sin \theta(s). \quad (8)$$

Выражая момент через угол поворота, получаем дифференциальное уравнение равновесия упругой линии стержня:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P_1}{EJ} \sin \theta(s). \quad (9)$$

Воспользуемся методом эллиптических параметров [3] для решения нелинейного уравнения (9). Введем следующее обозначение:

$$k^2 = \frac{P_1}{EJ}, \quad (10)$$

и перепишем уравнение равновесия (9) в виде

$$d \left(\frac{d\theta}{ds} \right) = -k^2 \sin \theta d\theta. \quad (11)$$

Следуя [3], умножим обе части равенства (11) на $d\theta/ds$ и проинтегрируем, используя равенство

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Первый интеграл (11) имеет вид

$$\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 4k^2 \left(C - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (12)$$

Так как левая часть соотношения (12) неотрицательна, то можно выделить 3 случая.

1. Случай перегибной формы изгиба, когда в некоторой точке A упругой линии угол наклона касательной $\theta(s)$ принимает экстремальное значение. Это означает, что

$$\frac{1}{\rho} \Big|_A = \frac{d\theta}{ds} \Big|_A = 0.$$

Из (12) следует, что $C = \sin^2 (\theta_A/2)$. Таким образом,

$$(\sin^2 (\theta/2))_{\max} \leq C < 1$$

и можно ввести обозначение

$$C = m^2, \quad \text{где } 0 \leq m < 1.$$

2. Случай бесперегибной формы изгиба (точки перегиба отсутствуют), тогда

$$1 < C < \infty$$

и вводится обозначение

$$C = \frac{1}{m^2}, \text{ где } 0 < m < 1.$$

3. В переходном случае

$$C = 1.$$

Предположим, что в этом случае реализуется бесперегибная форма изгиба стержня (рис. 1). Будем решать уравнение (12) при указанном предположении. В этом случае вводится вспомогательная функция $\psi(\theta)$ по соотношению

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \psi \quad (13)$$

таким образом, чтобы она непрерывно возрастала с увеличением координаты s :

$$\frac{d\psi}{ds} > 0 \text{ при } -\pi/2 \leq \psi < +\infty,$$

и уравнение (12) приводится к виду

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \frac{2}{m} k \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}, \quad (14)$$

где вместо двойного знака ставится знак кривизны оси стержня (знак постоянен, поскольку, согласно предположению, точки перегиба отсутствуют). Интегрируя (14) с учетом (13), получим решение

$$ks = m (F(\psi) - F(\psi_0)), \quad (15)$$

где введено обозначение

$$F(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}}.$$

Выражение, связывающее величины θ и ψ , получим из решения уравнения (13) с учетом того, что $\theta_0 = 0$:

$$\theta = 2\psi. \quad (16)$$

Из формул (1), (2), (14) следует, что внутренний изгибающий момент M связан с функцией ψ соотношением

$$M = EJ \left(\pm \frac{2}{m} k \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi} - \frac{1}{a} \right). \quad (17)$$

Подставляя формулы (13), (14), (17) в граничные условия (5), получим систему

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0, \quad ks_1 = mF((\psi_1) - F(\psi_0)), \\ \frac{2}{m} k \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi_1} - \frac{1}{a} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

из которой численным методом определим значения m, ψ_1 .

Координаты упругой линии $x(s), y(s)$ в системе координат xOy находятся по формуле (3) с учетом соотношений (13), (16), (18):

$$\begin{aligned} x &= \int_0^s \cos \theta ds = \frac{2}{km} (E(\psi) - 1) + \left(1 - \frac{2}{m^2} \right) s, \\ y &= \int_0^s \sin \theta ds = \frac{2}{km} \left(1 - \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где введено обозначение $E(\psi) = \int_0^\psi \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi} d\psi$. Определив координаты изогнутой оси после изгиба, можно найти смещения каждой точки на оси стержня. Нормальное напряжение определяется по известной формуле

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M. \quad (20)$$

Здесь

$$\sigma_N = \frac{N}{bh}, \quad \sigma_M = \mp \frac{6M}{bh^2}, \quad (21)$$

где σ_N — равномерно распределенное в сечении осевое напряжение, σ_M — напряжение изгиба при $z = \pm h/2$ соответственно.

Проверим выполнение условия равновесия стержня в целом. В заделке действует момент M_0 , величина которого определяется по формуле (17):

$$M_0 = EJ \left(\frac{2}{m} k - \frac{1}{a} \right).$$

С другой стороны,

$$M_0 = P_1 y_1,$$

где величины P_1 , y_1 находятся по формулам (10), (18), (19).

$$P_1 = k^2 EJ, \quad y_1 = \frac{2ak - m}{ak^2 m},$$

и, следовательно,

$$M_0 = EJ \left(\frac{2ak - m}{am} \right).$$

Таким образом, условие равновесия в целом выполнено.

3. ВАРИАЦИОННЫЙ ВЫВОД РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Покажем, как уравнение равновесия (9) можно получить с помощью вариационных принципов. Для вывода уравнения равновесия воспользуемся принципом стационарности полной потенциальной энергии системы

$$\delta\Pi = 0.$$

Полная потенциальная энергия (лагранжиан) системы имеет вид [3]

$$\Pi = U - A, \quad (22)$$

где потенциальная энергия деформации (U) в данном случае — это энергия деформации изгиба стержня

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^{s_1} \kappa^2 ds = \frac{EJ}{2} \int_0^{s_1} \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{a} \right)^2 ds, \quad (23)$$

а работа (A) всех внешних сил и моментов, приложенных к стержню, на соответствующих им перемещениях определяется по формуле

$$A = P_1 u_{x1} = P_1 \int_0^{s_1} \cos \theta ds. \quad (24)$$

Через u_{x1} обозначено горизонтальное смещение конца стержня $s = s_1$ в направлении оси Ox . Это смещение согласно формуле (3) определяется следующим образом:

$$u_{x1} \equiv u_x(s_1) = \int_0^{s_1} \cos \theta ds - a.$$

Найдем вариацию U и A в выражении (22):

$$\begin{aligned}\delta U &= \delta \frac{EJ}{2} \int_0^{s_1} \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{a} \right)^2 ds = \\ &= EJ \int_0^{s_1} -\frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{a} \right) \delta\theta ds + EJ \left[\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{a} \right) \delta\theta \right]_0^{s_1}, \\ \delta A &= \delta P_1 \int_0^{s_1} \cos \theta ds = -P_1 \int_0^{s_1} \sin \theta \delta\theta ds.\end{aligned}$$

Из требования стационарности энергии $\delta\Pi = 0$ и в силу произвольности вариации $\delta\theta$ получаем уравнение равновесия

$$EJ \frac{d^2\theta}{ds^2} + P_1 \sin \theta = 0,$$

которое полностью совпадает с уравнением равновесия (9).

4. ПРИМЕР РАСЧЕТА

При выполнении расчета были приняты следующие исходные данные:

$$a = 40 \text{ см}, \quad h = 0,2 \text{ см}, \quad b = 1 \text{ см}, \quad E = 2100000 \text{ кгс/см}^2.$$

В табл. 1 представлены значения m , ψ_1 , θ_1 , u_{x1} и u_{y1} , вычисленные по формулам (18)–(19) при различной величине приложенной силы P . Там же приведены значения перемещений концевой точки стержня $s = s_1$, полученные методом конечных элементов.

На рис. 3 изображены очертания осевой линии стержня после изгиба. Длины всех кривых одинаковы и равны длине оси неизогнутого стержня $s_1 = \pi a/2$. Пунктирная линия 0 соответствует форме оси до деформации. Номера кривых на рис. 3–7 соответствуют номерам нагружения в таблицах.

В табл. 2 приводятся значения внутренних усилий N , Q и изгибающего момента M в сечениях $s = s_1$, $s = 0$, а также максимальные значения напряжений σ_N и σ_M при $z = h/2$ от сжатия и изгиба (21), которые возникают в сечении $s = 0$, при различной величине приложенной горизонтальной силы P .

Таблица 1. Значения перемещений и угла поворота на конце стержня

Номер нагру- жения	P , кгс	t	ψ_1 , рад	θ_1 , рад	u_{x1} , см	u_{x1} , см МКЭ	u_{y1} , см	u_{y1} , см МКЭ
0	0,00	0,00	0,79	1,57	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,05	0,45	0,86	1,63	-1,86	-1,86	1,13	1,13
2	0,15	0,70	0,88	1,75	-5,94	-5,92	3,22	3,21
3	0,25	0,81	0,94	1,88	-10,38	-10,37	4,98	4,98
4	0,35	0,87	1,01	2,01	-15,00	-15,00	6,29	6,29
5	0,45	0,89	1,07	2,14	-19,58	-19,58	7,11	7,11

Таблица 2. Величины усилий, моментов и напряжений
в концевых сечениях стержня

Номер нагру- жения	P , кгс	N_0 , кгс	N_1 , кгс	Q_1 , кгс	M_0 , кгс·см	σ_{N1} , кгс/см ²	σ_{M1} , кгс/см ²
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,05	-0,05	2,06	0,05	2,06	-0,25	-308,44
2	0,15	-0,15	6,48	0,15	6,48	-0,75	-972,40
3	0,25	-0,25	11,24	0,24	11,24	-1,25	-1686,57
4	0,35	-0,35	16,20	0,32	16,20	-1,75	-2430,05
5	0,45	-0,45	21,20	0,38	21,20	-2,25	-3179,99

Указанные значения вычислены по аналитическим формулам (7), (17), (21).

Как видно из табл. 2, напряжения от продольной силы σ_N незначительны по сравнению с напряжениями изгиба σ_M . Это верно всюду, кроме малой области у концевой точки 1, так как при $s = s_1$ выполняется: $\sigma_N = N_1/bh$, $\sigma_M = 0$. Напряжения в каждом сечении не превышают предела текучести (для стали).

На рис. 4–6 изображены кривые продольной силы N , поперечной силы Q и изгибающего момента M при различных значениях изгибающей силы P . На рис. 7 построен график напряжения σ на

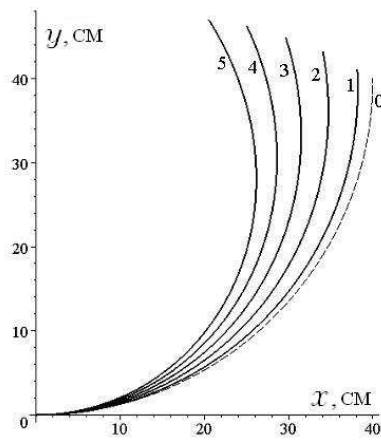


Рис. 3. Ось стержня после деформации.

расстоянии от оси $z = h/2$, вычисленного по формуле (21).

Из рис. 4 видно, что нормальная сила N обращается в ноль и меняет знак в сечении, которое согласно формуле (7) соответствует углу наклона $\theta = \pi/2$. Из второго уравнения равновесия (4) следует, что в этом сечении $dQ/ds = 0$ и перерезывающая сила принимает экстремальное значение (рис. 5).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В исследовании получены следующие основные результаты:

1. методом эллиптических параметров [3] исследован сильный нелинейный изгиб четверти дуги кругового кольца при действии горизонтальной силы на свободном конце;
2. получены точные решения в аналитической форме, которые позволяют находить перемещения точек изогнутой оси стержня, усилия и моменты в каждом сечении, а также соответствующие напряжения;

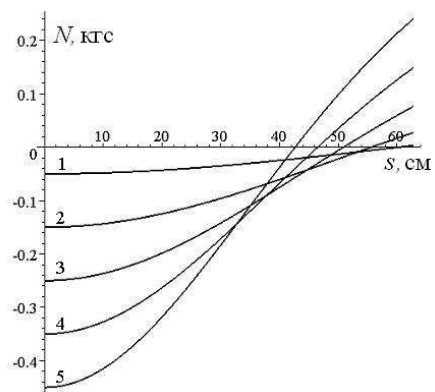


Рис. 4. График усилия N при различных значениях силы P .

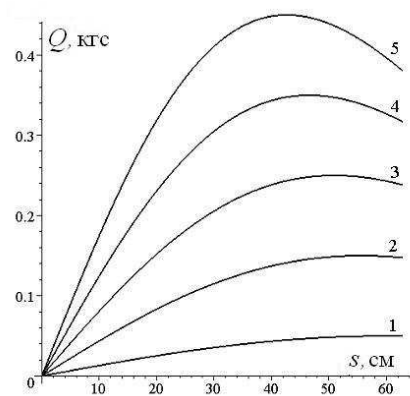


Рис. 5. График перерезывающей силы Q при различных значениях P .

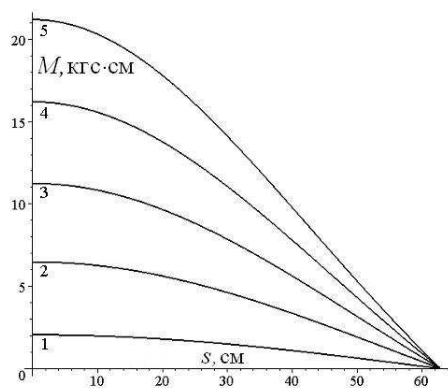


Рис. 6. График внутреннего момента M при различных значениях P .

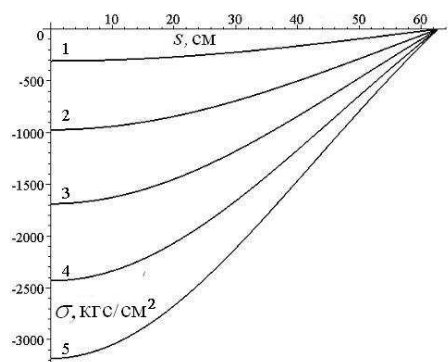


Рис. 7. График напряжения σ при $z = \frac{h}{2}$.

3. на основе полученного решения выполнены расчеты, результаты которых проиллюстрированы в виде таблиц и графиков; дополнительно был проведен расчет задачи методом конечных элементов; следует отметить, что этот метод дает результаты, весьма близкие к аналитическим (погрешность значительно меньше одного процента).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов Л. М.* Тонкостенные упругие стержни. М., 1955.
2. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.;М.: ОГИЗ Гостехтеориздат, 1948.
3. *Попов Е. П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
4. *Светлицкий В. А.* Механика стержней. М.: Высшая школа, 1987.

ПОЛЕ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ИНТРАОКУЛЯРНЫХ ЛИНЗАХ (ИОЛ)

Д. А. Морщинина

Рассматривается плоская задача линейной теории упругости для оптического диска интраокулярной линзы, нагруженного самоуравновешенными сосредоточенными силами и моментами. Проводится сравнение выведенных соотношений для напряжений, возникающих в диске, с аналогичными результатами для полуплоскости. На основе нелинейной теории изгиба тонких криволинейных стержней исследуется напряженно-деформированное состояние опорных элементов ИОЛ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Катаракта — одно из наиболее опасных глазных заболеваний. Последние исследования в области офтальмологии показали, что в мире насчитывается свыше 45 млн слепых людей, при этом основной причиной потери зрения является катаракта. Число ослепших вследствие этого недуга составляет более 20 млн человек.

Термин “катаракта” (от греч. *katarrháktes*) означает помутнение хрусталика глазного яблока [1]. Хрусталик взрослого человека представляет собой прозрачную, двояковыпуклую линзу диаметром 9–10 мм. В глазу он располагается за радужкой, в углублении на передней части стекловидного тела, и выполняет оптическую функцию — фокусирует изображение на сетчатку. Со временем происходит помутнение хрусталика, препятствующее прохождению света и формированию изображения на сетчатке, в результате чего возникает катаракта.

В настоящее время единственным способом лечения катаракты является замена помутневшего естественного хрусталика искусственным, так называемой интраокулярной линзой (ИОЛ), состоящей из двух частей: оптической, представляющей собой центральную линзу, которая фокусирует изображение на сетчатку, и опор-

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00171а.

Доклад на семинаре 4 декабря 2007 г.

© Д. А. Морщинина, 2008

ных элементов, называемых гаптикой [2]. Как правило, оптическая часть изготавливается из полиметилметакрилата, акрила, силикона, а гаптика — из полипропилена, акрила или силикона.

Искусственные хрусталики применяются с 1949 г., и на сегодняшний день существует множество моделей, которые отличаются по способу фиксации в глазу и по конструкции опорных элементов [3, 4]. В данной работе рассматриваются современные интраокулярные линзы, имеющие гаптику в виде С-образной петли (рис. 1).

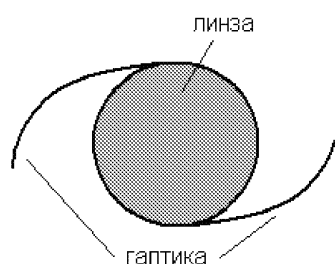


Рис. 1. Схематическое изображение интраокулярной линзы с С-образной гаптикой.

С точки зрения механики деформируемого тела оптическую часть интраокулярной линзы можно считать изотропным диском; опорные элементы естественно рассматривать как тонкие криволинейные стержни, жестко закрепленные на контуре диска и абсолютно свободные на другом конце.

В результате имплантации интраокулярной линзы в капсулу хрусталика опорные элементы оказываются изогнутыми, в местах их соединения с оптическим диском возникают реакции взаимодействия — сосредоточенные силы и моменты. В связи с этим оценка напряженно-деформированного состояния интраокулярной линзы состоит в определении поля напряжений в диске и в вычислении прогибов опорных элементов. При этом в первом случае рассматривается плоская задача линейной теории упругости, а во втором — нелинейная теория изгиба тонких криволинейных стержней.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ДИСКЕ ИОЛ

Рассмотрим в декартовой системе координат $x y$ изотропный упругий диск радиуса R , на контуре которого действуют сосредоточенные силы P , приложенные в точках $z_1 = R$, $z_2 = -R$ (рис. 2).

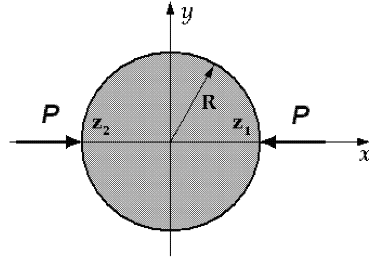


Рис. 2. Диск под действием сосредоточенных сил P .

Компоненты напряжения и перемещения в произвольной точке диска $z = x + iy$ определяются формулами Г. В. Колосова [5]:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right], \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2 \left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) \right], \quad (1)$$

$$\frac{E}{(1+\nu)}(u + iv) = k\varphi(z) - \overline{z\varphi(z)} - \psi(z), \quad (2)$$

где $\varphi(z) = \int \Phi(z) dz$; $\psi(z) = \int \Psi(z) dz$; $k = (3 - \nu) / (1 + \nu)$; E и ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлен диск.

Согласно [6], регулярные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ имеют вид

$$\Phi(z) = -\frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z_1 - z} - \frac{1}{z_2 - z} - \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{2R^2} \right\},$$

$$\Psi(z) = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z_1 - z} - \frac{1}{z_2 - z} + \frac{\bar{z}_1}{(z_1 - z)^2} - \frac{\bar{z}_2}{(z_2 - z)^2} \right\}.$$

Полагая в данных зависимостях $z_1 = \bar{z}_1 = R$, $z_2 = \bar{z}_2 = -R$, получаем

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{2R}{R^2 - z^2} - \frac{1}{R} \right\}, \\ \Psi(z) &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{2R}{R^2 - z^2} + \frac{2R(R^2 + z^2)}{(R^2 - z^2)^2} \right\}.\end{aligned}\quad (3)$$

Внеся выражения (3) в формулы (1), после соответствующих преобразований находим компоненты напряжения:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{P}{2\pi} \left[\frac{4(R-x)^3}{\left((R-x)^2 + y^2\right)^2} + \frac{4(R+x)^3}{\left((R+x)^2 + y^2\right)^2} - \frac{2}{R} \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{P}{2\pi} \left[-\frac{4y^2(R-x)}{\left((R-x)^2 + y^2\right)^2} - \frac{4y^2(R+x)}{\left((R+x)^2 + y^2\right)^2} + \frac{2}{R} \right], \\ \sigma_{xy} &= \frac{Py}{2\pi} \left[\frac{4(R-x)^2}{\left((R-x)^2 + y^2\right)^2} - \frac{4(R+x)^2}{\left((R+x)^2 + y^2\right)^2} \right].\end{aligned}$$

В безразмерном виде эти соотношения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^0 &= \frac{\sigma_{xx}\pi R}{2P} = \frac{1}{2} - \frac{(1-x_0)^3}{\left((1-x_0)^2 + y_0^2\right)^2} - \frac{(1+x_0)^3}{\left((1+x_0)^2 + y_0^2\right)^2}, \\ \sigma_{yy}^0 &= \frac{\sigma_{yy}\pi R}{2P} = \frac{1}{2} - \frac{(1-x_0)y_0^2}{\left((1-x_0)^2 + y_0^2\right)^2} - \frac{(1+x_0)y_0^2}{\left((1+x_0)^2 + y_0^2\right)^2}, \\ \sigma_{xy}^0 &= \frac{\sigma_{xy}\pi R}{2P} = y_0 \left[\frac{(1-x_0)^2}{\left((1-x_0)^2 + y_0^2\right)^2} - \frac{(1+x_0)^2}{\left((1+x_0)^2 + y_0^2\right)^2} \right].\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь и ниже $x_0 = x/R$, $y_0 = y/R$ — безразмерные координаты.

Графики распределения напряжений $\sigma_{xx}^0 = \sigma_{xx}^0(y_0)$, $\sigma_{yy}^0 = \sigma_{yy}^0(y_0)$, $\sigma_{xy}^0 = \sigma_{xy}^0(y_0)$ в диске в сечениях $x_0 = (0, 0.25, 0.5, 0.75)$ представлены на рис. 3 кривыми 1–4 соответственно.

Рассмотрим теперь диск, загруженный самоуравновешенными сосредоточенными моментами $\mathbf{M}$ в точках $z_1 = R$, $z_2 = -R$ (рис. 4а). Компоненты напряжения в данном случае можно получить на основе решения вспомогательной задачи, когда на диск действуют четыре сосредоточенные силы $\mathbf{P}$, приложенные в точках $z_1^0 = R$, $z_2^0 = -R$, $z_1^1 = Re^{i\alpha}$, $z_2^1 = Re^{i(\pi-\alpha)}$, где $\alpha \ll 1$ (рис. 4б).

Комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для вспомогательной задачи имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \Phi^0(z) + \Phi^1(z) = -\frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z_1^0 - z} - \frac{1}{z_2^0 - z} - \frac{\bar{z}_1^0 - \bar{z}_2^0}{2R^2} \right\} + \\ &+ \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z_1^1 - z} - \frac{1}{z_2^1 - z} - \frac{\bar{z}_1^1 - \bar{z}_2^1}{2R^2} \right\}, \\ \Psi(z) &= \Psi^0(z) + \Psi^1(z) = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z_1^0 - z} - \frac{1}{z_2^0 - z} + \frac{\bar{z}_1^0}{(z_1^0 - z)^2} - \right. \\ &- \left. \frac{\bar{z}_2^0}{(z_2^0 - z)^2} \right\} - \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z_1^1 - z} - \frac{1}{z_2^1 - z} + \frac{\bar{z}_1^1}{(z_1^1 - z)^2} - \frac{\bar{z}_2^1}{(z_2^1 - z)^2} \right\}.\end{aligned}$$

Подставляя сюда соответствующие значения z_1^0 , z_2^0 , z_1^1 , z_2^1 и осуществляя предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ с учетом того, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} PR\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} PR \sin \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} Ph = M = \text{const}$, получаем

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{Mi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(R+z)^2} - \frac{1}{(R-z)^2} \right\}, \\ \Psi(z) &= \frac{Mi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(R-z)^2} - \frac{1}{(R+z)^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{3R^2 - 4Rz + z^2}{(R-z)^4} - \frac{3R^2 + 4Rz + z^2}{(R+z)^4} \right\}.\end{aligned}\tag{5}$$

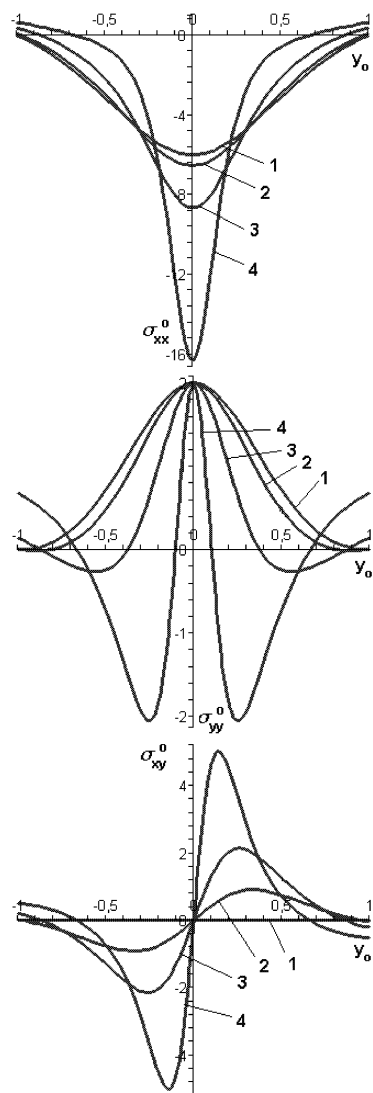
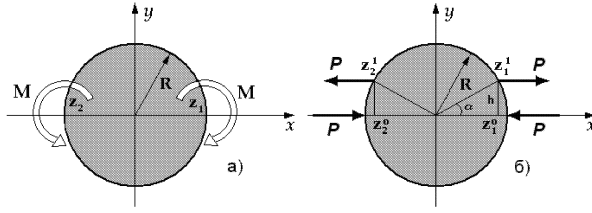


Рис. 3. Распределение напряжений в диске, нагруженном сосредоточенными силами.

Рис. 4. Диск под действием сосредоточенных моментов $\mathbf{M}$.

Аналогично предыдущему случаю находим выражения для безразмерных напряжений σ_{xx}^* , σ_{yy}^* , σ_{xy}^* :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* = \sigma_{xx} 2\pi R^2 / M = & \left[24(1+x_0)^3 y_0 - 24(1+x_0) y_0^3 + \right. \\ & + 48x_0(1+x_0)^3 y_0 - 48x_0(1+x_0) y_0^3 - 8(1+x_0)^4 y_0 + \\ & + 48(1+x_0)^2 y_0^3 - 8y_0^5 + 24(1+x_0)^3 x_0^2 y_0 - 8x_0 y_0^5 - \\ & - 24(1+x_0) x_0^2 y_0^3 - 8(1+x_0)^3 y_0^3 + 8(1+x_0) y_0^5 - \\ & - 8(1+x_0)^4 x_0 y_0 + 48(1+x_0)^2 x_0 y_0^3 \left. \right] / \left((1+x_0)^2 + y_0^2 \right)^4 + \\ & + \left[24(1-x_0)^3 y_0 - 24(1-x_0) y_0^3 - 48x_0(1-x_0)^3 y_0 + \right. \\ & + 48x_0(1-x_0) y_0^3 - 8(1-x_0)^4 y_0 + 48(1-x_0)^2 y_0^3 - 8y_0^5 + \\ & + 24(1-x_0)^3 x_0^2 y_0 - 24(1-x_0) x_0^2 y_0^3 - 8(1-x_0)^3 y_0^3 + \\ & + 8(1-x_0) y_0^5 + 8x_0(1-x_0)^4 y_0 - 48x_0(1-x_0)^2 y_0^3 + \\ & \left. + 8x_0 y_0^5 \right] / \left((1-x_0)^2 + y_0^2 \right)^4 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^* = \sigma_{yy} 2\pi R^2 / M = & \left[16x_0(1-x_0)^3 y_0 - 16x_0(1-x_0) y_0^3 - \right. \\ & - 8(1-x_0)^3 y_0 + 8(1-x_0) y_0^3 - 8(x_0^2 + y_0^2)(1-x_0)^3 y_0 + \\ & + 8(x_0^2 + y_0^2)(1-x_0) y_0^3 \left. \right] / \left((1-x_0)^2 + y_0^2 \right)^4 - \left[8(1+x_0)^3 y_0 - \right. \\ & - 8(1+x_0) y_0^3 + 16x_0(1+x_0)^3 y_0 - 8(x_0^2 + y_0^2)(1+x_0) y_0^3 + \\ & + 8(x_0^2 + y_0^2)(1+x_0)^3 y_0 - 16x_0(1+x_0) y_0^3 \left. \right] / \left((1+x_0)^2 + y_0^2 \right)^4 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^* = \sigma_{xy} 2\pi R^2 / M = & [4(1+x_0^2)(1-x_0)^4 + 4(1+x_0^2)y_0^4 - \\
& - 24(1+x_0^2)(1-x_0)^2 y_0^2 - 8x_0(1-x_0)^4 + 16(1-x_0)^3 y_0^2 - \\
& - 8x_0 y_0^4 + 48x_0(1-x_0)^2 y_0^2 - 16x_0(1-x_0)^3 y_0^2 - \\
& - 16(1-x_0)y_0^4 - 16x_0(1-x_0)y_0^4] / \left((1-x_0)^2 + y_0^2 \right)^4 - \\
& - [4(1+x_0^2)(1+x_0)^4 - 24(1+x_0^2)(1+x_0)^2 y_0^2 + 8x_0 y_0^4 + \\
& + 4(1+x_0^2)y_0^4 + 8x_0(1+x_0)^4 - 48x_0(1+x_0)^2 y_0^2 + \\
& + 16(1+x_0)^3 y_0^2 - 16(1+x_0)y_0^4 + 16x_0(1+x_0)^3 y_0^2 - \\
& - 16x_0(1+x_0)y_0^4] / \left((1+x_0)^2 + y_0^2 \right)^4. \quad (6)
\end{aligned}$$

Графики $\sigma_{xx}^* = \sigma_{xx}^*(y_0)$, $\sigma_{yy}^* = \sigma_{yy}^*(y_0)$, $\sigma_{xy}^* = \sigma_{xy}^*(y_0)$ при $x_0 = (0, 0.25, 0.5, 0.75)$ представлены на рис. 5 соответственно кривыми 1–4.

3. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Введем полярную систему координат r, φ . Тогда, согласно [6], формулы для определения компонент напряжения в произвольной точке диска $z = x + iy = re^{i\varphi}$ имеют следующий вид:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = 4\operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\varphi} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\varphi}, \quad (7)$$

где комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ выражаются зависимостями (3) в случае, когда диск загружен сосредоточенными силами $\mathbf{P}$, и соотношениями (5), когда на диск действуют сосредоточенные моменты $\mathbf{M}$.

Подставляя в равенства (7) выражения для $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ согласно формулам (3) и (5), имеем:

— для диска, загруженного сосредоточенными силами $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} = & -\frac{P}{\pi} \left[\frac{2R^3 - 2Rr^2 \cos 2\varphi}{R^4 - 2R^2 r^2 \cos 2\varphi + r^4} + 2(R^3 - Rr^2)(R^4 \cos 2\varphi - \right. \\
& \left. - 2R^2 r^2 + r^4 \cos 2\varphi) / (R^4 - 2R^2 r^2 \cos 2\varphi + r^4)^2 - \frac{1}{R} \right],
\end{aligned}$$

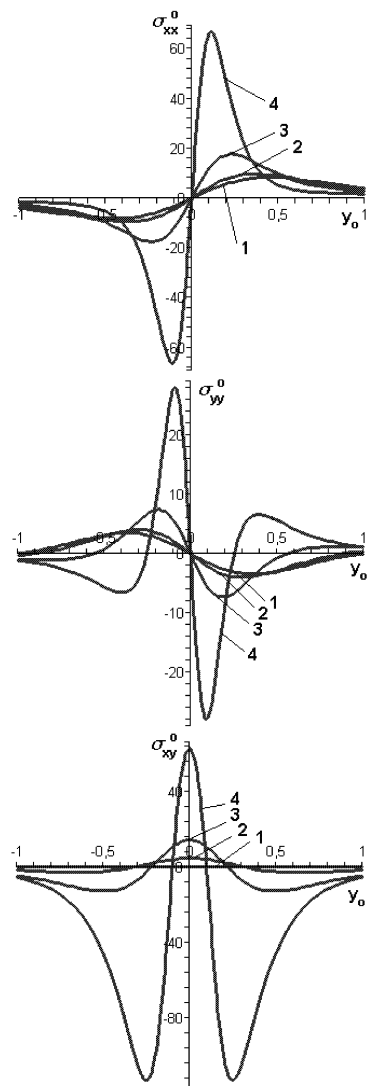


Рис. 5. Распределение напряжений в диске, на который действуют сосредоточенные моменты.

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} &= -\frac{P}{\pi} \left[\frac{2R^3 - 2Rr^2 \cos 2\varphi}{R^4 - 2R^2r^2 \cos 2\varphi + r^4} - 2(R^3 - Rr^2)(R^4 \cos 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2R^2r^2 + r^4 \cos 2\varphi) / (R^4 - 2R^2r^2 \cos 2\varphi + r^4)^2 - \frac{1}{R} \right], \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{P}{\pi} \frac{2R(R^2 - r^2)(R^4 - r^4) \sin 2\varphi}{(R^4 - 2R^2r^2 \cos 2\varphi + r^4)^2};\end{aligned}$$

— в случае диска, на который действуют сосредоточенные моменты $\mathbf{M}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{M}{2\pi} \left[\frac{1}{(R^2 + r^2 + 2Rr \cos \varphi)^2} (2r^2 \sin 2\varphi - R^2 \sin 2\varphi + 2Rr \sin \varphi) - \right. \\ &\quad - \frac{1}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^2} (2r^2 \sin 2\varphi - R^2 \sin 2\varphi - 2Rr \sin \varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{(R^2 + r^2 + 2Rr \cos \varphi)^3} ((-2R^3r + 6Rr^3) \sin \varphi + 2r^4 \sin 2\varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^3} ((-2R^3r + 6Rr^3) \sin \varphi - 2r^4 \sin 2\varphi) - \\ &\quad - \frac{1}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^4} ((12R^5r + 12R^3r^3) \sin \varphi - (3R^6 + 3R^2r^4 + \\ &\quad + 16R^4r^2) \sin 2\varphi + (4R^5r + 4R^3r^3) \sin 3\varphi - R^4r^2 \sin 4\varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{(R^2 + r^2 + 2Rr \cos \varphi)^4} ((-12R^5r - 12R^3r^3) \sin \varphi - (3R^6 + 3R^2r^4 + \\ &\quad + 16R^4r^2) \sin 2\varphi - (4R^5r + 4R^3r^3) \sin 3\varphi - R^4r^2 \sin 4\varphi) \Big], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{M}{2\pi} \left[\frac{1}{(R^2 + r^2 + 2Rr \cos \varphi)^2} (R^2 \sin 2\varphi + 2r^2 \sin 2\varphi + 6Rr \sin \varphi) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^2} (-R^2 \sin 2\varphi - 2r^2 \sin 2\varphi + 6Rr \sin \varphi) - \\ &\quad - \frac{1}{(R^2 + r^2 + 2Rr \cos \varphi)^3} ((-2R^3r + 6Rr^3) \sin \varphi + 2r^4 \sin 2\varphi) - \\ &\quad - \frac{1}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^3} ((-2R^3r + 6Rr^3) \sin \varphi - 2r^4 \sin 2\varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^4} ((12R^5r + 12R^3r^3) \sin \varphi - (3R^6 + 3R^2r^4 + \\ &\quad + 16R^4r^2) \sin 2\varphi + (4R^5r + 4R^3r^3) \sin 3\varphi - R^4r^2 \sin 4\varphi) - \\ &\quad - \frac{1}{(R^2 + r^2 + 2Rr \cos \varphi)^4} ((-12R^5r - 12R^3r^3) \sin \varphi - (3R^6 + 3R^2r^4 + \\ &\quad + 16R^4r^2) \sin 2\varphi - (4R^5r + 4R^3r^3) \sin 3\varphi - R^4r^2 \sin 4\varphi) \Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\varphi} = \frac{M}{2\pi} & \left[\frac{1}{(R^2+r^2-2Rr\cos\varphi)^2} (R^2\cos 2\varphi - 2Rr\cos\varphi + r^2) - \right. \\
& - \frac{1}{(R^2+r^2+2Rr\cos\varphi)^2} (R^2\cos 2\varphi + 2Rr\cos\varphi + r^2) - \\
& - \frac{1}{(R^2+r^2-2Rr\cos\varphi)^3} ((2R^3r + 6R^3r^3)\cos\varphi - 2r^4\cos 2\varphi - 6R^2r^2) + \\
& + \frac{1}{(R^2+r^2+2Rr\cos\varphi)^3} ((2R^3r + 6R^3r^3)\cos\varphi + 2r^4\cos 2\varphi + 6R^2r^2) + \\
& + \frac{1}{(R^2+r^2-2Rr\cos\varphi)^4} ((-12R^5r - 36R^3r^3 - 8Rr^5)\cos\varphi + (3R^6 + \\
& + 9R^2r^4 + 16R^4r^2)\cos 2\varphi - (4R^5r + 4R^3r^3)\cos 3\varphi + R^4r^2\cos 4\varphi + \\
& + 18R^4r^2 + 16R^2r^4 + r^6) - \frac{1}{(R^2+r^2+2Rr\cos\varphi)^4} ((12R^5r + 36R^3r^3 + \\
& + 8Rr^5)\cos\varphi + (3R^6 + 9R^2r^4 + 16R^4r^2)\cos 2\varphi + (4R^5r + \\
& + 4R^3r^3)\cos 3\varphi + R^4r^2\cos 4\varphi + 18R^4r^2 + 16R^2r^4 + r^6) \left. \right].
\end{aligned}$$

Проведем сравнение полученных решений для диска с аналогичными результатами для полуплоскости $y \leq 0$ [6, 7]. Рассмотрим два случая.

1. Диск радиуса R , загруженный сосредоточенными силами $\mathbf{P}$, приложенными в точках $z_1 = 0$, $z_2 = -2Ri$, и полуплоскость, на которую в начале координат действует нормальная к границе сосредоточенная сила $\mathbf{P}$ (рис. 6).

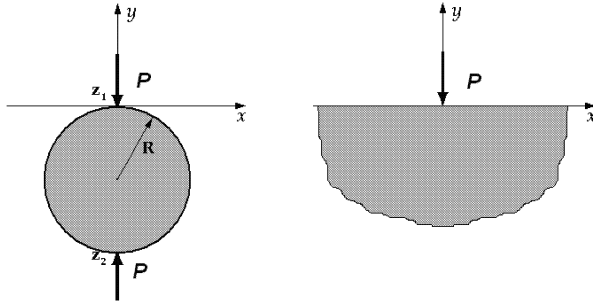


Рис. 6. Диск и полуплоскость, загруженные сосредоточенными силами $\mathbf{P}$.

2. Диск радиуса R , на который в точках $z_1 = 0$, $z_2 = -2Ri$ действуют самоуравновешенные сосредоточенные моменты $\mathbf{M}$, и полуплоскость, нагруженную в начале координат сосредоточенным моментом $\mathbf{M}$ (рис. 7).

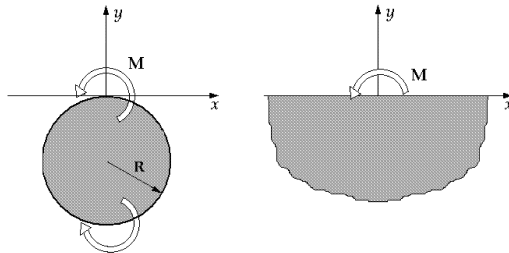


Рис. 7. Диск и полуплоскость, нагруженные сосредоточенными моментами $\mathbf{M}$.

Графики нормальных напряжений $\sigma_{yy}^0 = \pi R \sigma_{yy} / (2P)$ и $\sigma_{yy}^* = 2\pi R^2 \sigma_{yy} / M$ в диске и полуплоскости в одинаковых сечениях $y/R = (-0.25, -0.5, -0.75, -1)$ представлены на рис. 8 (а, б), 9 (а, б) кривыми 1–4 соответственно.

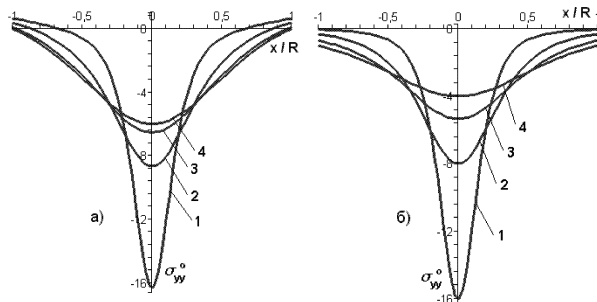


Рис. 8. Распределение напряжений σ_{yy}^0 в диске (а) и полуплоскости (б), на которые действуют сосредоточенные силы.

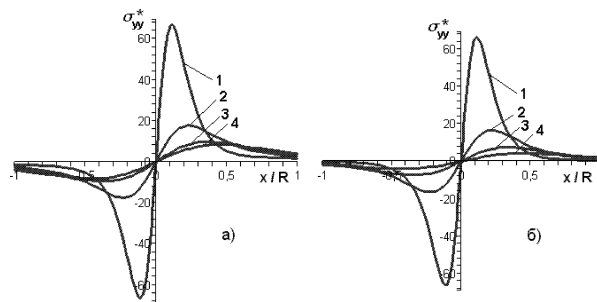


Рис. 9. Распределение напряжений σ_{yy}^* в диске (а) и полуплоскости (б), на которые действуют сосредоточенные моменты.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГАПТИКИ ИОЛ

Рассмотрим тонкий криволинейный упругий стержень OL длиной l , жестко закрепленный с одного конца и нагруженный сосредоточенной силой $\mathbf{P}$ на другом конце (рис. 10).

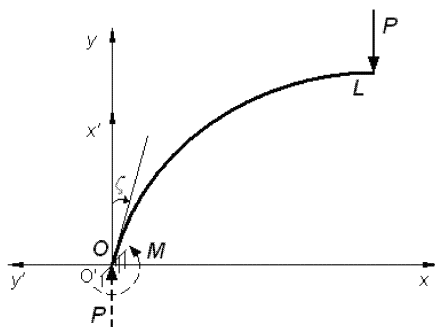


Рис. 10. Криволинейный стержень, нагруженный сосредоточенной силой $\mathbf{P}$.

Введем подвижную систему координат $(x'y')$ так, чтобы ось x' совпала с направлением силы $\mathbf{P}$ в начале координат, а ось y'

дополняла систему до правой. Предположим, что в первоначальном (недеформированном) состоянии стержень имел форму дуги окружности радиуса R_0 .

Согласно [8], нелинейное дифференциальное уравнение изгиба такого стержня имеет вид

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = -\frac{P}{E^*J} \sin \zeta, \quad (8)$$

где ζ — угол, который составляет касательная, проведенная в некоторой точке стержня, с осью x' ; s — длина дуги, отсчитываемая от начала координат к L ; J — момент инерции сечения; $E^* = E/(1 - \nu^2)$.

Введя безразмерный параметр $\beta = l\sqrt{P/(E^*J)}$, после однократного интегрирования получаем

$$l^2 \left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 = 4\beta^2 \left(C_1 - \sin^2 \frac{\zeta}{2} \right), \quad (C_1 = \text{const}). \quad (9)$$

Исследуем два случая: перегибная и бесперегибная форма равновесия упругой линии стержня.

А. Случай перегибного равновесия. Введем новые переменные k и ψ , удовлетворяющие соотношениям: $C_1 = k^2$, $\sin \frac{\zeta}{2} = k \sin \psi$. Тогда уравнение (9) с учетом данных зависимостей можно переписать в следующем виде:

$$l \frac{d\zeta}{ds} = 2\beta k \cos \psi \quad (10)$$

или

$$l \frac{d\psi}{ds} = \beta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}.$$

Интегрируя последнее выражение, получаем

$$\beta \frac{s}{l} = F(\psi) - F(\psi_0),$$

где $F(\psi)$ и $F(\psi_0)$ вычисляются по формуле

$$F(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

и являются эллиптическими интегралами первого рода с модулем k и амплитудой ψ [9].

Запишем соотношения, определяющие форму упругой линии в подвижной системе координат $(x'y')$:

$$\frac{x' - x'_0}{l} = \frac{2}{\beta} [E(\psi) - E(\psi_0)] - \frac{s}{l}, \quad \frac{y' - y'_0}{l} = \frac{2k}{\beta} (\cos \psi_0 - \cos \psi), \quad (11)$$

где $E(\psi)$ и $E(\psi_0)$ — эллиптические интегралы второго рода, которые имеют вид

$$E(\psi) = \int_0^\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Определим значения параметра ψ в точках O и L . Поскольку кривизна в точке O имеет отрицательный знак ($1/\rho_0 < 0$), то интервал изменения эллиптической амплитуды следующий: $\pi \leq \psi_0 < 3\pi/2$. В точке O угол наклона касательной к оси x' $\zeta_0 = 0$, тогда $\psi_0 = \pi$.

Вычислим теперь значение ψ_L . Полагая в (10) $d\zeta/ds = 0$, имеем $\cos \psi_L = 0$, откуда находим $\psi_L = 3\pi/2$.

Подставляя значения параметров ζ и ψ в точке L в уравнение (10), получаем $k = \sqrt{2}/2$. Принимая во внимание в (11) выражения для k и ψ , определим координаты концевой точки стержня L в системе $(x'y')$:

$$\frac{x'_L}{l} = \frac{2}{\beta} E\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1, \quad \frac{y'_L}{l} = -\frac{\sqrt{2}}{\beta}.$$

Максимальные напряжения в опорных элементах определяются формулой

$$\sigma_m = M/W, \quad (12)$$

где W — момент сопротивления поперечного сечения, M — изгибающий момент в точке соединения гаптики с диском, который удовлетворяет соотношению

$$M = \frac{2k \cos \psi}{\beta} Pl - \frac{E' J}{R} \quad \text{или} \quad M = -\frac{\sqrt{2}}{\beta} Pl - \frac{E^* J}{R}.$$

Б. Случай бесперегибного равновесия. В этом случае следует положить в уравнении (9) $C_1 = 1/k^2$, $\sin(\zeta/2) = \sin\psi$, при этом оно примет вид

$$l \frac{d\zeta}{ds} = \frac{2\beta}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \quad \text{или} \quad l \frac{d\psi}{ds} = \frac{\beta}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}. \quad (13)$$

После интегрирования второго из выражений (13) получаем

$$\beta \frac{s}{l} = kF(\psi) - kF(\psi_0). \quad (14)$$

Соотношениями, определяющими форму упругой линии в подвижной системе координат $(x'y')$, согласно [8], являются

$$\begin{aligned} \frac{x' - x'_0}{l} &= \frac{2}{k\beta} [E(\psi) - E(\psi_0)] - \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \frac{s}{l}, \\ \frac{y' - y'_0}{l} &= \frac{2}{k\beta} \left[\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_0} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично предыдущему случаю $\psi_0 = \pi$. Вычислим значение параметра ψ в точке L . Для этого предположим, что в точке L кривизна совпадает с начальной: $(d\zeta/ds)|_L = 1/R_0$. Подставляя данное выражение в (13) и (14), имеем

$$\frac{l}{R} = \frac{2\beta}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_L}, \quad \beta = kF(\psi_L) - kF(\psi_0).$$

Откуда, исключая параметр β , находим

$$(F(\psi_L) - F(\psi_0)) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_L} = \frac{l}{2R_0}.$$

На основании свойств эллиптических интегралов получаем

$$F(\varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{l}{2R_0}. \quad (16)$$

Зависимость (16) определяет множество пар значений параметров φ и k , каждой из которых будут соответствовать свои координаты точки L , вычисленные по формулам (15).

Изгибающий момент M в случае бесперегибной формы равновесия упругой линии стержня таков:

$$M = \frac{2}{k\beta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_0} Pl - \frac{E^* J}{R_0} \quad \text{или} \quad M = \frac{2}{k\beta} Pl - \frac{E^* J}{R_0}.$$

Максимальные напряжения в опорных элементах определяются выражением (12).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследования напряженно-деформированного состояния гаптики интраокулярной линзы получены соотношения, позволяющие определить компоненты перемещения и напряжения в концевых сечениях опорных элементов.

Как следует из приведенных графиков решений на рис. 8, 9, различия между значениями напряжений, возникающих в диске и полуплоскости, увеличиваются по мере удаления от точки приложения сосредоточенной силы или момента. Действительно, кривые 1 и 2 на рис. 8 совпадают с точностью до 5%, тогда как кривые 3 и 4 существенно отличаются друг от друга. Заметим, что на рис. 9 совпадение значений напряжений с точностью до 5% имеет место в первых трех сечениях (кривые 1–3).

Автор благодарит Юрия Михайловича Даля за проявленное внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбань А. И., Джалишвили О. А. Микрохирургия глаза: ошибки и осложнения. СПб.: "Гиппократ", 1993. 272 с.
2. Федоров С. Н., Егорова Э. В. Ошибки и осложнения при имплантации искусственного хрусталика. М., 1992. 243 с.
3. Современные технологии катарактальной и рефракционной хирургии 2007 // Сборник научных статей по материалам VIII Международной научно-практической конференции/ Под ред. Х.П. Тахчиди. М., 2007. 205 с.
4. Лазерная рефракционная и интраокулярная хирургия // Всесоюзная научная конференция: Тезисы докладов. СПб., 2007. 200 с.
5. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. Л.; М., 1935. 224 с.

6. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. 707 с.

7. *Хан Х.* Теория упругости. М.: “Мир”, 1988. 343 с.

8. *Пономарев С. Д.* и др. Расчеты на прочность в машиностроении. М.: Машгиз, 1956. Т. I. 884 с.

9. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 342 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С НИЗКОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В. Ю. Анисимов

Оценено влияние сдвига на возможность потери устойчивости оболочкой вращения в результате ее осесимметричной деформации, когда нагрузка достигает предельной точки на кривой нагрузка — прогиб. Получены асимптотические формулы, описывающие зависимость критической нагрузки оболочки от сдвигового параметра, угла конусности и кривизны. Рассмотрена возможность потери устойчивости оболочкой вращения в результате бифуркации. Проведено сравнение двух видов потери устойчивости и найдены условия, при которых имеет место тот или иной вид потери устойчивости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим трансверсально-изотропную оболочку вращения неотрицательной гауссовой кривизны под действием осевого сжатия. Предположим, что сжимающее усилие приложено к торцам оболочки, один край которой закреплен, а другой свободно скользит по опорной плоскости. Податливость оболочки поперечному сдвигу будем определять как отношение модулей сдвига в продольном и поперечном направлениях, т. е. как G/G' . С ростом величины сжимающего усилия оболочка укорачивается по оси. В некоторой точке величина сжимающего усилия достигает своего предельного значения, при котором оболочка проваливается вблизи скользящего края и теряет устойчивость. Будем искать величину предельной нагрузки.

Осесимметричное напряженно-деформированное состояние оболочки описывается системой уравнений 4-го порядка, которая (по-

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07.01.00250а.

Доклад на семинаре 12 февраля 2008 г.

© В. Ю. Анисимов, 2008

сле перехода к безразмерным переменным) может быть записана в схематичном векторном виде [1],

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, s_0, C, \mu, \lambda, \nu, r_0, \theta_0), \quad \mathbf{x} = \{U, \varepsilon_2, M_1, \theta\}, \quad ()' = \frac{d()}{ds_0}, \\ \mu = \sqrt[4]{\frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}}, \quad \lambda = \frac{2\mu^2(1+\nu)G}{kG'}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь дифференцирование производится по координате, характеризующей длину дуги образующей. Основными неизвестными в системе являются четыре функции, определяющие напряженно – деформированное состояние оболочки после деформации: U — проекция внутренних усилий на радиальное направление; ε_2 — деформация растяжения в радиальном направлении; M_1 — изгибающий момент; θ — угол между нормалью к оболочке и осью вращения. Параметрами данной системы являются: параметр нагрузки C , связанный с величиной осевого сжимающего усилия P ; малый параметр μ , связанный с относительной толщиной оболочки; сдвиговый параметр λ , характеризующий податливость оболочки сдвигу; коэффициент Пуассона ν и функции r_0, θ_0 , описывающие форму оболочки до деформации.

Будем рассматривать два варианта граничных условий (рис. 1).

Первый вариант предполагает, что скользящий край является шарнирно опертым. Второй вариант предполагает, что скользящий край закреплен на поворот.

При $\mu \rightarrow 0$ система уравнений (1) сингулярно возмущенная. Она имеет медленно и быстро изменяющиеся решения. Медленно изменяющееся безмоментное решение характеризует деформацию оболочки вдали от краев и может быть найдено в явном виде:

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0 + O(C\mu^2), \quad M_1 = O(\lambda C\mu), \\ U = -\frac{C \cos \theta_0}{r_0 \sin \theta_0}, \quad \varepsilon_2 = O(C\mu). \end{aligned} \quad (2)$$

Быстро изменяющееся решение характеризует деформацию оболочки вблизи скользящего края. Это решение, представленное в

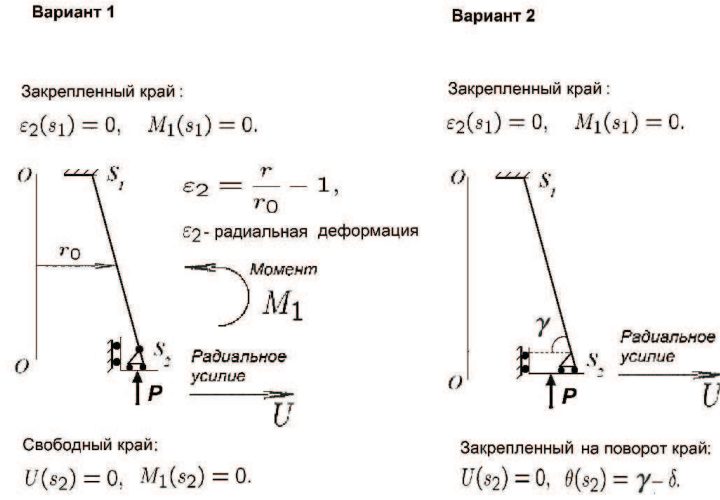


Рис. 1. Варианты граничных условий.

виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(\xi) + \mu \mathbf{x}^1(\xi) + O(\mu^2), \quad C = C^0 + \mu C^1 + O(\mu^2), \quad \dot{() = \frac{d()}{d\xi},$$

$$\xi = (s_0 - s_2)/\mu,$$

может быть найдено в результате численного интегрирования систем нулевого и первого приближений. Система нулевого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{U}^0 &= \varepsilon_2^0, \\ \dot{\varepsilon}_2^0 &= \cos \theta^0 - \cos \gamma, \\ \dot{M}_1^0 &= U^0 \sin \theta^0 + C^0 \cos \theta^0, \\ \dot{\theta}^0 (1 + \lambda U^0 \cos \theta^0 - \lambda C^0 \sin \theta^0) &= M_1^0 - \lambda \varepsilon_2^0 \sin \theta^0. \end{aligned} \tag{3}$$

Найденное решение должно удовлетворять граничным условиям на скользящем краю и переходить в безмоментное решение (2) при удалении от него.

2. ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА

Предельная нагрузка определяется деформациями оболочки вблизи скользящего края и может быть представлена [1] в виде

$$C = C^0 + \mu C^1, \quad C^1 = f_0 + f_\nu \nu + f_k k_{10}(s_2).$$

Величина C^0 может быть найдена в результате численного интегрирования системы нулевого приближения (3) и зависит только от угла конусности оболочки γ и сдвигового параметра λ . Поправка первого приближения C^1 учитывает зависимость предельной нагрузки от коэффициента Пуассона ν и кривизны оболочки k_1 на скользящем краю s_2 . Величины f_0 , f_ν и f_k зависят только от решения системы нулевого приближения и могут быть найдены по формулам

$$f_0 = \frac{j_1 - j_2}{2}, \quad f_\nu = j_7 + 2j_6 - j_3, \quad f_k = j_4 + j_5,$$

$$j_i = \frac{J_i(\mathbf{x}^0, C^0, \lambda, \gamma)}{J_0(\mathbf{x}^0, C^0, \lambda, \gamma)}, \quad i = 1, \dots, 7.$$

Таким образом, первое приближение величины предельной нагрузки полностью определяется решением системы нулевого приближения (3) и не требует интегрирования системы первого приближения.

На рис. 2 представлена зависимость величины предельной нагрузки от угла конусности оболочки и от ее податливости сдвигу, рассчитанная для случая скользящего шарнирно опертого края.

Из графика на рис. 2 видно, что чем слабее оболочка на сдвиг, тем ниже величина ее предельной нагрузки. Влияние сдвига на величину предельной нагрузки растет с увеличением угла конусности оболочки. Таким образом, учет сдвига наиболее актуален для неполных и близких к цилиндрическим оболочек.

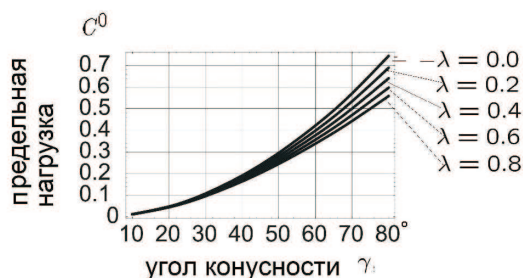


Рис. 2. Зависимость величины предельной нагрузки от угла конусности оболочки и от податливости оболочки сдвигу.

3. БИФУРКАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ

Необходимо иметь в виду, что при определенных параметрах оболочка может потерять устойчивость в результате бифуркации еще до достижения нагрузкой своего предельного значения [2]. Простейший бифуркационный критерий может быть получен уже в рамках осесимметричной задачи и имеет вид [1]

$$C^0 < (2 - \lambda \sin \gamma) \sin^2 \gamma. \quad (4)$$

Если условие (4) нарушается, то имеет место форма равновесия, отличная от исходной, т. е. происходит бифуркация.

Полученный бифуркационный критерий позволяет в области параметров λ, γ произвести разделение зон по видам потери устойчивости. Результаты расчетов приведены на рис. 3.

Как видно из рис. 3, пологие и относительно жесткие на сдвиг оболочки менее склонны к бифуркации, чем оболочки с большим углом конусности и с большой податливостью сдвигу.

Критерий (4) не может считаться окончательным, так как получен без учета волн в окружном направлении. Для того чтобы получить условие бифуркации с учетом волн в окружном направлении, необходимо рассмотреть ситуацию, когда осесимметрично

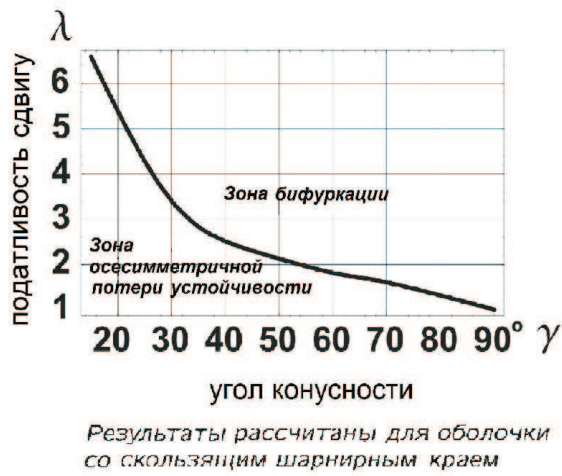


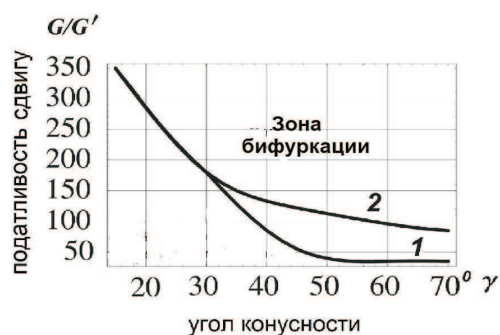
Рис. 3. Разделение зон по видам потери устойчивости.

деформированная оболочка в результате бифуркации принимает неосесимметричную форму. В итоге может быть получена система уравнений устойчивости, которая после разделения переменных и перехода к безразмерным величинам принимает вид

$$\mu \tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^0, m, \frac{G}{G'}, \frac{h}{R}, P), \quad ()' = \frac{d()}{ds}. \quad (5)$$

Вектор неизвестных $\tilde{\mathbf{x}}$ представляет собой вектор малых вариаций, отличающих осесимметричное напряженно – деформированное состояние от неосесимметричного. В качестве параметров данная система содержит осесимметричное решение $\mathbf{x}^0 = \{U, \varepsilon_2, M_1, \theta\}$, количество волн в окружном направлении m , податливость сдвигу G/G' , относительную толщину оболочки h/R и параметр нагрузки P .

Наличие ненулевого решения системы уравнений устойчивости (5), удовлетворяющего граничным условиям, свидетельствует о бифуркации. Таким образом, для определения критической нагрузки с учетом волн в окружном направлении необходимо одновременно



Результаты рассчитаны для оболочки со скользящим шарнирным краем при $\nu = 0.3$, $h/R = 0.02$.

Рис. 4. Разделение зон по видам потери устойчивости с учетом волн в окружном направлении.

численно интегрировать систему уравнений осесимметричной деформации (1) и систему уравнений устойчивости (5), пока не будет достигнута одна из критических нагрузок (предельная или бифуркационная).

На рис. 4 разделение зон по видам потери устойчивости построено с учетом волн в окружном направлении.

Граница 1 проведена в соответствии с уравнениями устойчивости (5), граница 2 соответствует ранее полученной границе, построенной в соответствии с критерием (4). Из графика на рис. 4 видно, что учет волн в окружном направлении приводит к значительному сужению зоны осесимметричной потери устойчивости для непологих оболочек.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе с учетом сдвига поперечных волокон, была исследована потеря устойчивости трансверсально – изотропных оболочек вращения, испытывающих осесимметричную деформацию порядка μ (величина μ пропорциональна корню квадратно-

му от относительной толщины оболочки). Полученные результаты показывают, что в зависимости от жесткости оболочки на сдвиг в поперечном направлении, оболочка может потерять устойчивость осесимметричным или неосесимметричным образом. Потеря устойчивости в результате осесимметричной деформации, когда нагрузка достигает предельной точки на кривой нагрузка-прогиб, характерна для изотропных оболочек и для трансверсально-изотропных оболочек со сравнительно небольшой податливостью сдвигу. При более сильной анизотропии (при больших значениях G/G') бифуркация может предшествовать выворачиванию. Кроме того, вид, по которому оболочка может потерять устойчивость, зависит от угла наклона образующей (угла конусности). Оболочки с большими углами конусности (близкие к цилиндрическим) более подвержены бифуркации, чем пологие оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов В. Ю. Устойчивость трансверсально-изотропной оболочки вращения при осевом сжатии // Вестн. С.Петербург. ун-та. 2006. № 1. С. 68–78.
2. Твостик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.

К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИИ РЕШЕТЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ ДИСКА ЗРИТЕЛЬНОГО НЕРВА

А. А. РОМАНОВА

Представлены модели деформации решетчатой пластинки диска зрительного нерва. В первой части работы решетчатая пластинка рассматривается как часть склеральной оболочки глаза. Сравниваются численные результаты, характеризующие прогиб пластинки с учетом влияния склеры и без него. Проводится также сравнение прогибов пластинки с учетом начальной кривизны пластинки и без учета начальной кривизны. Во второй части работы решетчатая пластинка моделируется как пологая оболочка. Показано, какое влияние на форму прогиба оказывает учет начальной кривизны оболочки при внешнем давлении на пологую оболочку.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время все большее внимание уделяется изучению роли механического фактора в развитии глаукомы. В данной работе рассматриваются две модели, характеризующие разные аспекты поведения решетчатой пластинки диска зрительного нерва (Lamina Cribrosa — LC). LC — это небольшой участок склеры (наружной оболочки глаза), находящийся недалеко от заднего полюса (рис. 1).

В этом месте склера становится более тонкой и ослаблена множеством мелких отверстий, через которые проходят волокна зрительного нерва. LC играет важную роль в балансе внутриглазного и внутричерепного давлений. (Внутричерепное давление действует с внешней стороны на LC.)

Имеющиеся экспериментальные данные [1–3], говорят о том, что при глаукоме все явления, ведущие к атрофии зрительного нерва,

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07.01.00250а.

Доклад на семинаре 26 февраля 2006 г.

© А. А. Романова, 2008

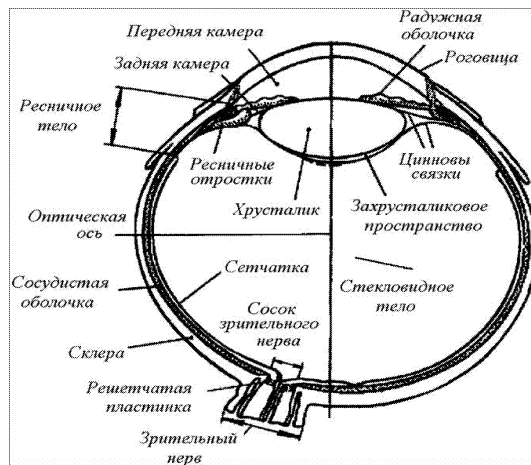


Рис. 1. Глаз человека.

происходят именно в области ЛС. Это делает задачу об изменении напряженно-деформированного состояния ЛС при изменении внутриглазного давления (ВГД) актуальной. Представляется важным построение математических моделей, описывающих поведение ЛС при изменении ВГД. В ряде работ деформация ЛС изучалась на основе экспериментальных данных и клинических наблюдений. Экспериментальные данные, представленные в [3], показывают, что увеличение ВГД практически не меняет размеры склерального канала.

Кроме того, понятно, что ЛС существенно мягче склеры, в связи с этим в работах [4, 5] решетчатая пластинка рассматривалась как неоднородная трансверсально-изотропная пластинка с защемленным краем под действием нормального давления. Однако в некоторых работах говорится о возможном влиянии на поведение ЛС растягивающей силы, действующей со стороны склеральной оболочки глаза. В связи с этим представляется важным сравнение решений задачи о деформации составной оболочки (склеры и решетчатой пластинки) и отдельно задачи о деформации ЛС под действием нор-

мального давления.

2. ДЕФОРМАЦИЯ СОСТАВНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Изучается влияние увеличения внутриглазного давления на диаметр склерального кольца, а также влияние деформации сферической оболочки глаза на величину прогиба LC. Расчеты проводились в прикладной программе Adina 900 nodes. В качестве модели оболочки глаза рассматривалась упругая изотропная сферическая оболочка постоянной толщины $H=1$ мм и радиуса $R=12$ мм. LC представлялась как изотропная пластинка толщиной $h=0.2$ мм и радиуса $r = 0.75$ мм. Решались две задачи о деформации составных оболочек. В первом случае предполагалось, что LC это плоская пластина (вклейка, рис. 3), во втором, что LC — слегка выпуклая, радиусы кривизны пластины и сферы совпадают (вклейка рис. 4).

В расчетах полагалось, что модуль упругости склеры равен 14,3 МПа. Коэффициент Пуассона принимался равным 0.4. Модуль упругости решетчатой пластинки принимался на порядок меньшим, т. е. $E=1.43$ МПа, коэффициент Пуассона для склеры принимался равным 0.4.

На вклейке на рис. 5 представлена деформация сферы с плоской пластиной, а в табл. 1 — максимальные значения прогибов пластинки и изменения радиуса решетчатой пластинки в зависимости от внутриглазного давления.

Таблица 1. Максимальный прогиб пластины и изменение радиуса пластинки в зависимости от внутреннего давления..

P , мм рт. ст.	15	30	40	50	60	80
$w_1, 10^{-2}$, мм	0.88	1.75	2.34	2.92	3.50	4.67
$w_2, 10^{-2}$, мм	0.85	1.69	2.26	2.82	3.39	4.52
$\Delta r_1, 10^{-2}$, мм	0.063	0.125	0.167	0.209	0.250	0.333
$\Delta r_2, 10^{-2}$, мм	0.062	0.125	0.166	0.208	0.249	0.332

Видно, что, как и отмечается в экспериментах [2], диаметр склерального кольца меняется мало, причем изменение радиуса LC на порядок меньше, чем величина прогиба пластинки.

В случае, если мы рассматриваем деформацию плоской круглой

изотопной пластинки с жестко защемленным краем, находящейся под действием нормального давления, величина прогиба в центре пластинки может быть определена по соотношению $w = pr^4/(64D)$, где $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$, (ν – коэффициент Пуассона).

В табл. 2 приведены значения максимального прогиба плоской пластины (w_1), выпуклой пластины (w_2) и значение прогиба, полученное по аналитической формуле (w).

Таблица 2. Максимальный прогиб пластинки без учета влияния склеры, сравнение с простейшим аналитическим результатом.

P , мм рт. ст.	15	30	40	50	60	80
$w_1, 10^{-2}$, мм	0.86	1.73	2.30	2.88	3.46	4.61
$w_2, 10^{-2}$, мм	0.84	1.67	2.23	2.78	3.34	4.46
$w, 10^{-2}$, мм	0.86	1.73	2.30	2.88	3.46	4.61

Сравнение результатов, полученных для составных оболочек и упрощенных задач, показывают, что разница в значениях максимальных прогибов не превосходит 2%. Таким образом, деформацию решетчатой пластинки, по-видимому, можно изучать отдельно от деформации склеральной оболочки. Такой подход может помочь учесть в аналитических моделях возможные особенности строения решетчатой пластинки – ее анизотропию и неоднородность, рассмотреть некоторые особенности деформирования ЛС при увеличении не внутриглазного, а внутричерепного давления.

3. ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ ПО ОБЕ СТОРОНЫ ОТ ЛС НА ФОРМУ ЕЕ ПРОГИБА

В [1] авторы указывают, что еще в 1912 г. было высказано предположение о влиянии на развитие экскавации диска зрительного нерва не только внутриглазного, но и внутричерепного давления (ВЧД): “В норме уровни давления по одну и по другую сторону от решетчатой пластинки диска зрительного нерва различны, и со стороны глаза мембрана испытывает постоянное вдвое большее механическое воздействие”. При повышении ВЧД в глазу развивается так называемый застойный диск.

ЛС является продолжением склеральной оболочки глаза и, сле-

довательно, она не абсолютно плоская. Рассмотрим задачу об осесимметричной деформации ЛС с учетом ее начальной кривизны (рис. 2).

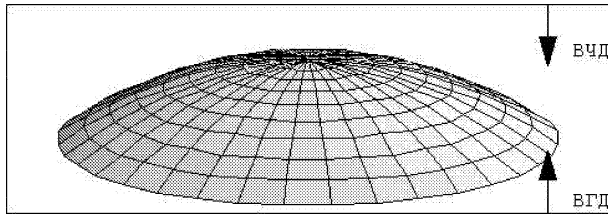


Рис. 2. Модель ЛС с учетом начальной кривизны.

Для решения задачи применяется частично уточненная теория С.А. Амбарцумяна [6]. Представим нормальный прогиб w и функцию усилий F пластины в виде

$$w(r) = w_0(r) + \varepsilon w_1(r), \quad F(r) = F_0(r) + \varepsilon F_1(r), \quad (1)$$

где $\varepsilon = a/R$ – малый параметр (a – радиус ЛС, R – радиус склеры), w_0 и F_0 – решения, найденные для плоской пластины [4]. Подставляя выражения (1) в систему дифференциальных уравнений, описывающих деформацию пологого сферического купола, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения для определения поправок w_1 и F_1 . Изменение формы прогиба ЛС при различных ВГД и ВЧД представлены на рис. 3–6.

В норме ВГД > ВЧД и под действием градиента давления (ВГД–ВЧД) форма прогиба практически сохраняет форму сферического купола (рис. 3).

С увеличением ВЧД решетчатая пластинка начинает прогибаться внутрь сферического купола (рис. 4) и, при дальнейшем росте ВЧД, продавливаться в центре (рис. 5).

При дальнейший рост ВЧД пластинка принимает вогнутую форму – “продавливается” внутрь глаза (рис. 6).

Таким образом, расчеты показывают, что учет начальной кривизны ЛС при исследовании деформации пластины позволяет опи-

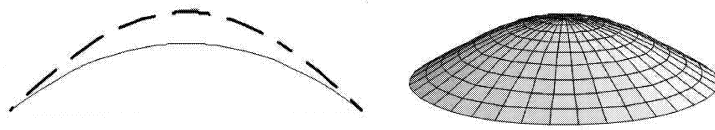


Рис. 3. ВГД-ВЧД = 10 мм рт. ст.

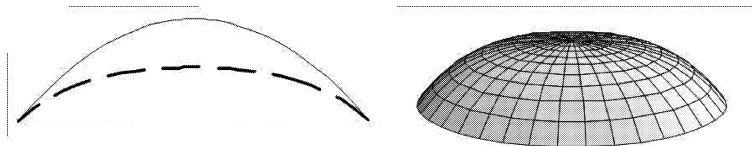


Рис. 4. ВГД-ВЧД = -10 мм рт.ст.

сать различия в форме прогиба при положительном и отрицательном градиентах давления (ВГД-ВЧД) по обе стороны ЛС и увидеть, что, как и отмечается в [3], “при снижении этого градиента появляется застойный сосок”.

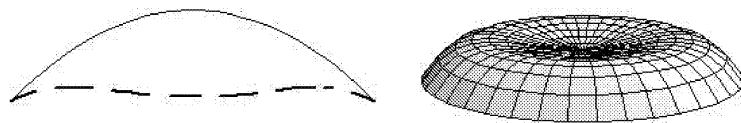
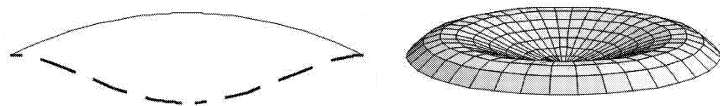
4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Сравнение результатов, полученных для составных оболочек и упрощенных задач, показывает, что деформацию решетчатой пластинки при повышенном внутриглазном давлении можно изучать отдельно от деформации склеральной оболочки.

2. Показано, что учет начальной кривизны ЛС при исследовании деформации пластины позволяет описать различия в форме прогиба при положительном и отрицательном градиентах давления (ВГД-ВЧД) по обе стороны ЛС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков В.В., Сузукина Л.Б., Устинова Е.И. Глаукома, преглаукома и офтальмогипертензия. Л.: “Медицина”, 1985. 256 с.

Рис. 5. ВГД-ВЧД = -25 мм рт. ст.Рис. 6. ВГД-ВЧД = -45 мм рт. ст.

2. Yan D.B., Coloma F.M., Metheetrairut A., Trope G.E., Heathcote J.G., Ethier C.R. Deformation of the Lamina Cribrosa by elevated intraocular pressure// British Journal of Ophthalmology. Vol. 78, 1994. P. 643—648.

3. Волков В.В. Глаукома при псевдонормальном давлении: Руководство для врачей. М.: "Медицина", 2001. 350 с.

4. Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 92 с.

5. Bauer S.M., Voronkova E.B. On the deformation of the Lamina Cribrosa under intraocular pressure// Russian Journal of Biomechanics. Vol. 5, N 1. 2001. P. 73—82.

6. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек М.: Наука, 1974. 446 с.

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ И РАЗМЕРОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ НА КРИТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

З. Г. ЕРШОВА

В настоящей работе исследуется потеря устойчивости цилиндрической панели, подвергнутой осевому сжатию, при этом один из прямолинейных краев оболочки является слабо закрепленным. Сначала исследуется влияние ширины и длины панели на критическую нагрузку, при этом криволинейные края предполагаются шарнирно опертыми. Проведен асимптотический анализ устойчивости узкой цилиндрической панели. Затем, для различных условий закрепления прямолинейных краев, один из которых слабо закреплен, определяется ширина панели, при которой можно пренебрегать граничными условиями на другом прямолинейном краю. И, наконец, исследована потеря устойчивости полубесконечной в окружном направлении цилиндрической панели, при этом рассмотрены закрепления криволинейных краев, принадлежащие группам заделки и шарнирной опоры.

1. ВЛИЯНИЕ ЗАКРЕПЛЕНИЙ ВТОРОГО КРАЯ И РАЗМЕРОВ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается устойчивость цилиндрической панели со слабо закрепленным прямолинейным краем при осевом сжатии. Криволинейные края $x = 0$, $x = l$ при этом предполагаются шарнирно опертыми. Учитывается взаимное влияние закрепления краев $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$. В качестве уравнений, описывающих равновесие цилиндрической оболочки при осевом сжатии [2], возьмем систему

уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \kappa_1 T_1 + (S_1 + S_2)\tau + \kappa_2 T_2 + T_2 &= 0, \\ \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} + RQ_2 &= 0, & \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial M_1}{\partial x} + RQ_1 &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Соотношения упругости при этом берем в форме, предложенной В. В. Новожиловым и Л. И. Балабухом [3]:

$$\begin{aligned}T_1 &= K(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), & T_2 &= K(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \\ S_1 &= S_2 = S = \frac{(1-\nu)K}{2}\varepsilon_{12}, \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), & M_2 &= D(\kappa_2 + \nu\kappa_1), \\ H_1 &= H_2 = H = D(1-\nu)\tau,\end{aligned}\quad (2)$$

где ν — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости, ε_{ij} — мембранные деформации срединной поверхности. K и D — жесткости на растяжение и изгиб, равные соответственно

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R}.$$

Кинематические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\gamma_1^2, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\gamma_2^2, & \varepsilon_{12} &= \omega + \gamma_1\gamma_2, \\ \gamma_1 &= -\frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_2 &= -\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \kappa_2 &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \tau &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (3)$$

Система уравнений (1)–(3) эквивалентна уравнениям технической теории оболочек и может быть приведена к системе двух уравнений [1, 2] в безразмерных переменных

$$\mu^2 \Delta \Delta w + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \mu^2 \Delta \Delta \Phi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad T_1^0 = -2Eh\mu^2\lambda, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12 R^2(1 - \nu^2)}.$$

Здесь w — прогиб, Φ — функция усилий, x — безразмерная длина образующей, $y = \varphi$ — угол в окружном направлении, E , ν , h — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина оболочки, μ — малый параметр, λ — параметр нагружения, классическое критическое значение которого для круговой цилиндрической оболочки получено Лоренцем и Тимошенко [6, 7] и соответствует усилию сжатия:

$$T_1^0 = -2Eh\mu^2.$$

Мембранные усилия (рис. 1) выражаются через функцию Φ по формулам

$$T_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

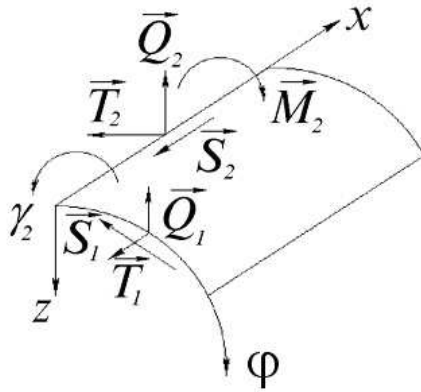


Рис. 1. Усилия на краях цилиндрической панели.

Решение системы (4) ищем в виде

$$w(x, \varphi) = \sum_{k=1}^8 C_k w_k \exp\left\{\frac{i}{\mu}(px + q_k \varphi)\right\}, \quad (5)$$

Здесь $p = \frac{n\pi\mu}{l}$, w_k — фиксированная постоянная (в дальнейшем $w_k = 1$), q_k — корни уравнения

$$(p^2 + q_k^2)^4 - 2\lambda p^2(p^2 + q_k^2)^2 + p^4 = 0. \quad (6)$$

Остальные неизвестные функции $(\Phi, u, v, \gamma_2, T_2, S, Q_2^*, M_2)$ ищем в том же виде (5), заменяя соответственно w на $\Phi, u, v, \gamma_2, T_2, S, Q_2^*, M_2$ (индекс опущен). После соответствующих преобразований получаем

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{p^2 w}{(p^2 + q^2)^2}, & T_2 &= -p^2 \Phi, & S &= pq\Phi, \\ Q_{2*} &= \mu i (q^3 + (2 - \nu)p^2 q), & \gamma_2 &= -iqw, & M_2 &= -\mu^2 (q^2 + \nu p^2)w, \\ u &= \frac{\mu p(\nu p^2 - q^2)w}{i(p^2 + q^2)^2}, & v &= \frac{\mu q(q^2 + (2 + \nu)p^2)w}{i(p^2 + q^2)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя решение (5) в граничные условия при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$, получаем систему восьми уравнений относительно C_k . Определяем λ , приравняв к нулю определитель системы

$$\Delta(\lambda, p) = 0. \quad (8)$$

При исследовании влияния граничных условий на каждом из краев оболочки традиционно рассматриваются 16 различных вариантов граничных условий, при которых на краю оболочки полагаются равными нулю обобщенные перемещения u, v, w, γ или соответствующие им обобщенные усилия. Четыре условия получаются в результате приравнивания нулю одной из величин в столбце на криволинейных краях $x = 0, x = l$:

$$\begin{array}{cccccc} u & v & w & \gamma_1 & (1) \\ T_1 & S & Q_{1*} & M_1 & (0), \end{array} \quad (9)$$

на прямолинейных $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$

$$\begin{array}{cccc} v & u & w & \gamma_2 \\ T_2 & S & Q_{2*} & M_2 \end{array} \begin{array}{l} (1) \\ (0) \end{array} \quad (9')$$

В работах П. Е. Товстика [4, 5] показано, что снижение критической нагрузки для полубесконечной в окружном направлении оболочки дают шесть вариантов граничных условий:

$$\begin{array}{ll} 1) & T_2 = S = Q_{2*} = M_2 = 0 \quad (0000), \quad \lambda_0 = 0.113; \\ 2) & T_2 = S = Q_{2*} = \gamma_2 = 0 \quad (0001), \quad \lambda_0 = 0.223; \\ 3) & T_2 = u = Q_{2*} = M_2 = 0 \quad (0100), \quad \lambda_0 = 0.223; \\ 4) & T_2 = u = Q_{2*} = \gamma_2 = 0 \quad (0101), \quad \lambda_0 = 0.419; \\ 5) & T_2 = S = w = M_2 = 0 \quad (0010), \quad \lambda_0 = 0.809; \\ 6) & v = S = Q_{2*} = M_2 = 0 \quad (1000), \quad \lambda_0 = 0.809. \end{array} \quad (10)$$

Незакрепленный край $\varphi = 0$ дает девятикратное снижение критической нагрузки. Наименее жесткими являются закрепления $u = 0$ или $\gamma_2 = 0$, наиболее жесткими — $v = 0$ или $w = 0$. Эти результаты вычислений параметра нагрузки $\lambda(p, s)$, $s = \frac{\varphi_0}{\mu}$ приведены на рис. 2. Кривая 7 соответствует еще одному варианту граничных условий:

$$u = v = Q_{2*} = M_2 \quad (1100),$$

для которого возможна локализованная вблизи края $\varphi = 0$ форма потери устойчивости, а $\lambda(0, s) = 1$. Для остальных шести вариантов граничных условий функции $\lambda(p, s)$ монотонно возрастают с ростом p , т. е. потеря устойчивости происходит при $p = \frac{\pi}{T}$.

В связи с результатами, полученными П. Е. Товстиком [4], для края $\varphi = 0$ рассматриваются шесть вариантов граничных условий, перечисленных в (10), а для края $\varphi = \varphi_0$ такие из оставшихся шестнадцати, что край $\varphi = 0$ является не менее слабым в смысле (10). При этом исследуется зависимость критической нагрузки от длины оболочки в продольном и окружном направлениях. Параметр нагружения λ получен численно для p от 0.1 до 1 с шагом 0.1, при этом $\frac{\varphi_0}{\mu}$ меняется от 1 до 35. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 3–5.

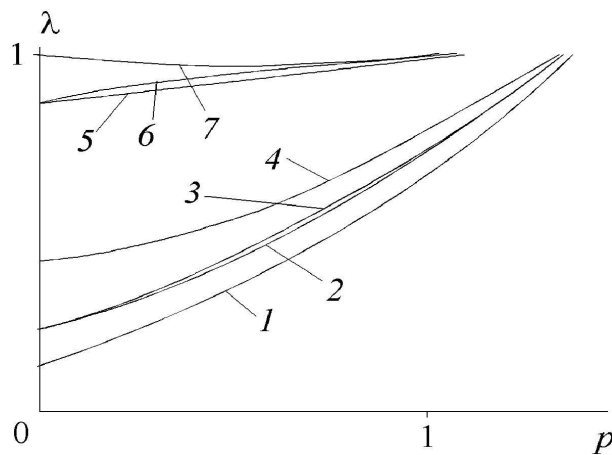


Рис. 2. Параметр нагружения при осевом сжатии цилиндрической панели со слабо закрепленным прямолинейным краем: 1 — 0000; 2 — 0001; 3 — 0100; 4 — 0101; 5 — 0010; 6 — 1000; 7 — 1100.

Для $\frac{\varphi_0}{\mu} \gg 1$ и $p \ll 1$ значения параметра λ совпадают с λ_0 , полученными ранее и приведенными в (10), и не зависят от вида граничных условий при $\varphi = \varphi_0$, а зависимость $\lambda(p, s)$ при $\frac{\varphi_0}{\mu} \gg 1$ соответствует рис 2. Назовем свойства зависимостей $\lambda(p, s)$, общие для всех 6 рассматриваемых на краю $\varphi = 0$ граничных условий (10).

1. Как и должно быть согласно минимаксному свойству собственных значений, более жестким граничным условиям соответствуют большие значения λ . Для жесткой заделки (1111) края $\varphi = \varphi_0$ с ростом s функция $\lambda(p, s)$ монотонно убывает (для других вариантов граничных условий при $\varphi = \varphi_0$ это не так).

2. Для рассматриваемых 6 вариантов граничных условий при $\varphi = 0$ и для всех граничных условий при $\varphi = \varphi_0$ функция $\lambda(p, s)$ растет вместе с p , т. е. критическая нагрузка убывает при увеличении длины панели. При этом в продольном направлении образуется одна вмятина. Это свойство не является общей закономерностью. Например, если все четыре края панели закреплены шарнирно, для

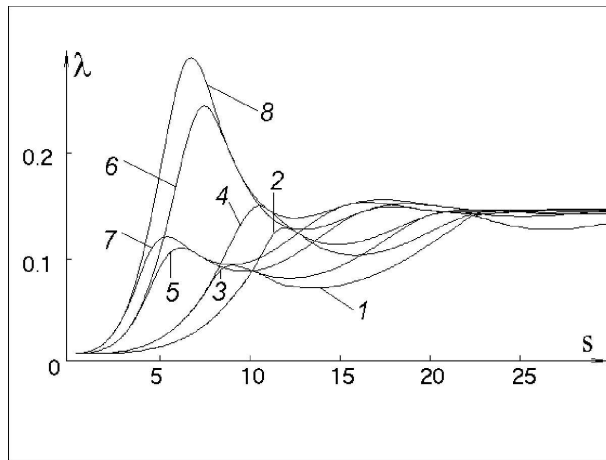


Рис. 3. Параметр нагружения λ при $p = 0.1$ для граничных условий: на краю $\varphi = 0$ — 0000; на краю $\varphi = \varphi_0$: 1 — 0000; 2 — 0001; 3 — 0100; 4 — 0101; 5 — 1000; 6 — 1001; 7 — 1100; 8 — 1101.

удлиненной панели критической нагрузке соответствует форма с несколькими волнами в продольном направлении с образованием вмятин, близких к квадратным.

3. Большинство кривых $\lambda(p, s)$ являются гладкими функциями s (т. е. ширины панели), однако кривые $\lambda(p, s)$, соответствующие одинаковым граничным условиям при $\varphi = 0$ и при $\varphi = \varphi_0$, имеют при некоторых значениях s угловые точки. Дело в том, что для одинаковых граничных условий собственные функции краевой задачи делятся на четные и нечетные относительно середины панели, причем для одних значений меньшее (критическое) значение λ соответствует четной форме, а для других — нечетной.

4. С ростом ширины панели (параметра s) кривые $\lambda(p, s)$ неограниченно приближаются к значениям $\lambda_0(p)$, показанным на рис. 2. Скорость этого приближения зависит как от граничных условий, так и от величины p .

5. При малых значениях s и p кривые $\lambda(p, s)$, соответствующие различным граничным условиям при $\varphi = \varphi_0$, разбиваются на груп-

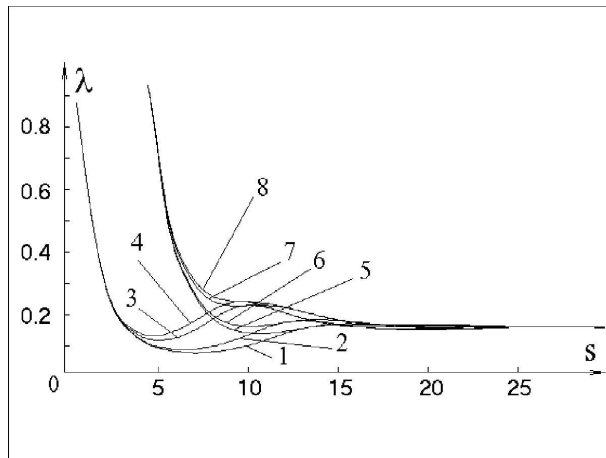


Рис. 4. Параметр нагружения λ при $p = 0.1$ для граничных условий: на краю $\varphi = 0$ — 0000; на краю $\varphi = \varphi_0$: 1 — 0010; 2 — 0110; 3 — 1010; 4 — 1110; 5 — 0011; 6 — 0111; 7 — 1011; 8 — 1111.

пы, внутри которых происходит сближение кривых при $s \rightarrow 0$. При этом для одних групп условий функции $\lambda(p, s)$ стремятся к нулю вместе с s , а для других — неограниченно возрастают.

Рассмотрим теперь отдельно различные случаи закрепления края $\varphi = 0$. На рис. 3–5 представлены кривые, соответствующие свободному краю $\varphi = 0$. Эти кривые разбиваются в зависимости от способа закрепления второго края $\varphi = \varphi_0$ на три группы. В первую группу входят граничные условия, для которых $Q_{2*} = 0$, т. е. прогибы не ограничены, это — 0000, 0001, 0100, 0101, 1000, 1001, 1100, 1101. Вторая группа граничных условий — 0010, 0110, 1110, 1010, для которых $w = 0$ и $M_2 = 0$. И, наконец, группа 0011, 0111, 1011, 1111, где $w = 0$ и $\gamma_2 = 0$. Рассмотрим граничные условия, образующие первую группу. При $s \rightarrow 0$ значение параметра нагружения для всех восьми граничных условий одинаково. Для узких панелей (при маленьких значениях s) параметр нагружения λ имеет одну и ту же величину для граничных условий 0000 и 0001, 0100 и 0101, 1000 и 1001, 1100 и 1101 на краю $\varphi = \varphi_0$ независимо от длины панели.

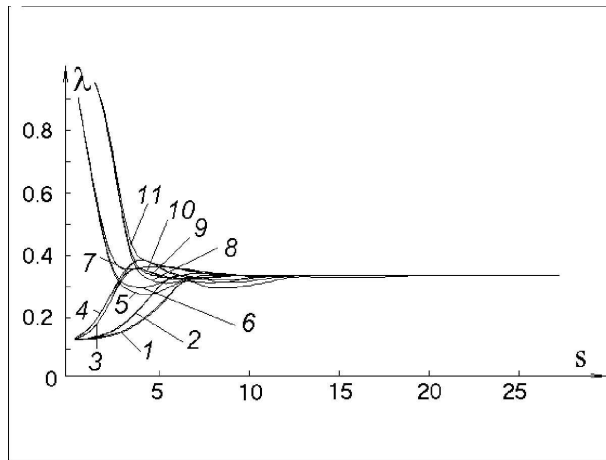


Рис. 5. Параметр нагружения λ при $p = 0.5$ для граничных условий: на краю $\varphi = 0$ — 0000; на краю $\varphi = \varphi_0$: 1 — 0000, 0001; 2 — 0100, 0101; 3 — 1000, 1001; 4 — 1100, 1101; 5 — 0010; 6 — 0110; 7 — 1010, 1110; 8 — 0011; 9 — 0111; 10 — 1011; 11 — 1111.

При увеличении ширины панели кривые, соответствующие этим граничным условиям, разделяются, и теперь уже близкие значения параметра нагружения λ получаются для условий 0000 и 0100, 0001 и 0101, 1000 и 1100, 1001 и 1101. И в том, и в другом случае второе граничное условие в паре имеет дополнительное закрепление. При определенной (в зависимости от длины) ширине панели влияние второго края прекращается, т. е. все кривые сливаются в одну прямую и параметр нагружения становится постоянным. При увеличении длины панели ($p \rightarrow 1$) начальные и конечные значения параметра нагружения постоянно растут. Во второй группе граничных условий снижение значений параметра нагружения начинается только при $s > 1$, независимо от длины панели. При увеличении s происходит попарное сближение кривых 0010 и 0011, 0110 и 0111, 1010 и 1011, 1110 и 1111. Для третьей группы граничных условий снижение параметра нагружения происходит для $p = 0.1$ при $s > 6$, для $0.1 < p < 0.4$ при $s > 4$, для $p > 0.4$ при $s > 3$. Для условий 0010

и 1000 снижение параметра нагрузки значительно меньше, четкого разбиения на три группы граничных условий на втором краю не наблюдается и влияние второго края прекращается только при $s > 25$.

2. Случай узкой полосы

Объяснение поведения кривых на рис. 3–5 можно получить, проведя асимптотический анализ узких панелей. Рассмотрим цилиндрическую панель, занимающую узкую область $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, $0 \leq x \leq l$. Для того чтобы ввести в расчет условие $\varphi_0 \ll l$, перейдем к новым переменным x, y по формулам

$$x = \varphi_0 x_1, \quad \varphi = \varphi_0 y$$

(далее у x_1 индекс 1 опускаем). После разделения переменных

$$w(x, y) = w(y) \sin \frac{\pi \varphi_0 x}{l}$$

система уравнений (4) получает вид

$$\begin{aligned} w'''' - 2\varepsilon w'' + (\varepsilon^2 - \lambda^a)w + \delta \Phi &= 0, \\ \Phi'''' - 2\varepsilon \Phi'' + \varepsilon^2 \Phi - w &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где штрихом обозначена производная по y , а

$$\varepsilon = \left(\frac{\pi \varphi_0}{l} \right)^2 = s^2 p^2, \quad \delta = \frac{\varepsilon^2 \varphi_0^4}{\mu^4} = s^8 p^4, \quad \lambda^a = 2s^4 p^2 \lambda.$$

В результате параметр толщины оболочки μ исключен и остались два параметра p и s . Граничные условия на прямолинейных краях $y = 0$ и $y = 1$ выразим через неизвестные функции w и Φ :

$$\begin{aligned} u = \Phi'' + \varepsilon_n \nu \Phi = 0 & \quad \text{или} & \quad S = \Phi' = 0, \\ v = \Phi''' - \varepsilon_n (2 + \nu) \Phi' = 0 & \quad \text{или} & \quad T_2 = \Phi = 0, \\ w = 0 & \quad \text{или} & \quad Q_2 = w'' - \varepsilon_n (2 - \nu) w' = 0, \\ w' = 0 & \quad \text{или} & \quad M_2 = w'' - \varepsilon_n \nu w = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

причем нужно брать по одному условию из каждой строки. При $y_0 \ll l$ система содержит малый параметр ε и параметр δ , учитывающий влияние искривленности оболочки. Если и $\delta \ll 1$, то система содержит два малых параметра. Полагая

$$\delta = c\varepsilon^2, \quad c = s^4,$$

будем строить асимптотические разложения

$$\begin{aligned} w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \dots, \\ \Phi &= \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \dots, \\ \lambda^a &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

для отыскания наименьшего собственного значения λ^a . После подстановки рядов (13) в уравнения (11) и в граничные условия (12) получается последовательность неоднородных краевых задач, из условия совместности которых определяются λ_n . Если оба прямоллинейных края свободны, получаем разложение

$$\lambda = \frac{1 - \nu^2}{2} p^2 + ap^2 s^4, \quad a = \frac{1}{1440}. \quad (14)$$

Пусть край $y = 0$ свободен, а на краю $y = 1$ рассматриваются восемь граничных условий, показанных на рис. 2, для которых $Q_{2*}(1) = 0$. Используя тот же алгоритм, можно показать, что для параметра нагрузки имеет место та же формула (14). От граничных условий при $y = 1$ зависит только коэффициент a , указанный ниже:

$$\begin{aligned} a = 1/1440 & \quad \text{при} \quad 0000 \quad 0001; \\ a = 1/640 & \quad \text{при} \quad 0100 \quad 0101; \\ a = 1/90 & \quad \text{при} \quad 1000 \quad 1001; \\ a = 1/40 & \quad \text{при} \quad 1100 \quad 1101. \end{aligned} \quad (15)$$

Из формулы (14) следует, что все 8 кривых при $s = 0$ начинаются с одной точки. Кроме того, коэффициент a не зависит от того, наложено ли ограничение $w' = 0$. Это объясняет попарную близость кривых на рис. 2 при малых s . В случаях, когда $w(1) = 0$, получены

формулы

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3(1-\nu)}{s^2} \quad \text{при} \quad 0010 \ 1010 \ 0110 \ 1110, & (\lambda_1 \neq 0), \\ \lambda &= \frac{0.937}{s^4 p^2} \quad \text{при} \quad 0011 \ 1011 \ 0111 \ 1111, & (\lambda_0 \neq 0). \end{aligned} \quad (16)$$

Если при $y = 0$ задано условие 0001, то для граничных условий 0000, 0100, 1000, 1100 при $y = 1$ асимптотические формулы в точности совпадают с формулами (14) и (15). Для граничных условий 0001, 0101, 1001, 1101 получаем формулу

$$\lambda = \frac{1}{2}p^2 + ap^2s^4,$$

а величина a имеет прежнее значение. Если $w(1) = 0$, кривые снова образуют две группы:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{0.783}{s^4 p^2} \quad \text{при} \quad 0010 \ 1010 \ 0110 \ 1110, & (\lambda_0 \neq 0), \\ \lambda &= \frac{1.182}{s^4 p^2} \quad \text{при} \quad 0011 \ 1011 \ 0111 \ 1111, & (\lambda_0 \neq 0). \end{aligned} \quad (17)$$

3. СЛУЧАЙ ШИРОКОЙ ПОЛОСКИ

Для граничных условий (10) слабого закрепления форма потери устойчивости локализуется в окрестности края $\varphi = 0$. Соответствующие критические значения λ_0 для полубесконечной в направлении φ панели в нулевом (при $\mu \rightarrow 0$, $p \rightarrow 0$) приближении приведены в формулах (10). Здесь для различных граничных условий в предположении, что форма прогиба имеет полубезмоментный характер ($\partial^2 w / \partial x^2 \ll \partial^2 w / \partial \varphi^2$), будет найдена величина φ_* , такая, что при $\varphi_0 \geq \varphi_*$ значение λ будет отличаться от λ_0 не более, чем на 5 %. Ищем решение системы (4) в виде

$$w(x, \varphi) = Y(\eta) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \varphi = \eta \sqrt{\frac{\mu l}{\pi}}. \quad (18)$$

Тогда функция $Y(\eta)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^8 Y}{d\eta^8} - 2\lambda \frac{d^4 Y}{d\eta^4} + Y = 0 \quad (19)$$

и соответствующим граничным условиям. Общее решение уравнения имеет вид

$$Y(\eta) = \sum_{n=1}^8 C_n e^{q_n \eta}, \quad q_n^8 - 2\lambda q_n^4 + 1 = 0, \quad (20)$$

где C_n — произвольные постоянные, которые находятся при подстановке в граничные условия при $\eta = 0$ и при $\eta = \eta_0$. Значения множителей при C_n для различных функций, входящих в формулировку граничных условий (9), суть

$$\begin{array}{cccccccc} T_2 & S & Q_{2*} & M_2 & v & u & w & \gamma_2 \\ q_n^{-4} & q_n^{-3} & q_n^3 & q_n^2 & q_n^{-2} & q_n^{-1} & 1 & q_n. \end{array} \quad (21)$$

Например, граничное условие $T_2(\eta_0) = 0$ дает уравнение

$$\sum_{n=1}^8 C_n q_n^{-4} e^{q_n \eta_0} = 0.$$

Поставленная задача не содержит каких-либо параметров, кроме η_0 . Ее решение зависит только от граничных условий. Для каждого из рассматриваемых вариантов этих условий находим величину η_* , такую, что при $\eta_0 \geq \eta_*$ различие значений λ и λ_0 не превосходит 5 %.

В исходных обозначениях это соответствует

$$\varphi_* = \eta_* \sqrt{\frac{\mu l}{\pi}}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}, \quad l = \frac{L}{R}. \quad (22)$$

В табл. 1 приведены значения η_* для различных способов закрепления прямолинейных краев, причем на одном прямолинейном крае рассмотрены шесть вариантов граничных условий слабого закрепления, а на другом — те из шестнадцати вариантов граничных условий, которые являются не менее слабыми в смысле (10).

4. ДРУГИЕ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КРАЕВ

Рассмотрим устойчивость полубесконечной цилиндрической панели:

$$0 \leq x \leq l = L/R, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0.$$

Таблица 1. Параметр η_* , соответствующий полубесконечной панели.

Граничные условия	0000	0001	0100	0101	1000	0010
1111	8	8	8	8	12	12
1011	8	8	8	8	10	10
0111	6	6	6	6	10	10
0011	8	6	6	6	10	10
1110	8	8	7	8	10	10
1010	7	8	7	8	10	9
0110	7	7	6	7	10	9
1101	10	7	6	7	9	10
1100	10	6	7	6	8	10
1001	10	7	6	7	9	8
0010	7	7	6	8	16	15
1000	10	8	8	8	16	16
0101	10	7	9	13	—	—
0100	10	13	6	—	—	—
0001	16	13	—	—	—	—
0000	16	—	—	—	—	—

В работах П. Е. Товстика [4, 5] рассматриваемые 16 вариантов граничных условий (9) разбиваются на четыре группы в зависимости от того, какие условия должны выполняться при интегрировании системы уравнений, представляющих собой краевую задачу в нулевом приближении. Эти условия называются главными.

Группы и соответствующие главные условия таковы:

1) группа заделки:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (1111, 1110, 1101, 1100, 1011, 1010);$$

2) группа шарнирной опоры:

$$w = \Phi = 0, \quad (0111, 0110, 0101, 0100, 0011, 0010);$$

3) группа слабого закрепления:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (1001, 1000);$$

4) группа свободного края:

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (0001, 0000).$$

Рассмотрим устойчивость панели со слабо закрепленным прямолинейным краем $\varphi = 0$. При потере устойчивости полное напряженное состояние складывается из основного (полубезмоментного) напряженно-деформированного состояния и краевого эффекта вблизи криволинейного края. При построении полубезмоментного состояния в системе уравнений (4) можно отбросить в Δ слагаемое $\partial^2/\partial x^2$, так как решение (5) имеет большую изменяемость в направлении φ и малую изменяемость в направлении x .

Полученная система уравнений имеет четвертый порядок по x , поэтому при построении ее решений на каждом криволинейном крае можно удовлетворять лишь двум (главным) граничным условиям. Снова берем уравнение

$$\mu^4 \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} - 2\lambda \mu^2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^4 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим случай жесткой заделки обоих криволинейных краев (33) и случай, когда один край закреплен шарнирно, а другой — жестко (ШЗ). В этом случае переменные x и φ не разделяются. Введем полную систему функций $X_k(x)$, удовлетворяющих граничным условиям, и будем искать решение уравнения (23) в виде

$$w(x, \varphi) = \sum_{k=1}^N X_k(x) w_k(\varphi). \quad (24)$$

Применяя метод Бубнова–Галеркина, для функций $w_k(\varphi)$ приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^N \left(\mu^4 a_{kj}^{(2)} \frac{d^8 w_j}{d\varphi^8} - 2\lambda \mu^2 a_{kj}^{(1)} \frac{d^4 w_j}{d\varphi^4} + a_{kj}^{(0)} w_j \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (25)$$

где

$$a_{kj}^{(m)} = \int_0^l \frac{d^m X_k}{dx^m} \frac{d^m X_j}{dx^m} dx, \quad m = 0, 1, 2. \quad (26)$$

Решение системы (25), затухающее при удалении от края $\varphi = 0$, имеет вид

$$w_k = \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} e^{iq_j \varphi}. \quad (27)$$

Здесь C_j — произвольные постоянные, а q_j удовлетворяют алгебраическому уравнению степени $8N$:

$$\det \left(\mu^4 a_{kj}^{(2)} q^8 - 2\lambda \mu^2 a_{kj}^{(1)} q^4 + a_{kj}^{(0)} \right) = 0, \quad \text{Im}(q_j) > 0. \quad (28)$$

Остальные неизвестные функции, входящие в формулировку граничных условий при $\varphi = 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} w(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N X_k(x) \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} e^{iq_j \varphi}, \\ u(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N \frac{dX_k(x)}{dx} \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^{-2} e^{iq_j \varphi}, \\ v(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N X_k(x) \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^{-1} e^{iq_j \varphi}, \\ \gamma_2(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N X_k(x) \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j e^{iq_j \varphi}, \\ Q_{2*}(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N X_k(x) \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^3 e^{iq_j \varphi}, \\ S(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N \frac{d^3 X_k(x)}{dx^3} \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^{-3} e^{iq_j \varphi}, \\ T_2(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N \frac{d^4 X_k(x)}{dx^4} \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^{-4} e^{iq_j \varphi}, \\ M_2(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N X_k(x) \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^2 e^{iq_j \varphi}. \end{aligned} \quad (29)$$

Искомый параметр λ определяется из уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad (30)$$

получающегося после подстановки решений (29) в граничные условия (9) и имеющего вид определителя порядка $4N$. В случае жесткой заделки (33) обоих краев $x = 0$, $x = l$ функции $X_k(x)$ возьмем в виде

$$X_k(x) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} - \frac{2k-1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (31)$$

В случае, когда один из краев закреплен шарнирно, а другой — жестко (ШЗ), положим

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l} - \frac{k}{k+1} \sin \frac{(k+1)\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Для слабо закрепленного прямолинейного края значения параметра λ приведены в табл. 2.

Таблица 2. Параметр нагрузки λ

Граничные условия на прямолинейном крае	ШШ	ШЗ		ЗЗ	
		$N = 1$	$N = 2$	$N = 1$	$N = 2$
0000	0.113	0.141	0.129	0.188	0.161
0100, 0001	0.223	0.279	0.277	0.372	0.330
0101	0.419	0.524	0.541	0.698	0.651

Найденные значения получены с использованием либо одной ($N = 1$), либо двух ($N = 2$) координатных функций (31) и (32). Для сравнения в столбце (ШШ) приведены значения параметра нагрузки $\lambda(0)$, соответствующие случаю шарнирного закрепления обоих краев. Граничные условия 0010 и 1000, которые в случае шарнирной опоры обоих краев $x = 0$ и $x = l$ давали снижение критической нагрузки, уже не являются условиями слабого закрепления, ибо уравнение (30) не имеет корней $\lambda < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.

2. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука. 1978. 360 с.
3. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 1962. 784 с.
4. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука; Физматлит. 1995. 320 с.
5. Товстик П.Е. Влияние граничных условий на устойчивость цилиндрических оболочек// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. "Матем., механ., астроном." 1989. № 3. С. 66–71.
6. Тимошенко С.П. К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки// Вестн. о-ва технол. 1914. Т. 21. С.785–792; Изв. Петрогр. электротехн. ин-та. 1914. Т. 11. С.267–287; Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука. 1971. С. 457–472.
7. Lorenz R. Phys. Z. 1911. Bd. 12, N 7. S. 242–260.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ НАСТРОЙКИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО КОНТУРА

Е. Ф. Жигалко, А. И. Цветков

При создании новых аэродинамических труб учитывают накопившийся опыт, новые технологические возможности и, конечно, новые данные теории. В докладе показано, что продуктивное расчётное моделирование течения воздуха в канале, образующем разомкнутый контур, может быть проведено с применением программной системы (в данном случае — ANSYS), использующей метод конечных элементов. Моделирование направлено на выявление эффектов формы канала, в контексте стремления к однородности потока в рабочей секции. В анализе результаты локальных и общих расчётов сопоставляются с оценками, предоставляемыми теорией.

1. Цель исследования.

Постановка вычислительной задачи

Для завершения монтажа и наладки одной из учебных аэродинамических труб потребовалось знание основных параметров процесса, прежде чем были возможными её пуск и создание реального потока. С целью получения подробной информации о скорости и давлении воздуха в основных секциях установки проведено моделирование течения в расчёте.

Схематически вид “экваториального” сечения аэродинамической трубы показан на рис. 1. Традиционная схема включает вентилятор (1), поворотные секции с решётками профилей (2) и ресивер с хонейкомбом (3) перед рабочей секцией (4).

Расчёты выполнены с использованием программного продукта ANSYS. Практика показывает, что ANSYS эффективен в исследовании процессов из широкого круга научных и технических про-

Доклад на семинаре 22 апреля 2008 г.

© Е. Ф. Жигалко, А. И. Цветков, 2008

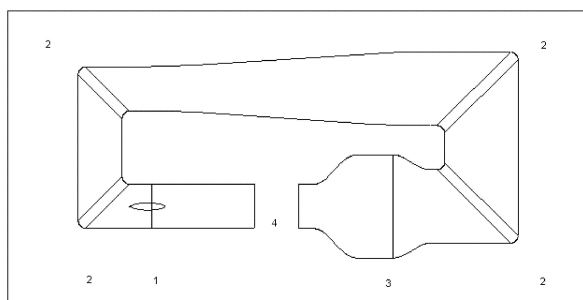


Рис. 1. Вид “экваториального” сечения аэродинамической трубы.

блем. В основу системы ANSYS, предназначенной для моделирования задач континуальной механики, положен метод конечных элементов, в котором к возможно более частому дроблению расчётной области прибегают для подробного описания поля в большей мере, нежели для представления производных (в отличие от метода конечных разностей) В системе ANSYS перед расчётом задают реферное поле в элементах, а на контурах — граничные условия. Определяют также типы процессов и необходимые коэффициенты. Расчёт состоит из последовательности итерационных процедур, сходящихся к решению. ANSYS позволяет контролировать сходимость, предоставляя сведения о норме приращений.

Типичный пример графика зависимости норм приращений от числа итераций дан на вклейке на рис. 6 (расчёт течения около ступицы вентилятора).

Расчёт проводился для ламинарной и турбулентной (число Re превосходит 10^4) моделей течения, с вычислением коэффициентов вязкости по стандартным формулам.

Поскольку аэродинамическая труба является сложным устройством, осуществлён упрощённый подход, в котором задача моделирования решена по частям для конкретных областей.

Краевая задача для расчёта (локально) течения в рассматри-

ваемом районе ставится в соответствии с доктриной ANSYS следующим образом. На входной границе расчётной области задаётся скорость однородного потока, а на выходной — избыточное давление (над реферным), равное нулю. В качестве реферных заданы нормальные условия в воздухе в СИ. На контуре стенки трубы и существенных узлов формулируется условие равенства нулю скорости потока.

2. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЁТА ПОТОКА В КОНТУРЕ

В докладе совершён обзор данных о течении в контуре реальной аэродинамической трубы, полученных в серии расчётов. В основном эти результаты согласуются со сложившейся за продолжительную историю вопроса картиной процесса, имеющей подробное описание в литературе, где, в частности, исследована работа поворотных секций. Известно, что решётка профилей в поворотной секции выравнивает поток и уменьшает потери напора в контуре за счёт управления отрывом потока при обтекании выпуклого угла стенки канала [1]. В формате этой публикации сосредоточимся лишь на данных о малых, но досаждающих эффектах, влияющих на погрешность эксперимента в аэродинамической трубе, которые получены в вычислительных опытах. Прежде всего, это — “скос” потока (переменность скорости в выходном сечении контура) — неустранимое следствие преобразования течения в поворотных секциях.

Поворотные узлы канала аэродинамической трубы, включающие решётки профилей, согласно расчётной модели, не вполне обеспечивают однородность ядра потока. Течение в рабочей секции приближено к струйному, имеет существенную изобарическую сдвиговую составляющую (“скос” потока). Классический хонейкомб не может эффективно подавить эту составляющую.

2.1. Структура потока в поворотной секции, содержащей решётку профилей

В расчёте взята секция (прямое колено) с однородной решёткой цилиндрических профилей. Геометрия компоновки видна на вклейке на рис. 7, на котором представлены поле давления (рис. 7а) и

векторное поле скорости (рис. 7b). Расчёты подтверждают представление о неоднородности течения в поворотном узле, сопряжённой с отрывом потока на выпуклом ребре. Скорость воздуха во входном течении (слева) была равна 4, но эти картины типичны и для близких режимов в этой компоновке, как в ламинарной, так и в турбулентной моделях. По выходному сечению скорость переменна, но давление постоянно. И в дальнейшем данные о расчётах какого-либо класса процессов будут показаны репрезентативными примерами.

2.2. Расчётное определение агрегатного эффекта двух поворотных секций канала

В примере более сложной компоновки взяты последовательно сопряжённые элементы, такие же, как те, что были рассмотрены в предыдущем случае. На вклейке на рис. 8 показаны расчётные скалярные поля давления (рис 8a), величины скорости (рис 8b) и векторное поле скорости (рис 8c, входное сечение справа). Помимо прямого наложения эффектов каждого из поворотных звеньев, можно отчётливо видеть линейный скошенный профиль скорости в выходном сечении, а также, что течение со скосом скорости — изобарическое! Неравномерность распределения скорости доминирует в выходном сечении.

3. РАСЧЁТ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТЕЧЕНИЯ В РАЗОМКНУТОМ КОНТУРЕ С ЧЕТЫРЬМА ПОВОРОТНЫМИ СЕКЦИЯМИ

Следующий уровень обобщения содержательности модели достигается в простейшем макете разомкнутого аэродинамического контура с четырьмя элементарными поворотными звеньями. На вклейке на рис. 9a изображено скалярное поле величины скорости, а на рис. 9b — векторное поле скорости.

Можно видеть, что к рабочей секции трубы приходит поток с существенным “скосом” скорости. Особенностью модели является то, что входное и выходное сечения не связаны непосредственно, как в натуре, а лишь через посредство течения в трубе, поскольку на них поставлены автономные входные и выходные условия, как

это описано выше.

Пример расчёта течения в компоновке, более приближённой к реальной, показан на вклейке на рис. 10. На рис. 10*a* изображено скалярное поле величины скорости, а на рис. 10*b* — векторное поле скорости.

Были проведен компьютерный анализ возможности уменьшения “скоса” потока в опытах с различными формами профилей в поворотных решётках и найдены подходящие решения. Необходимо отметить, что “скос” потока является основным фактором неоднородности поля скорости и при изменении конструкции, ведущем к его уменьшению, повышается относительное значение и субъективная чувствительность к неоднородности течения, приходящего в рабочую секцию. Эта чувствительность обусловлена аэродинамической тенью профилей решётки (см. рис. 11 на вклейке). Модификация профилей приводит к уменьшению скоса (рис. 11*b*).

4. РАСЧЁТЫ ПРИМЕРОВ ТРЁХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Течение в аэродинамическом контуре с открытой рабочей секцией не является плоским или осесимметричным. Оно, в идеале, имеет плоскость симметрии (в ней выполнен рис. 1), что используют при построении приближенной модели пространственного процесса. Несмотря на то, что исходя из двумерной модели, можно приближённо судить о реальном трёхмерном течении, решение пространственной задачи является привлекательной целью. Достижению этой цели мешает существенное увеличение пространственной и временной сложности алгоритма.

ANSYS предоставляет возможность считать трёхмерные процессы. На вклейке на рис. 12 показаны примеры соответствующих результатов. Как строится расчётная область, видно из рис. 12*a*. Структура трёхмерного течения в поворотной секции видна из рис. 12*b*. Здесь показано векторное поле скорости. Оно приближено к струйному, хотя ожидается, что в устройствах данного типа неоднородность параметров по сечению канала должна быть пренебрежимой.

5. Выводы

Компьютерный анализ течения воздуха в контуре аэродинамической трубы с использованием системы ANSYS приводит к объяснению “скоса” потока и других погрешностей и указывает пути к их уменьшению на основе сравнения данных с различными компонентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баулин К.К., Идельчик И.Е. Экспериментальное исследование движения воздуха в коленах. Технические заметки №23, ОНТИ НКТП СССР ГНТИММ, М., 1934. 24 с.

ДОКЛАДЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В СБОРНИК

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВАЛОК, ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Доклад на семинаре 6 ноября 2007 г.

П. Е. Товстик

РЕЗЮМЕ

Для задач статики, свободных колебаний и устойчивости балок, пластин и оболочек обсуждается модель Тимошенко–Рейсснера, учитывающая сдвиг в сравнении с классической моделью Кирхгофа–Лява и с трехмерной теорией упругости. На ряде тестовых примеров установлен асимптотический характер одномерных и двумерных моделей и найдена область их применимости. Также обсуждаются модели КЛ и ТР для пластин и оболочек, лежащих на упругом основании. Как пластина, так и основание предполагаются изготовленными из трансверсально-изотропного материала. При анализе используется локальный подход, при котором решение ищется в виде двойки периодической функции по поверхностным координатам, а граничные условия на контуре игнорируются (либо пластина считается бесконечной). Используется асимптотический метод интегрирования, основанный на малости толщины оболочки по сравнению с длиной волны на поверхности. Особое внимание обращается на построение форм колебаний и потери устойчивости, локализованных вблизи свободной поверхности трансверсально-изотропного предварительно напряженного полупространства или лежащей на нем пластины.

**РАСЧЕТ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРЕВРАЩЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ
ИЗ НИКЕЛИДА ТИТАНА ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ**

Доклад на семинаре 18 декабря 2007 г.

А. С. КУХАРЕВА и А. Е. ВОЛКОВ

РЕЗЮМЕ

Решена связанная термомеханическая задача для бесконечного цилиндра из TiNi в условиях охлаждения с поверхности при действии внешней осевой силы. Определяющие уравнения среды заданы микроструктурной моделью. Проведены расчеты пластичности превращения для цилиндров различных радиусов. Отмечено, что даже при малой скорости охлаждения температура, напряжения и объемная доля мартенсита неоднородны, а обусловленная превращением деформация в направлении действия силы уменьшается с увеличением размеров тела.

**ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ**

Доклад на семинаре 11 марта 2008 г.

А. В. Пустовалов

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено использование парадигмы объектно-ориентированного программирования (ООП) при реализации численных методов решения задач газовой динамики. Предложена общая структура программных средств численного моделирования применительно к газодинамическим задачам. Выделены основные классы и объекты, механизмы их взаимодействия и сформирована базовая среда разработки, на основе которой могут быть построены специализированные среды для конкретных типов задач. Эффективность ООП и созданной среды разработки будет продемонстрирована на ряде примеров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ КОНТАКТНОЙ ПОДВЕСКИ

Доклад на семинаре 8 апреля 2008 г.

Ю. А. Антонов

РЕЗЮМЕ

Колебание контактной подвески, вызванное токоприемником, может быть представлено суперпозицией собственных колебаний, это связано с линейностью математической модели и полнотой системы собственных мод. Самое общее из рассмотренных ниже уравнений имеет вид

$$\frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial t^2} + \tilde{L}Y(x, t) = \frac{F}{\rho S} \delta(x - \nu t),$$

где $Y(x, t)$ — отжатие контактного провода, $\tilde{L}$ — самосопряженный дифференциальный оператор, не содержащий t , а ρ, F, S, ν — соответственно плотность, площадь поперечного сечения контактного провода, сила, действующая со стороны токоприемника и скорость движения поезда. Конкретный вид оператора $\tilde{L}$ определяется теми модельными представлениями, в рамках которых идеализируется поведение реальной контактной подвески. Решение может быть выражено через собственные функции и собственные значения модельного оператора:

$$Y(x, t) = \frac{F}{\rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \psi_n(\nu \tau) \sin(\sqrt{\lambda_n}(t - \tau)) d\tau,$$

при условии, что $\tilde{L}\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x)$.

Основная математическая проблема заключается в нахождении собственных функций $\{\psi_n(x)\}$ и собственных значений λ_n . С помощью этих величин также может быть выражена эластичность контактной подвески:

$$\eta(x) = \frac{1}{\rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^2(x)}{\lambda_n}.$$

Как пример рассмотрен следующий вид модельного оператора $\tilde{L}$:

$$\tilde{L} = -\frac{T}{\rho S} \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\varepsilon}{\rho S} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i),$$

где ε — эффективная жесткость. Второе слагаемое в операторе учитывает взаимодействие контактного провода с элементами, обеспечивающими равноэластичность подвески. Будем считать, что это взаимодействие линейно по смеще-

нию. Используя граничные условия можно составить уравнение для нахождения λ_n . Это уравнение оказывается степенным относительно аргумента

$$2 \cos(k_n D) + \frac{\varepsilon}{k_n T} \sin(k_n D),$$

где D — расстояние между струнами, а $k_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{c}$, $c^2 = \frac{T}{\rho S}$. Степень уравнения равна числу элементов неоднородности на анкерном участке (~ 300), а коэффициенты однозначно определяются степенью уравнения. Для каждого найденного корня нужно решить уравнение $2 \cos(x) + \frac{A}{x} \sin(x) = Z_n$, (где $A = \frac{\varepsilon D}{T}$, $x = k_n D$), в котором величина ε неизвестна и должна подбираться так, чтобы найденные собственные частоты k_n приводили к нормативному значению средней эластичности

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\rho S D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{T D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2}.$$

Каждому корню из $\{Z_n\}$ соответствует бесконечное число корней трансцендентного уравнения, но все первые корни собираются в одну полосу, затем “запрещенная зона” и следующая полоса соответствующая вторым корням и т.д. Во второй полосе частоты уже достаточно высокие и их можно не учитывать на фоне первой полосы — для реального анкерного участка в ней $\approx 25 \times 14$ частот, лежащих в интервале от 1 до 11 Гц. Описанный выше алгоритм успешно применен к расчету собственных частот двухпролетного участка контактной подвески длиной 130 м.

ОБ АВТОРАХ

Анисимов Владимир Юрьевич — выпускник кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ. Автор 4 опубликованных работ по вопросам устойчивости анизотропных оболочек вращения. В 2008 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме “Влияние сдвига на устойчивость оболочек вращения при осевом сжатии”. Научный руководитель — проф. П. Е. Товстик.

Антонов Юрий Александрович — старший преподаватель кафедры физики ПГУПС. Окончил физический факультет ЛГУ. Выступал с докладами на конференциях ELTrans. Аспирант ПГУПС. Научный руководитель — проф. К. К. Ким.

Волков Александр Евгеньевич — заведующий лабораторией прочности материалов НИИММ, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ, автор многочисленных работ в области механики деформируемого твердого тела (материалы с памятью формы).

Ершова Зинаида Георгиевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической механики Тутаевского филиала ГОУ ВПО “Рыбинская государственная авиационная технологическая академия имени П. А. Соловьева” (ТФ РГТА), специалист в области устойчивости тонкостенных конструкций.

Жигалко Евгений Фаддеевич — заведующий кафедрой прикладной математики ПГУПС, профессор, доктор физико-математических наук, автор многочисленных работ по вопросам гидромеханики и прикладной математики.

Кухарева Анна Сергеевна — выпускница кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ, в 2005 г. защитила магистерскую диссертацию по теме “Решение краевой

задачи для сплошного цилиндра из сплава с памятью формы, нагруженного осевой силой и охлаждаемого с боковой поверхности". В настоящее время аспирантка 3-го курса кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ. Научный руководитель — проф. А. Е. Волков.

Лебедева Елена Александровна — кандидат технических наук, ассистент кафедры прикладной механики и инженерной графики Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета (ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина)). В 2007 г. окончила аспирантуру СПбГЭТУ (ЛЭТИ) и защитила кандидатскую диссертацию по теме "Информационное обеспечение системы предоперационного прогнозирования состояния структур в герниологии". Является автором 28 публикаций. Область научных интересов — биомеханика. Научный руководитель — проф. П. И. Бегун.

Михеев Артем Валерьевич — кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры высшей математики № 2 Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета, автор 7 публикаций по вопросам механики тонкостенных конструкций.

Морцинина Диана Алексеевна — аспирантка кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики–процессов управления СПбГУ. Научный руководитель — проф. Ю. М. Даль.

Павилайнен Вольдемар Яковлевич — лауреат Государственной премии СССР, доцент кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ, автор более 80 работ (в том числе двух монографий) в области механики деформируемого твердого тела (теория оболочек), специалист по проектированию и расчету армированных железобетонных конструкций.

Пустовалов Александр Витальевич — выпускник кафедры плазмогазодинамики и теплотехники БГТУ, инженер-конструктор 1-й категории расчетно-исследовательского отделения ОАО "КБ-СМ". В 2007 г. защитил диссертацию, представленную на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.02.05 — "Механика жидкости, газа и плазмы". Научный руководитель — проф. В. Н. Емельянов.

Романова Ангелина Александровна — выпускница ка-

федры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ, в 2001 г. защитила магистерскую диссертацию по теме “О деформации оболочки глаза при наложении циркуля и при повышенном внутриглазном давлении”. Автор 3 публикаций. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр.

Сайкова Мария Сергеевна — окончила в 2004 г. магистратуру математико-механического факультета СПбГУ. Аспирантка 3-го курса кафедры теории упругости СПбГУ. Опубликовала 5 работ. Научный руководитель — доц. В. Я. Павилайнен.

Смольников Борис Александрович — профессор кафедры механики и процессов управления Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Автор более 60 научных работ, включая 3 книги. Область интересов — теория устойчивости и управления, биомеханика.

Товстик Петр Евгеньевич — профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики СПбГУ, лауреат Государственной премии РФ, заслуженный деятель науки РФ, автор многочисленных трудов и основатель школы в области механики тонкостенных конструкций.

Товстик Татьяна Петровна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН, специалист в области пространственной динамики твердых тел и нанообъектов.

Тулкина Анна Николаевна — выпускница кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ (2006). В настоящее время аспирантка кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ. Тема научной работы — исследование механических свойств наноструктур. Автор 1 опубликованной работы. Научный руководитель — доц. В. Я. Павилайнен.

Цветков Алексей Иванович — кандидат технических наук, старший научный сотрудник математико-механического факультета СПбГУ, специалист в области волновой и нестационарной газовой динамики.

**УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,
ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ В 2007–2008 г. г.**

Анисимов Владимир Юрьевич — канд физ.-мат. наук, СПбГУ, 2008. Научный руководитель — проф. П.Е. Товстик.

Ландман Ирина Марковна — канд физ.-мат. наук, СПбГУ, 2008. Научный руководитель — доц. А.Л. Смирнов.

Михеев Артем Валерьевич — канд физ.-мат. наук, СПбГУ, 2008. Научный руководитель — проф. П.Е. Товстик.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
 <i>Товстик П.Е., Товстик Т.П. Двухмерные модели пластин из анизотропного материала</i>	4
1. Введение	4
2. Уравнения равновесия и соотношения упругости	5
3. Уравнения Кирхгофа–Лява для анизотропной пластины	6
4. Уравнения Тимошенко–Рейсснера (ТР) для анизотропной пластины	8
5. Преобразование системы уравнений (1)–(3)	9
6. Результаты асимптотического интегрирования. Задача статики	11
7. Частоты свободных колебаний	12
8. Уточненные кинематические гипотезы	13
9. Пластина, армированная малорастяжимыми нитями	14
 <i>Смольников Б.А. Фрактальное твердое тело в задачах аналитической механики</i>	17
1. Обсуждение проблемы	17
2. Эволюционная динамика математического маятника ...	20
3. Эволюция траектории сферического маятника	24
4. Эволюционные уравнения эйлера движения	28
 <i>Михеев А.В. Влияние предварительных напряжений в основании на локальную устойчивость ортотропных оболочек</i>	33
1. Введение	33
2. Результаты численного анализа	35
3. Заключение	37
 <i>Павилайнен В.Я., Тулкина А.Н. Расчет частот и форм свободных колебаний консольной балки на основе теории С.П. Тимошенко</i>	39
1. Исходные соотношения и постановка задачи	39

2. Классическое решение Бернулли-Эйлера и учет инерции поворота в теории С.П. Тимошенко	40
3. Свободные колебания балки с учетом инерционных нагрузок при повороте сечений и деформаций сдвига	44
4. Результаты расчетов	51
5. Заключительные замечания	59
<i>Лебедева Е.А. Информационное обеспечение системы пред- операционного прогнозирования состояния струк- тур в герниологии</i>	60
1. Введение	60
2. Методы исследования	62
3. Результаты исследования	63
4. Заключение	69
<i>Сайкова М.С. Нелинейный изгиб четверти кольца при дей- ствии горизонтальной силы</i>	70
1. Введение	70
2. Постановка задачи. Вывод основных соотношений	71
3. Вариационный вывод разрешающих уравнений	77
4. Пример расчета	78
5. Заключение	80
<i>Морщанина Д.А. Поле упругих напряжений и перемеще- ний в интраокулярных линзах (ИОЛ)</i>	84
1. Введение	84
2. Определение напряжений в диске ИОЛ	86
3. Выражения для напряжений в полярных координатах ..	90
4. Исследование напряженно-деформированного состояния гаптики ИОЛ	96
5. Заключение	
<i>Анисимов В.Ю. Устойчивость оболочек вращения с низкой сдвиговой жесткостью при осевом сжатии</i>	102
1. Введение	102
2. Предельная нагрузка	105
3. Бифуркационный критерий	106
4. Заключение	108
<i>Романова А.А. К построению модели деформации решет- чатой пластины диска зрительного нерва</i>	110

1. Введение	110
2. Деформация составной сферической оболочки	112
3. Влияние градиента давления по обе стороны от LC на форму ее прогиба	113
4. Заключение	115
Ершова З. Г. Влияние условий закрепления и размеров цилиндрической панели на критическую нагрузку при осевом сжатии	117
1. Влияние закреплений второго края и размеров оболочки	117
2. Случай узкой полосы	126
3. Случай широкой полосы	128
4. Другие закрепления криволинейных краев	129
Е.Ф.Жигалко, А.И. Цветков Компьютерное моделирование для настройки аэродинамического контура	135
1. Цель исследования. Постановка вычислительной задачи	135
2. Обзор результатов расчёта потока в контуре	137
2.1. Структура потока в поворотной секции, содержащей решётку профилей	138
2.2. Расчёт и визуализация течения в разомкнутом контуре с четырьмя поворотными секциями	138
4. Расчёты примеров трёхмерных течений	139
5. Выводы	140
Доклады, не вошедшие в сборник	141
Об авторах	147

РЕФЕРАТЫ

УДК 539

Анисимов В.Ю. **Устойчивость оболочек вращения с низкой сдвиговой жесткостью при осевом сжатии.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

Оценено влияние сдвига на возможность потери устойчивости оболочкой вращения в результате ее осесимметричной деформации, когда нагрузка достигает предельной точки на кривой нагрузка-прогиб. Получены асимптотические формулы, описывающие зависимость критической нагрузки оболочки от сдвигового параметра, угла конусности и кривизны. Рассмотрена возможность потери устойчивости оболочкой вращения в результате бифуркации. Проведено сравнение двух видов потери устойчивости и найдены условия, при которых имеет место тот или иной вид потери устойчивости.

Библиогр. 2 назв. Ил. 4.

УДК 534.1

Ершова З. Г. **Влияние условий закрепления и размеров цилиндрической панели на критическую нагрузку при осевом сжатии.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

Исследуется потеря устойчивости цилиндрической панели, подвергнутой осевому сжатию, при этом один из прямолинейных краев оболочки является слабозакрепленным. Сначала исследуется влияние ширины и длины панели на критическую нагрузку, при этом криволинейные края предполагаются шарнирно опертыми. Проведен асимптотический анализ устойчивости узкой цилиндрической панели. Затем, для различных условий закрепления прямолинейных краев, один из которых слабо закреплен, определяется ширина панели, при которой можно пренебрегать граничными условиями на другом прямолинейном краю и исследована потеря устойчивости полубесконечной в окружном направлении цилиндрической панели, при этом рассмотрены закрепления криволинейных краев,

принадлежащие группам заделки и шарнирной опоры.

Библиогр. 8 назв. Ил. 5. Табл. 2.

УДК 532.517.2

Жигалко Е.Ф., Цветков А.И. Компьютерное моделирование для настройки аэродинамического контура. // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

При создании новых аэродинамических труб учитывают накопившийся опыт, новые технологические возможности и, конечно, новые данные теории. В докладе показано, что продуктивное расчётное моделирование течения воздуха в канале, образующем разомкнутый контур может быть проведено с применением программной системы (в данном случае — ANSYS) использующей метод конечных элементов. Моделирование направлено на выявление эффектов формы канала, в контексте стремления к однородности потока в рабочей секции. В анализе результаты локальных и общих расчётов сопоставляются с оценками, предоставляемыми теорией.

Библиогр. 1 назв. Ил.15.

УДК 612.76

Лебедева Е. А. Информационное обеспечение системы предоперационного прогнозирования состояния структур в герниологии. // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

Построены компьютерные модели, учитывающие реальную геометрию и механические характеристики структур областей тела, проведены экспериментальные исследования их механических свойств в напряженно-деформированном состоянии. Разработан биомеханический метод предоперационного прогнозирования результатов реконструктивных операций на основе компьютерного моделирования и клинических исследований и новое информационное обеспечение для предоперационного прогнозирования состояния структур в герниологии.

Библиогр. 9 назв. Ил. 4.

УДК 534.1

Михеев А. В. **Влияние предварительных напряжений в основании на локальную устойчивость ортотропных оболочек** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

Получены уравнения свободных колебаний консольной балки С.П.Тимошенко, дан вывод частотного уравнения, выполнен расчет частот и форм свободных колебаний. Результаты расчета представлены в виде таблиц и графиков.

Библиогр. 2 назв. Ил. 2. Табл. 1.

УДК 539. 3

Морщинина Д. А. **Поле упругих напряжений и перемещений в интраокулярных линзах (ИОЛ).** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

Рассматривается плоская задача линейной теории упругости для оптического диска ИОЛ, нагруженного самоуравновешенными сосредоточенными силами и моментами. Проводится сравнение выведенных соотношений для напряжений, возникающих в диске, с аналогичными результатами для полуплоскости. На основе нелинейной теории изгиба тонких криволинейных стержней исследуется напряженно-деформированное состояние опорных элементов ИОЛ.

Библиогр. 9 назв. Ил. 10.

УДК 534.1

Павилайнен В.Я., Тулкина А.Н. **Расчет частот и форм свободных колебаний консольной балки на основе теории С.П. Тимошенко.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

Получены уравнения свободных колебаний консольной балки С.П.Тимошенко, дан вывод частотного уравнения, выполнен расчет частот и форм свободных колебаний. Результаты расчета представлены в виде таблиц и графиков.

Библиогр. 3 назв. Ил. 8. Табл. 4.

УДК 534.1

Романова А.А. **К построению модели деформации решетчатой пластины диска зрительного нерва.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

Представлены модели деформации решетчатой пластинки диска зрительного нерва. В первой части работы решетчатая пластинка рассматривается как часть склеральной оболочки глаза. Сравниваются численные результаты, характеризующие прогиб пластинки с учетом влияния склеры и без него. Проводится также сравнение прогибов пластинки с учетом начальной кривизны пластинки и без учета начальной кривизны. Во второй части работы решетчатая пластинка моделируется как пологая оболочка. Показано, какое влияние на форму прогиба оказывает учет начальной кривизны оболочки при внешнем давлении на пологую оболочку.

Библиогр. 6 назв. Ил. 8. Табл. 2.

УДК 534.1

Сайкова М. С. **Нелинейный изгиб четверти кольца при действии горизонтальной силы** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

Рассматривается сильный изгиб четверти кругового кольца, один конец которого жестко закреплён, а на другом действует горизонтальная сила, не меняющая своего направления в процессе деформации. Методом эллиптических параметров получено решение нелинейной задачи и соответствующие расчетные формулы. Проведены расчеты на основе полученного аналитического решения, а также численным методом конечных элементов, результаты которых представлены в виде таблиц и графиков.

Библиогр. 5 назв. Ил. 7. Табл. 2.

УДК 534.1

Смольников Б. А. **Фрактальное твердое тело в задачах аналитической механики** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

Предлагается новая модель твердого тела — фрактальное твердое тело (ФТТ), позволяющая исследовать динамику эволюцион-

ного процесса под действием внутренней диссипации механической энергии. Строится математическая модель ФТТ, содержащая нелинейные диссипативные слагаемые, в состав которых входят третьи производные от координат по времени. Предлагаемое описание эволюционной динамики ФТТ представляет интерес для теории нелинейных колебаний и устойчивости движения твердых тел.

Библиогр. 5 назв. Ил. 3.

УДК 539.3

Товстик П. Е., Товстик Т. П. Двухмерные модели пластин из анизотропного материала // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2007–2008 гг. С. 00–00.

В статье дается вывод двухмерной приближенной модели пластины из анизотропного материала с кривой анизотропией при плоском напряженном состоянии. Показано, что использование гипотез Кирхгофа–Лява либо Тимошенко–Рейсснера о сохранении прямолинейности нормального до деформации волокна не дает удовлетворительных результатов при сравнении с асимптотическим решением трехмерных уравнений теории упругости. Различие наблюдается уже в главном члене асимптотического разложения в ряд по степеням малого параметра тонкостенности, равного отношению толщины пластины к длине волны деформации.

Библиогр. 5 назв. Табл. 1.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ».**

2007–2008 гг.

Под ред. *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*
Корректор *Н. В. Ермолаева*
Компьютерная верстка *А. М. Вейшторг*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать *xx.xx.2009*. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,9. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В.О., 6-я линия, 11/21

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22

E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:

С.-Петербург, В.О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76

E-mail: post@unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41



Заседание семинара: проф. С.М. Бауэр, проф. П.Е. Товстик, кфмн А.В. Михеев, проф. С.Б. Филиппов, проф. Ю.М. Даль, проф. В.И. Сливкер, доц. А.Л. Смирнов.



Заседание семинара: старшекурсники и аспиранты СПбГУ Е. М. Попова, А. А. Харунжий, А. С. Кухарева, Е. В. Краковская и проф. Е.Ф. Жигалко.

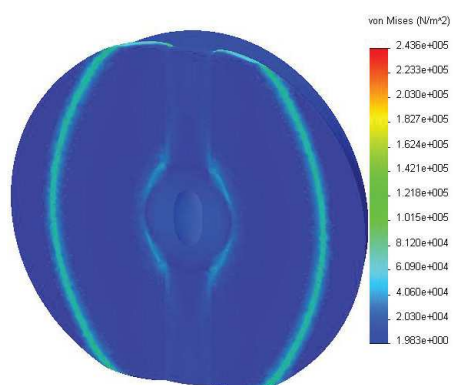


Рис. 1. Эпюра напряжений в структурах брюшной стенки при патологическом образовании в белой линии живота (к статье Е. Лебедевой).

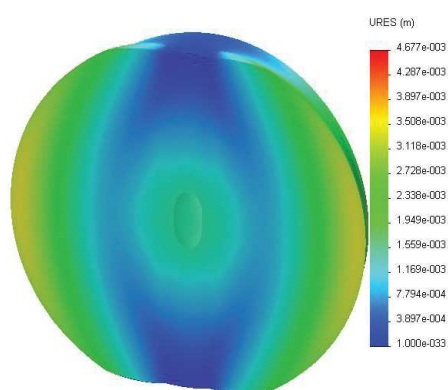


Рис. 2. Эпюра перемещений в структурах брюшной стенки при патологическом образовании в белой линии живота (к статье Е. Лебедевой).

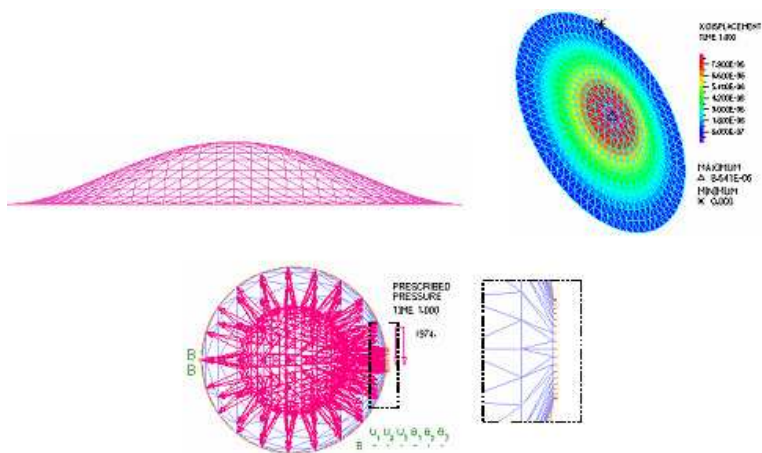


Рис. 3. Деформация составной оболочки с плоской пластиной (к статье А. Романовой).

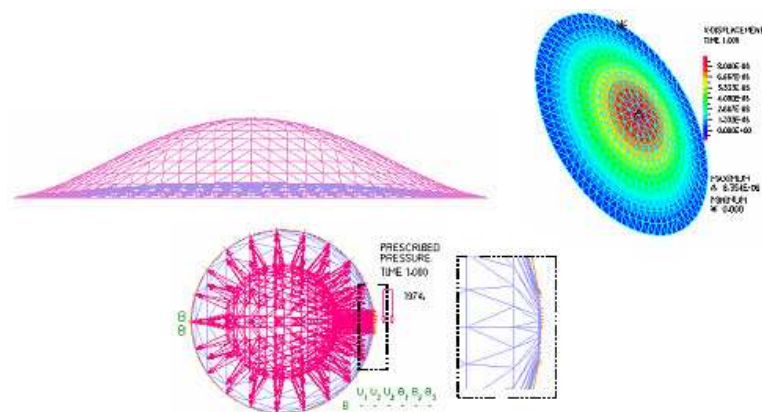


Рис. 4. Деформация составной оболочки со слегка выпуклой плоской пластиной (к статье А. Романовой).

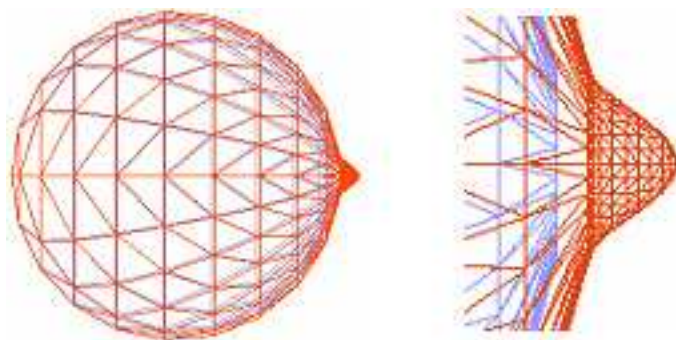


Рис. 5. Деформация оболочки под действием внутреннего давления (к статье А. Романовой).

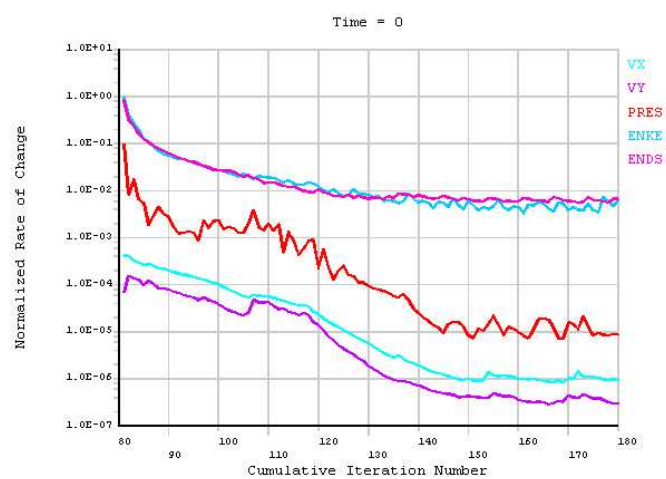


Рис. 6. Характер сходимости итерационного процесса (к статье Е. Жигалко и А. Цветкова).

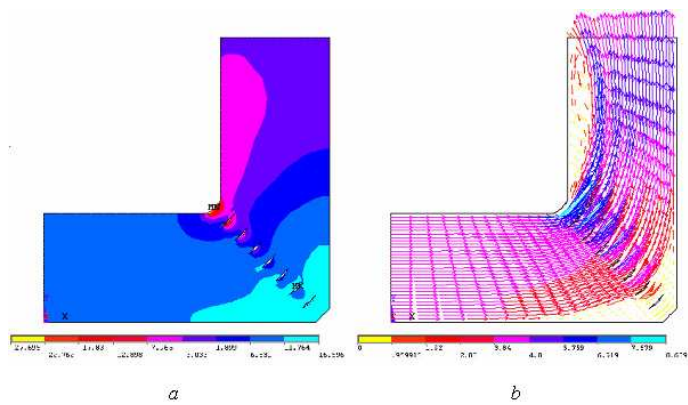


Рис. 7. Течение в поворотной секции контура: a — поле давления, b — векторное поле скорости (к статье Е. Жигалко и А. Цветкова).

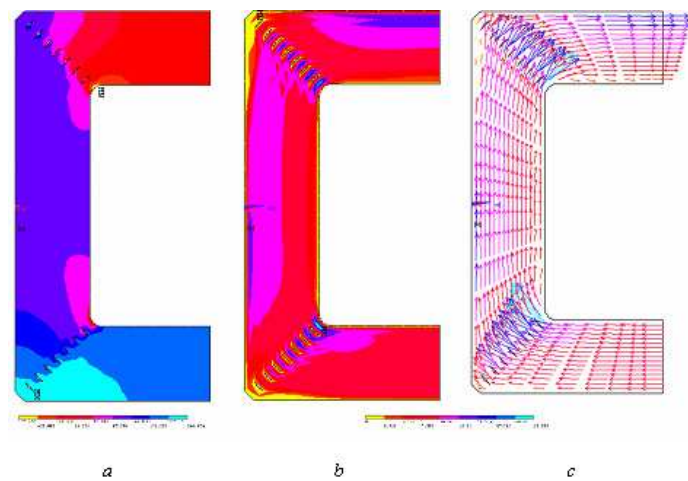


Рис. 8. Течение воздуха в канале, содержащем две поворотные секции: a — поле давления, b — скалярное поле скорости, c — векторное поле скорости (к статье Е. Жигалко и А. Цветкова).

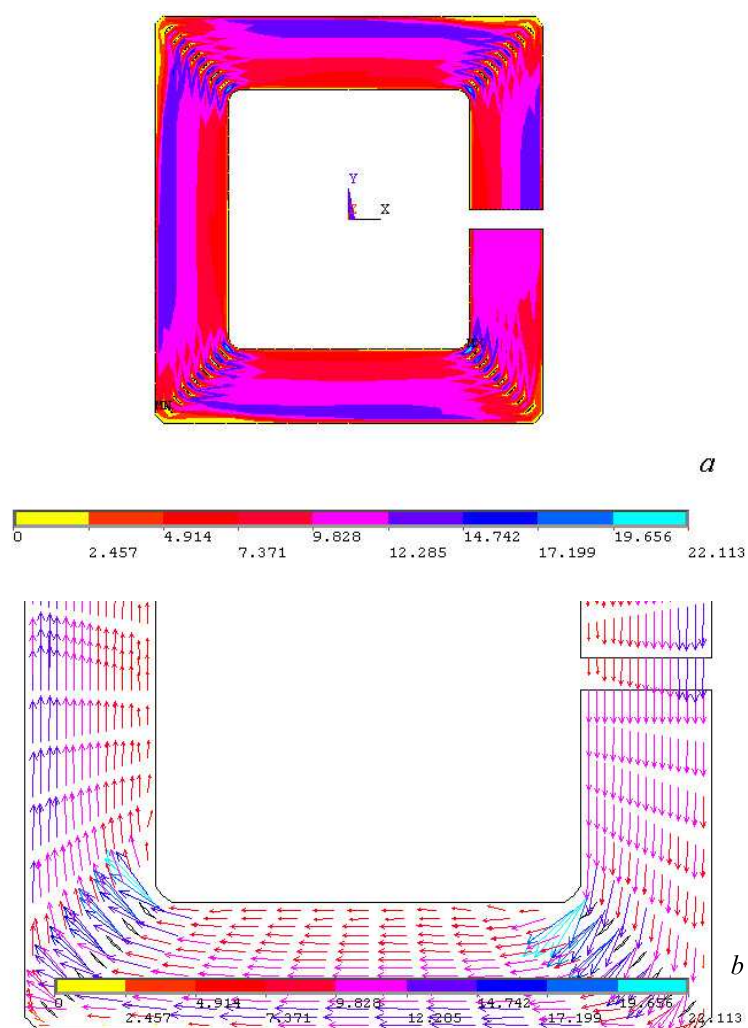


Рис. 9. Назомкнутый аэродинамический контур с четырьмя элементарными поворотными звеньями: a — скалярное поле величины скорости, b — векторное поле скорости (к статье Е. Жигалко и А. Цветкова).

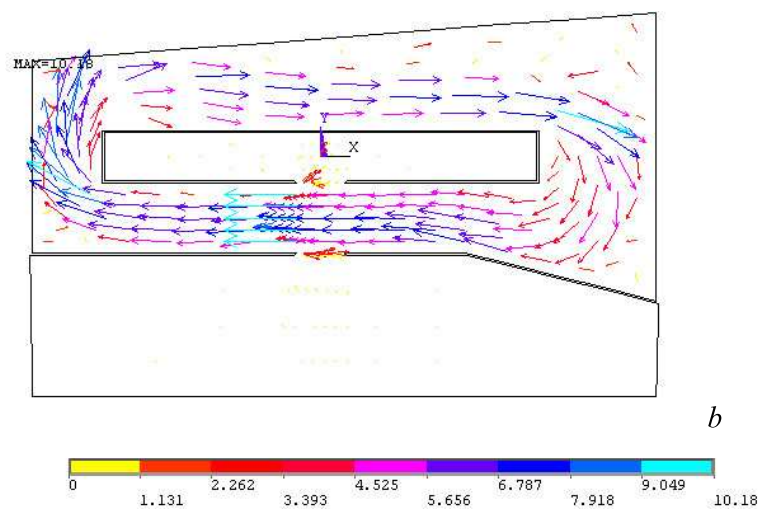
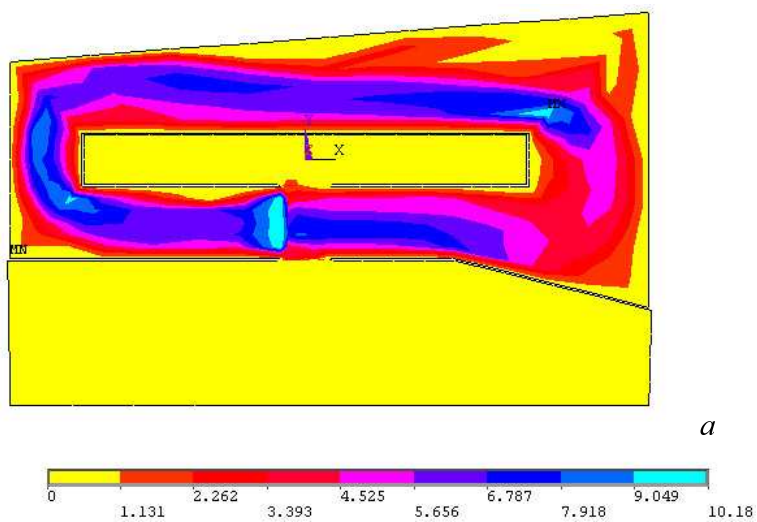


Рис. 10. Пример расчёта течения в компоновке, более приближённой к реальной: *a* — скалярное поле величины скорости, *b* — векторное поле скорости (к статье Е. Жигалко и А. Цветкова).

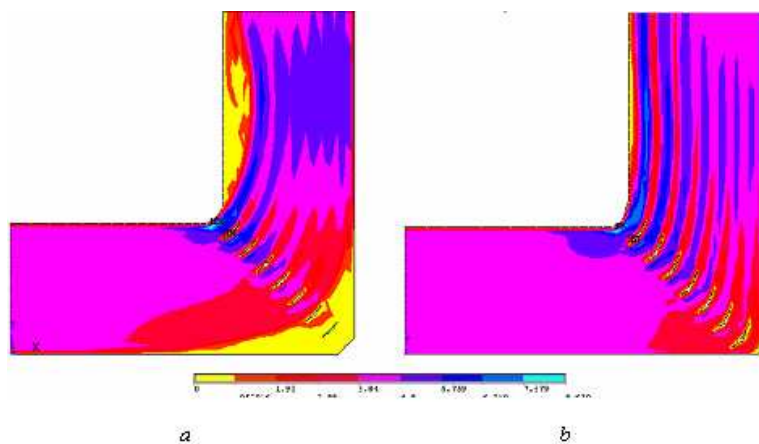


Рис. 11. Зависимость скоса потока от формы поворотной секции (к статье Е. Жигалко и А. Цветкова).

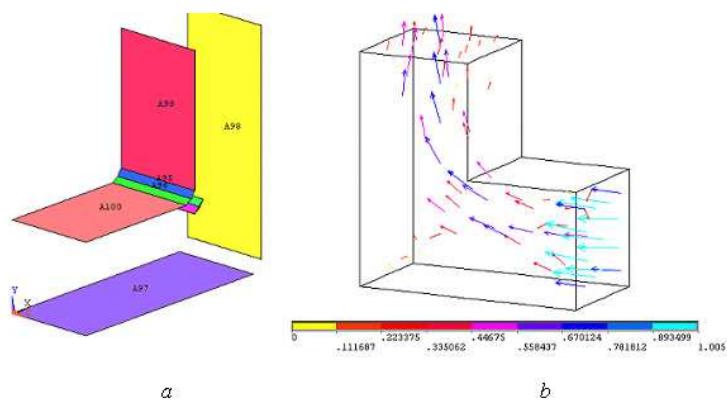


Рис. 12. Расчёт пространственного течения воздуха в поворотной секции канала: *a* — вид контуров в одной из фаз построения области течения, *b* — векторное поле скорости в колене не является плоским даже при однородных условиях на входе (к статье Е. Жигалко и А. Цветкова).