ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Московский институт электроники и математики Национального
исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Кафедра высшей математики

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания
для самостоятельной работы студентов

Москва 2013

Составители: доцент Голубева Зоя Николаевна,
доцент Ерастова Надежда Константиновна.

УДК 517

Кратные и криволинейные интегралы. Методические указания для самостоятельной работы студентов /Моск.ин-т электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»; Сост. З.Н. Голубева, Н.К. Ерастова. М., 2013. - 24с.

Методические указания содержат необходимые теоретические понятия и типовые задачи с решениями для выполнения домашних и аудиторных контрольных работ 3 , 4 модулей по математическому анализу для студентов инженерных факультетов.

Авторы приносят благодарность Амосову Б.А и Быковой М.Г., прочитавших разработку и сделавших ряд полезных замечаний.

ISBN 978-5-94506-311-2

Учебное издание

Редактор Е.С. Резникова
Технический редактор О.Г. Завьялова

Подписано в печать 30.01.2013.   Формат 60х84/16.
Бумага офсетная №2. Ризография. Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,4.
Изд.№7. Тираж 30 экз. Заказ   Бесплатно.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики».
109028, Москва, Б.Трехсвятительский пер., 3/12.
Редакционно-издательский отдел Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики». Участок МИЭМ типографии НИУ ВШЭ
113054, Москва, ул.М. Пионерская, 12.

В домашней работе №1 предложены задачи, в которых требуется вычислять двойные и тройные интегралы. Приведем основные определения и теоремы, необходимые для решения этих задач.

Двойной интеграл

Кривую l на плоскости можно задать в *явном* виде либо уравнением

$$l:\quad y=f(x),\ x\in[a,b],$$

либо уравнением

$$l:\ x=g(y),\ y\in[c,d]).$$

Плоская кривая l называется *гладкой*, если в любой ее точке можно провести касательную, положение которой меняется от точки к точке непрерывно.

Явно заданная кривая будет гладкой, если функция $y'(x)$ ($x'(y)$) непрерывно дифференцируема в любой точке $x\in[a,b]$ ($y\in[c,d]$). Непрерывная плоская кривая называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких кривых.

Далее под словом ***кривая*** *всегда будет подразумеваться* ***кусочно-гладкая кривая***.

Напомним, что *областью* в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ называется открытое связное множество, а *замкнутой областью* – область с ее границей.

Далее под словом ***область*** *всегда будет подразумеваться* ***ограниченная замкнутая область.***

Пусть область $D\subset\boldsymbol{R}^2$ ограничена замкнутой кривой l. (Отметим, прежде всего, что мы умеем находить площадь такой области при помощи обычного определенного интеграла.) Пусть в этой области определена *непрерывная* функция $z=f(x,y)$.

Двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D обозначается символом

$$\iint\limits_D f(x,y)dS\text{, или }\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Основные свойства двойного интеграла

a) *Свойство линейности*: если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны на области D, то

$$\iint\limits_D(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))dxdy=\alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy+\beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy,$$

где α, β – любые действительные числа.

b) *Свойство аддитивности*: если функция $f(x,y)$ непрерывна на области D и $D=D_1\cup D_2$ – разбиение области D, то

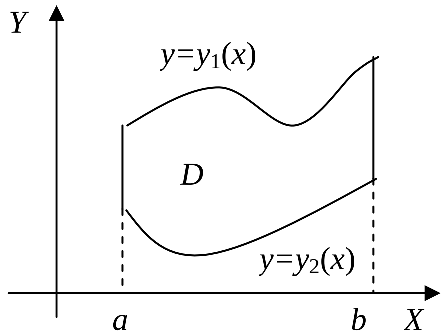
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Правильные области

Область $D \in \boldsymbol{R}^2$ называется *правильной* в направлении оси OY, если эту область можно задать неравенствами:

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{array} \right\},$$

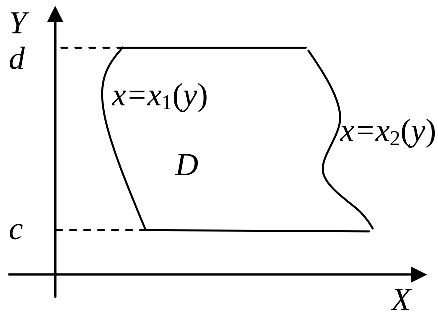
где функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ – непрерывны на $[a, b]$.



Область D называется *правильной* в направлении оси OX, если эту область можно задать неравенствами:

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{array} \right\},$$

где функции $x_1(y)$, $x_2(y)$ – непрерывны на $[c, d]$.



Формулы для вычисления двойного интеграла

Если D – *правильная* в направлении оси OY, т.е.

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{array} \right\}, \text{ то}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy.$$

Интеграл, стоящий справа, называется *повторным*. Вычисляется сначала *внутренний* интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$, в котором x считается постоянным. Этот интеграл будет некоторой функцией от x. Затем вычисляется *внешний* интеграл от полученной функции.

Если D – *правильная* в направлении оси OX, т.е.

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{array} \right\}, \text{ то}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx.$$

Интеграл, стоящий справа, также называется *повторным*. Вычисляется сначала *внутренний* интеграл $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$, в котором y считается постоянным. Этот интеграл будет некоторой функцией от y. Затем вычисляется *внешний* интеграл от полученной функции.

Если D – *правильная* как в направлении оси OY, так и в направлении оси OX, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx .$$

Геометрические приложения двойных интегралов

1) *Площадь плоской области*. Площадь области D вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy .$$

2) *Объем цилиндрического тела*. Пусть $z{=}z_1(x, y)$ и $z{=}z_2(x, y)$ – непрерывные на D функции. Цилиндрическое (в направлении оси OZ) тело задается условиями

$$\left\{ \begin{matrix} (x,y)\in D \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{matrix} \right\}$$

Объем V этого тела вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_D [z_2(x,y) - z_1(x,y)]dxdy .$$

3) *Площадь поверхности*. Пусть $z{=}f(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая на D функция (т.е. имеет непрерывные частные производные первого порядка в области D). Площадь S поверхности, задаваемой этой функцией, вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\,dxdy .$$

Механические приложения двойных интегралов

Пусть плоская пластина толщиной h и плотностью вещества $\rho(x, y)$ занимает область D (функция $\rho(x, y)$ непрерывна на D).

1) *Масса плоской пластины*. Масса m этой пластины вычисляется по формуле

$$m = h\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy .$$

2) *Статические моменты*. *Центр тяжести*. Статические моменты M_{OY} и M_{OX} плоской пластины относительно осей OY и OX соответственно вычисляются по формулам:

$$M_{OY} = h\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy ,$$

$$M_{OX} = h\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy .$$

Координаты (x_c, y_c) центра тяжести пластины находятся по формулам:

$$x_c = \frac{M_{OY}}{m},\ y_c = \frac{M_{OX}}{m} .$$

3) *Количество тепла*. Пусть пластина однородна, т.е. $\rho(x, y)=\rho=\text{const}$, и имеет теплоемкость C. В пластине задано распределение температуры $T(x, y)$ (функция $T(x, y)$ непрерывна на D). Количество тепла Q в этой пластине вычисляется по формуле

$$Q = \rho ch\iint\limits_D T(x, y)dxdy.$$

Замена переменных в двойном интеграле

Пусть D – область на плоскости $\boldsymbol{R}^2_{xy}$, G – область на плоскости $\boldsymbol{R}^2_{uv}$. (Как и выше, предполагается, что обе области ограничены кусочно-гладкими кривыми.) Пусть

$$x=x(u, v),\ y=y(u, v)$$

– взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области G на область D, якобиан $J(u, v)$ которого отличен от нуля всюду в G, т.е.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0,\ \forall (u,v) \in G.$$

Тогда для любой непрерывной на D функции $f(x, y)$ справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_G f(x(u,v), y(u,v))\,|\,J(u,v)\,|\,dudv.$$

В частности, если на плоскости введены полярные координаты

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\ r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\ (-\pi < \varphi \leq \pi),$$

то $J(r, \varphi)=r$, а формула замены переменных в двойном интеграле для соответствующих областей выглядит так:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_G f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))rdrd\varphi.$$

Тройной интеграл

Поверхность S в пространстве можно задать в *явном* виде уравнением

$$z=g(x, y),\ (x, y)\in D,$$

либо уравнением

$$x=h(y, z),\ (y, z)\in G,$$

либо уравнением

$$y=t(x, z),\ (x, z)\in F),$$

где, как и выше, D,G,F – ограниченные замкнутые области в $\boldsymbol{R}^2$, границей каждой из которых является кусочно-гладкая кривая.

Поверхность S называется *гладкой*, если в любой ее точке можно провести касательную плоскость, положение которой меняется при переходе от точки к точке непрерывно.

Явно заданная поверхность будет гладкой, если функция $g(x, y)$ непрерывно дифференцируема на D. Поверхность S называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких поверхностей.

Пусть V –область в $\boldsymbol{R}^3$ (ограниченная, замкнутая), ограниченная кусочно-гладкой (замкнутой) поверхностью S. (Отметим, прежде всего, что мы умеем находить объем такой области при помощи двойного интеграла.) Пусть в области $V\subset \boldsymbol{R}^3$ определена непрерывная функция $u=f(x, y, z)$.

Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области V обозначается символом

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \text{ , или } \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \text{ .}$$

Основные свойства тройного интеграла

a) *Свойство линейности*: если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ непрерывны на области V, то

$$\iiint\limits_V (\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z))dV=\alpha\iiint\limits_V f(x,y,z)dV+\beta\iiint\limits_V g(x,y,z)dV ,$$

где α, β – любые действительные числа.

b) *Свойство аддитивности*: если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на области V и $V=V_1\cup V_2$ – разбиение области V, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV+\iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV .$$

Цилиндрические области

Область V называется *цилиндрической* в направлении оси OZ, если эту область можно задать неравенствами:

$$V=\left\{(x,y,z): \begin{array}{c}(x,y)\in D,\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{array}\right\},$$

где D – *правильная* в направлении оси OX или оси OY область, а функции $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ непрерывны на D.

Аналогично определяются области, *цилиндрические* в направлении оси OX или, соответственно, оси OY:

$$V=\left\{(x,y,z): \begin{array}{c}(y,z)\in D,\\ x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z)\end{array}\right\},$$

где D – *правильная* в направлении оси OY или оси OZ область

$$V=\left\{(x,y,z): \begin{array}{c}(x,z)\in D,\\ y_1(x,z)\le y\le y_2(x,z)\end{array}\right\},$$

где D – *правильная* в направлении оси OX или оси OZ область.

Формулы для вычисления тройного интеграла

Если V – *цилиндрическая* в направлении оси OZ, т.е.

$$V=\left\{(x,y,z): \begin{array}{c}(x,y)\in D,\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{array}\right\},$$

а D – *правильная* в направлении оси OY, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Интеграл, стоящий справа, называется *повторным*. Вычисляется сначала *внутренний* интеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, в котором x, y считаются постоянными. Этот интеграл будет некоторой функцией от x и y. Обозначим ее через $F(x, y)$. Затем вычисляется интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y)dy$, в котором x считается постоянным, и, наконец, *внешний* интеграл от полученной функции переменного x.

Остальные формулы для других вариантов цилиндрических областей V (и правильных областей D) записываются по аналогии с приведенной.

Геометрические приложения тройных интегралов

Объем цилиндрического тела. Объем $\boldsymbol{V}$ этого тела вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{V} = \iiint\limits_V dxdydz .$$

Механические приложения тройных интегралов

Пусть тело имеет плотность вещества $\rho(x, y, z)$ и занимает объем V (функция $\rho(x, y, z)$ непрерывна на V).

1) *Масса неоднородного тела*. Масса m этого тела вычисляется по формуле

$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz .$$

2) *Статические моменты*. *Центр тяжести*. Статические моменты M_{XOY}, M_{XOZ} и M_{YOZ} этого тела относительно плоскостей XOY, XOZ и YOZ соответственно вычисляются по формулам:

$$M_{XOY} = \iiint\limits_V z \cdot \rho(x,y,z)dxdydz ,$$

$$M_{XOZ} = \iiint\limits_V y \cdot \rho(x,y,z)dxdydz ,$$

$$M_{YOZ} = \iiint\limits_V x \cdot \rho(x,y,z)dxdydz$$

Координаты (x_c, y_c, z_c) центра тяжести тела находятся по формулам:

$$x_c = \frac{M_{YOZ}}{m},\ y_c = \frac{M_{XOZ}}{m}, z_c = \frac{M_{XOY}}{m} .$$

3) *Количество тепла*. Пусть тело имеет теплоемкость $C=const$. В теле задано распределение температуры $T(x, y, z)$ (функция $T(x, y, z)$ непрерывна на V). Количество тепла Q в этом теле вычисляется по формуле

$$Q = C\iiint\limits_V \rho(x,y,z) \cdot T(x,y,z)dxdydz .$$

Замена переменных в тройном интеграле

Пусть V – область на плоскости $\boldsymbol{R}^3_{xyz}$, G – область на плоскости $\boldsymbol{R}^3_{uvw}$. (Как и выше,предполагается, что обе области ограничены кусочно-гладкими поверхностями.) Пусть

$$x=x(u, v, w),\ y=y(u, v, w),\ z=z(u, v, w),$$

– взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области G на область V, якобиан $J(u, v, w)$ которого отличен от нуля всюду в G, т.е.

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0,\ \ \forall (u,v,w)\in G.$$

Тогда для любой непрерывной на V функции $f(x, y, z)$ справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_G f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\,|\,J(u,v,w)\,|\,dudvdw\,.$$

В частности, если в пространстве введены цилиндрические координаты

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\ \ z=z,\ \ r\geq 0,\ \ 0\leq\varphi<2\pi\,,$$

то $J(r, \varphi, z)=r$, а формула замены переменных в тройном интеграле для соответствующих областей выглядит так:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_G f(x(r,\varphi),y(r,\varphi),z)\cdot rdrd\varphi dz\,.$$

Если в пространстве введена сферическая система координат

$$x=r\cos\varphi\sin\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z=r\cos\theta,\ \ r\geq 0,\ \ 0\leq\varphi<2\pi, 0\leq\theta\leq\pi,$$

то $J(r, \varphi, \theta)=r^2 \sin\theta$, а формула замены переменных в тройном интеграле для соответствующих областей выглядит так:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_G f(x(r,\varphi,\vartheta),y(r,\varphi,\theta),z((r,\theta))\cdot r^2\sin\theta drd\varphi d\theta\,.$$

***

Криволинейные интегралы первого и второго рода

Пусть в области $D\in \boldsymbol{R}^2$ гладкая кривая l задана параметрически:

$$l:\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} t\in[\alpha,\beta].$$

Условием гладкости так заданной кривой является существование непрерывных производных $x'(t)$, $y'(t)$, которые не обращаются в нуль одновременно. Кривую l будем считать ***ориентированной***, т.е. на этой кривой выбрано направление обхода. Пусть точка $A(x(\alpha), y(\alpha))$ – начало, а точка $B(x(\beta), y(\beta))$ – конец этой кривой. И далее кривую будем обозначать дугой $\overset{\frown}{AB}$.

Криволинейные интегралы первого рода

Пусть функция f (x, y) определена и непрерывна в точках кривой l (т.е. на кривой задано непрерывное скалярное поле)

Криволинейный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\int_l f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Если кривая задана явным уравнением: $y=y(x), x\in[a,b]$,то её можно параметризовать следующим образом:

$$\begin{cases} x=t \\ y=y(t) \end{cases}, t\in[a,b].$$

Теперь формула для вычисления криволинейного интеграла первого рода имеет вид:

$$\int_l f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

Отметим, что криволинейный интеграл первого рода **не зависит** от направления движения по кривой, т.е.

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)dl = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)dl.$$

Физически криволинейный интеграл первого рода можно рассматривать как массу кривой, имеющей плотность $f(x,y)$.

Криволинейный интеграл первого рода обладает свойствами линейности и аддитивности.

Аналогично вычисляется криволинейный интеграл первого рода от функции трех переменных $f(x,y,z)$ по пространственной кривой l,а именно, если

$$l:\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta], \\ z=z(t), \end{cases}$$

то

$$\int_l f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Криволинейные интегралы второго рода

Пусть в области D определена вектор-функция $\vec{F}(x,y)=\{P(x,y),Q(x,y)\}$, где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – непрерывные в области D функции (т.е. в области D задано *непрерывное векторное поле*).

Криволинейный интеграл второго рода вычисляется по формуле

$$\int_l \vec{F}d\vec{l} \equiv \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt. \quad (*)$$

Из свойств определенного интеграла следуют свойства *линейности* и *аддитивности* этого криволинейного интеграла. Аддитивность означает, что если кривая $\overset{\frown}{AB}$ разбита точкой С на две части, то

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy=\int_{\overset{\frown}{AC}} Pdx+Qdy+\int_{\overset{\frown}{CB}} Pdx+Qdy.$$

При изменении направления движения по кривой меняется знак перед интегралом, т.е.

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy=-\int_{\overset{\frown}{BA}} Pdx+Qdy.$$

Если кривая задана явно уравнением $y=y(x)$, $x\in[a, b]$, то ее можно параметризовать, например, так: $l:\begin{cases} x=t, \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in[a,b]$. Формула (*) тогда принимает вид

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b [P(t,y(t))+Q(t,y(t))y'(t)]dt.$$

Криволинейный интеграл второго рода есть работа, совершаемая силой

$\vec{F}(x,y)=\{P(x,y),Q(x,y)\}$ на криволинейном пути $\overset{\frown}{AB}$.

Если кривая замкнута, то криволинейный интеграл второго рода называется циркуляцией вектора $\vec{F}(x,y)$.

Теорема (*условие независимости от пути интегрирования*). Если в ***односвязной*** области D существует дифференцируемая функция $U(x, y)$ такая, что

$$dU(x, y)=P(x, y)dx+Q(x, y)dy, \text{ т.е. } \frac{\partial U}{\partial x}=P, \ \frac{\partial U}{\partial y}=Q,$$

то криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования и

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=U(x_1,y_1)-U(x_0,y_0). \qquad (**)$$

В этом случае пишут $\int\limits_{A(x_0,y_0)}^{B(x_1,y_1)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ вместо $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Если кривая l – замкнутая, то $\oint\limits_{l} Pdx+Qdy=0$.

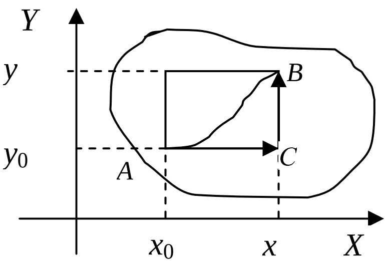
Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка в односвязной области D, то *необходимым* и *достаточным условием* существования такой функции является следующее равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Векторное поле $\vec{F}(x,y)=\{P(x,y),Q(x,y)\}$ в этом случае называется *потенциальным*, а соответствующая функция $U(x, y)$ – *потенциалом* этого поля. Ясно, что потенциал находится с точностью до постоянного слагаемого, т.е если $U(x, y)$ – *потенциал*, то и $U(x, y)$+С – *потенциал*.

Потенциал поля можно найти следующим образом.
Поскольку для потенциального поля криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, то путь, соединяющий точки $A(x_0,y_0)$ и $B(x,y)$, можно выбрать в виде двух отрезков AC и CB (см. рисунок). На отрезке AC: $y=y_0$ и dy=0, а на отрезке CB: $x=x_0$ и dx=0.
Поэтому из формул (*) и (**) получаем:

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$



Формула Грина

Пусть область $D\in R^2$ можно представить в виде объединения конечного числа правильных относительно осей OX и OY областей, C – граница области D, и функции $P(x,y),Q(x,y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\overline{D}=D\cup C$.Тогда справедлива формула

$$\oint\limits_{C} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

где направление обхода границы C выбирается так, что область D остается слева.

Элементы векторного анализа

Пусть в области $D\in \boldsymbol{R}^3$ определена вектор-функция,
$\vec{F}(x,y)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ и функции $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ непрерывно дифференцируемы (т.е. в области D задано *гладкое векторное поле*).

Пусть в этой области также задана дифференцируемая функция $U(x, y, z)$ (*гладкое скалярное поле*).

1) Градиентом скалярного поля $U(x, y, z)$ называется векторное поле

$$gradU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k},$$

т.е. это вектор с координатами $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$.

2) Дивергенцией векторного поля $\vec{F}(x, y)$ называется скалярное поле

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

3) Ротором векторного поля $\vec{F}(x, y)$ называется векторное поле

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

***

***Контрольная работа* №3** (аудиторная, 45 минут).

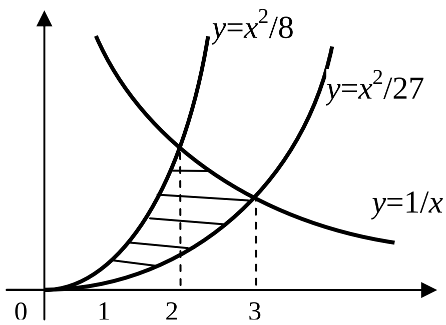
Задача 1. Найти массу пластинки, ограниченной тремя кривыми $y = \frac{x^2}{8}$, $y = \frac{x^2}{27}$, $y = \frac{1}{x}$. Плотность пластинки $\rho(x, y)=x+y$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых:

1) $\frac{x^2}{8} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow \boxed{x=2}$; 2) $\frac{x^2}{27} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow \boxed{x=3}$;

3) $\frac{x^2}{27} = \frac{x^2}{8} \Rightarrow \boxed{x=0}$.

Теперь построим область интегрирования:



Так как верхнюю границу области нельзя задать одной формулой, то область интегрирования D разобьем на две правильные в направлении оси OY области D_1 и D_2:

$$D_1:\begin{cases} 0\le x\le 2,\\ \dfrac{x^2}{27}\le y\le \dfrac{x^2}{8}\end{cases},\qquad D_2:\begin{cases} 2\le x\le 3,\\ \dfrac{x^2}{27}\le y\le \dfrac{1}{x}\end{cases}.$$

Принимая толщину пластинки за единицу, теперь можем вычислить массу пластинки:

$$m=\iint\limits_D (x+y)dxdy=\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2/27}^{x^2/8}(x+y)dy+\int\limits_2^3 dx\int\limits_{x^2/27}^{1/x}(x+y)dy=\int\limits_0^2\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2/27}^{y=x^2/8}dx+\int\limits_2^3\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2/27}^{y=1/x}dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{2\cdot 64}-\frac{x^3}{27}-\frac{x^4}{2\cdot 27^2}\right)dx+\int\limits_2^3\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{x^3}{27}-\frac{x^4}{2\cdot 27^2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2\cdot 64}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{27}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2\cdot 27^2}\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2+\left(x-\frac{1}{2x}-\frac{x^4}{4\cdot 27}-\frac{x^5}{5\cdot 2\cdot 27^2}\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{20}-\frac{4}{27}-\frac{16}{5\cdot 729}+3-\frac{1}{6}-\frac{3}{4}-\frac{1}{30}-2+\frac{1}{4}+\frac{4}{27}+\frac{16}{5\cdot 729}=\frac{17}{20}.$$

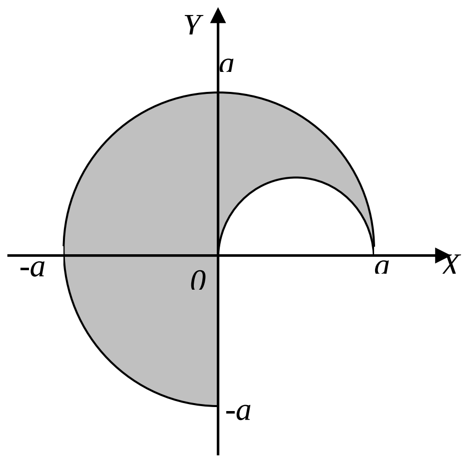
Задача №2. Перейдя к полярным координатам, свести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному. (Область D изображена на рисунке).

Решение. Граница области D состоит из участка окружности радиуса a с центром в начале координат, участка окружности радиуса $a/2$ с центром в точке $(a/2,0)$ и участка оси OY. В декартовой системе координат указанные окружности и ось OY задаются уравнениями:

$$\Gamma_1:\ \ x^2+y^2=a^2;$$

$$\Gamma_2:\ \ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4};$$

$$\Gamma_3:\ \ x=0.$$



В полярной системе координат:

$$x=r\sin\varphi,\ y=r\cos\varphi\ \ (r\ge 0,\ 0\le\varphi<2\pi).$$

Подставляя эти выражения для x и y в уравнения линий Γ_1, Γ_2, Γ_3, получаем их уравнения в полярной системе координат:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = a^2 \Rightarrow \gamma_1:\ r = a;$$

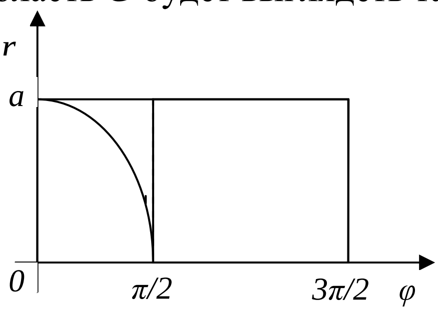
$$r^2\cos^2\varphi - ra\cos\varphi + \frac{a^2}{4} + r^2\sin^2\varphi = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \gamma_2:\ r = a\cos\varphi;$$

$$r\cos\varphi = 0 \Rightarrow \gamma_3:\ \varphi = \frac{\pi}{2};\ \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Область D удобно разбить на две области D_1 и D_2. Область D_1 ограничена линиями Γ_1, Γ_2, Γ_3 ($x \geq 0$, $y \geq 0$); область D_2 ограничена линиями Γ_1, Γ_3 ($x \leq 0$). Тогда в полярной системе координат область G, соответствующая области D, также разобьется на части G_1 и G_2, которые будут задаваться неравенствами:

$$G_1: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ a\cos\varphi \leq r \leq a \end{cases}; \quad G_2: \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{3\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq a \end{cases}.$$

На плоскости $\boldsymbol{R}_{\varphi,r}$ область G будет выглядеть так:



Теперь нетрудно выписать ответ, зная формулу замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi =$$

$$= \iint\limits_{G_1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi + \iint\limits_{G_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr + \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

***

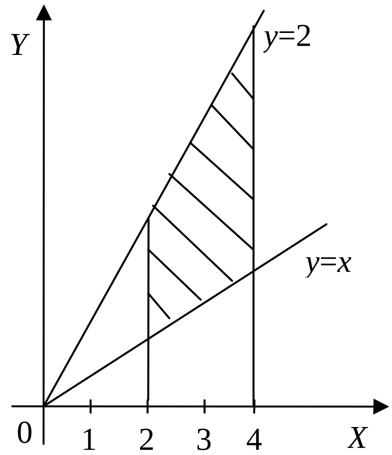
Другой тип аудиторной контрольной работы рассчитан на полтора часа. Приведем один из вариантов.

Задача№1. Вычислить $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} (6y - 3x)dy$. Изобразить область интегрирования. Найти координаты центра тяжести этой области, считая плотность вещества $\rho(x, y)$ постоянной, т.е. $\rho(x, y) = \rho_0 = \text{const}$.

Решение. Вычислим указанный повторный интеграл:

$$\int\limits_2^4 dx\int\limits_x^{2x}(6y-3x)dy=\int\limits_2^4(3y^2-3xy)\Big|_{y=x}^{y=2x}dx=\int\limits_2^4(12x^2-6x^2-3x^2+3x^2)dx=$$
$$=\int\limits_2^4 6x^2dx=2x^3\Big|_2^4=128-16=112.$$

Область интегрирования D задается неравенствами:



$$\begin{cases}2\le x\le 4,\\ x\le y\le 2x.\end{cases}$$

Теперь будем считать, что пластинка с плотностью вещества $\rho(x, y)=\rho_0$ занимает область D. Пусть пластинка имеет толщину h. Тогда масса m пластинки равна

$$m=h\int\limits_2^4 dx\int\limits_x^{2x}\rho_0 dy=h\rho_0\int\limits_2^4(2x-x)dx=h\rho_0\frac{x^2}{2}\Big|_2^4=6h\rho_0.$$

Вычислим статические моменты пластинки. Имеем:

$$I_{OY}=h\rho_0\iint\limits_D xdxdy=h\rho_0\int\limits_2^4 dx\int\limits_x^{2x}xdy=h\rho_0\int\limits_2^4 xy\Big|_{y=x}^{y=2x}dx=$$
$$=h\rho_0\int\limits_2^4 x(2x-x)dx=h\rho_0\int\limits_2^4 x^2dx=h\rho_0\frac{x^3}{3}\Big|_2^4=h\rho_0\frac{1}{3}(64-8)=\frac{56}{3}h\rho_0.$$

$$I_{OX}=h\rho_0\iint\limits_D ydxdy=h\rho_0\int\limits_2^4 dx\int\limits_x^{2x}ydy=h\rho_0\int\limits_2^4\frac{y^2}{2}\Big|_{y=x}^{y=2x}dx=$$
$$=h\rho_0\int\limits_2^4(2x^2-\frac{x^2}{2})dx=h\rho_0\int\limits_2^4\frac{3}{2}x^2dx=h\frac{x^3}{2}\Big|_2^4=h\rho_0\frac{1}{2}(64-8)=28h\rho_0$$

Отсюда получаем координаты центра тяжести пластинки:

$$x_c=\frac{I_{OY}}{m}=\frac{56}{3\cdot 6}=\frac{28}{9};\qquad y_c=\frac{I_{OX}}{m}=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}.$$

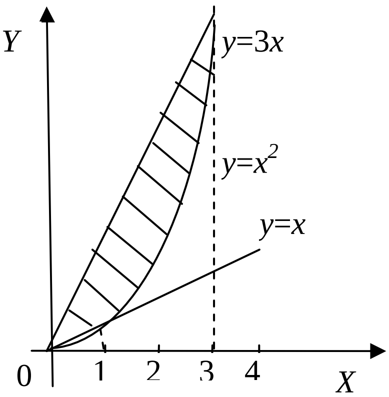
Задача №2. Область ограничена кривыми $y=x$, $y=3x$, $y=x^2$. Определить площадь части поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, лежащей над этой областью.

Решение. Найдем точки пересечения линий, ограничивающих область:

$$x=x^2\Rightarrow x=0, x=1;\ \ 3x=x^2\Rightarrow x=0, x=3.$$

Нижнюю границу области нельзя задать одной формулой, поэтому разобьем область интегрирования D на две правильные в направлении оси OY области D_1 и D_2:

$$D_1:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ x\le y\le 3x\end{cases},\qquad D_2:\begin{cases}1\le x\le 3,\\ x^2\le y\le 3x\end{cases}.$$



Далее,

$$z'_x=\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$z'_y=\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Поэтому

$$\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\sqrt{1+\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}}=\sqrt{2}.$$

Теперь находим площадь S части поверхности:

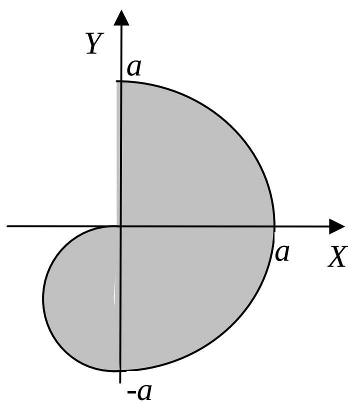
$$S=\iint\limits_D\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\left(\iint\limits_{D_1}dxdy+\iint\limits_{D_2}dxdy\right)=\sqrt{2}\left(\int\limits_0^1dx\int\limits_x^{3x}dy+\int\limits_1^3dx\int\limits_{x^2}^{3x}dy\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\int\limits_0^1(3x-x)dx+\int\limits_1^3(3x-x^2)dx\right)=\sqrt{2}\left(x^2\right)\Big|_0^1+\sqrt{2}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=\sqrt{2}\left(1+\frac{27}{2}-\frac{27}{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{13}{3}.$$

Задача №3. В пластинке, изображенной на рисунке, задано распределение температуры $T(x,y)=\dfrac{T_0xa}{x^2+y^2}$. Перейдя к полярным координатам, найти количество тепла в пластинке, считая известными величины ρ, c, h.

Решение. Граница области D состоит из участка окружности радиуса a с центром в начале координат, участка окружности радиуса $a/2$ с центром в точке $(0,-a/2)$ и участка оси OY. В декартовой системе координат указанные окружности и ось OY задаются уравнениями:



$$\Gamma_1:\ \ x^2+y^2=a^2;$$

$$\Gamma_2:\ \ x^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4};$$

$$\Gamma_3:\ \ x=0.$$

В полярной системе координат $x = r\cos\varphi,\ e = r\sin\varphi\ (r \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi)$. Подставляя эти выражения для x и y в уравнения линий Γ_1, Γ_2, Γ_3, получаем их уравнения в полярной системе координат:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = a^2 \Rightarrow \gamma_1: \ r = a;$$

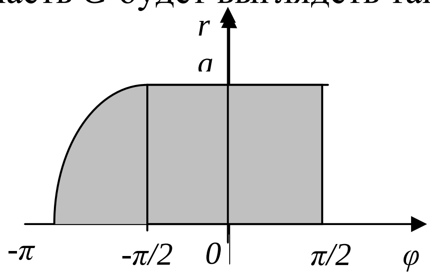
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + ra\sin\varphi + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \gamma_2: \ r = -a\sin\varphi;$$

$$r\cos\varphi = 0 \Rightarrow \gamma_3: \ \varphi = -\frac{\pi}{2}; \ \ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Область D удобно разбить на две области D_1 и D_2: D_1 – область, ограниченная линиями Γ_1, Γ_3 ($x \geq 0$); D_2 – область, ограниченная линиями Γ_2, Γ_3 ($x \leq 0$, $y \leq 0$). Тогда в полярной системе координат область G, соответствующая области D, также разобьется на части G_1 и G_2, которые будут задаваться неравенствами:

$$G_1: \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ 0 \leq r \leq a \end{cases} \quad G_2: \begin{cases} -\pi \leq \varphi \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq -a\sin\varphi \end{cases}.$$

На плоскости $\boldsymbol{R}_{\varphi,r}$ область G будет выглядеть так:



Теперь нетрудно вычислить количество теплоты в пластинке, зная формулу замены переменных в двойном интеграле:

$$Q = \rho chT_0 a \iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy = \rho chT_0 a \iint_G \frac{r\cos\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} rdrd\varphi =$$

$$= \rho chT_0 a \left(\iint_{G_1} \cos\varphi drd\varphi + \iint_{G_2} \cos\varphi drd\varphi \right) =$$

$$= \rho chT_0 a \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \cos\varphi dr + \int_{-\pi}^{-\pi/2} d\varphi \int_0^{-a\sin\varphi} \cos\varphi dr \right) =$$

$$= \rho chT_0 a \left(a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi - a \int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \right) =$$

$$= \rho chT_0 a^2 \left(\sin\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin\varphi d\sin\varphi \right) = \rho chT_0 a^2 \left(2 - \frac{\sin^2\varphi}{2} \Bigg|_{-\pi}^{-\pi/2} \right) =$$

$$= \rho chT_0 a^2 \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3\rho chT_0 a^2}{2}.$$

Задача №4. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} dy\int\limits_{xe^y}^4 (2z-xe^y)dz$. Записать через повторные интегралы, не вычисляя, выражения для координат центра тяжести соответствующей области, считая плотность вещества ρ_0 постоянной.

Решение. Вычислим повторный интеграл:

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} dy\int\limits_{xe^y}^4 (2z-xe^y)dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} (z^2-xe^y z)\Big|_{z=xe^y}^{z=4} dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} (16-4xe^y-(xe^y)^2+xe^y\cdot xe^y)dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} (16-4xe^y)dy=\int\limits_0^1 (16y-4xe^y)\Big|_{y=0}^{y=x^2} dx=$$

$$=\int\limits_0^1 (16x^2-4xe^{x^2}+4x)dx=\left(\frac{16}{3}x^3+2x^2\right)\Bigg|_0^1-2\int\limits_0^1 e^{x^2}dx^2=$$

$$=\frac{16}{3}+2-2e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{16}{3}+2-2e+2=\frac{28}{3}-2e.$$

Теперь запишем формулы для координат центра тяжести тела с плотностью вещества ρ_0, занимающего объем $V:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le x^2 \\ xe^y\le z\le 4 \end{cases}$

$$x_c=\frac{I_{YOZ}}{m}=\frac{\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{x^2} dy\int\limits_{xe^y}^4 \rho_0 dz}{\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} dy\int\limits_{xe^y}^4 \rho_0 dz}$$

$$y_c=\frac{I_{XOZ}}{m}=\frac{\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} ydy\int\limits_{xe^y}^4 \rho_0 dz}{\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} dy\int\limits_{xe^y}^4 \rho_0 dz}.$$

$$z_c=\frac{I_{XOY}}{m}=\frac{\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} dy\int\limits_{xe^y}^4 zdz}{\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} dy\int\limits_{xe^y}^4 dz}.$$

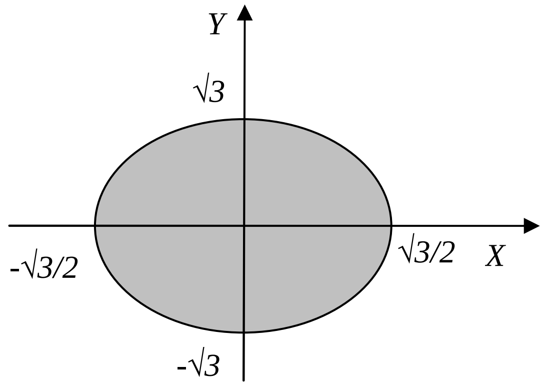
Задача №5. Тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ берется по области *V*, ограниченной поверхностями $z=\sqrt{4x^2+y^2+1}$, $z=2$. Выразить тройной интеграл через повторный. Записать через повторный интеграл выражение для объема области *V*.

Решение. Найдем проекцию области *V* на плоскость *XOY*:

$$\sqrt{4x^2+y^2+1}=2 \Rightarrow 4x^2+y^2=3 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{3/4}+\frac{y^2}{3}=1} \Rightarrow y=\pm\sqrt{3-4x^2}\,.$$

Получили уравнение эллипса $\boxed{\frac{x^2}{3/4}+\frac{y^2}{3}=1}$ с центром в точке (0, 0) с полуосями $a=\sqrt{3}/2$, $b=\sqrt{3}$. Из рисунка видно, что область *D* изменения переменных *x* и *y* можно задать следующим образом:

$$D:\begin{cases} -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\le x\le \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{3-4x^2}\le y\le \sqrt{3-4x^2} \end{cases}.$$



Из уравнения поверхности

$$z=\sqrt{4x^2+y^2+1}$$

следует, что $z\ge 1$ при любых *x*, *y*. Поэтому область *V* задается системой неравенств:

$$V:\begin{cases} -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\le x\le \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ -\sqrt{3-4x^2}\le y\le \sqrt{3-4x^2}, \\ \sqrt{4x^2+y^2+1}\le z\le 2. \end{cases}$$

Видим, что эта область является цилиндрической в направлении оси *OZ*. Поэтому имеем:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\int\limits_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}}dx\int\limits_{-\sqrt{3-4x^2}}^{\sqrt{3-4x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{4x^2+y^2+1}}^{2}f(x,y,z)dz\,.$$

Для объема области *V* получаем выражение:

$$V=\iiint\limits_V dV=\int\limits_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}}dx\int\limits_{-\sqrt{3-4x^2}}^{\sqrt{3-4x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{4x^2+y^2+1}}^{2}dz\,.$$

***

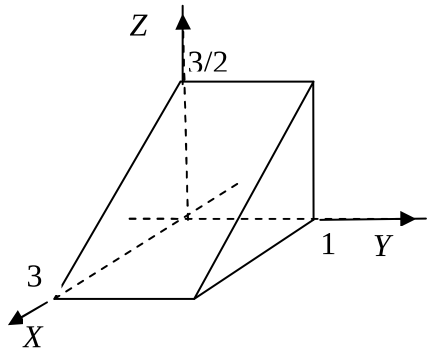
Остается рассмотреть **домашнюю работу**.

Домашняя работа №3.

Задача №1. Найти координаты центра тяжести однородного призматического тела ($\rho=\rho_0=$const), ограниченного поверхностями $x=0$, $z=0$, $y=0$, $y=1$, $x+2z=3$.

Решение. Начертим область, занимаемую телом (в частности, это можно сделать при помощи любого математического пакета на компьютере).

Из рисунка видно, что область является цилиндрической в направлении оси OZ:



$$V:\begin{cases} 0\le y\le 1, \\ 0\le x\le 3, \\ 0\le z\le \dfrac{3-x}{2}. \end{cases}$$

Вычислим массу этого тела:

$$m=\iiint\limits_V \rho_0 dV=\rho_0\int_0^1 dy\int_0^3 dx\int_0^{(3-x)/2} dz=\rho_0\int_0^1 dy\int_0^3 \frac{3-x}{2}dx=$$

$$=\rho_0\int_0^1\left(-\frac{(3-x)^2}{4}\right)\Bigg|_0^3 dy=\rho_0\int_0^1\frac{9}{4}dy=\rho_0\frac{9}{4}y\Big|_0^1=\frac{9}{4}\rho_0.$$

Теперь вычислим статические моменты относительно координатных плоскостей.

$$I_{XOY}=\iiint\limits_V \rho_0 z dV=\rho_0\int_0^1 dy\int_0^3 dx\int_0^{(3-x)/2} zdz=\rho_0\int_0^1 dy\int_0^3\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 dx=$$

$$=\rho_0\int_0^1\frac{1}{8}\cdot\frac{(x-3)^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=3} dy=\rho_0\int_0^1\frac{9}{8}dy=\frac{9}{8}\rho_0.$$

$$I_{XOZ}=\iiint\limits_V \rho_0 y dV=\rho_0\int_0^1 ydy\int_0^3 dx\int_0^{(3-x)/2} dz=\rho_0\int_0^1 ydy\int_0^3\frac{3-x}{2}dx=$$

$$=\rho_0\int_0^1 y\left(-\frac{(3-x)^2}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3} dy=\rho_0\int_0^1\frac{9}{4}ydy=\rho_0\frac{9}{4}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{9}{8}\rho_0.$$

$$I_{YOZ}=\iiint\limits_V \rho_0 x dV=\rho_0\int_0^1 dy\int_0^3 xdx\int_0^{(3-x)/2} dz=\rho_0\int_0^1 dy\int_0^3 x\cdot\frac{3-x}{2}dx=$$

$$=\rho_0\int_0^1\left(\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3} dy=\rho_0\int_0^1\left(\frac{27}{4}-\frac{27}{6}\right)dy=\frac{9}{4}\rho_0.$$

Отсюда для координат центра тяжести теперь получаем:

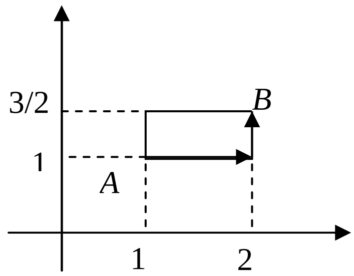
$$x_c=\frac{I_{YOZ}}{m}=1,\ \ y_c=\frac{I_{XOZ}}{m}=\frac{1}{2},\ z_c=\frac{I_{XOY}}{m}=\frac{1}{2}.$$

Задача №2. Доказать, что векторное поле

$$\vec{a}=\left(x^{10}+\frac{tgy}{1+x^2}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{arctgx}{\cos^2 y}+\frac{1}{y}\right)\cdot\vec{j}$$

является потенциальным. Восстановить потенциал и вычислить работу поля на пути от $A(1,\,1)$ до $B(2,\,3/2)$.

Решение. Обозначим $P(x,y)=x^{10}+\dfrac{tgy}{1+x^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{arctgx}{\cos^2 y}+\dfrac{1}{y}$. Эти функции непрерывны всюду в $\boldsymbol{R}^2$, кроме точек с координатами вида $(x,\ \pi/2+\pi n)$ и $(x,\ 0)$, где x – любое действительное число, n – любое целое число. В качестве области D рассмотрим прямоугольник: $1\le x\le 2$, $1\le y\le 3/2$.



Вычислим: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{\cos^2 y}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 y}$.

Видим, что функции $P(x,\,y)$, $Q(x,\,y)$ и их частные производные непрерывны в области D и $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Следовательно, заданное поле потенциально в области D, и криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования. Для потенциала $U(x,\,y)$ получаем:

$$U(x,y)=\int_1^x\left(t^{10}+\frac{tg1}{1+t^2}\right)dt+\int_1^y\left(\frac{arctx}{\cos^2 t}+\frac{1}{t}\right)dt=$$

$$=\left(\frac{t^{11}}{11}+tg1\cdot artgt\right)\Bigg|_1^x+\left(artgx\cdot tgt+\ln t\right)\Big|_1^y=$$

$$=\frac{x^{11}}{11}+tg1\cdot arctgx-\frac{1}{11}-tg1\cdot arctg1+artgx\cdot tgy+\ln y-artgx\cdot tg1-\ln 1=$$

$$=\frac{x^{11}}{11}-\frac{1}{11}-tg1\cdot\frac{\pi}{4}+artgx\cdot tgy+\ln y.$$

Поскольку потенциал восстанавливается с точностью до произвольной постоянной, можно положить $U(x,\,y)=x^{11}/11+\mathrm{arctg}x\cdot\,\mathrm{tg}y+\ln y$.

Теперь получаем:

$$\int_{(1,1)}^{(2,3/2)}\vec{a}d\vec{l}=U(2,3/2)-U(1,1)=\frac{2^{11}-1}{11}+arctg2\cdot tg3/2+\ln 3/2-tg1\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Задача №3. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=\vec{c}\times gradU$, если $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $U=x^2+yz$.

Решение. $gradU=\dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}=2x\vec{i}+z\vec{j}+y\vec{k}$.

$$\vec{a}=\vec{c}\times gradU=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2x & z & y\end{vmatrix}=(z-y)\vec{i}-(y-2x)\vec{j}+(z-2x)\vec{k};$$

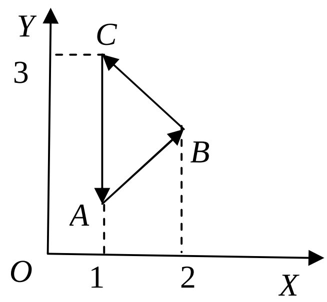
$$div\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=-1+1=0.$$

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z & 2x-y & z-2x\end{vmatrix}=0\vec{i}-(-2+1)\vec{j}+(2-1)\vec{k}=\vec{j}+\vec{k}.$$

Задача №4. Найти циркуляцию поля $\vec{F}\{x+4y,3x+3y\}$ вдоль границы треугольника ABC с вершинами в точках $A(1,1),B(2,2),C(1,3)$ непосредственно и по формуле Грина.

Решение. Находим нужные частные производные:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3,\ \frac{\partial P}{\partial y}=4.$$



Отсюда:

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D(3-4)dxdy=-\iint\limits_D dxdy.$$

Сторона AB лежит на прямой: $y=x$. Сторона BC лежит на прямой: $y=-x+4$. Область интегрирования D задается неравенствами:

$$\begin{cases}1\le x\le 2,\\ x\le y\le -x+4.\end{cases}$$

Поэтому

$$-\iint\limits_D dxdy=-\int_1^2 dx\int_x^{-x+4}dy=-\int_1^2(-2x+4)dx=\left(x^2-4x\right)\Big|_1^2=-4+3=-1.$$

Вычислим теперь непосредственно криволинейный интеграл по контуру ABC, состоящему из отрезков $\overline{AB},\overline{BC},\ \overline{CA}$.

Учитывая свойство аддитивности интеграла, получаем соотношение:

$$\oint_C (x+4y)\,dx+(3x+3y)\,dy=\int_{\overline{AB}}(x+4y)dx+(3x+3y)\,dy+$$

$$\int_{\overline{BC}}(x+4y)\,dx+(3x+3y)\,dy+\int_{\overline{CA}}(x+4y)\,dx+(3x+3y)\,dy.$$

(Не забывать о направлении обхода контура!)

- На отрезке $\overline{AB}$: $y=x$ и, следовательно, $dy=dx,\ x\in[1;2]$.
- На отрезке $\overline{BC}$: $y=-x+4, dy=-dx;\ x\in[2;1]$.
- На отрезке $\overline{CA}$: $x=1,\ dx=0; y\in[3;1]$.

Вычислим интегралы по каждому из отрезков.

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}(x+4y)dx+(3x+3y)\,dy=\int_1^2 5xdx+6xdx=5,5x^2\Big|_1^2=16,5\,.$$

$$\int_{\overset{\frown}{BC}}(x+4y)dx+(3x+3y)\,dy=\int_2^1(-3x+16)dx-12dx=\int_2^1(-3x+4)dx=$$

$$=\left(-1,5x^2+4x\right)\Big|_2^1=0,5.$$

$$\int_{\overset{\frown}{CA}}(x+4y)dx+(3x+3y)\,dy=\int_3^1(3+3y)dy=3\left(y+0,5y^2\right)\Big|_3^1=-18.$$

Суммируя, получаем тот же результат.