

УДК 534.222

## АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ РУДЕНКО–СОЛОДОВА В ТЕОРИИ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

© 2014 г. С. П. Никитенкова\*, Е. Н. Пелиновский\*\*

\*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Радиофизический факультет

\*\*Институт прикладной физики РАН, Отдел нелинейных геофизических процессов

E-mail: spnikitenkova@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.06.2013 г.

Найдено аналитическое решение в дискретной модели сильно нелинейных сдвиговых колебаний в приближении больших амплитуд и его спектр. Показано, что в пределе больших амплитуд период колебаний стремится к линейному значению, хотя колебание остается несинусоидальным.

**Ключевые слова:** сильная нелинейность, дискретная модель, поперечные колебания, большие амплитуды.

DOI: 10.7868/S0320791914030149

Дискретные модели являются эффективным инструментом для теоретического и экспериментального исследования поведения реальных объектов, изучаемых в биологии, химии, нанoeлектронике. Поперечные тепловые колебания атомов в низкоразмерных структурах в направлении, перпендикулярном плоскости структуры, могут привести к образованию сложного рельефа поверхности, увеличить эффективную толщину структуры и отразиться на ее физических свойствах.

Базовой дискретной моделью для изучения поперечных колебаний является цепочка масс, движение которых ограничено направляющими в виде параллельных прямых, лежащих в одной плоскости на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 1). В приближении слабой нелинейности динамика поперечных (сдвиговых) возмущений в рамках данной модели достаточно хорошо изучена [1–4].

Как было показано в [5], в рамках данной модели частицы могут совершать также сильно нелинейные колебания, нелинейность которых проявляется при сколь угодно малых отклонениях от равновесия, и в приближении малых амплитуд найдена форма таких колебаний. Однако в низкоразмерных структурах, например, таких как графен, именно вследствие их низкоразмерности поперечные тепловые колебания атомов даже при нормальных условиях могут достигать относительно больших амплитуд – порядка межатомных расстояний [6, 7]. Поэтому исследование сильно нелинейных колебаний с большой амплитудой даже в рамках простой модели может представлять безусловный практический интерес.

Базовым уравнением модели сильно нелинейных колебаний является уравнение в следующей форме:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad (1)$$

где  $x$  – отклонение массы вдоль направляющей,  $a$  – расстояние между частицами,  $k$  – коэффициент упругости пружины, моделирующей взаимодействие между соседними массами,  $m$  – значение массы.

Система (1) имеет интеграл энергии

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{ka^2}{2} \left[ \frac{x^2}{a^2} - 2 \left( \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - 1 \right) \right] = E. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) получены Руденко и Солодовым в работе [5]. Как было показано авторами, для малых колебаний  $x \ll a$  уравнение (1) принимает вид уравнения сильно нелинейных колебаний:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{2a^2} x^3 = 0. \quad (3)$$

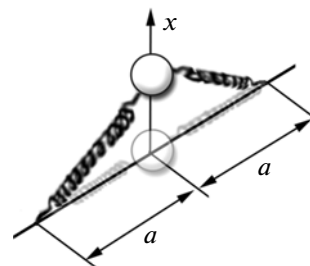
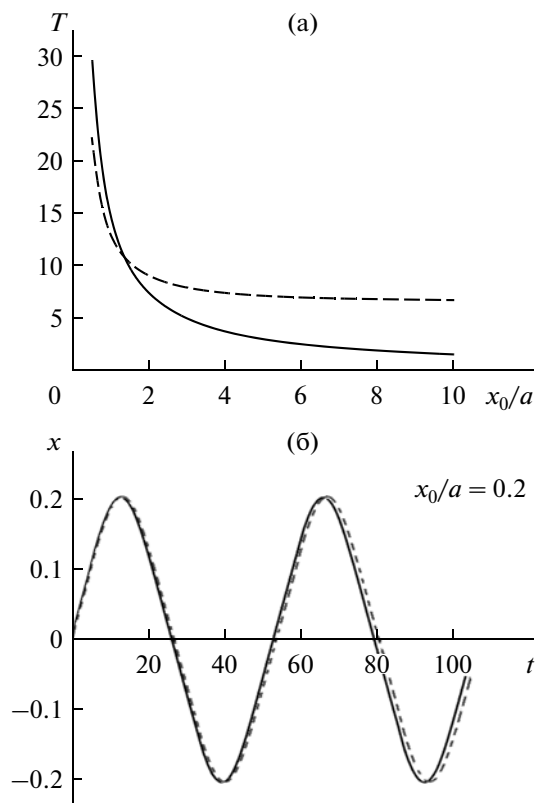


Рис. 1. Масса, совершающая сильно нелинейные сдвиговые колебания.



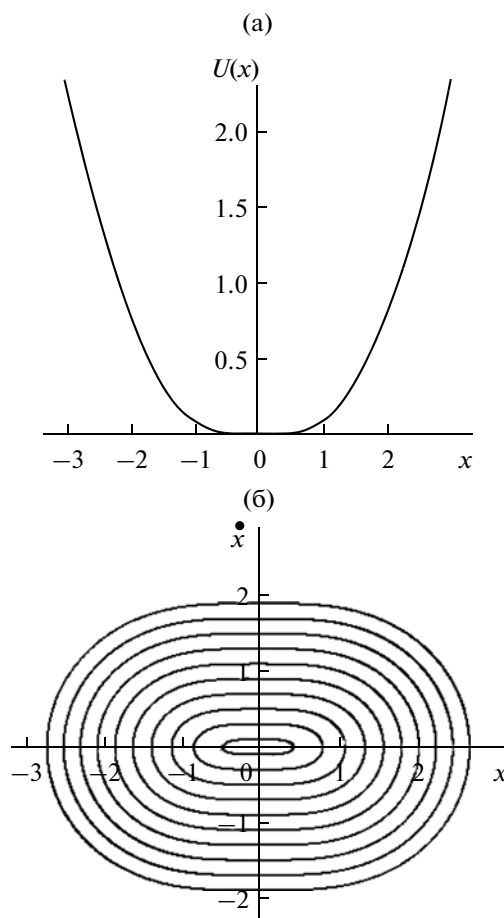
**Рис. 2.** а) График зависимости периода колебаний от амплитуды; б) график смещения  $x(t)$  при малых значениях амплитуд (пунктиром изображены численные решения).

Период колебаний в рамках (3) может быть явно вычислен [5, 8]:

$$T(x_0) = \frac{a}{x_0} \sqrt{\frac{2m}{\pi k}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right), \quad (4)$$

где  $x_0$  – амплитуда колебаний и  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция. Из формулы (4) видно, что период колебаний уменьшается неограниченно с увеличением амплитуды.

Сравним полученные в [5] аналитические решения в рамках уравнения (3) с численными решениями уравнения (1) в безразмерных переменных  $(x/a, t\sqrt{k/m})$ , что эквивалентно следующему выбору коэффициентов:  $m = 1, k = 1, a = 1$ . На рис. 2 приведены зависимость периода колебаний  $T$  от амплитуды  $x_0$  (рис. 2а) и графики смещения  $x(t)$  при отношении амплитуды к периоду решетки  $x_0/a = 0.2$  (рис. 2б). Пунктиром изображены численные решения. Как видим, период колебаний, вычисленный в рамках уравнения (1), при малых амплитудах совпадает с приближенным асимптотическим значением (4), однако при возрастании амплитуды колебаний тенденция уже другая: асимптотическое значение периода убывает, в то время как численное – стремится к постоянному



**Рис. 3.** а) График потенциальной энергии для исходного уравнения (1); б) соответствующий фазовый портрет.

значению. Именно исследование колебаний большой амплитуды и есть основная цель данной заметки.

Выяснить характер движений, соответствующих уравнению (1), не накладывая ограничений на амплитуду, можно, проведя анализ фазового портрета (см. рис. 3а, 3б). Все фазовые траектории замкнуты, поэтому движения массы при любых значениях полной энергии будут иметь колебательный характер.

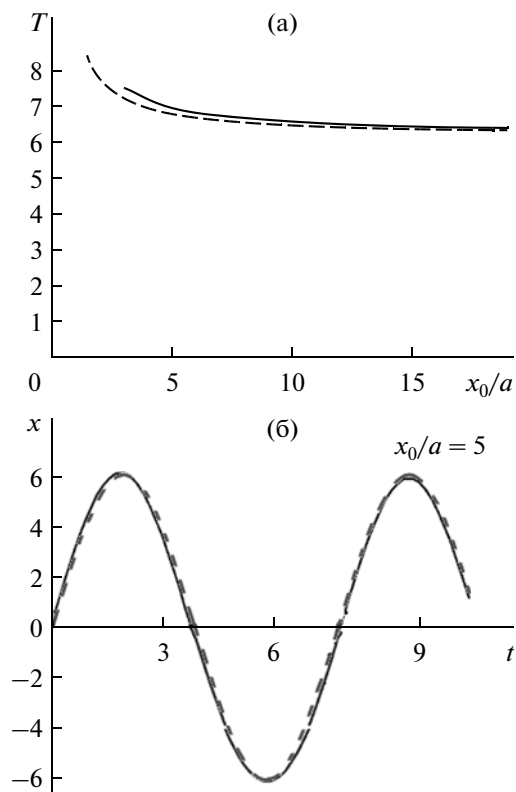
При больших значениях  $x$  из уравнения (2) следует, что потенциальная функция имеет вид

$$U(x) = \frac{ka^2}{2} \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left|\frac{x}{a}\right| \right].$$

Форму колебаний можно найти аналитически из уравнения, вытекающего из (1) при больших амплитудах:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + a\omega_0^2 \text{sign}(x) = 0,$$

где  $\omega_0^2 = k/m$ . Оно остается нелинейным за счет множителя  $\text{sign}(x)$ . Решение этого уравнения раз-



**Рис. 4.** а) График зависимости периода колебаний от амплитуды, б) график смещения при больших значениях амплитуд (пунктиром изображено численное решение).

лично в области положительных и отрицательных значений  $x = x(t)$ , однако легко выписывается в явном виде, удовлетворяя условиям непрерывности в точке  $x = 0$ :

$$x(t) = \begin{cases} a + x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), & \text{если } x(t) \geq 0, \\ -a + x_0 \sin(\omega_0 t - \varphi), & \text{если } x(t) < 0. \end{cases} \quad (5)$$

При этом

$$\varphi = -\arcsin\left(\frac{a}{x_0}\right), \quad (6)$$

обеспечивая первое пересечение нуля. Следующее пересечение нуля происходит через полпериода, что дает возможность определить период колебаний

$$T(x_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{4}{\omega_0} \arcsin\left(\frac{a}{x_0}\right). \quad (7)$$

Итак, колебания имеют на каждом полупериоде синусоидальную форму, а нелинейность проявляется в скачках производной функции  $x(t)$  при переходе через значение  $x = 0$ . Период колебаний зависит от амплитуды колебаний. Учитывая, что данное решение получено в приближении большой амплитуды ( $x_0 \gg a$ ), арксинус в (6) и (7) может быть заменен его аргументом, так что нелинейные поправки достаточно малы.

График зависимости безразмерного периода  $T$  при выборе параметров  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $a = 1$  от безразмерной амплитуды  $x_0/a$  для уравнения (1) воспроизводится на рис. 4а. Сплошной линией обозначено решение, рассчитанное по формуле (7), пунктиром – численное решение. На рис. 4б представлены графики колебательных движений  $x(t)$  при амплитуде  $x_0/a = 5$ , сплошной линией изображено решение (5), пунктиром – численное решение уравнения (1).

В предположении  $a \ll x_0$  удается найти также разложение решения (5) в ряд Фурье по гармоникам:

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{4a}{\pi}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)n} \sin\left(\frac{2\pi(2n+1)t}{T}\right). \quad (8)$$

Как можно видеть, колебания остаются ангармоническими, и все высшие гармоники не зависят от амплитуды колебаний и остаются малыми.

Итак, движения, соответствующие модельному уравнению (1), при любых значениях полной энергии будут иметь колебательный характер. Его численное решение сопоставлено с двумя аналитическими пределами: малоамплитудным, найденным ранее Руденко и Солодовым [5], и сильно нелинейным, найденным в настоящей работе. Показано, что в пределе больших амплитуд период колебаний стремится к линейному значению, хотя колебание остается несинусоидальным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gorbacheva O.B., Ostrovsky L.A.* Nonlinear vector waves in a mechanical model of a molecular chain // *Physica D*. 1983. V. 8. P. 223–228.
2. *Косевич А.М.* Теория кристаллической решетки. Киев: Высшая школа, 1988.
3. *Krylov V., Pames R., Slepyan L.* Nonlinear waves in an inextensible flexible helix // *Wave Motion*. 1998. V. 27. P. 117–136.
4. *Destrade M., Saccomandi G.* Nonlinear transverse waves in deformed dispersive solids // *Wave Motion*. 2008. V. 45. P. 325–336.
5. *Руденко О.В., Солодов Е.В.* Сильно нелинейные сдвиговые возмущения в дискретных и непрерывно кубично нелинейных системах // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 1. С. 56–64.
6. *Fasolino A., Los J.N., Katsnelson M.I.* Intrinsic ripples in graphene // *Nature Materials*. 2007. V. 6. P. 858–861.
7. *Meyer J.C., Geim A.K., Katsnelson M.I., Novoselov K.S., Booth T.J., Roth S.* The structure of suspended graphene membrane // *Nature*. 2007. V. 446. P. 60–63.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988.