

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 15, № 4



2013

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЁВА

Журнал Средневолжского математического общества

Том 15, № 4

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: В. Ф. Тишкин (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,
В. А. Треногин

САРАНСК

2013

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 15, № 4

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректоры: Егорова Д. К., Пескова Е. Е.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевикская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 23-32-05

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	6
-----------------------------	---

В. З. Гринес, Т. М. Митрякова, О. В. Починка

Энергетическая функция для грубых каскадов на поверхностях с нетривиальными одномерными базисными множествами	9
1. Динамические свойства диффеоморфизмов класса $S(M)$	10
2. Энергетическая функция для каскадов Морса-Смейла на поверхностях . . .	11
3. Построение энергетической функции для $f \in S(M)$ (доказательство теоремы 0.1.)	12

И. В. Бойков, В. А. Рязанцев

Устойчивость по Тьюрингу динамических систем, описываемых уравнениями с дробными производными	15
1. Введение	15
2. Устойчивость по Тьюрингу решений систем нелинейных уравнений с производными дробного порядка	16
3. Неустойчивость по Тьюрингу решений систем нелинейных уравнений с производными дробного порядка	21

Н. Д. Кузьмичев, М. В. Чугунов, А. А. Федченко

Математическое моделирование магнитного отклика сверхпроводящего тонкого диска в модели критического состояния с критической плотностью тока зависящей обратно пропорционально квадрату напряженности поля	25
1. Введение	25
2. Модель расчета	26
3. Результаты расчета магнитополевых зависимостей гармоник намагниченности	29
4. Температурные зависимости гармоник намагниченности	33
5. Обсуждение	34

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, В. А. Судаков

Исследование динамической устойчивости защитного экрана при сверхзвуковом обтекании потоком газа	37
1. Введение	37
2. Постановка задачи	38
3. Исследование устойчивости	39

Д. В. Баландин, М. Ю. Скучилин

Управляемые движения сферического робота на наклонной плоскости	47
---	----

1.	Введение	47
2.	Описание динамики сферического робота с маятниковым приводом, перемещающегося по наклонной поверхности	47
3.	Уравнения динамики сферического робота в безразмерных переменных	50
4.	Управление движением робота	52
5.	Численное моделирование	52
6.	Заключение	55

Л. Д. Блистанова, В. И. Зубов, И. В. Зубов, С. А. Стрекопытов, М. В. Стрекопытова

	Совместные системы дифференциальных уравнений	57
1.	Введение	57
2.	Постановка задачи	57
2.1.	Нормальная форма системы	60
2.2.	Регулярные интегральные поверхности у систем 3-го порядка	60
3.	Выводы	62

М. М. Бузмакова

	Моделирование континуальной перколяции жестких вытянутых эллипсоидов с проницаемыми оболочками	64
1.	Введение	64
2.	Постановка задачи и методика моделирования	64
3.	Результаты моделирования	65
4.	Заключение	68

П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова

	Асимптотические уравнения нелинейных трансзвуковых течений газа и их решения	70
1.	Вывод асимптотического уравнения	70
2.	Некоторые решения асимптотического уравнения (1.3)	71

Е. А. Гринес, О. В. Починка

	Необходимые условия топологической сопряжённости трёхмерных диффеоморфизмов с гетероклиническими касаниями	77
1.	Формулировка результатов	78
2.	Линеаризующая окрестность	80
3.	Вспомогательные утверждения	81
4.	Необходимые условия топологической сопряжённости	87

Е. Я. Гуревич, А. Н. Сахаров, Е. В. Трегубова

	О топологической классификации градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений посредством энергетической функции	91
1.	Введение	91
2.	Топология несущего многообразия потоков из $G(M^n)$	95
3.	Топологическая классификация потоков из класса $G(M^n)$	96

3.1. Примеры топологически неэквивалентных потоков с эквивалентными энергетическими функциями	96
3.2. Доказательство основного результата	97
3.3. Энергетическая функция как полный топологический инвариант потоков из класса $G_0(M^n)$	98

Э. Н. Егерова, О. А. Рунова, А. А. Кормилицин

Исследование распространения поверхностных волн в цилиндрическом столбе магнитной жидкости, окружающей пористое ядро 101

1. Введение	101
2. Постановка задачи	101
3. Уравнения движения	102
4. Граничные условия	103
5. Решение задачи	104
6. Анализ модели	106
7. Заключение	109

О. Ю. Забейворота, Е. Ю. Панкратьев, И. М. Губайдуллин

Экономные вычислительные подходы в анализе механизмов химических реакций на примере термической гибели ароматических нитрозооксидов 111

1. Введение	111
2. Постановка задачи	111
3. Концептуальные корреляционные подходы	112
4. Индексы глобальной реакционной способности	113
5. Ядерно-независимые химические сдвиги	114
6. Заключение	115

С. В. Зубов

Устойчивость неограниченных решений по первому приближению 117

1. Введение	117
2. Постановка задачи	117
2.1. Случай нескольких нулевых корней	119
3. Выводы	124

Н. В. Исаенкова, Е. В. Жужома, Л. А. Куприна

Соленоидальные базисные множества A -диффеоморфизмов Смейла-Виеториса 125

1. Введение	125
2. Определения	128
3. Доказательство основных результатов	129

Б. В. Логинов, Н. Н. Юлдашев, А. В. Герасимов

Задача на собственные значения для оператора Лапласа в s -мерном шаре со смещениями в производных 136

1. Введение. Построение сопряженной задачи.	136
---	-----

-
2. Собственные значения, собственные и присоединенные функции прямой задачи при $s = 2$ 137
-

М. И. Малкин

- Инварианты энтропийного типа для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей 148
1. Введение 148
2. Инварианты энтропийного типа счетных ТМЦ 149
-

Т. Ф. Мамедова, А. А. Ляпина

- Расчет допустимых сбросов загрязняющих веществ для многовидовой модели вольтерровского типа 156
1. Введение 156
2. Постановка задачи 156
3. Алгоритм исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений вольтерровского типа 157
4. Численная реализация алгоритма расчета допустимых сбросов загрязняющих веществ для многовидовой модели 159
-

С. И. Спивак, О. Г. Кантор, Г. Н. Юсупова

- Построение информационных множеств в моделях системной динамики 164
-

М. И. Тимошин

- ОДУ второго порядка, допускающие двумерные алгебры динамических симметрий 170
1. Введение 170
2. Классификация ОДУ второго порядка допускающих двумерные алгебры динамических симметрий 172
3. Нахождение двумерных алгебр динамических симметрий над числовым полем 175
-

Т. К. Юлдашев, А. И. Середкина

- О разрешимости смешанной задачи для дифференциальных уравнений параболического типа со смешанными максимумами . 181
1. Постановка задачи и сведение её к счетным системам нелинейных интегральных уравнений 181
2. Однозначная разрешимость ССНИУ со смешанными максимумами 183
3. Однозначная разрешимость смешанной задачи (1.1)- (1.4) 188
-

О. Е. Каледин Л. А. Сухарев Н. К. Сорокина

Схема использования нейронных сетей при управлении процессом воздействия излучения на структуру полупроводниковых материалов. 190

С. В. Zubov

Устойчивость по Лагранжу 193

А. В. Zubov, К. А. Пешехонов, И. С. Стрекопытов, М. В. Стрекопытова

Задача построения систем дифференциальных уравнений 196

И. В. Zubov, С. В. Zubov

Анализ систем с неограниченными решениями 200

1. Постановка задачи 200

2. Выводы 203

С.В. Zubov

Задача поиска матрицы минимального ранга 204

Правила оформления рукописей для публикации
в журнале «Журнал СВМО» 208

Алфавитный указатель 210

ОТ РЕДАКЦИИ

В четвертом номере 15-го тома публикуются работы ведущих учёных и молодых исследователей, многие из которых являются постоянными участниками международных математических школ-семинаров «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского.

Школы-семинары регулярно проводятся национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом при поддержке РФФИ (в 2013 году - грант № 13-01-06814).

Все статьи имеют положительные рецензии, а сам журнал (кроме подписки через каталог «Почта России») доступен теперь и в сети Internet на сайте Elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 517.9

Энергетическая функция для грубых каскадов на поверхностях с нетривиальными одномерными базисными множествами

© В. З. Гринес¹, Т.М. Митрякова², О.В. Починка³

Аннотация. В настоящей работе устанавливается существование энергетической функции (гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с неблуждающим множеством системы) у структурно устойчивых сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов поверхностей с нетривиальными одномерными базисными множествами.

Ключевые слова: структурно устойчивая система, нетривиальное базисное множество, энергетическая функция

Формулировка результатов

В настоящей работе рассматриваются грубые сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы f , заданные на двумерном гладком замкнутом ориентируемом многообразии M . Согласно теореме С. Смейла о спектральном разложении [10], множество неблуждающих точек диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся инвариантных множеств $\Omega_f = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. Базисное множество, отличное от периодической траектории, называется *нетривиальным*.

Обозначим через $S(M)$ множество грубых диффеоморфизмов $f : M \rightarrow M$, каждое нетривиальное базисное множество которого является одномерным.

Функцией Ляпунова грубого диффеоморфизма f называется непрерывная функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий и постоянная на базисных множествах. Гладкая функция Ляпунова называется *энергетической функцией* для f , если множество её критических точек совпадает с неблуждающим множеством Ω_f .

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а 0.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in S(M)$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

¹ Профессор кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; vgrines@yandex.ru

² Старший преподаватель кафедры теории функций, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; tatiana.mitryakova@yandex.ru

³ Доцент кафедры теории функций, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; olga-pochinka@yandex.ru

1. Динамические свойства диффеоморфизмов класса $S(M)$

Детальную информацию по этому разделу можно найти, например, в статье [2] или в главе 9 книги [3].

Пусть $f \in S(M)$. Напомним, что пара чисел (a, b) , где $a = \dim W_x^u$, $b = \dim W_x^s$, $x \in \Lambda$ называется *типом базисного множества* Λ диффеоморфизма f . Любое нетривиальное базисное множество диффеоморфизма поверхности имеет тип $(1, 1)$. При этом, если базисное множество Λ одномерно, то оно является либо аттрактором, либо репеллером⁴, равносильно, либо $W_\Lambda^u = \bigcup_{x \in \Lambda} W_x^u = \Lambda$, либо $W_\Lambda^s = \bigcup_{x \in \Lambda} W_x^s = \Lambda$.

Для любой точки $p \in \Lambda$ хотя бы одна из компонент связности множества $W_p^s \setminus p$ ($W_p^u \setminus p$) имеет непустое пересечение с Λ . Точка $p \in \Lambda$ называется *s-граничной* (*u-граничной*) точкой аттрактора (репеллера) Λ , если одна из компонент связности множества $W_p^s \setminus p$ ($W_p^u \setminus p$) не пересекается с Λ , обозначим через $\ell_p^{s\emptyset}$ ($\ell_p^{u\emptyset}$) такую компоненту. Любой аттрактор (репеллер) Λ имеет конечное множество P_Λ s-граничных (*u-граничных*) точек и является *отделимым* в смысле следующего определения.

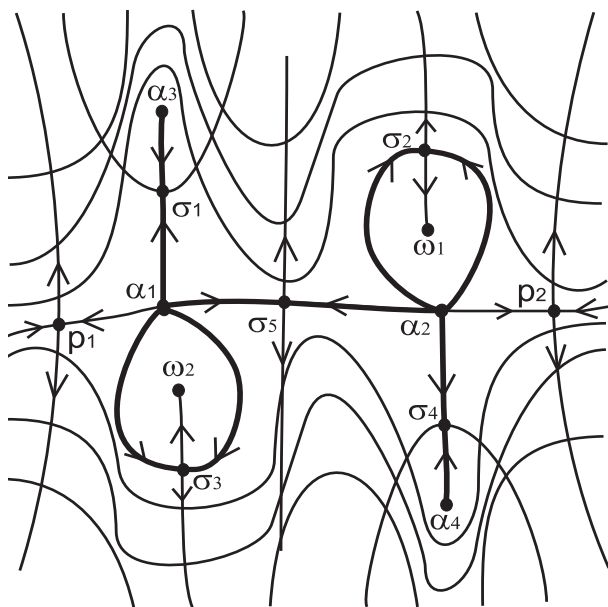


Рис. 1: Отделимый аттрактор

О п р е д е л е н и е 1.1. Одномерный аттрактор Λ диффеоморфизма f называется *отделимым*, если:

1) $cl(W_\Lambda^s) \setminus W_\Lambda^s$ является объединением устойчивых многообразий конечного множества Γ_Λ седловых и источниковых периодических точек из тривиальных базисных множеств диффеоморфизма f ;

2) для любой s-граничной точки $p \in P_\Lambda$ имеет место равенство $cl(\ell_p^{s\emptyset}) \setminus \ell_p^{s\emptyset} = p \cup \alpha$, где $\alpha \in \Gamma_\Lambda$ — источник; точка;

3) для любой седловой точки $\sigma \in \Gamma_\Lambda$ многообразие W_σ^s не пересекается с неустойчивыми многообразиями других седловых периодических точек, а неустойчивая сепаратриса ℓ_σ^u либо не пересекается с W_Λ^s , либо является подмножеством W_Λ^s .

⁴ Компактное f -инвариантное множество $A \subset M$ называется *аттрактором* диффеоморфизма f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \text{int } U_A$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*. Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1} .

Аналогично вводится понятие отделимого репеллера.

На рисунке 1 жирным выделен одномерный комплекс $cl(W_\Lambda^s) \setminus W_\Lambda^s$ для одномерного аттрактора Λ диффеоморфизма f , заданного на торе \mathbb{T}^2 . Предполагается, что неблуждающее множество этого диффеоморфизма состоит из одного нетривиального аттрактора Λ , имеющего две s -границные точки p_1, p_2 , и конечного числа неподвижных точек, с асимптотическим поведением сепаратрис седловых точек, указанным на этом рисунке.

Для каждого аттрактора Λ существует множество L_Λ со следующими свойствами:

а) каждая компонента связности множества L_Λ является простой гладкой замкнутой кривой, число которых m_Λ совпадает с числом компонент связности аттрактора Λ и каждая сепаратриса $\ell_p^{s\emptyset}$, $p \in P_\Lambda$ трансверсально пересекает L_Λ в точности в одной точке;

б) $f(L_\Lambda) \cap L_\Lambda = \emptyset$ и кривые множеств L_Λ и $f(L_\Lambda)$ являются границами двумерных попарно не пересекающихся колец $K_1, \dots, K_{m_\Lambda}$, состоящих из блуждающих точек;

с) поверхность $U_\Lambda = \Lambda \cup \bigcup_{n \geq 1} f^n(K_\Lambda)$, где $K_\Lambda = \bigcup_{b=1}^{m_\Lambda} K_b$ является захватывающей окрестностью аттрактора Λ (см. рисунок 2).

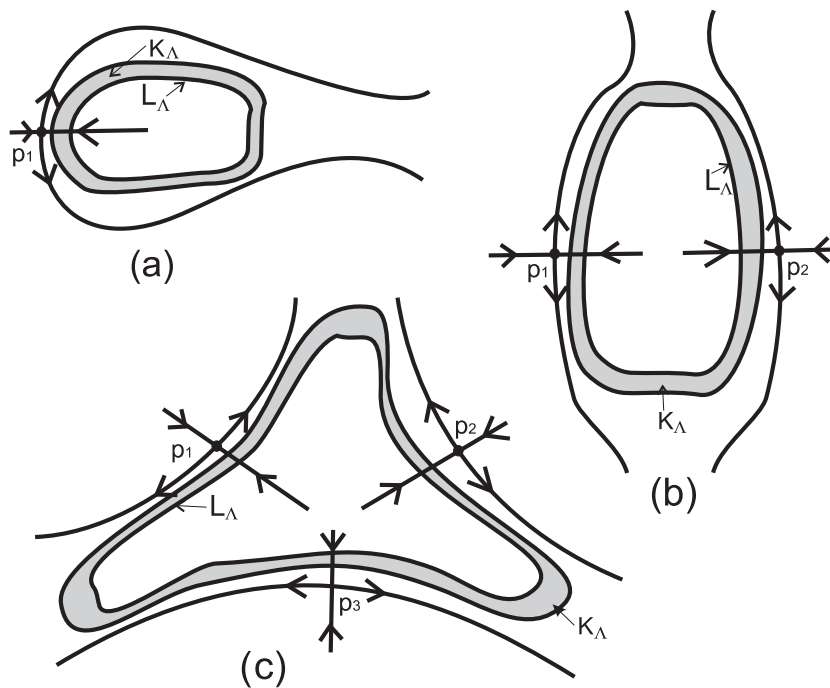


Рис. 2: Построение поверхности U_Λ

2. Энергетическая функция для каскадов Морса-Смейла на поверхностях

Следуя идеям А. М. Ляпунова, К. Конли ввел понятие *функции Ляпунова*, как непрерывной функции, убывающей вдоль траекторий вне цепно рекуррентного множества и постоянной на цепных компонентах. Факт существования такой функции у любой динамической системы доказан К. Конли [1] в 1978 году и назван позже *фундаментальной теоремой динамических систем*.

Гладкая функция Ляпунова φ называется *энергетической функцией* для диффеоморфизма f , если множество критических точек функции φ совпадает с цепно рекуррентным множеством R_f .

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [9], который в 1961 году доказал существование энергетической функции, являющейся функцией Морса у *градиентно-подобного потока* (потока Морса-Смейла без замкнутых траекторий). К. Мейер [5] в 1968 году обобщил этот результат и построил энергетическую функцию, являющуюся функцией Морса-Ботта для потока Морса-Смейла.

В 1977 году Д. Пикстон [8] установил существование энергетической функции, являющейся функцией Морса, для диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях. В работе [6] энергетическая функция Морса была построена для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством.

Пусть $f : M \rightarrow M$ сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла, заданный на ориентируемой замкнутой поверхности M . Пусть Ω_f^q , $q \in \{0, 1, 2\}$ — подмножество периодических точек r таких, что $\dim W_r^u = q$. Пусть U_f^0 (U_f^2) захватывающая окрестность аттрактора Ω_f^0 (репеллера Ω_f^2), каждая компонента связности которой является двумерным диском.

Из конструкции, предложенной в работе [6], в частности вытекает следующий факт.

Предложение 2.1. *Для диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M \rightarrow M$ существует энергетическая функция Морса $\varphi : M \rightarrow [0, 2]$ такая, что $\varphi(\Omega_f^0) = 0$, $\varphi(\Omega_f^2) = 2$ и ∂U_f^0 , ∂U_f^2 — множества уровня функции φ .*

3. Построение энергетической функции для $f \in S(M)$ (доказательство теоремы 0.1.)

Разобьем построение энергетической функции для $f \in S(M)$ на шаги.

Шаг 1. Обозначим через A_1, \dots, A_{k_A} (R_1, \dots, R_{k_R}) нетривиальные одномерные аттракторы (репеллеры) диффеоморфизма f . Пусть $U_{A_1}, \dots, U_{A_{k_A}}$ ($U_{R_1}, \dots, U_{R_{k_R}}$) захватывающие окрестности аттракторов (репеллеров), построенные в разделе 1. с помощью колец $K_{A_1}, \dots, K_{A_{k_A}}$ ($K_{R_1}, \dots, K_{R_{k_R}}$). Положим $A = A_1 \cup \dots \cup A_{k_A}$, $R = R_1 \cup \dots \cup R_{k_R}$, $U_A = U_{A_1} \cup \dots \cup U_{A_{k_A}}$, $U_R = U_{R_1} \cup \dots \cup U_{R_{k_R}}$, $K_A = K_{A_1} \cup \dots \cup K_{A_{k_A}}$, $K_R = K_{R_1} \cup \dots \cup K_{R_{k_R}}$ и $U = U_A \cup U_R$. Обозначим через D дизъюнктивное объединение 2-дисков в числе, равном числу компонент связности множества ∂U . Положим $\check{M} = M \setminus U$ и $N = \check{M} \cup_q D$, где $q : \partial U \rightarrow \partial D$ — диффеоморфизм. Обозначим через $\pi : \check{M} \cup D \rightarrow N$ естественную проекцию.

Шаг 2. По построению N — гладкая поверхность без края, допускающая диффеоморфизм Морса-Смейла $f_N : N \rightarrow N$, совпадающий с диффеоморфизмом $\pi f \pi^{-1}$ на множестве $\pi(U)$ и имеющий по одной периодической точке (стоковой или источниковой) на каждой компоненте связности множества $\pi(D)$. В силу предложения 2.1. для диффеоморфизма f_N существует энергетическая функция Морса $\varphi_N : N \rightarrow [0, 2]$ такая, что $\varphi(\Omega_{f_N}^0) = 0$, $\varphi(\Omega_{f_N}^2) = 2$ и $\pi(\partial U_A)$, $\pi(\partial U_R)$ — множества уровня функции φ_N . Определим на многообразии \check{M} функцию $\varphi_{\check{M}} : \check{M} \rightarrow [0, 2]$ формулой $\varphi_{\check{M}} = \varphi_N \pi$. Положим $c_A = \varphi_{\check{M}}(\partial U_A)$ и $c_R = \varphi_{\check{M}}(\partial U_R)$.

Шаг 3. Положим $B_A = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} f^n(K_A)$. Пусть b компонента связности множества B_A и A_b — *достижимая изнутри граница множества b* , то есть множество точек $w \in M$, для которых существует путь $c : [0, 1] \rightarrow M$ такой, что $c(t) \in b$ для $t \in [0, 1)$ и $c(1) = w$. Обозначим через $t \in \mathbb{N}$ период b , то есть $f^t(b) = b$ и $f^\mu(b) \neq b$ для натуральных $\mu < t$. Пусть $p \in A_b$ — граничная периодическая точка. Поскольку объединение двумерных колец K_A является фундаментальной областью диффеоморфизма $f|_{B_A}$, то диффеоморфизм $f^m|_b$ гладко сопряжен с гомотетией $g(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ на $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ посредством

некоторого диффеоморфизма $h_b : b \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, переводящего кольцо $K_A \cap b$ в кольцо $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\varphi_M(\partial U_A)}{4} \leq x^2 + y^2 \leq c_A\}$. Функция $\varphi_g(x, y) = x^2 + y^2$ является энергетической функцией диффеоморфизма g . Положим $\varphi_b = \varphi_g h_b$.

Сделаем аналогичные построения для каждой компоненты связности множества B_A мы получим набор диффеоморфизмов h_{B_A} и энергетическую функцию φ_{B_A} для диффеоморфизма f_{B_A} .

Положим $B_R = \bigcup_{z \in Z} f^n(K_R)$. Построим энергетическую функцию φ_{B_R} для диффеоморфизма f_{B_R} , положив $\varphi_{B_R}(z) = 2 - \varphi_{B_{\tilde{A}}}(z)$, $z \in B_R$, где \tilde{A} нетривиальный репеллер диффеоморфизма f^{-1} .

$$\text{Положим } \tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi_{B_A}(z), & \text{если } z \in \bigcup_{n \geq 1} f^n(K_A); \\ \varphi_{B_R}(z), & \text{если } z \in \bigcup_{n \geq 1} f^{-n}(K_R); \\ \varphi_{\tilde{M}}, & \text{если } z \in \tilde{M}; \\ 0, & \text{если } z \in A; \\ 2, & \text{если } z \in R. \end{cases}$$

Шаг 4. По построению функция $\tilde{\varphi} : M \rightarrow [0, 2]$ является функцией Морса на множестве $M \setminus (A \cup R)$. Покажем, что функция $\tilde{\varphi}$ является непрерывной на M .

Для этого рассмотрим любую точку $a \in A$ и покажем, что $\lim_{z_n \rightarrow a} \tilde{\varphi}(z_n) = 0$ для любой последовательности точек $\{z_n \in U_A, n \in \mathbb{N}\}$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, a) = 0$, где d — метрика на многообразии M (для точек репеллера доказательство аналогичное). Поскольку $\tilde{\varphi}(A) = 0$, то достаточно доказать утверждение для последовательности $\{z_n \in B_A\}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует натуральное число k_n такое, что $z_n \in f^{k_n}(K_A)$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, a) = 0$, то $k_n \rightarrow \infty$. Тогда по построению последовательность $\{h_{B_A}(z_n) \in \mathbb{R}^2\}$ сходится к точке $(0, 0)$. Откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_g(h_{B_A}(z_n)) = 0$ и, следовательно, $\lim_{z_n \rightarrow a} \tilde{\varphi}(z_n) = 0$.

Шаг 5. Покажем, как сгладить функцию $\tilde{\varphi}$ на множестве $A \cup R$, сохранив при этом линии уровня. Проведём модификацию в окрестности аттрактора (в окрестности репеллера построения аналогичные).

Положим $\tilde{\psi}_A = \tilde{\varphi}|_{cl U_A} : cl U_A \rightarrow [0, c_A]$. На отрезке $[0, c_A]$ зададим функцию $\nu : [0, c_A] \rightarrow [0, \infty)$ формулой $\nu(s) = \inf\{e^{-\frac{1}{d(z,w)}}, z, w \in cl U_A : |\tilde{\psi}(z) - \tilde{\psi}(w)| \geq s\}$. По построению ν — непрерывная функция такая, что $\lim_{s \rightarrow +0} \nu(s) = +\infty$. В силу лемм 1 и 3 работы [7], существует бесконечно гладкая монотонно возрастающая функция $q : [0, c_A] \rightarrow [0, c_A]$ такая, что функция $\psi_A = q\tilde{\psi}_A : cl U_A \rightarrow [0, c_q]$ удовлетворяет условию $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{|q(x) - q(y)|}{\nu(|x - y|)} = 0$.

Непосредственно проверяется, что функция ψ_A является гладкой на A и $d\psi_A(A) = 0$.

Положим $\tilde{\psi}_R = \tilde{\varphi}|_{cl U_R} : cl U_R \rightarrow [c_R, 2]$ и аналогичным образом сгладим функцию $\tilde{\psi}_R$, получив функцию ψ_R такую, что $d\psi_R(R) = 0$.

Искомая функция $\varphi : M \rightarrow [0, 2]$ определяется формулой

$$\varphi(z) = \begin{cases} \psi_A(z), & \text{если } z \in cl U_A; \\ \psi_R(z), & \text{если } z \in cl U_R; \\ \varphi_{\tilde{M}}, & \text{если } z \in \tilde{M}. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Conley C., *Isolated Invariant Sets and Morse Index*, CBMS Regional Conference Series in Math, 1978.

2. Гринес В.З., “О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами”, *Математический сборник*, **1:4** (1997), 57–94.
3. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2011.
4. Косневски Ч., *Начальный курс алгебраической топологии*, М. - Мир, 1983.
5. Meyer K. R., “Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031 – 1040.
6. Митрякова Т.М., Починка О.В., Шишенкова А.Е., “Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством”, *Журнал СВМО*, **14:1** (2012), 98 – 107.
7. Norton A., Pugh Ch., “Critical sets in the plane”, *Michigan Journal of Math.*, **38** (1991), 441–459.
8. Pixton D., “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16:2** (1977), 167–172.
9. Smale S., “On gradient dynamical systems”, *Ann. Math.*, 1961, 199 – 206.
10. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73:6** (1967), 747 – 817.

Energy function for rough cascades on surfaces with nontrivial one-dimensional basic sets

© V. Z. Grines⁵, T. M. Mitryakova⁶, O. V. Pochinka⁷

Abstract. In this paper we prove the existence of the energy function, that is, a smooth Lyapunov function, whose the set of critical points is the same as the nonwandering set of the system, for structurally stable orientation preserving diffeomorphisms of surfaces with nontrivial one-dimensional basic sets.

Key Words: structurally stable system, a non-trivial basic set energy function

⁵ Professor of Chair of numerical and functional analysis, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod, vgrines@yandex.ru

⁶ Assistant Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; tatiana.mitryakova@yandex.ru

⁷ Associated Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, olga-pochinka@yandex.ru

УДК 517.9

Устойчивость по Тьюрингу динамических систем, описываемых уравнениями с дробными производными

© И. В. Бойков¹, В. А. Рязанцев²

Аннотация. Рассматриваются модели реакции-диффузии, описываемые системами дифференциальных уравнений в частных производных с дробными производными. Исследуются устойчивость и неустойчивость по Тьюрингу этих систем.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, модели реакции-диффузии, устойчивость по Тьюрингу, логарифмическая норма, дробные производные

1. Введение

Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, несмотря на свою более чем вековую историю, продолжает активно развиваться и обогащается новыми направлениями исследований. В последнее время к числу таких направлений добавилась неустойчивость по Тьюрингу. Это обусловлено тем, что открытие А. Тьюрингом при рассмотрении простейшей математической модели морфогенеза диффузионной неустойчивости вызвало огромное количество работ как по исследованию математических моделей реакции-диффузии, приводящих к структурообразованию по Тьюрингу, так и по экспериментальному их моделированию. Укажем на монографии [1], [2], в которых библиография по упомянутому направлению превышает 600 наименований.

Теория морфогенеза Тьюринга объяснила многие явления в химии, биологии, социальных науках и спрогнозировала многие эффекты как в теории нелинейных параболических уравнений, так и в предметных областях.

Новый импульс изучению уравнений вида "реакция-диффузия" дали работы И. Р. Пригожина и его школы. Были исследованы процессы образования бифуркаций в реакционно-диффузионной модели химической среды – "брюсселяторе" [3]. При этом сконструированная Лефевром и Пригожиным модель оказалась более общей, нежели модель Тьюринга, и сняла ряд возражений со стороны химиков и биологов к модели диффузии Тьюринга.

В результате этих работ образовалось новое направление исследований – синергетика, оказавшее значительное влияние на развитие математики в конце XX столетия.

Формально подход Тьюринга заключается в возмущении исходной однородной по отношению к пространственным переменным системы дифференциальных уравнений диссипативными слагаемыми.

О п р е д е л е н и е 1.1. [4] Однородное по переменной x решение $u^*(t, x) = (u_1^*(t, x), u_2^*(t, x))^T$ системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = a_{11}(t)u_1 + a_{12}(t)u_2 + g_1(t, u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = a_{21}(t)u_1 + a_{22}(t)u_2 + g_2(t, u_1, u_2), \end{cases} \quad (1.1)$$

¹ Заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; boikov@pnzgu.ru.

² Аспирант кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; ryazantsevv@mail.ru.

при не зависящих от пространственных координат начальных значениях

$$u_k^*(t_0, x) = u_{0k}, \quad u_{0k} = \text{const}, \quad k = 1, 2, \quad (1.2)$$

определенное в области $\Omega : \{(t, x) : (t_0, \infty) \times (-\infty, \infty)\}$, устойчиво по Тьюрингу, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$, что при выполнении неравенств $|\delta_{jk}| \leq \delta_1$, $j, k = 1, 2$ решение $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))^T$ задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = a_{11}(t)u_1 + a_{12}(t)u_2 + g_1(t, u_1, u_2) + \delta_{11} \frac{\partial^\nu u_1(t, x)}{\partial x^\nu} + \delta_{12} \frac{\partial^\nu u_2(t, x)}{\partial x^\nu}, \\ \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = a_{21}(t)u_1 + a_{22}(t)u_2 + g_2(t, u_1, u_2) + \delta_{21} \frac{\partial^\nu u_1(t, x)}{\partial x^\nu} + \delta_{22} \frac{\partial^\nu u_2(t, x)}{\partial x^\nu}, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$u_k(t_0, x) = u_{0k} + \tilde{u}_{0k}(x), \quad |\tilde{u}_{0k}(x)| \leq \delta_2, \quad (1.4)$$

$k = 1, 2$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяет неравенству $\sup_{t_0 \leq t < \infty, -\infty < x < \infty} |u_k(t, x) - u_k^*(t, x)| \leq \varepsilon$. В противном случае решение $u^*(t, x)$ системы (1.1) неустойчиво по Тьюрингу.

З а м е ч а н и е 1.1. В слагаемых $\delta_{jk} \frac{\partial^\nu u_k(t, x)}{\partial x^\nu}$, $j, k = 1, 2$ в правых частях уравнений системы (1.3) под $\frac{\partial^\nu u_k(t, x)}{\partial x^\nu}$ следует понимать производную дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля, определяемую формулой [5]

$$\frac{\partial^\nu u_k(t, x)}{\partial x^\nu} = {}_{-\infty}D_x^\nu u_k = \frac{1}{\Gamma(n - \nu)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-\infty}^x \frac{u_k(t, \xi)}{(x - \xi)^{\nu+1-n}} d\xi,$$

где n есть число, на единицу большее целой части исходного порядка $\nu > 0$ рассматриваемой дробной производной: $n = \lceil \nu \rceil$.

З а м е ч а н и е 1.2. При исследовании устойчивости по Тьюрингу решения системы (1.1), как правило, предполагается устойчивость в смысле Ляпунова решения исходной системы (1.1) к возмущению начальных условий.

В работе исследуется устойчивость по Тьюрингу решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, медленно изменяющимися во времени. Рассмотрен случай, когда в качестве диссипативных слагаемых берутся дифференциальные операторы с производными дробного порядка по пространственной переменной. Метод исследования заключается в переходе на основе интегральных преобразований к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром и исследовании устойчивости решений этой системы.

2. Устойчивость по Тьюрингу решений систем нелинейных уравнений с производными дробного порядка

Для исследования устойчивости по Тьюрингу однородного по переменной x решения $u^*(t, x)$ задачи (1.1)-(1.2) введем новую неизвестную вектор-функцию $v(t, x)$ по формуле

$$v(t, x) = u(t, x) - u^*(t, x), \quad (2.1)$$

где $v(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x))^T$, а $u(t, x)$ – решение задачи Коши (1.3)-(1.4).

Используя выражение (2.1), получаем, что вектор-функция $v(t, x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} = a_{11}(t)v_1 + a_{12}(t)v_2 + h_1(t, v_1, v_2) + \delta_{11} \frac{\partial^\nu v_1}{\partial x^\nu} + \delta_{12} \frac{\partial^\nu v_2}{\partial x^\nu}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} = a_{21}(t)v_1 + a_{22}(t)v_2 + h_2(t, v_1, v_2) + \delta_{21} \frac{\partial^\nu v_1}{\partial x^\nu} + \delta_{22} \frac{\partial^\nu v_2}{\partial x^\nu}, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$v_1(t_0, x) = v_{01}(x), \quad v_2(t_0, x) = v_{02}(x), \quad (2.3)$$

где $v_{01}(x) = \tilde{u}_{01}(x)$ и $v_{02}(x) = \tilde{u}_{02}(x)$, а функции $h_1(t, v_1, v_2)$, $h_2(t, v_1, v_2)$ получены из функций $g_1(t, u_1, u_2)$, $g_2(t, u_1, u_2)$ соответственно при переходе к новым неизвестным функциям $v_1(t, x)$, $v_2(t, x)$.

В предположении, что функции $v_{01}(x)$, $v_{02}(x)$ суммируемы с квадратом по переменной x , применим к задаче (2.2)-(2.3) преобразование Фурье по пространственной переменной, учитывая [5], что $F(-\infty D_x^\nu v(t, x)) = (-i\omega)^\nu V(t, \omega)$. В результате получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений с параметром:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} = [a_{11}(t) + \delta_{11}(-i\omega)^\nu]V_1 + [a_{12}(t) + \delta_{12}(-i\omega)^\nu]V_2 + H_1(t, \omega), \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} = [a_{21}(t) + \delta_{21}(-i\omega)^\nu]V_1 + [a_{22}(t) + \delta_{22}(-i\omega)^\nu]V_2 + H_2(t, \omega), \end{cases} \quad (2.4)$$

$$V_1(t_0, \omega) = V_{01}(\omega), \quad V_2(t_0, \omega) = V_{02}(\omega), \quad (2.5)$$

Введем замену неизвестных функций $V_1(t, \omega)$, $V_2(t, \omega)$ по формулам

$$V_1(t, \omega) = P_1(t, \omega) + iP_2(t, \omega), \quad V_2(t, \omega) = P_3(t, \omega) + iP_4(t, \omega).$$

Имеет место следующее представление [6]:

$$(-i\omega)^\nu = |\omega|^\nu \cdot (\cos(\pi\nu/2) - i \sin(\pi\nu/2) \operatorname{sgn}(\omega)). \quad (2.6)$$

Используя (2.6), из системы (2.4) получаем систему для неизвестной вектор-функции $P(t, \omega) = (P_1(t, \omega), P_2(t, \omega), P_3(t, \omega), P_4(t, \omega))^T$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \Psi(t, \omega)P + R(t, \omega), \quad (2.7)$$

где $R(t, \omega) = (R_1(t, \omega), R_2(t, \omega), R_3(t, \omega), R_4(t, \omega))^T$, $\Psi(t, \omega) = \{\Psi_{jk}(t, \omega)\}$, $j, k = 1, 2$,

$$\Psi_{jk}(t, \omega) = \begin{pmatrix} a_{jk}(t) + \delta_{jk}|\omega|^\nu \cos(\pi\nu/2) & \delta_{jk}|\omega|^\nu \operatorname{sgn}(\omega) \sin(\pi\nu/2) \\ -\delta_{jk}|\omega|^\nu \operatorname{sgn}(\omega) \sin(\pi\nu/2) & a_{jk}(t) + \delta_{jk}|\omega|^\nu \cos(\pi\nu/2) \end{pmatrix},$$

а функции $R_k(t, \omega)$, $k = \overline{1, 4}$ определяются из выражений

$$H_1(t, \omega) = R_1(t, \omega) + iR_2(t, \omega), \quad H_2(t, \omega) = R_3(t, \omega) + iR_4(t, \omega).$$

Вектор-функцию $P(t, \omega)$ будем рассматривать в пространстве вектор-функций $(P_1(t, \omega), P_2(t, \omega), P_3(t, \omega), P_4(t, \omega))^T$ с нормами

$$\|P(t, \omega)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^4 |P_k(t, \omega)|^2}, \quad \|P(t, \omega)\|_1 = \max_{k=\overline{1,4}} [|P_k(t, \omega)|],$$

$$\|P(t, \omega)\|_2 = \left[\sum_{k=1}^4 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |P_k(t, \omega)|^2 d\omega \right) \right]^{1/2}.$$

Нормы $\|P(t, \omega)\|$ и $\|P(t, \omega)\|_1$ связаны следующим двусторонним неравенством [6]:

$$\frac{1}{2} \|P(t, \omega)\| \leq \|P(t, \omega)\|_1 \leq \|P(t, \omega)\|. \quad (2.8)$$

Т е о р е м а 2.1. Пусть выполнены условия:

1) логарифмическая норма $\Lambda(\Psi(t, \omega))$, вычисляемая по формуле

$$\Lambda(\Psi(t, \omega)) = \sup_{j=1,4} \left[\operatorname{Re} [\psi_{jj}(t, \omega)] + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^4 |\psi_{jk}(t, \omega)| \right]. \quad (2.9)$$

на множестве значений $\omega \in \mathbb{R}$ и $t \in [t_0, \infty)$ ограничена сверху числом $-\gamma$, $\gamma > 0$;

2) функции $h_1(t, v_1, v_2)$, $h_2(t, v_1, v_2)$ непрерывны по всем переменным;

3) вектор-функция $h(t, v) = (h_1(t, v), h_2(t, v))^T$ удовлетворяет неравенству

$$\|h(t, v)\|_2 \leq \beta \|v\|_2; \quad (2.10)$$

4) функции $a_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$ непрерывны при $t \geq t_0$, причем их значения принадлежат интервалу $(a_{jk}(T) - \varepsilon_{jk}, a_{jk}(T) + \varepsilon_{jk})$, $\varepsilon_{jk} \geq 0$ при $T \leq t \leq T + \theta$, где $T \geq t_0$ – любое, а значения θ и ε_{jk} определяются из неравенства

$$2\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{4(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)\theta} \leq 1 - \alpha, \quad \varepsilon = \max_{j,k} \varepsilon_{jk},$$

где $0 < \alpha < 1$ – фиксированное число, не зависящее от T ;

5) постоянные β и γ связаны неравенством

$$\beta + \varepsilon < \frac{\gamma}{2\sqrt{2}}. \quad (2.11)$$

Тогда решение $u^*(t)$ задачи (1.1)-(1.2) устойчиво по Гьюрингу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменяем операторное уравнение (2.7) следующим уравнением:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \Psi(T, \omega)P + R_\varepsilon(t, \omega), \quad (2.12)$$

где $R_\varepsilon(t, \omega) = [\Psi(t, \omega) - \Psi(T, \omega)]P + R(t, \omega)$.

Решение операторного уравнения (2.12) при каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$ и при значениях t , удовлетворяющих неравенству $t_0 \leq T < t$, можно представить в виде [7]:

$$P(t, \omega) = e^{\Psi(T, \omega)(t-T)} P(T, \omega) + \int_T^t e^{\Psi(T, \omega)(t-s)} R_\varepsilon(s, \omega) ds. \quad (2.13)$$

В силу очевидного неравенства $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, где a , b – произвольные вещественные числа, имеем оценку

$$\|P(t, \omega)\|^2 \leq 2 \|e^{\Psi(T, \omega)(t-T)} P(T, \omega)\|^2 + 2 \left\| \int_T^t e^{\Psi(T, \omega)(t-s)} R_\varepsilon(s, \omega) ds \right\|^2. \quad (2.14)$$

Применяя двустороннее неравенство (2.8) и используя первое условие доказываемой теоремы, получаем оценку сверху для первого слагаемого в правой части неравенства (2.14).

$$\begin{aligned} 2\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\|^2 &\leq 8\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\|_1^2 \leq \\ &\leq 8\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}\|_1^2 \cdot \|P(T,\omega)\|_1^2 \leq 8\|e^{\Lambda(\Psi(T,\omega))(t-T)}\|_1^2 \cdot \|P(T,\omega)\|_1^2 \leq \\ &\leq 8e^{-2\gamma(t-T)}\|P(T,\omega)\|_1^2 \leq 8e^{-\gamma(t-T)}\|P(T,\omega)\|^2. \end{aligned}$$

Интегрирование последнего неравенства дает:

$$2\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\|_2^2 \leq 8e^{-\gamma(t-T)}\|P(T,\omega)\|_2^2. \tag{2.15}$$

Аналогично, для второго слагаемого в правой части (2.14) имеем:

$$\begin{aligned} 2\left\|\int_T^t e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}R_\varepsilon(s,\omega) ds\right\|_2^2 &\leq 8\left\|\int_T^t e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}R_\varepsilon(s,\omega) ds\right\|_1^2 \leq \\ &\leq 8\left(\int_T^t \|e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}\|_1 \cdot \|R_\varepsilon(s,\omega)\|_1 ds\right)^2 \leq \\ &\leq 8\left(\int_T^t e^{-\gamma(t-s)}\|R_\varepsilon(s,\omega)\| ds\right)^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $h_\varepsilon(t, x)$ по формуле

$$h_\varepsilon(t, x) = \left(\begin{array}{l} [a_{11}(t) - a_{11}(T)]v_1 + [a_{11}(t) - a_{11}(T)]v_2 + h_1(t, v_1, v_2) \\ [a_{11}(t) - a_{11}(T)]v_1 + [a_{11}(t) - a_{11}(T)]v_2 + h_1(t, v_1, v_2) \end{array} \right).$$

Кроме того, введем вектор-функцию $H_\varepsilon(t, \omega)$, представляющую собой Фурье-трансформанту функции $h_\varepsilon(t, v_1, v_2)$. Справедливы следующие очевидные равенства:

$$\|P(t, \omega)\|_2 = \|V(t, \omega)\|_2, \quad \|H_\varepsilon(t, v)\|_2 = \|R_\varepsilon(t, \omega)\|_2. \tag{2.17}$$

В силу формулы Планшереля имеет место равенство

$$\|h_\varepsilon(t, v_1, v_2)\|_2 = \|H_\varepsilon(t, \omega)\|_2. \tag{2.18}$$

Тогда из структуры вектор-функции $h_\varepsilon(t, v)$, а также из условий 2-4 теоремы следует справедливость при $T \leq t \leq T + \theta$ следующего неравенства:

$$\|h_\varepsilon(t, v)\|_2 \leq (\beta + \varepsilon)\|v\|_2. \tag{2.19}$$

Интегрируя неравенство (2.16) по переменной ω и применяя неравенство Коши-Буняковского, а также формулу Планшереля и неравенство (2.19), имеем:

$$\begin{aligned} 2\left\|\int_T^t e^{\Psi(\omega)(t-s)}R_\varepsilon(s,\omega) ds\right\|_2^2 &\leq 8\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_T^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)}e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)}\|R_\varepsilon(s,\omega)\| ds\right)^2 d\omega \leq \\ &\leq 8\left(\int_T^t e^{-\gamma(t-s)} ds\right)\int_T^t e^{-\gamma(t-s)}\|R_\varepsilon(s,\omega)\|_2^2 ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{8(\beta + \varepsilon)^2}{\gamma} [1 - e^{-\gamma(t-T)}] \int_T^t e^{-\gamma(t-s)} \|P(s, \omega)\|_2^2 ds \leq \\ &\leq \frac{8(\beta + \varepsilon)^2}{\gamma} \int_T^t e^{-\gamma(t-s)} \|P(s, \omega)\|_2^2 ds. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Наконец, интегрирование оценки (2.14) по переменной ω и использование неравенств (2.15) и (2.20) дает:

$$\|P(t, \omega)\|_2^2 \leq 8e^{-\gamma(t-T)} \|P(T, \omega)\|_2^2 + \frac{8(\beta + \varepsilon)^2}{\gamma} \int_T^t e^{-\gamma(t-s)} \|P(s, \omega)\|_2^2 ds. \quad (2.21)$$

Пусть $\varphi(\tau) = e^{-\gamma(t-\tau)} \|P(\tau, \omega)\|_2^2$, тогда неравенство (2.21) может быть записано в виде:

$$\varphi(t) = 8\varphi(T) + \frac{8(\beta + \varepsilon)^2}{\gamma} \int_T^t \varphi(s) ds.$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла-Беллмана, получаем неравенство $\varphi(t) \leq 8e^{\frac{8(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}(t-T)} \varphi(T)$, откуда, возвращаясь к исходным обозначениям, имеем:

$$\|P(t, \omega)\|_2^2 \leq 8e^{\left(-\gamma + \frac{8(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)(t-T)} \|P(T, \omega)\|_2^2. \quad (2.22)$$

В силу первого равенства (2.17) из неравенства (2.22) следует оценка

$$\|V(t, \omega)\|_2^2 \leq 8e^{\left(-\gamma + \frac{8(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)(t-T)} \|V(T, \omega)\|_2^2,$$

из которой, используя формулу Планшереля и извлекая квадратный корень, имеем окончательно:

$$\|v(t, x)\|_2 \leq 2\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{4(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)(t-T)} \|v(T, x)\|_2. \quad (2.23)$$

Из условия 4 вытекает, что в интервале (t_0, ∞) существует множество точек $t_k = t_0 + k\theta$, в которых выполняется равенство $\|v(t_k, x)\|_2 \leq (1 - \alpha)^k \|v(t_0, x)\|_2$. Стало быть, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v(t_k, x)\|_2 = 0$. Поскольку всякий сегмент $[t_k, t_{k+1}]$ имеет длину θ , то при $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ справедливо неравенство

$$\|v(t, x)\|_2 \leq 2\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{4(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)(t-t_k)} \|v(t_k, x)\|_2 \leq 2\sqrt{2} \|v(t_k, x)\|_2.$$

Тем самым, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, x)\|_2 = 0$. Асимптотическая устойчивость решения системы (2.2) доказана. Стало быть, решение $u^*(t, x)$ системы (1.1) устойчиво по Тьюрингу.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 2.1. Рассматриваемый в настоящей статье случай системы из двух уравнений, зависящих от одной пространственной переменной, выбран из соображений простоты. Теорема 2.1. вместе с доказательством практически без изменений переносится на общий случай систем из m уравнений с n пространственными переменными, где m и n – произвольные целые положительные числа.

3. Неустойчивость по Тьюрингу решений систем нелинейных уравнений с производными дробного порядка

Теперь, используя изложенный ранее подход, выведем условия, при которых имеет место неустойчивость по Тьюрингу фиксированного решения $u^*(t, x)$ задачи (1.1)-(1.2).

Решение операторного уравнения (2.12) дается выражением (2.13). Оценим это решение снизу, воспользовавшись известным неравенством $\|x + y\| \geq \|\|x\| - \|y\|\|$. При каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\|P(t, \omega)\| \geq \left\| \left\| e^{\Psi(T, \omega)(t-T)} P(T, \omega) \right\| - \left\| \int_T^t e^{\Psi(T, \omega)(t-s)} R_\varepsilon(s, \omega) ds \right\| \right\|. \quad (3.1)$$

Предположим, что $\|e^{\Psi(T, \omega)(t-T)} P(T, \omega)\| \geq \left\| \int_T^t e^{\Psi(T, \omega)(t-s)} R_\varepsilon(s, \omega) ds \right\|$; этого всегда можно добиться, если рассматривать оценку (3.1) на достаточно малом промежутке $t \in [T, T + \Delta t]$. Тогда оценку (3.1) можно переписать следующим образом:

$$\|P(t, \omega)\| \geq \|e^{\Psi(T, \omega)(t-T)} P(T, \omega)\| - \left\| \int_T^t e^{\Psi(T, \omega)(t-s)} R_\varepsilon(s, \omega) ds \right\|. \quad (3.2)$$

В правой части (3.2) оценим вычитаемое сверху, а уменьшаемое снизу. Известно, что тождество $e^A e^B = e^{A+B}$ имеет место, если матрицы A и B коммутируют [7]. Поэтому при всех $\omega \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$e^{\Psi(T, \omega)(t-T)} e^{-\Psi(T, \omega)(t-T)} = e^{-\Psi(T, \omega)(t-T)} e^{\Psi(T, \omega)(t-T)} = e^{(\Psi(T, \omega) - \Psi(T, \omega))(t-T)} = I,$$

где I – единичная матрица. Следовательно, оператор $e^{-\Psi(T, \omega)(t-T)}$ является обратным к оператору $e^{\Psi(T, \omega)(t-T)}$. Для оператора $e^{-\Psi(T, \omega)(t-T)}$ имеет место оценка $\|e^{-\Psi(T, \omega)(t-T)}\| \leq e^{\Lambda(-\Psi(T, \omega))(t-T)}$. Пусть логарифмическая норма $\Lambda(-\Psi(t, \omega))$ матрицы $-\Psi(t, \omega)$ при всех значениях $t \geq t_0$, $\omega \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\Lambda(-\Psi(t, \omega)) \leq -\gamma, \quad \gamma > 0. \quad (3.3)$$

Тогда в силу существования у оператора $e^{\Psi(T, \omega)(t-T)}$ непрерывного обратного оператора $e^{-\Psi(T, \omega)(t-T)}$ при каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$ имеем [8] неравенство

$$\begin{aligned} \|e^{\Psi(T, \omega)(t-T)} P(T, \omega)\| &\geq \|e^{\Lambda(-\Psi(T, \omega))(t-T)}\|^{-1} \cdot \|P(T, \omega)\| \geq \\ &\geq e^{-\Lambda(-\Psi(T, \omega))(t-T)} \|P(T, \omega)\| \geq e^{\gamma(t-T)} \|P(T, \omega)\|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Теперь оценим вычитаемое из правой части неравенства (3.2) сверху. Пусть при каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\|R(t, \omega)\| \leq \beta(\omega) \|P(t, \omega)\|, \quad (3.5)$$

где $\beta(\omega)$ – определенная при всех $\omega \in \mathbb{R}$ ограниченная функция.

З а м е ч а н и е 3.1. В частности, можно положить $\beta(\omega) = \beta = \text{const}$. Тогда в силу формул (2.17)-(2.18) и формулы Планшереля условие (3.5) можно заменить условием (2.10).

Пусть функции $a_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$, непрерывны при $t \geq t_0$. Тогда нетрудно убедиться, что из (3.5) следует неравенство $\|R_\varepsilon(t, \omega)\| \leq [\beta(\omega) + \varepsilon]\|P(t, \omega)\|$, где величина ε может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора промежутка Δt изменения t , $T \leq t \leq T + \Delta t$.

Рассуждая по аналогии с выводом оценки (2.20), получаем:

$$\begin{aligned} \left\| \int_T^t e^{\Psi(T, \omega)(t-s)} R_\varepsilon(s, \omega) ds \right\| &\leq 2 \int_T^t e^{\Lambda(\Psi(T, \omega))(t-s)} \|R_\varepsilon(s, \omega)\| ds \leq \\ &\leq 2 \left[\int_T^t e^{2\Lambda(\Psi(T, \omega))} ds \right]^{1/2} \cdot \left[\int_T^t \|R_\varepsilon(s, \omega)\|^2 ds \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{2} [\beta(\omega) + \varepsilon] \sqrt{\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T, \omega))(t-T)} - 1}{\Lambda(\Psi(T, \omega))}} \left[\int_T^t \|P(s, \omega)\|^2 ds \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, для нормы $\|V(t, \omega)\|$ при $t \in [T, T + \Delta t]$ имеет место оценка сверху:

$$\|P(t, \omega)\| \geq e^{\gamma(t-T)} \|P(T, \omega)\| - \sqrt{2} [\beta(\omega) + \varepsilon] \sqrt{\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T, \omega))(t-T)} - 1}{\Lambda(\Psi(T, \omega))}} \left[\int_T^t \|P(s, \omega)\|^2 ds \right]^{1/2}. \quad (3.7)$$

Покажем, что функция $\|P(t, \omega)\|$ при всяком фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$ является возрастающей. Предположим противное: пусть на промежутке $t \in [T, T + \Delta t]$ при некотором $\omega = \tilde{\omega}$ имеет место неравенство $\|P(t, \omega)\| \leq \|P(T, \omega)\|$. Тогда на этом промежутке интеграл $\int_T^t \|P(s, \omega)\|^2 ds$ оценим сверху при помощи формулы левых прямоугольников:

$$\int_T^t \|P(s, \omega)\|^2 ds \leq (t - T) \|P(T, \omega)\|^2.$$

Тогда в предположении, что $\Lambda(\Psi(t, \omega)) \neq 0$ при всех $t \geq t_0$, $\omega \in \mathbb{R}$, неравенство (3.7) запишется следующим образом:

$$\|P(t, \tilde{\omega})\| \geq \sigma(\tilde{\omega}, t) \|P(T, \tilde{\omega})\|. \quad (3.8)$$

где $\sigma(\tilde{\omega}, t) = e^{\gamma(t-T)} - \sqrt{2} [\beta(\tilde{\omega}) + \varepsilon] \sqrt{\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T, \tilde{\omega}))(t-T)} - 1}{\Lambda(\Psi(T, \tilde{\omega}))}} \sqrt{t - T}$.

Найдем производную функцию $\sigma(\tilde{\omega}, t)$ по переменной t :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \gamma e^{\gamma(t-T)} - \sqrt{2} [\beta(\tilde{\omega}) + \varepsilon] \left[\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T, \tilde{\omega}))(t-T)} \sqrt{t - T}}{\sqrt{\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T, \tilde{\omega}))(t-T)} - 1}{\Lambda(\Psi(T, \tilde{\omega}))}}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T, \tilde{\omega}))(t-T)} - 1}{\Lambda(\Psi(T, \tilde{\omega}))}}}{\sqrt{t - T}} \right].$$

Вычислим значение производной $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ при $t \rightarrow T$:

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \gamma - 2 [\beta(\tilde{\omega}) + \varepsilon].$$

Пусть при всех $\omega \in \mathbb{R}$ имеет место условие

$$\gamma \geq 2\beta(\omega) + \alpha, \quad (3.9)$$

где $\alpha > 0$ – фиксированное число.

Тогда при всяком фиксированном $\omega = \tilde{\omega}$ выполняется неравенство $\lim_{t \rightarrow T} \sigma(\tilde{\omega}, t) \geq 1$, и, кроме того, существует промежуток времени $[T, T + \Delta t(T)]$, на котором функция $\sigma(\tilde{\omega}, t)$ возрастает. Стало быть, для всякого $T \geq t_0$ можно указать такое значение $\Delta t(T)$, что при $t \in (T, T + \Delta t(T)]$ функция $\sigma(t, \tilde{\omega})$ будет строго возрастающей и большей 1. Следовательно, на промежутке $t \in [T, T + \Delta t(T)]$ функция $\sigma(t, \tilde{\omega})$ достигает своего минимального значения в момент времени $t = T$. Но тогда в силу (3.8) имеем $\|P(t, \tilde{\omega})\| \geq \|P(T, \tilde{\omega})\|$. Таким образом, имеем противоречие с первоначально сделанным предположением $\|P(t, \tilde{\omega})\| < \|P(T, \tilde{\omega})\|$, откуда следует, что для всякого фиксированного $T \geq t_0$ можно указать такой интервал $t \in [T, T + \Delta t(T)]$, на котором функция $\|P(t, \tilde{\omega})\|$ будет возрастающей. В силу произвольности $\tilde{\omega}$ для всякого фиксированного $\omega \in \mathbb{R}$ получаем неравенство $\|P(t, \omega)\| > \|P(T, \omega)\|$, где $T < t < T + \Delta t(T)$. Тогда в силу первого равенства (2.17) имеем окончательно:

$$\|V(t, \omega)\| > \|V(T, \omega)\|, \quad T < t < T + \Delta t(T). \quad (3.10)$$

Для доказательства неустойчивости решения нужно показать, что $\|V(t, \omega)\|$ возрастает с возрастанием величины t . Выше было показано, что для каждого T , $T \geq t_0$, существует промежуток времени $(T, T + \Delta t(T)]$, в течение которого функция $\|V(t, \omega)\|$ возрастает. Более того, можно выбрать такой промежуток времени $[T, T + \Delta t(T)]$, что

$$\|V(T + \Delta t(T), \omega)\| \geq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \|V(T, \omega)\|.$$

Возьмем последовательность $t_0 = T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$ такую, что при $t \in (T_k, T_{k+1}]$ функция $\|V(t, \omega)\|$ возрастает. Здесь имеется две возможности: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_*$. В первом случае очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V(T_n, \omega)\| = \infty$. Во втором случае функция $\|V(t, \omega)\|$ возрастает при $t \in [t_0, T_*)$. Так как функция $\|V(t, \omega)\|$ непрерывна, то существует предел $\lim_{t \rightarrow T_*} \|V(t, \omega)\| = \|V(T_*, \omega)\|$, причем $\|V(T_*, \omega)\| \geq \sup_{t \in [t_0, T_*)} \|V(t, \omega)\|$.

Здесь возможны такие два случая: а) $\|V(T_*, \omega)\| = \infty$; б) $\|V(T_*, \omega)\| = A(\omega) < \infty$. Случай а) очевиден. Рассмотрим случай б). Предположим, что в точке T_* предположение о возрастании функции $\|V(t, \omega)\|$ нарушается. Тогда, взяв T_* за начальную точку и повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что это предположение неверно. Аналогично, если в какой-нибудь точке T_{**} условие возрастания $\|V(t, \omega)\|$ нарушается, то взяв ее за начальную, приходим к противоречию. Таким образом, $\|V(t, \omega)\|$ при возрастании t стремится к бесконечности. Тем самым, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполнены условия:

1) логарифмическая норма $\Lambda(-\Psi(t, \omega))$ матрицы $-\Psi(t, \omega)$, вычисляемая по формуле (2.9), при всех $t \geq t_0$ и $\omega \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству (3.3);

2) вектор-функция $h(t, v)$ непрерывна по обоим переменным и удовлетворяет условию (2.10);

3) функции $a_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$, непрерывны при $t \geq t_0$;

4) константы β и γ связаны неравенством $\gamma \geq 2\beta + \alpha$, где $\alpha > 0$.

Тогда решение $u^*(t, x)$ системы уравнений (1.1) неустойчиво по Гьюрину.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов, *Введение в синергетику*, Наука, М., 1990, 272 с.
2. Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский, *Нестационарные структуры и диффузионный хаос*, Наука, М., 1992, 544 с.
3. Г. Николис, И. Пригожин, *Самоорганизация в неравновесных системах*, Мир, М., 1979, 512 с.
4. И. В. Бойков, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений*, Изд-во ПГУ, Пенза, 2008, 244 с.
5. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с.
6. И. В. Бойков, В. А. Рязанцев, “Устойчивость решений параболических уравнений с дробными производными”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2012, № 4(24), 84-100.
7. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970, 536 с.
8. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984, 752 с.

Turing instability of dynamical systems which are described by equations with fractional derivatives

© I. V. Boikov³ V. A. Ryazantsev⁴

Abstract. Reaction-diffusion models, that are described by systems of partial differential equations, are under consideration. Turing stability and instability of solutions of these systems are investigated in the paper.

Key Words: partial differential equations, reaction-diffusion models, Turing stability, logarithmic norm, fractional derivatives

³ Head of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; boikov@pnzgu.ru

⁴ Post-graduate student of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; ryazantsev@mail.ru

УДК 519.6/538.945

Математическое моделирование магнитного отклика сверхпроводящего тонкого диска в модели критического состояния с критической плотностью тока зависящей обратно пропорционально квадрату напряженности поля

© Н. Д. Кузьмичев¹ М. В. Чугунов² А. А. Федченко³

Аннотация. Выполнено математическое моделирование гармоник намагниченности жесткого сверхпроводника второго рода в виде тонкого диска в приближении экранировки поля в центре образца для модели критического состояния с $J_c \sim \gamma/H^2$. Рассчитаны гистерезисные кривые намагниченности и ряд зависимостей действительной и мнимой частей первой, третьей и пятой гармоник намагниченности от величины напряженностей переменного и постоянного магнитных полей и от температуры. Получено, что на зависимости амплитуд гармоник намагниченности значительно влияет амплитуда переменного магнитного поля, качественно меняя указанные зависимости от величины постоянного поля для малых и больших амплитуд переменного поля.

Ключевые слова: высокотемпературный сверхпроводник, жесткий сверхпроводник II рода, критическое состояние, тонкий диск, критическая плотность тока, петля гистерезиса намагниченности, гармоники намагниченности

1. Введение

Высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) важны для практических приложений, например, в электротехнике, радиотехнике и других областях. Важно знать отклик различной структуры и геометрической формы ВТСП на переменное и постоянное магнитные поля.

Намагниченность ВТСП зависит от предыстории его состояния, т.е. обнаруживает гистерезис. Такое поведение сверхпроводника описывается различными моделями, которые базируются на модели критического состояния, предложенной Ч. Бинном в работе [1] для жестких сверхпроводников второго (II) рода.

Магнитное поле величиной больше первого критического поля в жесткие сверхпроводники II рода проникает в виде потока, образованного нитями Абрикосова и распространяется фронтом внутрь сверхпроводника, преодолевая силу пиннинга (силу закрепления вихря на неоднородности). Слабое магнитное поле в керамические ВТСП проникают в виде вихрей Джозефсона или гипервихрей. Изменение магнитного потока внутри сверхпроводника вызывает в области проникновения вихрей электрическое поле, которое в свою очередь, мгновенно создает экранирующий сверхпроводящий ток (сверхток) с критической плотностью J_c . Величина J_c зависит от локальной плотности магнитного потока (концентрации вихрей – средней индукции поля B или напряженности поля H) т. е.

¹ Заведующий кафедрой общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kuzmichevnd@yandex.ru.

² Заведующий кафедрой общетехнических дисциплин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; m.v.chugunov@mail.ru.

³ Старший преподаватель кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара; starlightalex@gmail.com.

$J_c = J_c(\mathbf{B})$ [2]. Указанная зависимость обусловлена силой пиннинга и силой отталкивания между вихрями. Расчет сверхтока и магнитного поля внутри сверхпроводника, а также намагниченности и восприимчивости сверхпроводника представляет собой непростую задачу [3] – [6].

2. Модель расчета

В работе выполнено математическое моделирование процесса проникновения магнитного поля в тонкий диск жесткого сверхпроводника II рода в приближение полной экранировки внешнего магнитного поля в центре образца и рассчитаны магнитнополевые и температурные зависимости гармоник намагниченности. Использовалась следующая зависимость критической плотности тока от магнитного поля: $J_c(H) = \gamma/H^2$, которая приближенно описывает ситуацию при высокой плотности проникших в образец вихрей и для керамических сверхпроводников [7]. В пренебрежении эффекта Мейснера уравнение критического состояния для очень тонкого диска радиуса R и полутолщины b ($R \gg b$) [8] в аксиальном внешнем поле имеет вид:

$$\frac{dH}{dr} = \pm \frac{\gamma b}{H^2 r} \quad (2.1)$$

Здесь r есть текущий радиус цилиндра, $H(r)$ представляет собой осевую составляющую напряженности магнитного поля. Знак правой части уравнения (2.1) определяется знаком производной по времени от внешнего поля, т.е. знаком dH/dt . Вышеуказанная зависимость $J_c(H)$ рядом авторов использовалось для описания критического состояния гранулярных поликристаллических высокотемпературных сверхпроводников (например, [7]). Уравнение (2.1) решается с граничным условием $H(R) = H_e$. Где H_e – напряженность внешнего магнитного поля. Знак (+) в уравнении (2.1) соответствует растущему во времени магнитному полю, а знак (–) убывающему полю. Решение (2.1) имеет вид:

$$H(r) = \left[H_e^3 \mp 3\gamma b \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.2)$$

Магнитное поле в тонкий диск проникает на глубину $R - \rho$, а радиус ρ определяется из условия $H(\rho) = 0$:

$$\rho(H_e) = R \cdot \exp\left(-\frac{H_e^3}{3\gamma b}\right) \quad (2.3)$$

Намагниченность $M(H_e)$ тонкого диска вычислялась согласно формуле используемой для определения магнитного момента системы токов [8], [9] учитывая, что экранирующий ток в силу цилиндрической симметрии является азимутальным:

$$M(H_e) = \frac{1}{2V} \int_{\rho}^R |[\vec{r}, \vec{J}_c]| dV \quad (2.4)$$

Здесь V – объем сверхпроводника, ρ – радиус внутренней части цилиндра, куда поле не проникло (2.3). Начальная кривая намагниченности для возрастающего внешнего поля от θ до H_e , следуя (2.4), вычисляется по формуле:

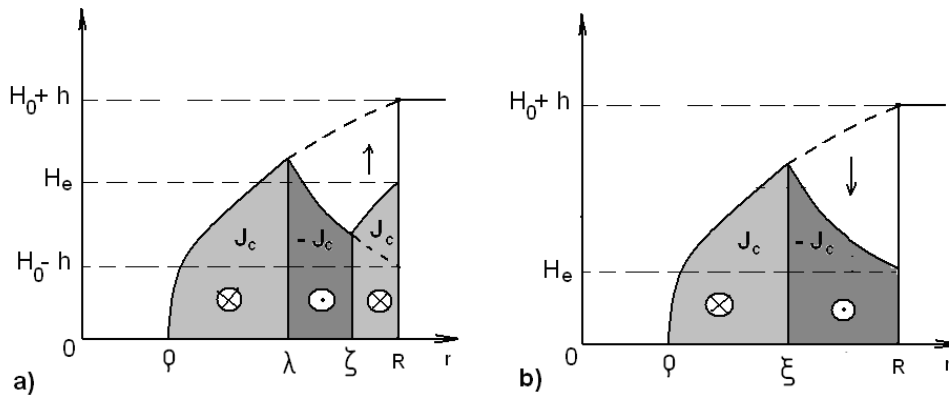
$$M_{in}(H_e) = -\frac{1}{R^2} \int_{\rho(H_e)}^R J_c(H) r^2 dr = -M_0 \cdot \exp\left(-\frac{H_e^3}{\gamma b}\right) \int_0^{(H_e^3/3\gamma b)} \frac{e^{3z} dz}{z^{2/3}} \quad (2.5)$$

Здесь $M_0 = (\gamma R^3/9b^2)^{1/3}$. Интеграл в выражении (2.5) не выражается через элементарные функции.

В переменном магнитном поле ($H_e(t) = H_0 + h \cdot \cos(\omega t)$) сверхпроводник разбивается на области с противоположно текущими экранирующими сверхтоками (рис. 2.1). Это приводит к гистерезису в намагничивании жесткого сверхпроводника. Уравнения кривых, которые определяют петлю гистерезиса намагниченности, будут выражаться следующими интегралами:

$$\begin{cases} M_+(H_0, h) = -\frac{1}{R^2} \left[\int_{\rho}^{\lambda} J_c(H)r^2 dr - \int_{\lambda}^{\zeta} J_c(H)r^2 dr + \int_{\zeta}^R J_c(H)r^2 dr \right] \\ M_-(H_0, h) = -\frac{1}{R^2} \left[\int_{\rho}^{\xi} J_c(H)r^2 dr - \int_{\xi}^R J_c(H)r^2 dr \right] \end{cases} \quad (2.6)$$

где $M_+(H_0, h)$ – ветвь петли в возрастающем поле, а $M_-(H_0, h)$ – ветвь петли для убывающего внешнего магнитного поля. Здесь ρ – радиус центральной части диска, куда возрастающее поле до величины $H_0 + h$ еще не проникло, λ – внутренний радиус кольцевого слоя диска с противоположно текущим экранирующим сверхтоком в убывающем поле до значения $H_0 - h$ и ζ – внешний радиус этого же кольцевого слоя диска. Величина ξ является внутренним радиусом кольцевого слоя в убывающем поле от значения $H_0 + h$ до текущего значения $H_e(t)$ (см. рис. 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Разбиение сверхпроводника в постоянном и переменном аксиальных магнитных полях на области с противоположно текущими сверхтоками: а) Возрастающее поле проникло на глубину $R - \rho$, убывающее – на глубину $R - \lambda$ и снова возрастающее на $R - \zeta$ (ветвь петли гистерезиса в растущем поле – M_+). б) Возрастающее поле проникло на глубину $R - \rho$, убывающее – на глубину $R - \xi$ (ветвь петли гистерезиса в убывающем поле – M_-).

Аналитический расчет по формулам (2.6) для M_- и M_+ приводит следующим выражениям:

$$M_-(H_0, h, H_e) = -M_0 \cdot \begin{cases} \exp\left(-\frac{(H_0 + h)^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_0^{[(H_0+h)^3+H_e^3]/6\gamma b} \frac{e^{3z} dz}{z^{2/3}} + \\ + \exp\left(\frac{H_e^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_{[(H_0+h)^3+H_e^3]/6\gamma b}^{H_e^3/3\gamma b} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$M_+(H_0, h, H_e) = -M_0 \cdot \begin{cases} \exp\left(-\frac{(H_0+h)^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_0^{[(H_0+h)^3+(H_0-h)^3]/6\gamma b} \frac{e^{3z} dz}{z^{2/3}} + \\ + \exp\left(\frac{(H_0-h)^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_{[(H_0+h)^3+(H_0-h)^3]/6\gamma b}^{H_e^3+ (H_0-h)^3/6\gamma b} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} + \\ + \exp\left(-\frac{H_e^3}{\gamma b}\right) \cdot \int_{[(H_0-h)^3+H_e^3]/6\gamma b}^{H_e^3/3\gamma b} \frac{e^{-3z} dz}{z^{2/3}} \end{cases} \quad (2.8)$$

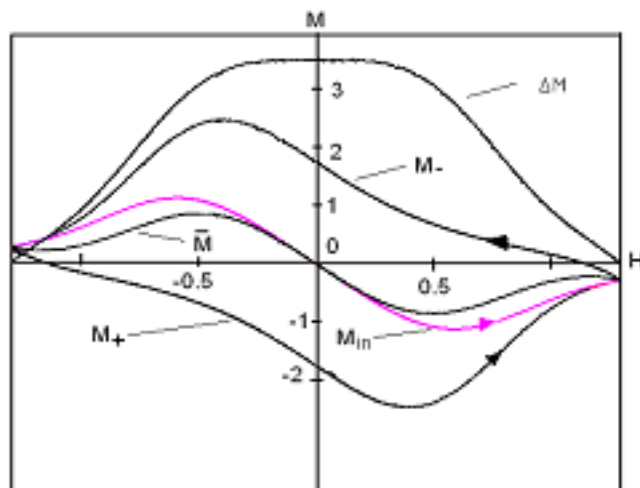
На практике важны гармоники намагниченности, так как экспериментально их достаточно легко измерить. В работе [3] показано, что вклад в действительные части гармоник дает средняя кривая намагниченности $\overline{M}(H_0, h, H_e)$, а в мнимые составляющие вклад дает разностная кривая намагниченности $\Delta M(H_0, h, H_e)$. Указанные кривые определяются следующим образом [3]:

$$\overline{M}(H_0, h, H_e) = \frac{M_-(H_0, h, H_e) + M_+(H_0, h, H_e)}{2}, \quad (2.9)$$

$$\Delta M(H_0, h, H_e) = M_-(H_0, h, H_e) - M_+(H_0, h, H_e). \quad (2.10)$$

На рис. 2.2 построены графики зависимостей M_{in} , M_+ , M_- , \overline{M} и ΔM от внешнего магнитного поля с использованием формул (2.5), (2.7) – (2.10). Величину магнитного поля удобно выражать в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$. В поле $H_e = H_p$ радиус $\rho \approx 0.7165R$.

В эксперименте часто измеряется напряжение сигнала отклика сверхпроводника на переменное магнитное поле в присутствии постоянного поля [3], [6], [7], [11]. Указанное напряжение возникает на концах приемной катушки, внутри которой помещен сверхпроводник. В силу нелинейности отклика напряжение будет иметь в своем составе синфазные (действительные) U' и квадратурные (мнимые) U'' составляющие гармоник.



Р и с у н о к 2.2

Начальная кривая намагниченности M_{in} , ветвь петли гистерезиса в возрастающем поле M_+ , ветвь петли гистерезиса в убывающем поле M_- , средняя \overline{M} и разностная ΔM кривые. Здесь H текущее магнитное поле. Кривые построены с использованием формул (2.6), (2.8) – (2.10).

Магнитное поле H выражено в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, а намагниченность в единицах M_0 .

Гармоники напряжения пропорциональны соответствующим гармоникам намагниченности или восприимчивости: $U_n^{',''} \propto M_n^{',''}$. Здесь $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер гармоники.

Действительные M_n' и мнимые M_n'' составляющие гармоник намагниченности вычислялись согласно формулам работы [3]:

$$M_n'(H_0, h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M}(H_0, h, H_e(t)) \cos(n\omega t) d(\omega t), \quad (2.11)$$

$$M_n''(H_0, h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta M(H_0, h, H_e(t)) \sin(n\omega t) d(\omega t). \quad (2.12)$$

Модули гармоник намагниченности определяются формулой:

$$M_n(H_0, h) = \sqrt{(M_n'(H_0, h))^2 + (M_n''(H_0, h))^2}. \quad (2.13)$$

Заметим, что (см. например, [3])

$$M_1'' = \frac{1}{\pi h} \oint H dM = \frac{Q}{\pi \mu_0 V h}. \quad (2.14)$$

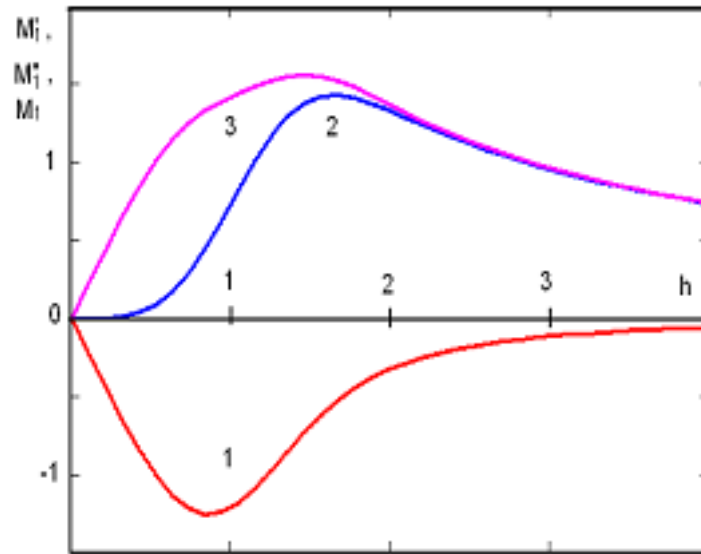
Здесь Q – энергия потерь на перемагничивание за цикл, μ_0 – магнитная постоянная, а V – объем сверхпроводника.

Аналитические вычисления гармоник намагниченности приводят к чрезвычайной громоздкости выражений неудобных для дальнейшего анализа и сравнения с экспериментом, поэтому их вычисления проводились численно в системе MathCad.

3. Результаты расчета магнитопольевых зависимостей гармоник намагниченности

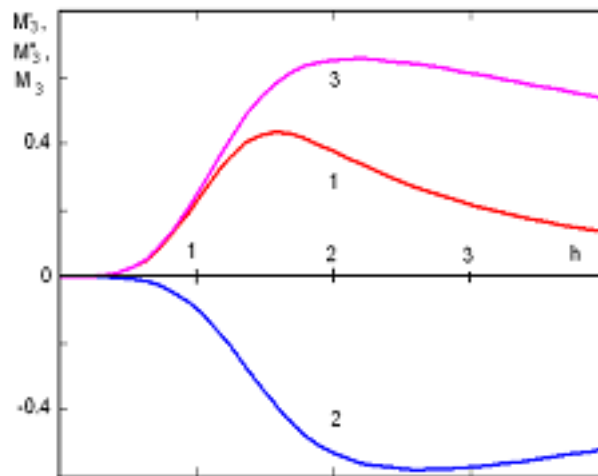
На рисунках 3.1 – 3.3 приведены расчеты амплитуд 1, 3 и 5 гармоник намагниченности в зависимости от величины амплитуды h напряженности внешнего переменного магнитного поля ($H_0 = 0$). Из рисунков видно, что гармоники имеют максимумы, положения которых зависят от номера n гармоники. С ростом n максимум смещается в сторону роста h . Максимумы обусловлены конкуренцией двух механизмов – увеличением объема сверхпроводника занятого сверхтоком, что приводит к росту намагниченности диска и подавлением величины $J_c(H)$ с ростом поля.

Учитывая формулу (2.14) и рис. 3.1 (кривая 2) получим, что максимум потерь энергии на перемагничивание сверхпроводника приходится на величину $h_m \approx 1.7H_p$. Мнимая часть пятой гармоники (рис. 3.3) намагниченности M_5'' меняет знак при $h \approx h_m$, то есть фазу. Отметим, что при $h > 3H_p$ в сверхпроводнике происходят в основном потери на перемагничивание (см. рис. 3.1).



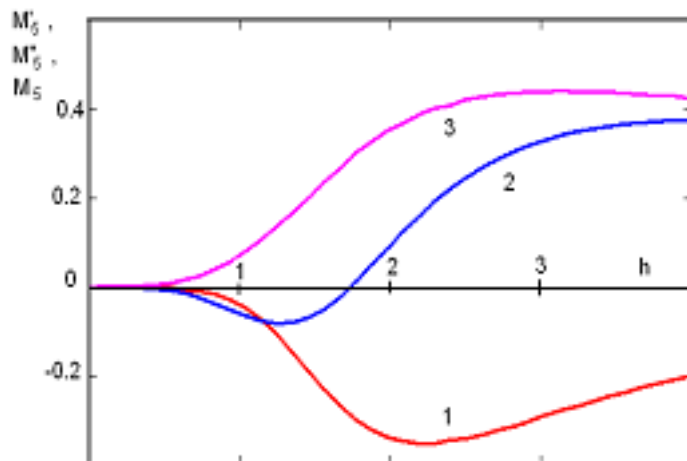
Р и с у н о к 3.1

Амплитуды действительной M_1' (кривая 1), мнимой M_1'' (кривая 2) частей и модуля M_1 (кривая 3) первой гармоники намагниченности в зависимости от амплитуды h переменного магнитного поля $H_0 = 0$. Магнитное поле выражено в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, амплитуды гармоник намагниченности – в единицах M_0 .



Р и с у н о к 3.2

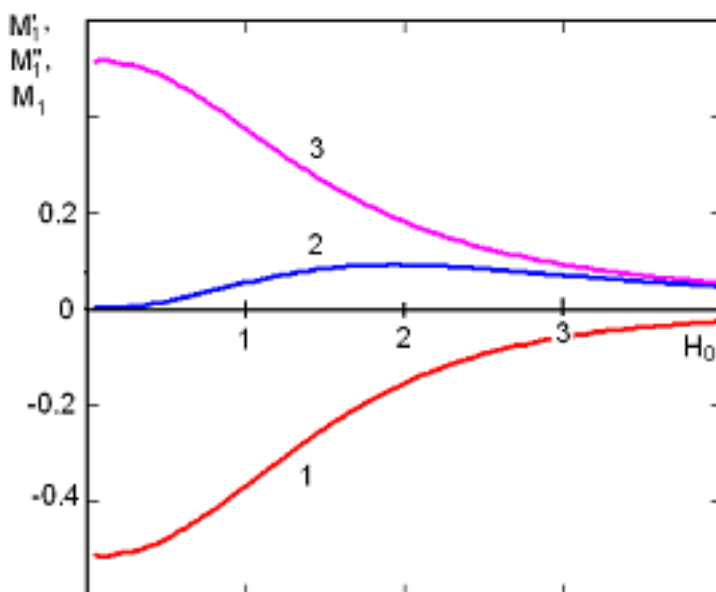
Амплитуды действительной M_3' (кривая 1), мнимой M_3'' (кривая 2) частей и модуля M_3 (кривая 3) третьей гармоники намагниченности в зависимости от амплитуды h переменного магнитного поля $H_0 = 0$. Магнитное поле выражено в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, амплитуды гармоник намагниченности – в единицах M_0 .



Р и с у н о к 3.3

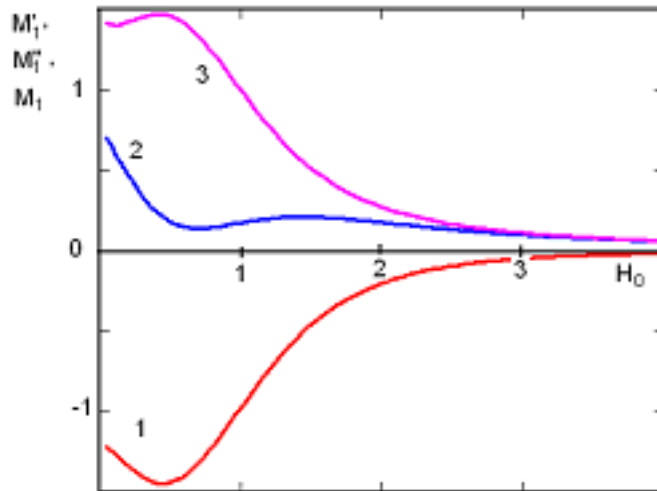
Амплитуды действительной M'_5 (кривая 1), мнимой M''_5 (кривая 2) частей и модуля M_5 (кривая 3) пятой гармоники намагниченности в зависимости от амплитуды h переменного магнитного поля $H_0 = 0$. Магнитное поле выражено в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, амплитуды гармоник намагниченности – в единицах M_0 .

На рисунках 3.4 – 3.6 представлены расчеты амплитуд 1 и 3 гармоник намагниченности в зависимости от величины напряженности внешнего постоянного магнитного поля H_0 при 2-х значения амплитуды модуляции $h = 0.25H_p$ и H_p . Для $h = 0.25H_p$ из рис. 3.4 видно, что потери с ростом H_0 возрастают и достигают максимума при $H_0 \approx 2H_p$. При $h = H_p$ и $H_0 = 0$ потери максимальны (рис. 3.5). Третья гармоника намагниченности имеет сложную зависимость с переменной знака, как в действительной части, так и в мнимой части для $h = H_p$ (рис. 3.6). Пятая гармоника имеет ещё более сложную зависимость с большим числом максимумов и минимумов.



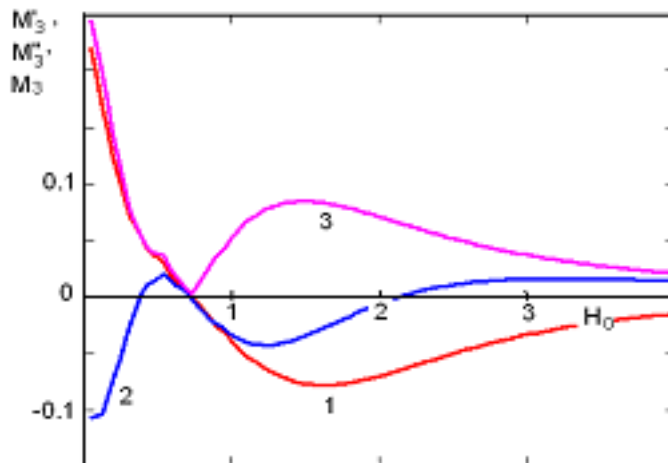
Р и с у н о к 3.4

Зависимости действительной M_1' (кривая 1), мнимой M_1'' (кривая 2) частей и модуля M_1 (кривая 3) первой гармоники намагниченности от постоянного поля H_0 для $h = 0.25H_p$. Напряженность магнитного поля выражена в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, а амплитуды гармоник намагниченности в единицах M_0 .



Р и с у н о к 3.5

Зависимости действительной M_1' (кривая 1), мнимой M_1'' (кривая 2) частей и модуля M_1 (кривая 3) первой гармоники намагниченности от постоянного поля H_0 для $h = H_p$. Напряженность магнитного поля выражена в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, а амплитуды гармоник намагниченности в единицах M_0 .



Р и с у н о к 3.6

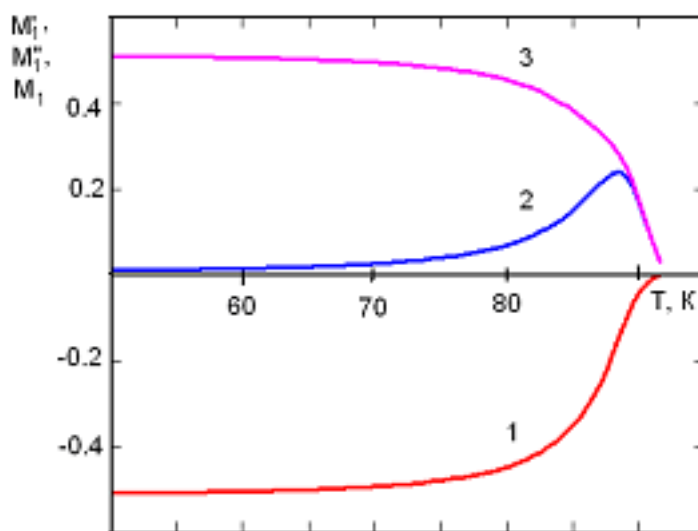
Зависимости действительной M_3' (кривая 1), мнимой M_3'' (кривая 2) частей и модуля M_3 (кривая 3) третьей гармоники намагниченности от постоянного поля H_0 для $h = H_p$. Напряженность магнитного поля выражена в единицах $H_p = (\gamma b)^{1/3}$, а амплитуды гармоник намагниченности в единицах M_0 .

4. Температурные зависимости гармоник намагниченности

Температурные зависимости гармоник намагниченности определяются температурной зависимостью единственного параметра γ уравнения (2.1) т.е. $\gamma(T)$. Данная зависимость определяется температурной зависимостью критической плотности тока $J_c(T) \propto \gamma(T)$ (см. раздел 2). Была выбрана следующая хорошо известная температурная зависимость:

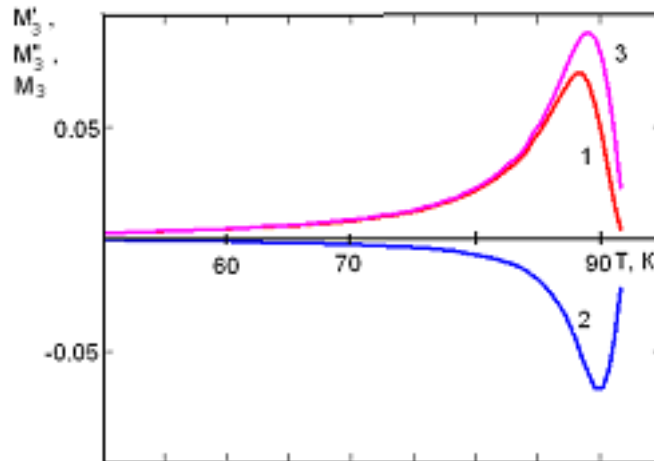
$$\gamma(T) = \gamma_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]^2. \quad (4.1)$$

Для удобства сравнения с экспериментом критическая температура T_c была выбрана равной 92 K , т.к. эта температура является критической для широко распространенного ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$. Результаты расчета приведены на рисунках 4.1 – 4.3. Из рисунков видно, что мнимая часть первой гармоники и высшие гармоники намагниченности имеют максимум вблизи T_c . Данный максимум, как показывают расчеты, с ростом амплитуды модуляции h уширяется и смещается в область низких температур. Максимум обусловлен конкуренцией следующих процессов: уменьшением J_c с ростом температуры, что приводит к большему объему сверхпроводника занятому сверхтоком, росту намагниченности и росту потерь на перемагничивание (2.14). Показатели степени в формуле (4.1) качественно не влияют на температурные зависимости гармоник.



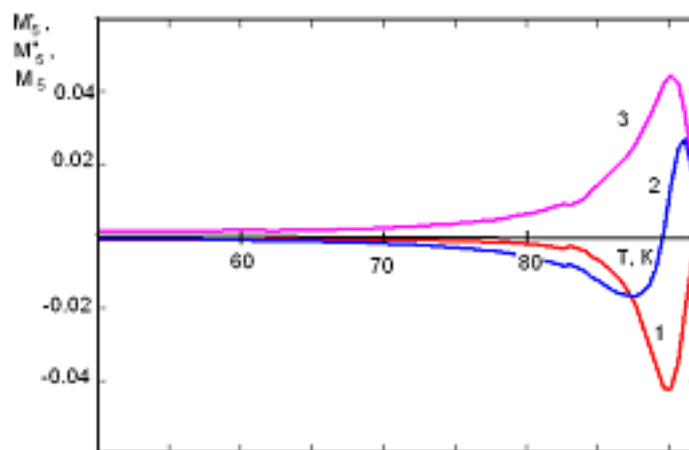
Р и с у н о к 4.1

Температурные зависимости амплитуд первой гармоники намагниченности (M_1' - 1, M_1'' - 2 и M_1 - 3) для $h = 0.25H_p$ ($H_0 = 0$). Амплитуды гармоник намагниченности выражены в единицах M_0 .



Р и с у н о к 4.2

Температурные зависимости амплитуд третьей гармоники намагниченности (M'_3 - 1, M''_3 - 2 и M_3 - 3) для $h = 0.25H_p$ ($H_0 = 0$). Амплитуды гармоник намагниченности выражены в единицах M_0 .



Р и с у н о к 4.3

Температурные зависимости амплитуд пятой гармоники намагниченности (M'_5 - 1, M''_5 - 2 и M_5 - 3) для $h = 0.25H_p$ ($H_0 = 0$). Амплитуды гармоник намагниченности выражены в единицах M_0 .

5. Обсуждение

Полученные результаты качественно совпадают с результатами экспериментальной работы [11] в которой исследовались гармоники намагниченности поликристаллических дисков в слабых магнитных полях. Количественное сравнение данных настоящей работы и вышеприведенной работы приводят к следующему значению γ для поликристалла $YBa_2Cu_3O_{7-x}$: $\gamma \sim 1.1 \cdot 10^{15} \text{ A}^3/\text{m}^4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bean C.P., "Magnetization of hard superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, 1962, № 8, 250-251.
2. Kim Y.B., Heampstead C.F., Strnad A.R., "Critical persistent currents in hard superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, 1962, № 9, 306-309.
3. Кузьмичев Н.Д., "Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников", *ЖТФ*, 1994, № 12, 63-74.
4. Brandt E.H., "Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves", *Phys. Rev. B.*, 1998, № 58, 6506-6522.
5. Brandt E.H., "Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. II. Nonlinear and linear ac susceptibilities", *Phys. Rev. B.*, 1998, № 58, 6523-6533.
6. Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В., "Гармоники намагниченности текстурированных поликристаллов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ выше температуры перехода в сверхпроводящее состояние", *ФТТ*, 2007, № 49, 1549-1553.
7. Lam Q.H., "Nonlinear electrodynamics in granular $YBa_2Cu_3O_{7-x}$: Measurements and models of complex permeability", *Phys. Rev. B.*, 1990, № 42, 4846-4849.
8. Кузьмичев Н.Д., Федченко А.А., "Математическое моделирование нелинейного отклика короткого цилиндра из жесткого сверхпроводника", *ИзВУЗ. Поволжский регион*, 2011, № 3, 110-119.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
10. Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В., "Генерация гармоник поликристаллическими $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в сильных переменных магнитных полях", *Письма в ЖТФ*, 1992, № 8, 11-15.
11. Головашкин А.И., Кузьмичев Н.Д., Левченко И.С., Мотулевич Г.П., Славкин В.В., "Зависимость напряжения гармоник сигнала отклика керамических образцов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ от величины постоянного магнитного поля в зависимости от глубины модуляции поля", *Препринт. ФИАН*, 1990, № 163, 11-15.

Mathematical modeling of the magnetic response of thin superconducting disc according to critical state model with a critical current density with inverse-square dependance of field magnitude.

© N. D. Kuzmichev ⁴, M. V. Chugunov ⁵, A. A. Fedchenko ⁶

Abstract. In this work carry out mathematical modeling of magnetization harmonics of hard superconductors two type for thin disk. According to critical state model with $J_c \sim \gamma/H^2$ in approximation of magnetic field screening in the disk center has calculated hysteretic magnetization curves and magnetic field and temperature dependencies magnetization harmonics. Quality influence of magnitude of ac magnetic field amplitude was found on harmonic magnetization. The results this work was compared with experimental results for polycrystals of high-temperature superconductors. The parameter of model γ was estimated.

Key Words: high-temperature superconductor, II-type hard superconductor, critical state, thin disk, critical current density, hysteretic loop of magnetization, harmonics magnetization.

⁴ Head of sub-department of general scientific disciplines, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kuzmichevnd@yandex.ru.

⁵ Head of sub-department of general technical disciplines, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; m.v.chugunov@mail.ru.

⁶ Senior lecturer of sub-department of general education and professional disciplines, Samara State University of Railways, Samara; starlightalex@gmail.com.

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 533.6.013.42

Исследование динамической устойчивости защитного экрана при сверхзвуковом обтекании потоком газа

© А. В. Анкилов¹, П. А. Вельмисов², В. А. Судаков³

Аннотация. Исследуется устойчивость решения начально-краевой задачи для связанной системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей динамику упругой стенки (защитного экрана) резервуара, заполненного жидкостью, при взаимодействии стенки со сверхзвуковым потоком газа. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. На основе построения смешанного функционала типа Ляпунова получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на скорость потока, изгибную жесткость стенки и другие параметры механической системы.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, динамика, упругая пластина, деформация, сверхзвуковой поток газа, жидкость, дифференциальные уравнения с частными производными, функционал, устойчивость по Ляпунову

1. Введение

При проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием динамики и устойчивости упругих элементов, требуемой для их качественного функционирования и надёжности эксплуатации [2] - [21]. Воздействие потока может приводить к эффектам, являющимся причиной нарушения функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводить к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или ускорения колебаний до критически допустимых значений). Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов: элерона – составной части крыла; руля высоты – составной части стабилизатора, руля направления – составной части киля; панели – составной части фюзеляжа или крыла [2], [5], [6], [8], [9], [12], [13], [14], [17]. Аналогичная проблема возникает при исследовании течений в проточных каналах, трубопроводах различного назначения, содержащих упругие элементы [7], [10], [11], [14], [15], [18].

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся

¹ Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

² Заведующий кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

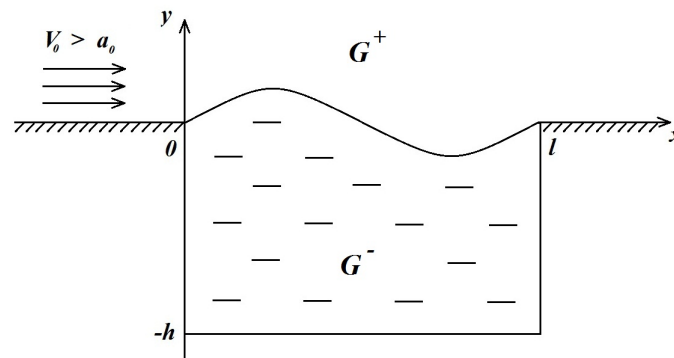
³ Аспирант кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; sseevva@inbox.ru.

к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности, устройства для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например [20]). Другим примером, когда деформация упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии необходима для функционирования приборов и является основой их работы, являются датчики давления [3], [4], [16], [19].

В работе исследуется динамическая устойчивость упругой стенки (защитного экрана) резервуара, заполненного жидкостью, при обтекании стенки сверхзвуковым потоком газа. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Исследование проводится в линейной постановке. На основе построения функционала для связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций – прогиба (деформации) упругой стенки резервуара и потенциала скорости жидкости, заполняющей резервуар, получены условия устойчивости решения этой системы, и, тем самым, условия динамической устойчивости упругой стенки.

2. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача о динамике упругой стенки резервуара $G^- = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < l, -h < y < 0\}$, заполненного жидкостью. Упругой является стенка, занимающая положение $y = 0, 0 < x < l$ и моделируемая упругой пластиной. Остальные стенки ($x = 0, x = l$ и $y = -h$) считаются недеформируемыми (рис. 2.1). В области $G^+ = \{(x, y) \in R^2 : x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, +\infty)\}$ протекает сверхзвуковой поток газа в направлении оси Ox со скоростью $V_0 > a_0$, где a_0 – скорость звука. Предполагается, что число Маха $M_0 = \frac{V_0}{a_0} > \sqrt{2}$.



Р и с у н о к 2.1

Резервуар с деформируемой стенкой, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа

Введем обозначения: $w(x, t)$ – функция деформации (прогиб) пластины; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости жидкости в области G^- . Математическая постановка задачи:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G^-; \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, -h, t) = 0, \quad \varphi_y(x, 0, t) = w_t(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \geq 0; \quad (2.2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad \varphi_x(l, y, t) = 0, \quad y \in (-h, 0), \quad t \geq 0; \quad (2.3)$$

$$mw_{tt}(x, t) + Dw_{xxxx}(x, t) =$$

$$= (p^- - \rho^- \varphi_t(x, 0, t)) - p^+ - \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right); \quad (2.4)$$

$$w(0, t) = w_{xx}(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(l, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad (2.5)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad w_t(x, 0) = f_2(x), \quad x \in (0, l). \quad (2.6)$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y и t ; D и m – изгибная жесткость и погонная масса пластины; V_0, ρ^+, p^+ – скорость газа, плотность и давление в набегающем однородном потоке в области G^+ ; ρ^-, p^- – плотность и давление жидкости в области G^- в состоянии покоя. Слагаемое

$$-p^+ - \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right) \quad (2.7)$$

в уравнении (2.4) описывает воздействие на пластину сверхзвукового потока газа [1]. Уравнение (2.1) описывает динамику жидкости в области G^- в модели идеальной несжимаемой среды; (2.2) - (2.3) – условия непротекания; (2.4) – уравнение, описывающее динамику упругой стенки резервуара с учетом аэрогидродинамического воздействия на неё; условия (2.5) соответствуют шарнирному закреплению концов упругого элемента резервуара; (2.6) – начальные условия.

Уравнения и условия (2.1) - (2.6) образуют начально-краевую задачу для определения двух неизвестных функций $w(x, t)$ и $\varphi(x, y, t)$.

3. Исследование устойчивости

Так как система (2.1) - (2.5) линейная, то достаточно исследовать устойчивость нулевого решения соответствующей однородной системы. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.4), имеет вид:

$$m w_{tt}(x, t) + D w_{xxxx}(x, t) = -\rho^- \varphi_t(x, 0, t) - \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right). \quad (3.1)$$

Получим достаточные условия устойчивости по Ляпунову нулевого решения краевой задачи (2.1) - (2.3), (2.5), (3.1) по отношению к возмущениям начальных условий (2.6). Введем функционал

$$J(t) = \int_0^l (m w_t^2 + D w_{xx}^2 + 2m\theta w w_t + \alpha k \theta w^2 + 2\rho^- \theta w \varphi(x, 0, t)) dx + \rho^- \iint_{G^-} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy, \quad (3.2)$$

где введены обозначения $\alpha = \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}}$, $k = \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1}$, а $\theta > 0$ – некоторый положительный параметр, определяемый в ходе решения задачи.

Найдем производную от J по t

$$J_t(t) = 2 \int_0^l (m w_t w_{tt} + D w_{xx} w_{txx} + m\theta w_t^2 + m\theta w w_{tt} + \alpha k \theta w w_t + \\ + \rho^- \theta w_t \varphi(x, 0, t) + \rho^- \theta w \varphi_t(x, 0, t)) dx + 2\rho^- \iint_{G^-} (\varphi_x \varphi_{xt} + \varphi_y \varphi_{yt}) dx dy. \quad (3.3)$$

Учитывая уравнение (2.1) и условия (2.2) - (2.3), получим

$$\iint_{G^-} (\varphi_x \varphi_{xt} + \varphi_y \varphi_{yt}) dx dy = \int_{-h}^0 dy \int_0^l \varphi_x \varphi_{xt} dx + \int_0^l dx \int_{-h}^0 \varphi_y \varphi_{yt} dy = \int_0^l w_t \varphi_t(x, 0, t) dx. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.1) и (3.4) в (3.3), находим

$$\begin{aligned} J_t(t) = & 2 \int_0^l (w_t (-Dw_{xxxx} - \rho^- \varphi_t(x, 0, t) - \alpha V_0 w_x - \alpha k w_t) + Dw_{xx} w_{txx} + \\ & + m\theta w_t^2 + \theta w (-Dw_{xxxx} - \rho^- \varphi_t(x, 0, t) - \alpha V_0 w_x - \alpha k w_t) + \alpha k \theta w w_t + \\ & + \rho^- \theta w_t \varphi(x, 0, t) + \rho^- \theta w \varphi_t(x, 0, t) + \rho^- w_t \varphi_t(x, 0, t)) dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Произведем интегрирование с учетом условия (2.5)

$$\int_0^l w_{xxxx} w_t dx = \int_0^l w_{xx} w_{txx} dx, \quad \int_0^l w w_{xxxx} dx = \int_0^l w_{xx}^2 dx, \quad \int_0^l w w_x dx = 0. \quad (3.6)$$

Умножим уравнение (2.1) на $\varphi(x, y, t)$ и проинтегрируем по области G^-

$$\iint_{G^-} \varphi (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) dx dy = \int_0^l \varphi(x, 0, t) w_t dx - \iint_{G^-} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy = 0. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что

$$\int_0^l \varphi(x, 0, t) w_t dx = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy. \quad (3.8)$$

Учитывая (3.6) - (3.8), согласно (3.5) получим

$$\begin{aligned} J_t(t) = & -2 \int_0^l (\alpha V_0 w_t w_x + (\alpha k - m\theta) w_t^2 + \\ & + D\theta w_{xx}^2 - (\rho^- \theta + \gamma) w_t \varphi(x, 0, t)) dx - 2\gamma \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\gamma > 0$ - некоторый положительный параметр.

Проведем оценки интегралов с учетом граничных условий (2.3), (2.5). Согласно неравенству Рэля [22] имеем

$$\int_0^l w_{xx}^2 dx \geq \lambda_1 \int_0^l w_x^2 dx, \quad (3.10)$$

где $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$ - наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi_{xxxx} = -\lambda \psi_{xx}$, $x \in [0, l]$ с условиями, соответствующими (2.5);

$$\iint_G \varphi_x^2 dx dy \geq \eta_1 \iint_G \varphi^2 dx dy, \quad (3.11)$$

где $\eta_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$ – наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi_{xx} = -\eta\psi$, $x \in (0, l)$, с условиями, соответствующими (2.3). Рассмотренные краевые задачи являются самосопряженными и полностью определенными.

Согласно неравенству Коши-Буняковского, имеем

$$\left(\int_y^0 \varphi_y dy \right)^2 \leq \int_y^0 1^2 dy \int_y^0 \varphi_y^2 dy.$$

Следовательно,

$$(\varphi(x, 0, t) - \varphi(x, y, t))^2 \leq -y \int_{-h}^0 \varphi_y^2 dy. \quad (3.12)$$

Проинтегрируем (3.12) по области G^-

$$\iint_{G^-} (\varphi(x, 0, t) - \varphi(x, y, t))^2 dx dy \leq \iint_{G^-} \left(-y \int_{-h}^0 \varphi_y^2 dy \right) dx dy = \frac{h^2}{2} \iint_{G^-} \varphi_y^2 dx dy. \quad (3.13)$$

С учетом неравенств (3.10), (3.11), (3.13) согласно (3.9) получим для J_t следующую оценку

$$\begin{aligned} J_t(t) \leq & -2 \iint_G \left(\frac{1}{h} \left(\alpha V_0 w_t w_x + (\alpha k - m\theta) w_t^2 + \frac{D\theta\pi^2}{l^2} w_x^2 - (\rho^- \theta + \gamma) w_t \varphi(x, 0, t) \right) + \right. \\ & \left. + \gamma \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{2}{h^2} \right) \varphi^2(x, y, t) - \frac{4\gamma}{h^2} \varphi(x, 0, t) \varphi(x, y, t) + \frac{2\gamma}{h^2} \varphi^2(x, 0, t) \right) dx dy. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Рассмотрим в (3.14) квадратичную форму относительно $w_t, w_x, \varphi(x, 0, t), \varphi(x, y, t)$, матрица которой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha k - m\theta}{h} & \frac{\alpha V_0}{\alpha V_0} & -\frac{\rho^- \theta + \gamma}{2h} & 0 \\ \frac{2h}{\alpha V_0} & \frac{D\theta\pi^2}{hl^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\rho^- \theta + \gamma}{2h} & 0 & \frac{2\gamma}{h^2} & -\frac{2\gamma}{h^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2\gamma}{h^2} & \gamma \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{2}{h^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Согласно критерию Сильвестра, запишем условия неотрицательности этой квадратичной формы

$$\Delta_1 > 0 \Rightarrow \alpha k - m\theta > 0, \quad (3.16)$$

$$\Delta_2 > 0 \Rightarrow 4D\theta\pi^2(\alpha k - m\theta) - \alpha^2 V_0^2 l^2 > 0, \quad (3.17)$$

$$\Delta_3 > 0 \Rightarrow 2\gamma(4D\theta\pi^2(\alpha k - m\theta) - \alpha^2 V_0^2 l^2) - (\rho^- \theta + \gamma)^2 D\theta\pi^2 h > 0, \quad (3.18)$$

$$\Delta_4 \geq 0 \Rightarrow \frac{\pi^2}{l^2} [2\gamma(4D\theta\pi^2(\alpha k - m\theta) - \alpha^2 V_0^2 l^2) - (\rho^- \theta + \gamma)^2 D\theta\pi^2 h] - \frac{2}{h^2} (\rho^- \theta + \gamma)^2 D\theta\pi^2 h \geq 0, \quad (3.19)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ – угловые миноры матрицы (3.15). При этом из (3.19) следует выполнение неравенств (3.16) – (3.18). Рассмотрим в (3.19) случай равенства и найдем параметр $\gamma > 0$:

$$(\pi^2 h^2 + 2l^2)D\theta\gamma^2 - (8D\theta\pi^2 h(\alpha k - m\theta) - 2\alpha^2 V_0^2 l^2 h - 2(\pi^2 h^2 + 2l^2)D\rho^-\theta^2)\gamma + 4(\pi^2 h^2 + 2l^2)D^2(\rho^-)^2\theta^3 = 0. \quad (3.20)$$

Пусть корень квадратного уравнения (3.20) $\gamma > 0$. Тогда должны выполняться следующие неравенства

$$8D\theta\pi^2 h(\alpha k - m\theta) - 2\alpha^2 V_0^2 l^2 h - 2(\pi^2 h^2 + 2l^2)D\rho\theta^2 > 0, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{D} = (8D\theta\pi^2 h(\alpha k - m\theta) - 2\alpha^2 V_0^2 l^2 h - 2(\pi^2 h^2 + 2l^2)D\rho\theta^2)^2 - 4(\pi^2 h^2 + 2l^2)D^2\rho^2\theta^3 \geq 0, \quad (3.22)$$

где \mathbf{D} – дискриминант уравнения (3.20). Параметр γ определяется следующим равенством

$$\gamma = \frac{8D\theta\pi^2 h(\alpha k - m\theta) - 2\alpha^2 V_0^2 l^2 h - 2(\pi^2 h^2 + 2l^2)D\rho\theta^2 + \sqrt{\mathbf{D}}}{(\pi^2 h^2 + 2l^2)2D\theta}. \quad (3.23)$$

Таким образом, при выполнении условий (3.21), (3.22) из (3.14) получим

$$J_t(t) \leq 0 \Rightarrow J(t) \leq J(0) \quad (3.24)$$

Рассмотрим краевую задачу $\psi_{xxxx} = \eta\psi$, $x \in [0, l]$ с краевыми условиями (2.5). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Согласно неравенству Рэлея [22], имеем

$$\int_0^l w_{xx}^2 dx \geq \eta_1 \int_0^l w^2 dx, \quad (3.25)$$

где $\eta_1 = \frac{\pi^4}{l^4}$ – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи.

Оценим $J(t)$, используя неравенство (3.25), (3.11) и (3.13)

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_0^l (mw_t^2 + D(1 - \chi)w_{xx}^2 + D\chi w_{xx}^2 + 2m\theta w w_t + \alpha k\theta w^2 + 2\rho^-\theta w\varphi(x, 0, t)) dx + \\ &+ \rho^-\iint_{G^-} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy \geq \iint_{G^-} \left(\frac{1}{h} \left(mw_t^2 + \left(D\chi \frac{\pi^4}{l^4} + \alpha k\theta \right) w^2 + 2m\theta w w_t + 2\rho^-\theta w\varphi(x, 0, t) \right) + \right. \\ &\left. + \rho^-\left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{2}{h^2} \right) \varphi^2(x, y, t) - \frac{4\rho^-}{h^2} \varphi(x, 0, t)\varphi(x, y, t) + \frac{2\rho^-}{h^2} \varphi^2(x, 0, t) dx dy \right) + \\ &\quad + \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} D(1 - \chi)w_x^2 dx, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $\chi \in (0, 1)$.

В (3.26) имеем квадратичную форму относительно $w_t, w, \varphi(x, 0, t), \varphi(x, y, t)$, матрица которой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{h} & \frac{m\theta}{h} & 0 & 0 \\ \frac{m\theta}{h} & \frac{D\chi\pi^4}{hl^4} + \frac{\alpha k\theta}{h} & \frac{\rho^-\theta}{h} & 0 \\ 0 & \frac{\rho^-\theta}{h} & \frac{2\rho^-}{h^2} & -\frac{2\rho^-}{h^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2\rho^-}{h^2} & \frac{\rho^-\pi^2}{l^2} + \frac{2\rho^-}{h^2} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Согласно критерию Сильвестра, запишем условия неотрицательности этой квадратичной формы

$$\Delta_1 > 0 \Rightarrow \frac{m}{h} > 0, \quad (3.28)$$

$$\Delta_2 > 0 \Rightarrow \frac{D\pi^4}{l^4} + \alpha k\theta - m\theta^2 > 0, \quad (3.29)$$

$$\Delta_3 > 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{D\pi^4}{hl^4} + \alpha k\theta - m\theta^2 \right) - \rho^- h\theta^2 > 0, \quad (3.30)$$

$$\Delta_4 > 0 \Rightarrow \pi^2 h \left(2 \left(\frac{D\pi^4 \chi}{l^4} + \alpha k\theta - m\theta^2 \right) - \rho^- h\theta^2 \right) - 2\rho^- \theta^2 l^2 \geq 0, \quad (3.31)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ – угловые миноры матрицы (3.27). При этом из (3.31) следует выполнение неравенств (3.28) – (3.30). Рассмотрим в (3.31) случай равенства и найдем из него параметр χ :

$$\chi = \frac{(2\rho^- \theta^2 l^2 + \rho^- h^2 \theta^2 \pi^2 - 2\alpha k\theta + 2m\theta^2)l^4}{D\pi^4} \in (0, 1). \quad (3.32)$$

Таким образом, при выполнении условия (3.32) из (3.26) получим

$$J(t) \geq \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} D(1 - \chi)w_x^2 dx. \quad (3.33)$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского имеем

$$\int_0^l w_x^2 dx \geq \frac{1}{l} w^2(x, t). \quad (3.34)$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{l^3} D(1 - \chi)w^2(x, t) \leq J(0) = \int_0^l (mw_t^2(x, 0) + Dw_{xx}^2(x, 0) + 2m\theta w(x, 0)w_t(x, 0) + \\ + \alpha k\theta w^2(x, 0) + 2\rho^- \theta w(x, 0)\varphi(x, 0, 0))dx + \rho^- \iint_{G^-} (\varphi_x^2(x, y, 0) + \varphi_y^2(x, y, 0))dxdy, \quad (3.35) \end{aligned}$$

откуда следует

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполняются условия (3.21), (3.22) и (3.32). Тогда решение $w(x, t)$ системы (2.1) – (2.4) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $w(x, 0), w_t(x, 0), \varphi(x, 0, 0), \varphi_x(x, y, 0), \varphi_y(x, y, 0)$, если $w(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям (2.5).

Условия (3.21), (3.22) и (3.32) накладывают ограничения на скорость набегающего потока V_0 , изгибную жесткость пластины D и другие параметры механической системы.

Приведем примеры значений параметров, которым соответствует устойчивые и неустойчивые деформации упругой стенки резервуара при обтекании сверхзвуковым потоком газа. Будем считать, что упругий элемент ($E = 7 * 10^{12}$ – модуль упругости, $\rho_{pl} = 2699$ – плотность, $h_{pl} = 0.1$ – толщина) обтекается сверхзвуковым потоком воздуха

($\rho^+ = 1.3$), при этом резервуар заполнен водой ($\rho^- = 998.2$). Другие параметры механической системы: $l = 1$; $h = 1$; $m = 269.9$ (погонная масса); $\nu = 0.34$ (коэффициент Пуассона); $D = \frac{Eh_{pl}^3}{12(1-\nu^2)} = 6.5958 \cdot 10^8$ (изгибная жесткость). Все значения приведены в системе СИ. В таблице θ_1 – одно из допустимых решений системы неравенств (3.21), (3.22)

Таблица 1: Расчетные значения параметров

V	θ_1	γ_1	χ_1
490	0.06919	91.287501	$6.81334 \cdot 10^{-10}$
1000	0.16909	$1.0026793 \cdot 10^3$	$3.17033 \cdot 10^{-9}$
1500	0.19619	$9.0953294 \cdot 10^2$	$4.54533 \cdot 10^{-9}$
2000	0.22696	$7.5318142 \cdot 10^2$	$6.50794 \cdot 10^{-9}$
2500	0.26492	$5.8339841 \cdot 10^2$	$9.43254 \cdot 10^{-9}$
3000	0.31077	$4.1587400 \cdot 10^2$	$1.36823 \cdot 10^{-8}$
3400	1.30290	-99.84876	$2.95824 \cdot 10^{-7}$
4000	1.06029	-1.046242	$1.93260 \cdot 10^{-7}$

и (3.32); γ_1 определяется выражением (3.23), а χ_1 находится из (3.32). Приведенный пример соответствует случаю, когда устойчивость наблюдается при скоростях набегающего потока в полуинтервале $[490, 3000)$, данный факт обусловлен тем, что параметр γ_1 при скоростях выше 3000 становится отрицательным, нарушается условие (3.23). Таким образом, при скоростях выше, чем $V = 3000$, определенного вывода об устойчивости сделать нельзя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Voss H. V., "The effect of an external supersonic flow on the vibration characteristics of thin cylindrical shells", *J. Aerospace Sciences*, **3** (1961), 945–956.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В., *Математическое моделирование механической системы "трубопровод-датчик давления"*, УлГТУ, Ульяновск, 2008, 188 с.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., "Математическое моделирование механической системы "трубопровод-датчик давления"", *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **3(27)** (2007), 7–14.
5. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., "Численно-аналитическое исследование динамической устойчивости упругой пластины при аэрогидродинамическом воздействии", *Прикладная математика и механика: сборник научных трудов*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 3–22.
6. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Дегтярева Н. А., "Устойчивость упругих элементов крылового профиля", *Прикладная математика и механика: сборник научных трудов*, УлГТУ, Ульяновск, 2007, 9–18.

7. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Об устойчивости решений уравнений взаимодействия упругих стенок каналов с протекающей жидкостью”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **1(22)** (2011), 179–185.
8. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Семенова Е. П., “О решениях интегро-дифференциальных уравнений в задаче динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **2(23)** (2011), 266–271.
9. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Математическое моделирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **1(37)** (2009), 7–16.
10. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Семенова Е. П., “Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **2(38)** (2009), 7–17.
11. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Казакова Ю. А., “Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **1(30)** (2013), 1–7.
12. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Устойчивость решений некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных”, *Вестник Самарского государственного университета, естественнонаучная серия*, **8/1(67)** (2008), 331–344.
13. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкций при сверхзвуковом обтекании”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **3(57)** (2011), 59–67.
14. Вельмисов П. А., Киреев С. В., *Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2011, 200 с.
15. Вельмисов П. А., Решетников Ю. Е., Колмановский Е. Е., “Устойчивость уравнений взаимодействия вязкоупругих пластин с жидкостью”, *Дифференциальные уравнения*, **11(30)** (2011), 1966–1981.
16. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А., “Математическое моделирование механической системы “трубопровод-датчик давления””, *Датчики и системы*, **6(49)** (2003), 12–15.
17. Вельмисов П. А., Судаков В. А., Замальдинова Ю. К., “Устойчивость решений одного класса нелинейных начально-краевых задач аэроупругости”, *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тезисы докладов Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцев*, РУДН, Москва, 2013, 290–292.
18. Вельмисов П. А., Молгачев А. А., *Математическое моделирование в задаче динамической устойчивости вязкоупругих элементов проточных каналов*, УлГТУ, Ульяновск, 2012, 185 с.

19. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., “О некоторых математических моделях механической системы "трубопровод-датчик давления"”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки*, **1(29)** (2011), 137–144.
20. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К., *Пат.2062662 РФ, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель*, Заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – №5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл.№18..
21. Бочкарев С. А., Матвеев В. П., “Решение о панельном флаттере оболочечных конструкций методом конечных элементов”, *Математическое моделирование*, **12** (2002), 55–71.
22. Коллатц А., *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 504 с.

Stability of the problem on the protective shield in the supersonic air flow.

© A. V. Ankilov⁴, P. A. Velmisov⁵, V. A. Sudakov⁶

Abstract. The stability of solutions of initial-boundary value problem for the related system of differential equations describing the dynamics of the elastic wall of the container filled with gas (liquid), and its interaction with a supersonic flow of gas (liquid). Definition of stability of the elastic body corresponds to the concept of dynamical systems, Lyapunov. We obtain sufficient conditions for stability, imposing limits on flow rate, the flexural rigidity of the elastic walls and other parameters of the mechanical system.

Key Words: aerohydroelasticity, dynamic, elastic plate, deformation, the supersonic flow of gas, liquid, differential equations with partial derivatives, the functional stability of the Lyapunov

⁴ Assistant professor of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; ankil@ulstu.ru.

⁵ Head of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; velmisov@ulstu.ru.

⁶ Post-graduate student of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; sseevva@inbox.ru.

УДК 62-50

Управляемые движения сферического робота на наклонной плоскости

© Д. В. Баландин¹, М. Ю. Скучилин²

Аннотация. Работа посвящена разработке управления движением по наклонной плоскости сферического робота с маятниковым приводом. Построена математическая модель движения робота, в полученной системе дифференциальных уравнений осуществлен переход к безразмерным переменным и параметрам. Рассмотрены задачи управления роботом как в случае совпадения его начального положения с начальной точкой заданной траектории, так и в случае, когда подобного не наблюдается. Построено управление, обеспечивающее движение центра робота вдоль заданной траектории в первом случае и асимптотическое его приближение к траектории во втором.

Ключевые слова: теория управления, сферический робот, обратная связь по состоянию

1. Введение

Сферический робот представляет собой сферическую оболочку с находящимся внутри некоторым управляющим механизмом. Согласно [1], первые попытки построения и исследований сферических роботов относятся к концу XIX века. Первые роботы представляли собой просто сферу с находящейся внутри пружиной, способные двигаться только в заданном направлении. В дальнейшем механизм был значительно усовершенствован, но идея, положенная в его основу – движение сферы за счет изменения положения центра масс – используется до сих пор. Этот принцип имеет две основные реализации: использование некоторого внутреннего двигательного элемента [1], [2] и использование маятника. Кроме того, есть и другие способы приведения робота в движение, например, деформация оболочки, когда робот внешне представляет собой некое подобие футбольного мяча, а движение осуществляется деформацией отдельных секций.

В работе [4] рассмотрен случай движения робота по горизонтальной плоскости. В этой работе построена математическая модель сферического робота с маятниковым приводом на горизонтальной плоскости в виде системы дифференциальных уравнений. Рассматриваются различные случаи движения робота как в отсутствие скольжения между сферической оболочкой и горизонтальной плоскостью, так и с учетом скольжения.

В данной статье рассматривается математическая модель управляемых движений на плоскости сферического маятника с маятниковым приводом.

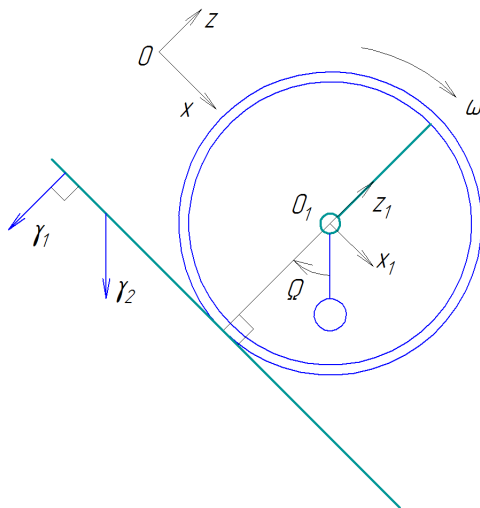
2. Описание динамики сферического робота с маятниковым приводом, перемещающегося по наклонной поверхности

Упрощенная схема робота представлена на рисунке 2.1. Робот представляет собой сферическую оболочку и маятник, закрепленный в центре оболочки. Трением в шарнире, к которому крепится маятник, в дальнейшем пренебрежем. Оболочка имеет массу M и

¹ Заведующий кафедрой численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; dbalandin@yandex.ru

² Аспирант кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; maxingerts@gmail.com

радиус r . Момент инерции оболочки относительно любой оси, проходящей через центр оболочки, равен J . Маятник состоит из шара массы m и стержня, массу которого считаем пренебрежимо малой. Расстояние от геометрического центра внешней оболочки до центра масс центра прикрепленного к другому концу шара обозначим l . Момент инерции шара маятника относительно любой оси равен j_0 . Внутри сферического робота расположен двигатель, придающий момент \mathbf{Q} маятнику.



Р и с у н о к 2.1

Сечение сферического робота на наклонной плоскости

Введем две системы координат. Первая система — неподвижная прямоугольная система координат $Oxyz$, жестко связанная с опорной поверхностью (на рисунке показано сечение робота плоскостью Oxz). Плоскость Oxy расположена параллельно опорной поверхности, центр системы координат O расположен на плоскости, проходящей через геометрический центр робота, ось Oz направлена вертикально вверх. Вторая система координат — подвижная прямоугольная система координат $O_1x_1y_1z_1$, центр O_1 которой жестко связан с геометрическим центром сферической оболочки робота. Оси системы координат $O_1x_1y_1z_1$ параллельны осям неподвижной системы координат $Oxyz$.

Введем два единичных вектора: $\gamma_1 = (0, 0, -1)$ — нормаль к поверхности и $\gamma_2 = (\gamma_{2x}, \gamma_{2y}, \gamma_{2z})$ — нормированный вектор направления силы тяжести. Оба вектора заданы в координатах неподвижной системы координат $Oxyz$, жестко связанной с опорной поверхностью. При этом сферическая оболочка движется следующим образом

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi} &= \mathbf{R} - N\gamma_1 + Mg\gamma_2 + \mathbf{P}, \\ J\dot{\omega} &= -\mathbf{Q} + r[\gamma_1, \mathbf{P}]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Движение маятника описывается уравнениями

$$\begin{aligned} m(\ddot{\xi} + l\ddot{e}) &= -\mathbf{R} + mg\gamma_2, \\ ml^2[\mathbf{e}, \ddot{e}] + j_0\dot{\Omega} &= \mathbf{Q} - ml[\mathbf{e}, \ddot{\xi}] + mgl[\mathbf{e}, \gamma_2]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Исключая из первого уравнения (2.1) и из первого уравнения (2.2) силу реакции R , получим

$$M\ddot{\xi} + N\gamma_1 - Mg\gamma_2 - \mathbf{P} = mg\gamma_2 - m(\ddot{\xi} + l\ddot{e}). \quad (2.3)$$

Таким образом, движение системы сфера-маятник описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{\xi} + ml\ddot{e} &= -N\gamma_1 + (M + m)g\gamma_2 + \mathbf{P}, \\ J\dot{\omega} &= -\mathbf{Q} + r[\gamma_1, \mathbf{P}], \\ ml^2[\mathbf{e}, \ddot{e}] + j_0\dot{\Omega} &= -\mathbf{Q} - ml[\mathbf{e}, \ddot{\xi}] + mgl[\mathbf{e}, \gamma_2], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где единичный вектор \mathbf{e} удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{\Omega}, \mathbf{e}]. \quad (2.5)$$

Фигурирующий в системе (2.4) вектор $\ddot{\mathbf{e}}$ можно выразить следующим образом

$$\ddot{\mathbf{e}} = \frac{d}{dt}[\mathbf{\Omega}, \mathbf{e}] = [\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{e}] + [\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{e}}] = [\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{e}] + [\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{e}]] \quad (2.6)$$

Найдем выражение для величины силы реакции опорной плоскости. Для этого первое уравнение (2.4) домножим скалярно на γ_1 . В результате получим

$$-(M + m)\ddot{z} - ml\ddot{e}_z = -N - (M + m)g\gamma_2z. \quad (2.7)$$

При безотрывном движении по опорной плоскости в выбранной системе координат $z = 0$, поэтому в выражении (2.7) имеем $\ddot{z} = 0$. Выразим силу реакции

$$N = -(M + m)g\gamma_2z + ml\ddot{e}_z. \quad (2.8)$$

Условием безотрывности движения робота по плоскости является неотрицательность величины силы реакции, то есть

$$-(M + m)g\gamma_2z + ml\ddot{e}_z \geq 0. \quad (2.9)$$

Мгновенная скорость точки контакта сферической оболочки с поверхностью

$$\mathbf{v}_c = \dot{\xi} + r[\omega, \gamma_1], \quad (2.10)$$

а сила трения при ненулевой скорости v_c определяется

$$\mathbf{P} = -kN \frac{\mathbf{v}_c}{|\mathbf{v}_c|}, \quad (2.11)$$

где k — коэффициент сухого трения.

В случае отсутствия скольжения, то есть при $\mathbf{v}_c = 0$

$$\dot{\xi} + r[\omega, \gamma_1] = 0. \quad (2.12)$$

Дифференцируя (2.12) по времени, имеем

$$\ddot{\xi} = -r[\dot{\omega}, \gamma_1]. \quad (2.13)$$

В этом случае, домножая первое уравнение (2.4) векторно слева на $r\gamma_1$ и используя (2.13), имеем

$$(M + m)r^2[\gamma_1, [\gamma_1, \dot{\omega}]] + mlr[\gamma_1, \ddot{\mathbf{e}}] = (M + m)gr[\gamma_1, \gamma_2] + r[\gamma_1, \mathbf{P}] \quad (2.14)$$

Складывая последнее выражение и второе уравнение (2.4), имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} + (M + m)r^2[\gamma_1, [\dot{\omega}, \gamma_1]] - mrl[\gamma_1, \ddot{\mathbf{e}}] + (M + m)gr[\gamma_1, \gamma_2] &= -\mathbf{Q}, \\ j_0\dot{\mathbf{\Omega}} - mrl[\mathbf{e}, [\dot{\omega}, \gamma_1]] + ml^2[\mathbf{e}, \ddot{\mathbf{e}}] &= \mathbf{Q} + mlg[\mathbf{e}, \gamma_2], \\ \dot{\mathbf{e}} &= [\mathbf{\Omega}, \mathbf{e}], \end{aligned} \quad (2.15)$$

которая определяет динамику сферического робота в отсутствие скольжения.

3. Уравнения динамики сферического робота в безразмерных переменных

Для удобства дальнейшего исследования осуществим переход к безразмерным координатам по формулам

$$t' = T^{-1}t, \quad \xi' = r^{-1}\xi, \quad \omega' = \Omega_0^{-1}\omega, \quad \Omega' = \Omega_0^{-1}\Omega. \quad (3.1)$$

Выразим фигурирующие в уравнениях производные в новых переменных

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{d\omega}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\Omega_0}{T} \frac{d\omega'}{dt'}, \\ \ddot{\xi} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi'}{dt'} \frac{dt'}{dt} \right) = \frac{d^2\xi'}{dt'^2} \left(\frac{dt'}{dt} \right)^2 = \frac{r}{T^2} \frac{d^2\xi'}{dt'^2}, \\ \dot{\Omega} &= \frac{d\Omega}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\Omega_0}{T} \frac{d\Omega'}{dt'}, \\ \dot{\mathbf{e}} &= \frac{d\mathbf{e}}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d\mathbf{e}}{dt'}, \\ \ddot{\mathbf{e}} &= \frac{d^2\mathbf{e}}{dt'^2} \left(\frac{dt'}{dt} \right)^2 = \frac{1}{T^2} \frac{d^2\mathbf{e}}{dt'^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Запишем теперь уравнения для рассматриваемой системы в случае возможного скольжения в точке контакта сферической оболочки и плоскости. Подставляя (3.2) в (2.4) и (2.5), получаем

$$\begin{aligned} J \frac{\Omega_0}{T} \frac{d\omega'}{dt'} &= -\mathbf{Q} + r[\gamma_1, \mathbf{P}], \\ (M + m) \frac{r}{T^2} \frac{d^2\xi'}{dt'^2} + ml \frac{1}{T^2} \frac{d^2\mathbf{e}}{dt'^2} &= -N\gamma_1 + (M + m)g\gamma_2 + \mathbf{P}, \\ ml^2 \frac{1}{T^2} [\mathbf{e}, \frac{d^2\mathbf{e}}{dt'^2}] + j_0 \frac{\Omega_0}{T} \frac{d\Omega'}{dt'} &= \mathbf{Q} - ml \frac{r}{T^2} [\mathbf{e}, \frac{d^2\xi'}{dt'^2}] + mgl[\mathbf{e}, \gamma_2], \\ \frac{1}{T} \frac{d\mathbf{e}}{dt'} &= \Omega_0[\Omega', \mathbf{e}]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В дальнейшем там, где это не вызывает недоразумений, штрихи будем опускать. В соотношении (3.3) положим $T = \Omega_0^{-1}$. После подстановки этого равенства в третье уравнение (3.3) и умножения его на $1/ml^2\Omega_0^2$ получаем

$$[\mathbf{e}, \ddot{\mathbf{e}}] + \frac{j_0}{ml^2} \dot{\Omega} = \frac{\mathbf{Q}}{ml^2\Omega_0^2} - \frac{r}{l} [\mathbf{e}, \ddot{\xi}] + \frac{g}{l\Omega_0^2} [\mathbf{e}, \gamma_2]. \quad (3.4)$$

Из этого равенства можно заметить, что удобно положить

$$\Omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad (3.5)$$

а также

$$\hat{j}_0 = \frac{j_0}{ml^2}, \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{Q}}{mr^2\Omega_0^2}, \quad \rho = \frac{r}{l}, \quad (3.6)$$

в результате чего получаем уравнение

$$\hat{j}_0 \dot{\Omega} + [\mathbf{e}, \ddot{\mathbf{e}}] = \rho^2 \mathbf{q} - \rho [\mathbf{e}, \ddot{\xi}] + [\mathbf{e}, \gamma_2]. \quad (3.7)$$

Домножив второе уравнение в (3.3) на T^2/ml с учетом (3.6) и (3.5), получим

$$\frac{M + m}{m} \rho \ddot{\xi} + \ddot{\mathbf{e}} = -\frac{1}{ml\Omega_0^2} N\gamma_1 + \frac{M + m}{m} \gamma_2 + \frac{1}{ml\Omega_0^2} \mathbf{P}. \quad (3.8)$$

Введем обозначения

$$\mu = \frac{M}{m}, \quad n = \frac{N}{ml^2\Omega_0^2}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{ml\Omega_0^2}. \quad (3.9)$$

В этих обозначениях уравнение (3.8) принимает вид

$$(1 + \mu)\rho\ddot{\xi} + \ddot{\mathbf{e}} = (1 + \mu)\gamma_2 - n\gamma_1 + \mathbf{p}. \quad (3.10)$$

Подставив (3.5), (3.6) и (3.9) в первое уравнение (3.3), имеем

$$J\Omega_0^2\dot{\omega} = -mr^2\Omega_0^2\mathbf{q} + rml\Omega_0^2[\gamma_1, \mathbf{p}], \quad (3.11)$$

поделив которое на $mr^2\Omega_0^2$, получим

$$\frac{J}{mr^2}\dot{\omega} = -\mathbf{q} + \rho^{-1}[\gamma_1, \mathbf{p}]. \quad (3.12)$$

В полученном уравнении заменим

$$\hat{J} = \frac{J}{mr^2}, \quad (3.13)$$

после чего уравнение преобразуется в следующее

$$\hat{J}\dot{\omega} = -\mathbf{q} + \rho^{-1}[\gamma_1, \mathbf{p}]. \quad (3.14)$$

Таким образом, в безразмерных переменных движение сферического робота по наклонной поверхности при наличии скольжения осуществляется в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{J}\dot{\omega} &= -\mathbf{q} + \rho^{-1}[\gamma_1, \mathbf{p}], \\ (1 + \mu)\rho\ddot{\xi} + \ddot{\mathbf{e}} &= (1 + \mu)\gamma_2 - n\gamma_1 + \mathbf{p}, \\ \hat{j}_0\dot{\boldsymbol{\Omega}} + [\mathbf{e}, \ddot{\mathbf{e}}] &= \rho^2\mathbf{q} - \rho[\mathbf{e}, \ddot{\xi}] + [\mathbf{e}, \gamma_2], \\ \dot{\mathbf{e}} &= [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{e}] \end{aligned} \quad (3.15)$$

с подстановкой

$$\ddot{\mathbf{e}} = [\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{e}] + [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{e}]], \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \frac{J}{mr^2}, \quad \mu = \frac{M}{m}, \quad n = \frac{N}{ml^2\Omega_0^2}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{ml\Omega_0^2}, \\ \hat{j}_0 &= \frac{j_0}{ml^2}, \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{Q}}{mr^2\Omega_0^2}, \quad \rho = \frac{r}{l}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Рассмотрим теперь случай движения робота без скольжения. В этом случае динамика робота описывается системой (2.15). После замен (3.2) и (3.17) она принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{J}\dot{\omega} + (1 + \mu)[\gamma_1, [\dot{\omega}, \gamma_1]] - \rho^{-1}[\gamma_1, \ddot{\mathbf{e}}] + \rho^{-1}(1 + \mu)[\gamma_1, \gamma_2] &= -\mathbf{q}, \\ \hat{j}_0\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \rho[\mathbf{e}, [\dot{\omega}, \gamma_1]] + [\mathbf{e}, \ddot{\mathbf{e}}] - [\mathbf{e}, \gamma_2] &= \rho^2\mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{e}} &= [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{e}] \end{aligned} \quad (3.18)$$

с подстановкой (3.16).

При этом условии безотрывного движения робота (2.9) имеет вид

$$n = -(1 + \mu)\gamma_{2z} + \ddot{e}_z \geq 0. \quad (3.19)$$

4. Управление движением робота

В данной части описывается метод построения управления для нахождения управляющих моментов \mathbf{q} , действующих на маятник [4]. Управление строится для случая, когда скольжение отсутствует.

Требуется найти управление, которое обеспечивало бы движение центра масс робота вдоль заданной траектории $x = x^0(t)$, $y = y^0(t)$, $z = 0$, где $x^0(t)$ и $y^0(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Для формирования управления следует разрешить систему (2.15) относительно старших производных, при этом получаем

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \bar{A}_1(\Omega, \mathbf{e}) + \bar{B}_1(\mathbf{e})\mathbf{q}, \\ \dot{\Omega} &= \bar{A}_2(\Omega, \mathbf{e}) + \bar{B}_2(\mathbf{e})\mathbf{q}, \\ \dot{\mathbf{e}} &= [\Omega, \mathbf{e}],\end{aligned}\quad (4.1)$$

где A_i и B_i , $i=1,2$, матрицы соответствующих размеров (здесь не выписаны ввиду громоздкости выражений).

При движении робота по заданной траектории известны заданные угловая скорость $\omega^0(t)$ и ускорение $\dot{\omega}^0(t)$. Переобозначим $\mathbf{u}^0(t) = \dot{\omega}^0(t)$. Закон управления выглядит следующим образом [4]:

$$\mathbf{q} = -\hat{B}(\mathbf{e})\bar{A}_1(\Omega, \mathbf{e}) + \hat{B}(\mathbf{e})(\mathbf{u}^0(t) + \mathbf{u}_s),\quad (4.2)$$

где матрица $\hat{B}(\mathbf{e})$ имеет вид

$$\hat{B}(\mathbf{e}) = \bar{B}_1^T[\bar{B}_1(\mathbf{e})\bar{B}_1^T(\mathbf{e}) + \varepsilon I]^{-1},\quad (4.3)$$

ε — малое положительное число, I — единичная матрица, $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ — вектор, задающий движение по заданной траектории $(x^0(t), y^0(t), z^0(t))$

$$\begin{aligned}u_1^0(t) &= \dot{\omega}_x^0(t) = -\ddot{y}^0(t), \\ u_2^0(t) &= \dot{\omega}_y^0(t) = -\ddot{x}^0(t), \\ u_3^0(t) &= \dot{\omega}_z^0(t) = 0,\end{aligned}\quad (4.4)$$

$\mathbf{u}_s = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ — дополнительное управление, «приближающее» центр масс робота к требуемой траектории

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= a'(y - y^0(t)) - b'(\omega_x - \omega_x^0(t)), \\ \bar{u}_2 &= -a'(x - x^0(t)) - b'(\omega_y - \omega_y^0(t)), \\ \bar{u}_3 &= 0,\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}a' &= \frac{ar}{\Omega_0^2}, \\ b' &= \frac{br}{\Omega_0}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

В следующем разделе приведены вычислительные эксперименты.

5. Численное моделирование

При проведении вычислительных экспериментов система дифференциальных уравнений интегрируется численно с использованием методов Рунге-Кутты 4-го порядка. Примем следующие значения параметров

$$J = 2/3, \quad j_0 = 4, \quad \rho = 2, \quad \mu = 1, \quad k = 0.7.\quad (5.1)$$

Зададим требуемую траекторию движения центра масс робота в виде окружности

$$x^0(t) = \alpha \cos(\beta t), \quad y^0(t) = \alpha \sin(\beta t), \quad (5.2)$$

при этом

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= -\alpha\beta \sin(\beta t), & \dot{y}^0(t) &= \alpha\beta \cos(\beta t), \\ \omega_x^0(t) &= -\alpha\beta \cos(\beta t), & \omega_y^0(t) &= -\alpha\beta \sin(\beta t), \\ u_1^0(t) &= \alpha\beta^2 \sin(\beta t), & u_2^0(t) &= -\alpha\beta^2 \cos(\beta t), & u_3^0(t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

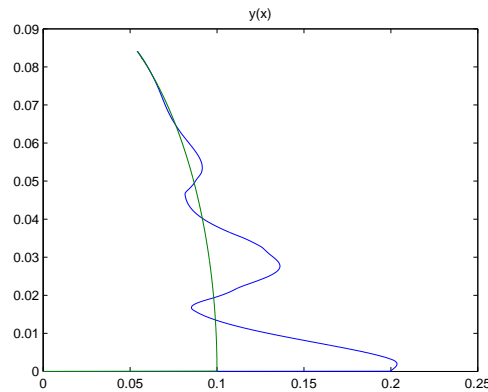
Начальные условия зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} x(0) &= \alpha + 0.1, & y(0) &= -0.1, & z(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}^0(0) = 0, & \dot{y}(0) &= 0, & \dot{z}(0) &= 0, \\ \omega_x(0) &= \omega_x^0(0) = -\alpha\beta, & \omega_y(0) &= \omega_y^0(0) = 0, & \omega_z(0) &= 0, \\ e_x(0) &= 0, & e_y(0) &= 0, & e_z(0) &= -1, & \Omega(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Пусть компоненты вектора γ_2 таковы:

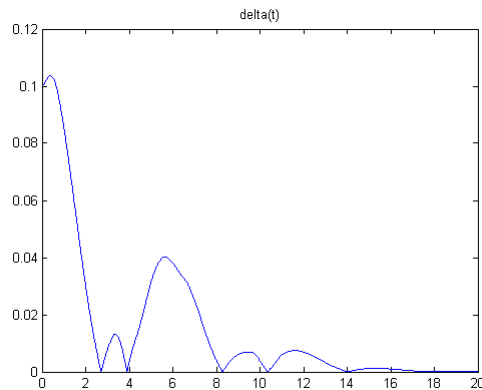
$$\gamma_2 = (\sin(\pi/60), 0, -\cos(\pi/60)). \quad (5.5)$$

Численное моделирование при значениях параметров $\alpha = 2$ и $\beta = 0.1$ показывает, что в данном случае робот движется без скольжения. Результаты приведены на рисунках. Как можно видеть, построенное управление обеспечивает решение поставленной задачи, то есть траектория движения центра робота приближается к заданной окружности.



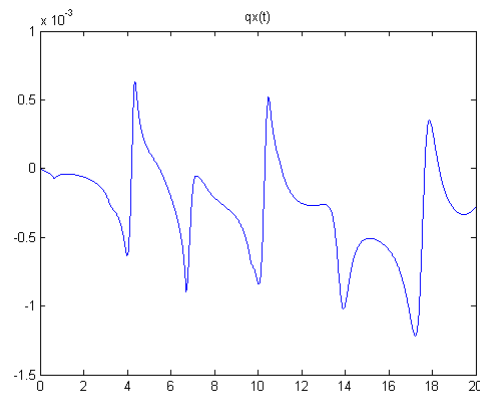
Р и с у н о к 5.1

Приближение центра робота к окружности



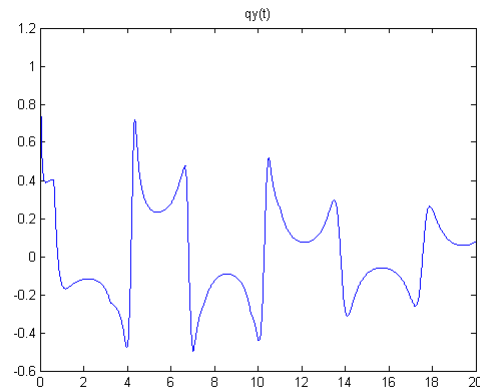
Р и с у н о к 5.2

График отклонения действительной траектории от заданной $\delta(t)$



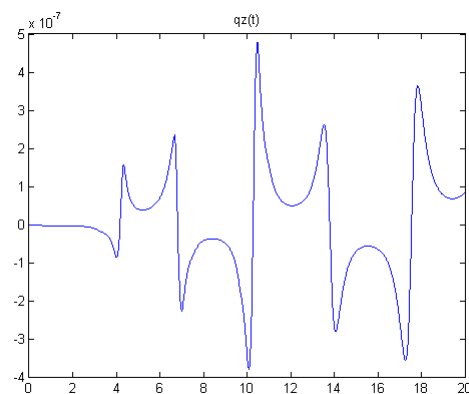
Р и с у н о к 5.3

Управляющий момент $q_x(t)$



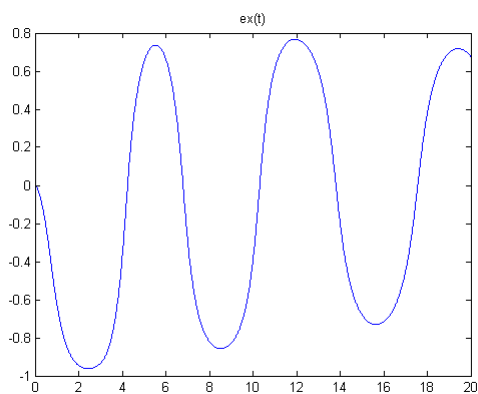
Р и с у н о к 5.4

Управляющий момент $q_y(t)$

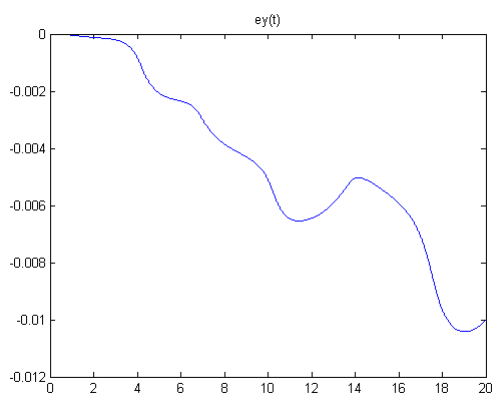


Р и с у н о к 5.5

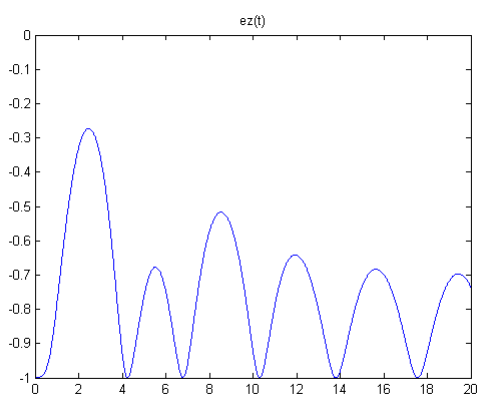
Управляющий момент $q_z(t)$



Р и с у н о к 5.6

Компонента направляющего вектора маятника $e_x(t)$ 

Р и с у н о к 5.7

Компонента направляющего вектора маятника $e_y(t)$ 

Р и с у н о к 5.8

Компонента направляющего вектора маятника $e_z(t)$

6. Заключение

В работе исследована динамика управляемого движения сферического робота с маятниковым приводом, перемещающегося по наклонной плоскости. Построена математиче-

ская модель робота в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложен способ управления роботом в форме обратной связи по состоянию. Проведены численные эксперименты, показывающие, что данный способ управления обеспечивает приближение центра робота к заданной траектории.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №13-01-00603 и №13-01-12452).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chase, R., Pandya, A., “A Review of Active Mechanical Driving Principles of Spherical Robots.”, *Robotics*, **1** (2012), 3 – 21.
2. Koshiyama, A., and Yamafuji, K., “Design and Control of an All-Direction Steering Type Mobile Robot”, *International Journal of Robotics Research*, **12** (1993), 411 – 419.
3. Schroll G.C., “Dynamic Model of a Spherical Robot from First Principles”, *Master Thesis. Colorado State University*, 2010.
4. Баландин Д.В., Комаров М.А., Осипов Г.В., “Управление движением сферического робота с маятниковым приводом”, *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2013 № 4, 150-163.

A Motion Control for a Spherical Robot on Inclined Plane

© D. V. Balandin³, M. Y. Skuchilin⁴

Abstract. Problems of controlling a spherical robot with pendulum drive on inclined plane are considered. A mathematical model of the dynamics of this robot is constructed and control laws in the form of state feedback that provide robot motion along a given trajectory on a horizontal or a non-horizontal plane are synthesized. Numerical results of computer simulation that demonstrate efficiency of the proposed control laws are presented.

Key Words: control theory, spherical robot, state feedback control

³ Head of the Chair of Numerical and Functional Analysis, Lobachevskii Nizhny Novgorod State University; dbalandin@yandex.ru

⁴ PhD Student of the Chair of Numerical and Functional Analysis, Lobachevskii Nizhny Novgorod State University; maximgerts@gmail.com

УДК 517.929

Совместные системы дифференциальных уравнений

© Л. Д. Блистанова¹, В. И. Зубов², И. В. Зубов³, С. А. Стрекопытов⁴, М. В. Стрекопытова⁵

Аннотация. В статье излагаются методы исследования систем с распределенными параметрами, к которым приводят задачи обнаружения предельных режимов, а также развиваются методы качественного анализа процессов управления, описываемых системами дифференциальных уравнений с частными производными

Ключевые слова: соотношения, оператор, функция, система, решение, аргумент, производная, уравнение, факт

1. Введение

Интуитивно очевидно, что системы с простой структурой легче реализуются в инженерном смысле. Конечно, понятие простоты весьма относительно, но, скажем, квадратичные системы вызовут предпочтение у любого конструктора перед системами, включающими более сложные нелинейности. Рассмотрение нелинейных систем с простой структурой, имеющих несколько неустойчивых положений равновесия, но имеющих заданным образом геометрически локализованное ограниченное инвариантное множество, к тому же глобально асимптотически устойчивое, позволяет создавать весьма эффективные системы управления. По сути это предельное множество является аналогом устойчивого положения равновесия для линейных и линеаризованных систем. Но в данном случае алгебраические критерии устойчивости, основанные на анализе собственных чисел матрицы линейного приближения, беспомощны. Это связано с тем, что аналитическая природа этих предельных множеств, как правило, весьма сложна. Для составления возмущенной системы требуется интегрирование уравнений движения, что в общем случае неосуществимо.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}u_x &= f(x, y, u), \\u_y &= g(x, y, u).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Пусть правые части представляют собой непрерывные или даже непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Ясно, что эта система имеет решение не всегда, так как неизвестная функция u одна, а уравнения два. Установим условия, при которых эта система является совместной. Причем будем искать эти условия в виде некоторого соотношения, связывающего функции f, g и их производные. Пусть функция u - решение системы (2.1). Тогда справедливо тождество

$$\frac{\partial(u_x - f)}{\partial y} = \frac{\partial(u_y - g)}{\partial x},$$

¹ Профессор кафедры Теории управления, СПбГУ; ddemidova@mail.ru.

² Аспирант кафедры Теории управления ф-та ПМ-ПУ СПбГУ; ddemidova@mail.ru.

³ Профессор кафедры Теории управления, СПбГУ; ddemidova@mail.ru.

⁴ Доцент кафедры Теории управления, СПбГУ; ddemidova@mail.ru.

⁵ Доцент кафедры Теории управления, СПбГУ; ddemidova@mail.ru.

откуда по свойству непрерывно дифференцируемой функции, учитывая тождество $u_{xy} = u_{yx}$, которое выполняется в силу сделанных предположений, имеем

$$f_y + f_u g = g_x + g_u f. \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) называется *условием интегрируемости*, а выражение $f_y - f_u g - g_x - g_u f$ - *скобками Якоби*. Если функции, стоящие в правой части системы (2.1), не зависят от искомой функции u , то условие интегрируемости принимает вид

$$f_y = g_x. \quad (2.3)$$

Рассмотрим теперь однородную систему

$$\begin{aligned} Au_x + Bu_y &= 0, \\ Cu_x + Du_y &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ясно, что для совместности этой системы, во-первых, требуется алгебраическая разрешимость уравнений (2.4), т.е. выполнение соотношения $AD = BC$. Дополнительное требование установим аналогичным с (2.2) образом. Пусть u - решение. Тогда выполнено соотношение

$$A \frac{\partial(Cu_x + Du_y)}{\partial x} + B \frac{\partial(Cu_x + Du_y)}{\partial y} = C \frac{\partial(Au_x + Bu_y)}{\partial x} + D \frac{\partial(Au_x + Bu_y)}{\partial y},$$

Откуда с учетом равенства смешанных производных $u_{xy} = u_{yx}$, получаем

$$A(C_x u_x + D_x u_y) + B(C_y u_x + D_y u_y) = C(A_x u_x + B_x u_y) + D(A_y u_x + B_y u_y). \quad (2.5)$$

Для совместности системы (2.4) необходима алгебраическая совместность уравнения (2.5) и уравнений (2.4). Иначе говоря, уравнение (2.5) должно быть следствием уравнений (2.4). Приводя подобные члены, получаем, что необходимо выполнение соотношения

$$-B(AC_x u_x + D_x u_y) + B(C_y u_x + D_y u_y) - C(A_x u_x + B_x u_y) + D(A_y u_x + B_y u_y) \quad (2.6)$$

которое наряду с соотношением $AD = BC$ и является искомым условием совместности системы уравнений (2.4).

Выражение

$$A(C_x u_x + D_x u_y) + B(C_y u_x + D_y u_y) - C(A_x u_x + B_x u_y) + D(A_y u_x + B_y u_y)$$

называется *скобкой Пуассона* системы (2.4). Именно С.Д. Пуассон (1781-1840) первым заметил, что при подобных преобразованиях члены, содержащие вторые производные неизвестной функции, сокращаются. Это явилось весьма неожиданным и важным фактом.

В случае систем уравнений большего порядка явные соотношения выписывать достаточно затруднительно, поэтому изложим вопрос в более общем виде.

Рассмотрим систему уравнений

$$L_1(u) = 0, L_2(u) = 0. \quad (2.7)$$

Здесь и далее L_i - линейный дифференциальный оператор

$$L_i(u) = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_j},$$

коэффициенты a_{ij} - суть функции независимых переменных x_1, \dots, x_n . Если функция $u = u(x_1, \dots, x_n)$ является решением, то (2.7) являются тождествами и выполнено $L_1(L_2(u)) = L_2(L_1(u)) = 0$; последнее тождество можно записать в виде

$$L_1(L_2(u)) - L_2(L_1(u)) = 0. \quad (2.8)$$

Выражение (2.8) не зависит от вторых производных функции u и представляет собой также линейный дифференциальный оператор

$$L_3(u) = L_1(L_2(u)) - L_2(L_1(u)) = \sum_{j=1}^n a_{3j} u_{x_j}.$$

Этот факт открыт Пуассоном. Выражение

$$[L_1, L_2] = L_1(L_2(u)) - L_2(L_1(u))$$

носит название *скобок Пуассона*. Тем самым справедлива следующая

Т е о р е м а 2.1. *Если функция u является решением системы (2.6), то она удовлетворяет также уравнению*

$$L_3(u) = L_1(L_2(u)) - L_2(L_1(u)) = 0. \quad (2.9)$$

Может получиться так, что уравнение (2.9) является линейно независимым с уравнениями (2.6). Тогда можно, применяя скобку Пуассона, получить еще уравнения

$$L_4(u) = [L_1(u), L_3(u)] = 0, \quad L_5(u) = [L_2(u), L_3(u)] = 0, \dots$$

О п р е д е л е н и е 2.1. *Система m линейно независимых уравнений*

$$L_1(u) = 0, \dots, L_m(u) = 0 \quad (2.10)$$

называется замкнутой, если каждая скобка Пуассона $[L_i, L_j]$ ($i, j = 1, \dots, m$) является линейной комбинацией операторов L_1, \dots, L_m .

Если система (2.10) не является замкнутой, то применяя скобки Пуассона, можно получить по крайней мере $m + 1$ уравнений, которая в свою очередь может оказаться как замкнутой, так и нет. Во втором случае, снова применяя скобки Пуассона, можно получить новую систему уравнений, порядок которой по крайней мере на единицу больше предыдущей. Поскольку число линейно независимых уравнений ограничено числом независимых переменных n , то этот процесс конечен.

О п р е д е л е н и е 2.2. *Будем говорить, что система линейно независимых уравнений (2.10) находится в инволюции или называется яacobиевой системой, если всевозможные скобки Пуассона равны нулю тождественно:*

$$[L_i, L_j] \equiv 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Известно [1], что любая замена переменных $Y = \Phi(X)$, где $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, сохраняет и свойство замкнутости, и свойство инволюционности системы (2.10).

2.1. Нормальная форма системы

Замкнутая система линейно независимых уравнений (2.10) может быть приведена к *нормальной форме*

$$L_1(u) = u_{x_1} + a_{1m+1}u_{x_{m+1}} + \dots + a_{1n}u_{x_n} = 0, \quad (2.11)$$

$$L_2(u) = u_{x_2} + a_{2m+1}u_{x_{m+1}} + \dots + a_{2n}u_{x_n} = 0,$$

.....

$$L_m(u) = u_{x_2} + a_{mm+1}u_{x_{m+1}} + \dots + a_{mn}u_{x_n} = 0.$$

Т е о р е м а 2.2. *Всякая нормальная замкнутая система есть система в инволюции.*

Доказательство может быть осуществлено непосредственной подстановкой.

2.2. Регулярные интегральные поверхности у систем 3-го порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, y, z), \quad \dot{y} = g(x, y, z), \quad \dot{z} = h(x, y, z). \quad (2.12)$$

Изучим вопрос о существовании у этой системы достаточно регулярной интегральной поверхности $z = v(x, y)$. Напомним основные понятия, связанные с регулярными поверхностями [2].

О п р е д е л е н и е 2.3. *Элементарной поверхностью Φ называется связное множество точек пространства, являющееся образом элементарной области G , гомотоморфной кругу. Локально элементарная поверхность называется простой.*

Пусть u, v - декартовы координаты произвольной точки области G , x, y, z - координаты соответствующей точки поверхности Φ . Уравнения

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v)$$

называются *уравнениями поверхности в параметрической форме*.

Если каждая точка поверхности Φ допускает регулярную параметризацию (т.е. если функции f_i , определяющие уравнения поверхности, являются k раз непрерывно дифференцируемыми в области G), то поверхность Φ называется *регулярной*. Если $k = 1$, то поверхность называется *гладкой*.

Наибольшей наглядностью отличаются поверхности, допускающие параметризацию

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v).$$

Уравнения таких поверхностей могут быть записаны в форме

$$z = f(x, y). \quad (2.13)$$

Поверхность может быть задана и неявно:

$$\omega(x, y, z) = 0. \quad (2.14)$$

Т е о р е м а 2.3. Если $\omega(x, y, z)$ - регулярная функция своих переменных, то у точки (x_0, y_0, z_0) , удовлетворяющей соотношениям

$$\omega(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad (\nabla\omega(x_0, y_0, z_0))^2 \neq 0,$$

есть окрестность такая, что точки пространства, удовлетворяющие соотношению (2.14) и принадлежащие этой окрестности, образуют регулярную элементарную поверхность, определяемую уравнением (2.13).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По теореме о неявной функции существует в некоторой (δ, ε) - окрестности точки (x_0, y_0, z_0) функция (2.13) такая, что $\omega(x, y, f(x, y)) = 0$ при $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $|z - z_0| < \varepsilon$. Причем все точки указанного (δ, ε) - параллелепипеда, удовлетворяющие (2.14), исчерпываются значениями $(x, y, f(x, y))$ при $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Необходимо отметить, что обратную задачу - задачу построения всего множества систем - дифференциальных уравнений, имеющих заданный частный интеграл, - решил Н.П. Еругин [2]. По Еругину, необходимым и достаточным условием существования интеграла $z = v(x, y)$ будет представимость правой части системы (2.12) в виде

$$\begin{pmatrix} cf \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_x \\ v_y \\ -1 \end{pmatrix} \star \Phi(x, y, z) + b(x, y, z),$$

где $\Phi(x, y, v(x, y)) \equiv 0$, вектор b ортогонален вектору $(v_x, v_y, -1)^\star$.

Последнее соотношение приводит к дифференциальному уравнению с двумя квадратами производных

$$v_x f + v_y g - h = (v_x^2 + v_y^2 + 1) \star \Phi(x, y, z),$$

которое показывает, что характер зависимости функции Φ от z полностью определяется правой частью системы (2.12). Из последнего соотношения видно, что функцию Φ всегда можно искать в виде $\Phi(x, y, z) = (v_x^2 + v_y^2 + 1)^{-1} \Phi_1(x, y, z)$.

Если предполагается наличие семейства регулярных поверхностей

$$z = v(x, y) + C, \tag{2.15}$$

то могут быть получены необходимые условия их существования. Действительно, имеем уравнение

$$v_x f + v_y g = h,$$

дифференцируя которое по z , получаем

$$v_x f_z + v_y g_z = h_z.$$

Получили систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} cc f & g \\ f_z & g_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cv_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \\ h_z \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Для существования у системы (2.12) семейства регулярных поверхностей (2.15) необходима, во-первых, алгебраическая разрешимость системы (2.16). Во-вторых, поскольку ищем регулярную поверхность, требуем выполнение условия интегрируемости $v_{xy} = v_{yx}$, которое приводит к следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Delta^{-1}(hg_z - gh_z)) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta^{-1}(-hf_z - fh_z)). \quad (2.17)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Исследовать на наличие семейства регулярных поверхностей систему (аттрактор Росслера)

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = bx + (x - c)z. \quad (2.18)$$

Ищем интеграл вида $x = v(y, z) + C$. Получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} ccx + ay & bx + (x - c)z \\ 1 & b + z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cv_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy + z \\ 0 \end{pmatrix};$$

приводим ее к нормальному виду:

$$\begin{pmatrix} cv_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \frac{(b+z)(y+z)}{bay+za y+zc} \\ -\frac{y+z}{bay+za y+zc} \end{pmatrix}.$$

Проверяем условие интегрируемости:

$$v_{yz} - v_{zy} = z \frac{-ba - az + zc + c}{-2abz + cb - az^2 - b^2a}.$$

Последнее выражение тождественно равно нулю при $a = c$, $b = 1$.

3. Выводы

В статье излагаются методы исследования систем с распределенными параметрами, к которым приводят задачи обнаружения предельных режимов, а также развиваются методы качественного анализа процессов управления, описываемых системами дифференциальных уравнений с частными производными. Предлагается методика изучения свойств решений этих систем путем рассмотрения этих решений на подвижных многообразиях различных форм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Ф. Зубова, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб., 2004, 472 с.
2. А. В. Zubov, О. А. Шабурова, *Управление динамическими системами*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2005, 83 с.
3. А. В. Zubov, Н. В. Zubov, С. В. Zubov, А. Ф. Зубова, *Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем*, ВВМ, СПб., 2011, 362 с.
4. А. В. Zubov, К. А. Пешехонов, С. А. Стрекопытов, М. В. Стрекопытова, "Трехмерные квадратичные системы", *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, 2012, 13-16.

5. С. В. Зубов, М. Б. Авдеева, И. С. Стрекопытов, “Последовательная локализация инвариантных множеств”, *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, 2012, 9-12.
6. И. В. Зубов, В. И. Зубов, А. Ф. Зубова, А. И. Иванов, “Уравнение для регулярного интеграла”, *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, 2012, 17-20.

Combined systems of differential equations

© L. D. Blistanova⁶, V. I. Zubov⁷, I. V. Zubov⁸, S. A. Strecopitov⁹, M. V. Strecopitova¹⁰

Abstract. In article is supposes methods of investigation systems with distributive parameters, by that is bring tasks of foundation limits regimes, so is develops methods of qualitative analysis of process controlling, is describes systems differential equations with partial derivatives

Key Words: correlation, operator, function, system, solution, argument, derivative, equation, fact

⁶ Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁷ Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁸ Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁹ Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

¹⁰ Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК 517.9

Моделирование континуальной перколяции жестких вытянутых эллипсоидов с проницаемыми оболочками

© М. М. Бузмакова¹

Аннотация. Исследована континуальная перколяционная модель жестких вытянутых эллипсоидов вращения, которая может быть использована для описания процесса структурообразования дисперсных и композиционных материалов и изучения их физических и химических свойств. Получена зависимость порога перколяции от аспектного отношения эллипсоида и значения толщины проницаемой оболочки.

Ключевые слова: теория перколяции, композиционные и дисперсные материалы, фазовые переходы

1. Введение

В настоящее время наблюдается значительный рост использования дисперсных и композиционных материалов. Они широко используются в различных областях современной промышленности, медицине, экологии, химии. Их широкая применимость объясняется тем, что этим материалам можно придать определенные физические и механические свойства. Необходимость создания новых перспективных и совершенствование уже существующих дисперсных и композиционных материалов привела к развитию научных исследований в данном направлении. Разработка научных основ исследования структуры и способов получения дисперсных и композиционных материалов является актуальной задачей на сегодняшний день. Среди методов исследования структурообразования и способов получения дисперсных и композиционных материалов большой популярностью пользуются методы теории перколяции и теории фракталов [1].

Теория перколяции занимает немаловажное место в современной науке. Это связано с тем, что теория перколяции является междисциплинарной, то есть ее методы можно использовать и в математике, и в физике, и в химии, и в биологии, и в экономике и других науках [2]. Теория перколяции имеет множество практических приложений [3].

В настоящей работе предложена и исследована модель континуальной перколяции жестких вытянутых эллипсоидов с проницаемыми оболочками. Данная модель может быть использована для изучения процессов структурообразования и свойств дисперсных и композиционных материалов. Кроме того, данная модель может быть использована для описания фазового перехода золь–гель. Новизна нашего исследования заключается в том, что мы исследуем вытянутые жесткие эллипсоиды вращения с проницаемыми оболочками, пересечение которых обеспечивает наличие связи между эллипсоидами.

2. Постановка задачи и методика моделирования

Основной целью моделирования является выявление зависимости порога перколяции от толщины проницаемой оболочки и аспектного отношения эллипсоида.

¹ ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Астраханский государственный университет, г. Астрахань; mariya_nazarova@mail.ru.

Создана компьютерная модель континуальной перколяции вытянутых жестких эллипсоидов вращения (далее эллипсоидов) с проницаемыми оболочками. Эллипсоиды с радиусом вращения r , аспектным отношением k и проницаемой оболочкой d случайным образом помещаются в куб с линейным размером L . В рамках нашей модели, два эллипсоида принадлежат одному кластеру только в том случае, если их проницаемые оболочки пересекаются или касаются друг друга. Далее, в системе идет поиск кластера, соединяющего верхнюю и нижнюю грани куба — перколяционного. По наличию в системе перколяционного кластера можно говорить о наступлении перколяции. Кроме наступления перколяции в системе, исследуются следующие характеристики: распределение кластеров по размерам, поведение среднего размера кластера и мощности перколяционного кластера, а также его фрактальной размерности. Помимо этого, для модели определяются критические показатели, которые доказывают достоверность полученных результатов.

Моделирование проводилось методом Монте-Карло. При упаковке элементов в систему для генерации случайных чисел применялся алгоритм «Вихрь Мерсенна» [4]. Для идентификации принадлежности элемента к кластеру используется алгоритм Хошена-Копельмана [5], который был модифицирован под континуальную задачу. Идентификация перколяционного кластера осуществляется с помощью «волнового алгоритма» [6]. При моделировании были использованы периодические граничные условия по всем трем направлениям.

Все расчеты проведены для системы конечного размера ($L = 15, 20, 25$) в связи со значительной сложностью моделируемой задачи. Но даже для таких небольших систем получены достаточно точные результаты (четыре знака после запятой).

Для каждого значения $k = 1, \dots, 5$, $h = 0.1, \dots, 1$ произведено 100 испытаний и определено значение порога перколяции по стандартной методике: определена вероятность возникновения перколяционного кластера $P(p)$; полученные результаты компьютерного эксперимента аппроксимируются функцией вида $P(p) = (1 + \exp(-(p - p_c(L))a))^{-1}$ (например, рис. 2.1). Значение доли заполнения, при которой вероятность возникновения перколяционного кластера равна 0.5 принимается за оценку значения порога перколяции для конечной системы.

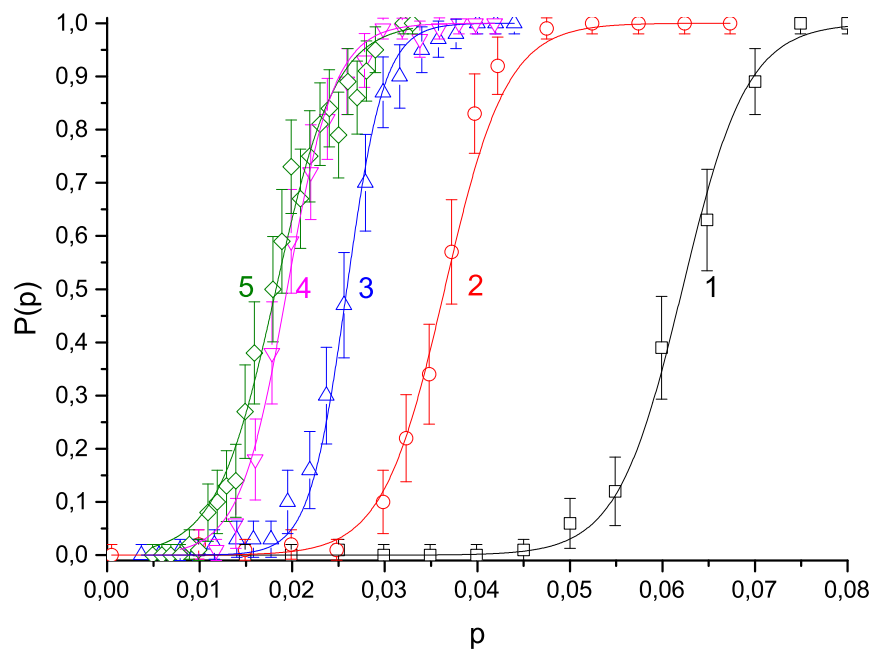
3. Результаты моделирования

Для данной перколяционной задачи произведены расчеты для системы со следующими параметрами: $L = 15$, $r = 0.5$, $k = 1, 2, 3$, $h = 0.1, 0.2, \dots, 1$; $L = 20$, $r = 0.5$, $k = 4$, $h = 0.1, 0.2, \dots, 1$ и для $L = 25$, $r = 0.5$, $k = 5$, $h = 0.1, 0.2, \dots, 1$.

Основным результатом исследования является получение зависимости значения порога перколяции от аспектного отношения эллипсоида при различных значениях толщины проницаемой оболочки (рис. 3.1).

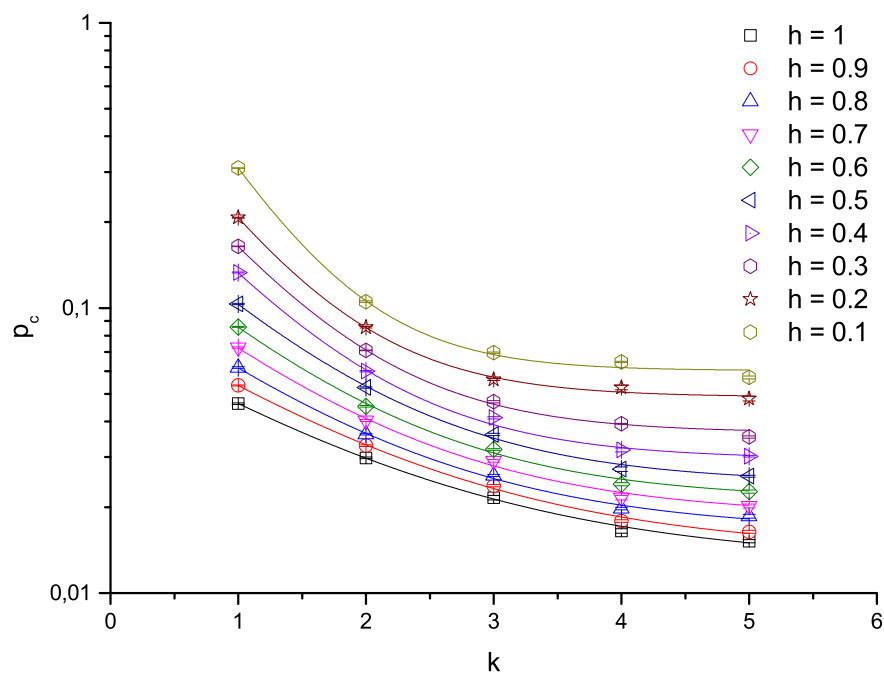
Полученные результаты компьютерного эксперимента аппроксимируются функциями вида $p_c(k) = A \exp(-k/t) + b$, коэффициенты A , t , b представлены в таблице 2.

Кроме выявления зависимости порога перколяции от аспектного отношения эллипсоида, было исследовано распределение кластеров по размерам, поведение среднего размера кластера и мощности перколяционного кластера. Для распределения кластеров по размерам получили закономерное поведение: на малых долях заполнения до порога перколяции существуют только кластеры малых размеров, на пороге перколяции существуют как большие (в 50% случаев перколяционные), так и малые кластеры, и после порога перколяции присутствуют один-два малых кластера (размером не больше двух-трех)



Р и с у н о к 2.1

Вероятность возникновения перколяционного кластера при различных L , k , $h = 0.8$



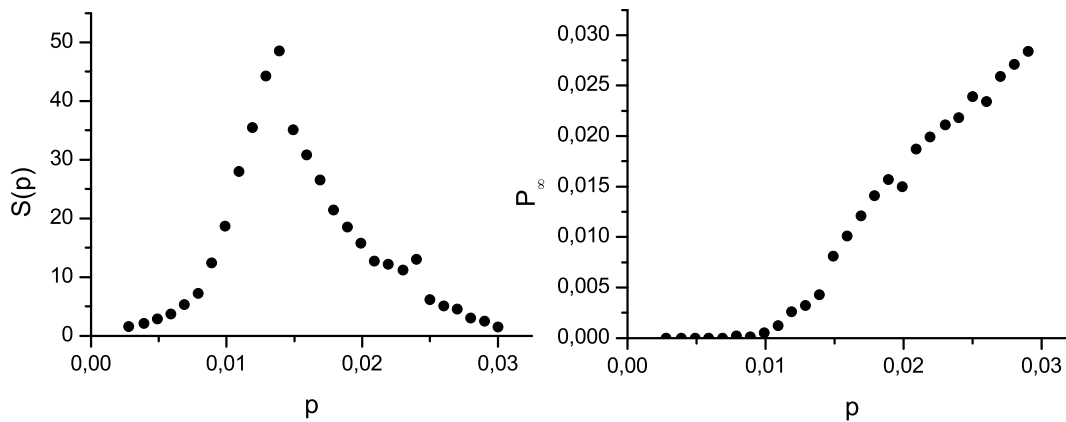
Р и с у н о к 3.1

Зависимость порога перколяции от аспектного отношения эллипсоида при различных значениях толщины проницаемой оболочки

Таблица 2: Значения коэффициентов A , t , b аппроксимирующих функций $p_c(k) = A \exp(-k/t) + b$ при различных h

h	A	t	b
1	0.066 ± 0.002	1.47 ± 0.08	0.013 ± 0.001
0.9	0.082 ± 0.002	1.38 ± 0.09	0.014 ± 0.001
0.8	0.103 ± 0.006	1.22 ± 0.08	0.017 ± 0.001
0.7	0.129 ± 0.009	1.14 ± 0.09	0.019 ± 0.001
0.6	0.166 ± 0.009	1.06 ± 0.08	0.021 ± 0.001
0.5	0.215 ± 0.009	0.99 ± 0.04	0.024 ± 0.001
0.4	0.34 ± 0.01	0.83 ± 0.04	0.029 ± 0.001
0.3	0.47 ± 0.02	0.77 ± 0.03	0.037 ± 0.001
0.2	0.69 ± 0.04	0.68 ± 0.03	0.049 ± 0.001
0.1	1.36 ± 0.09	0.59 ± 0.03	0.060 ± 0.002

и один большой кластер — перколяционный. Значение среднего размера кластера при приближении к порогу перколяции стремительно возрастает, а после порога перколяции стремительно убывает; значение мощности перколяционного кластера при приближении к порогу перколяции стремительно возрастает, после порога перколяции возрастает менее интенсивно (рис.3.2). Такое поведение также является закономерным и подтверждает правильность полученных результатов.



Р и с у н о к 3.2

Слева средний размер кластера $S(p)$, справа мощность перколяционного кластера $P_\infty(p)$ при $L = 25$, $h = 1$, $k = 5$

Для данной перколяционной модели определены следующие критические показатели при $L = 20$, $k = 4$ и $h = 0.8$: для значения среднего размера кластера критический показатель $\gamma = 1.63 \pm 0.15$ при $p > p_c$, $\gamma = 1.97 \pm 0.17$ при $p < p_c$, для значения мощности перколяционного кластера критический показатель $\beta = 0.445 \pm 0.008$. Найденные значения критических показателей совпадают с ранее известными в пределах погрешности для размерности задачи, равной трем [2], что свидетельствует о достоверности полученных нами результатов.

Кроме определения значений критических показателей, для данной перколяционной

модели были определены следующие значения фрактальной размерности перколяционного кластера на пороге перколяции: при $L = 20$, $k = 4$ и $h = 0.8$ $D_f = 2.74 \pm 0.05$, при $L = 20$, $k = 4$ и $h = 0.6$ $D_f = 2.79 \pm 0.07$, при $L = 25$, $k = 5$ и $h = 1$ $D_f = 2.68 \pm 0.13$, при $L = 25$, $k = 5$ и $h = 0.6$ $D_f = 2.59 \pm 0.17$, которые в пределах погрешности совпадают между собой и с ранее известными [2], [7]. Это безусловно может служить подтверждением достоверности полученных нами результатов для данной задачи.

4. Заключение

Предложена и исследована модель континуальной перколяции жестких вытянутых эллипсоидов с проницаемыми оболочками, отличающаяся от известных тем, что впервые рассмотрены именно вытянутые эллипсоиды вращения. Предложенная модель является оригинальной. Выявлена зависимость значения порога перколяции от аспектного отношения эллипсоида при различных значениях толщины проницаемой оболочки. Определены такие характеристики системы как средний размер кластера, распределение кластеров по размерам, мощность и фрактальная размерность перколяционного кластера, критические показатели. Данная перколяционная модель может быть использована для описания процесса структурообразования композиционных и дисперсных материалов, а также исследования некоторых их физических и химических свойств в критической области вблизи порога перколяции. Также предложенная модель может быть использована для исследования фазового перехода золь-гель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулак М. И., *Фрактальная механика материалов*, Высшая школа, Минск, М., 2002, 304 с.
2. Stauffer D., Aharony A., *Introduction to Percolation Theory*, Taylor & Francis, London, 1992, 181 pp.
3. Sahimi M., *Application of Percolation Theory*, Taylor & Francis, London, 1994, 254 pp.
4. Matsumoto M., "Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator", *ACM Trans. on Modeling and Computer Simulations*, **8:1** (1998), 3–30.
5. Hoshen J., Kopelman R., "Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm", *Physical Review B*, **14:8** (1976), 3438–3445.
6. Rubin F., "The Lee path connection algorithm", *IEEE Transactions on Computers*, **23:8** (1974), 907–914.
7. Федер Е., *Фракталы*, Мир, М., 1991, 260 с.

Modelling of the continuum percolation of the prolate hard ellipsoids with preamble shells.

© M. M. Buzmakova²

Abstract. The continuum percolation model of hard prolate ellipsoids of rotation has been investigated. The model can be used to describe the process of the structure formation of composite and dispersed materials and the study of their physical and chemical properties. Dependence of value of the percolation threshold on thickness of permeable shell and aspect ratio has been obtained.

Key Words: percolation theory, composite and dispersed materials, phase transitions

² Assistant of Applied Mathematics and Informatics Chair, Astrakhan State University, Astrakhan; mariya_nazarova@mail.ru.

УДК 517.9

Асимптотические уравнения нелинейных трансзвуковых течений газа и их решения

© П. А. Вельмисов¹, Ю. А. Тамарова²

Аннотация. В статье получено уравнение для трансзвуковых течений газа, учитывающее поперечные возмущения, превосходящие возмущения основного потока. Указаны некоторые точные частные решения этого уравнения и их приложения к решению ряда задач.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, асимптотическое разложение, трансзвуковые течения газа, частные решения

1. Вывод асимптотического уравнения

Безвихревые изэнтропические течения газа в цилиндрических безразмерных координатах x , r , θ описываются уравнением:

$$\begin{aligned} & \Phi_{tt} + 2\Phi_x\Phi_{xt} + 2\Phi_r\Phi_{rt} + \frac{2}{r^2}\Phi_\theta\Phi_{\theta t} + 2\Phi_x\Phi_r\Phi_{rx} + \frac{2}{r^2}\Phi_x\Phi_\theta\Phi_{\theta x} + \frac{2}{r^2}\Phi_\theta\Phi_r\Phi_{\theta r} + \Phi_x^2\Phi_{xx} + \\ & + \Phi_r^2\Phi_{rr} + \frac{1}{r^4}\Phi_\theta^2\Phi_{\theta\theta} - a^2 \left(\Phi_{xx} + \Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r + \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$a^2 = \rho^{\chi-1} = p^{\frac{\chi-1}{\chi}} = \frac{\chi+1}{2} - \frac{\chi-1}{2} \left(2\Phi_t + \Phi_x^2 + \Phi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\Phi_\theta^2 \right).$$

В (1.1) $\Phi(x, r, \theta, t)$ - потенциал скорости, t - время, a - скорость звука, ρ - плотность, p - давление. Введем для $\Phi(x, r, \theta, t)$ асимптотическое разложение

$$\Phi = x + \varepsilon\psi(r, \theta, t^0) + \varepsilon^3\varphi(x^0, r, \theta, t^0) + \dots, \quad x = \varepsilon x^0, \quad t = \frac{1}{\varepsilon}t^0, \quad (1.2)$$

где ε - малый параметр. Подставляя (1.2) в (1.1) и оставляя члены старшего порядка, получим для функции $\varphi(x^0, r, \theta, t^0)$ трансзвуковое уравнение:

$$\begin{aligned} & 2\varphi_{x^0 t^0} + (\chi + 1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0 x^0} + 2\psi_r\varphi_{x^0 r} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\varphi_{x^0\theta} + \frac{\chi-1}{2} \left(2\psi_{t^0} + \psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2 \right) \varphi_{x^0 x^0} - \\ & - \Delta\varphi = L(\psi). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В (1.3) введены обозначения

$$\begin{aligned} \Delta\varphi & \equiv \varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}, \\ -L(\psi) & \equiv \psi_{t^0 t^0} + 2\psi_r\psi_{r t^0} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_{\theta t^0} + \psi_r^2\psi_{rr} + \frac{1}{r^4}\psi_\theta^2\psi_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_r\psi_{r\theta} - \frac{1}{r^3}\psi_r\psi_\theta^2. \end{aligned}$$

Функция $\psi(r, \theta, t^0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$. Если $\psi \equiv 0$, то получим классическое трансзвуковое уравнение Линя-Рейсснера-Тзяна

$$2\varphi_{x^0 t^0} + (\chi + 1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0 x^0} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r}\varphi_r - \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} = 0,$$

¹ Заведующий кафедрой высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

² Аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; kazakovaua@mail.ru.

которое в стационарном случае переходит в уравнение смешанного типа Кармана-Фальковича: $(\chi + 1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r}\varphi_r - \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} = 0$.

Уравнение (1.3) описывает трансзвуковые течения газа, возникающие при воздействии на обтекаемое тело бокового (по отношению к основному направлению движения, совпадающему с направлением оси x) возмущения основного трансзвукового потока (для возмущающего поперечного течения $\Phi_y, \Phi_z \sim \varepsilon$, для основного течения $\Phi_y, \Phi_z \sim \varepsilon^3$). Для внешнего обтекания летательных аппаратов таким возмущением является, например, боковой, меняющий свою интенсивность с течением времени ветер $\psi = V_\infty(t)r \cos(\theta + \alpha(t))$. Для внутреннего обтекания, например для течений в соплах, таким возмущением может быть закрутка потока ($\psi = \Gamma(t)\theta$).

Условия на фронте ударной волны $x^0 = x^0(r, \theta, t^0)$ получим из условий Ренкина-Гюгионо, подставляя в них разложение (1.2) и оставляя старшие по порядку члены:

$$\begin{aligned} & 2\frac{\partial x^0}{\partial t^0} + \left(\frac{\partial x^0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial x^0}{\partial \theta}\right)^2 + 2\psi_r\frac{\partial x^0}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\frac{\partial x^0}{\partial \theta} = \\ & = \frac{\chi - 1}{2}\left(2\psi_{t^0} + \psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right) + \frac{\chi + 1}{2}(\varphi_{x^0} + \varphi_{x^0}^*), \quad \varphi = \varphi^*. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если в (1.4) положить $\varphi \equiv \varphi^*$, то получим характеристическое уравнение для (1.3).

Запишем условия на обтекаемой поверхности, мало отличающейся от цилиндрической, задав ее в виде

$$r = r_0(\theta, t^0) + r_2(x^0, \theta, t^0)\varepsilon^4 + \dots \tag{1.5}$$

Подставляя (1.2) и (1.5) в точное условие непротекания $-\Phi_x r_x + \Phi_r - r^{-2}r_\theta\Phi_\theta = r_t$ и оставляя члены старшего порядка, получим:

$$\psi_r - \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial \theta}\psi_\theta = \frac{\partial r_0}{\partial t^0}, \quad \varphi_r - \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial \theta}\varphi_\theta = \frac{\partial r_2}{\partial x^0}. \tag{1.6}$$

Значения $\varphi_r, \varphi_\theta, \psi_r, \psi_\theta$ в (1.6) вычисляются при $r = r_0(\theta, t^0)$.

Уравнение звуковой поверхности ($V^2 = a^2$) в трансзвуковом приближении принимает вид

$$N \equiv \frac{\chi + 1}{2}\left(\psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right) + (\chi - 1)\psi_{t^0} + (\chi + 1)\varphi_{x^0} = 0. \tag{1.7}$$

Для установившихся течений уравнение (1.3) имеет смешанный тип. Звуковая поверхность $N = 0$ является поверхностью параболичности уравнения (1.3), при этом в сверхзвуковой области (области гиперболичности) $N > 0$, в дозвуковой области (области эллиптичности) $N < 0$.

Подставляя (1.2) в выражение для давления, проводя разложение в ряд Тейлора и оставляя старшие по порядку члены, получим асимптотическую формулу для определения давления

$$P = 1 - \chi\varepsilon^2\left(\psi_{t^0} + \varphi_{x^0} + \frac{1}{2}\psi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\psi_\theta^2\right). \tag{1.8}$$

2. Некоторые решения асимптотического уравнения (1.3)

Укажем некоторые частные решения уравнения (1.3). Отметим **автомодельный** класс решений (индекс ноль у переменных x, t будем здесь и далее опускать):

$$\psi = t^\beta \bar{\psi}(\zeta, \eta), \quad \varphi = t^{2\beta-1} \bar{\varphi}(\xi, \zeta, \eta), \quad \xi = \frac{x}{t^\beta}, \quad \zeta = \frac{r}{t^{(\beta+1)/2}}, \quad \eta = \theta + \alpha \ln t, \tag{2.1}$$

где α, β - произвольные числа. Подставив (2.1) в уравнение (1.3), получим уравнение для функции $\varphi = \bar{\varphi}(\xi, \zeta, \eta)$

$$\begin{aligned} & 2 \left((\beta - 1)\bar{\varphi}_\xi - \beta\bar{\varphi}_{\xi\xi}\xi - \frac{\beta + 1}{2}\bar{\varphi}_{\xi\zeta} + \alpha\bar{\varphi}_{\xi\eta} \right) + (\chi + 1)\bar{\varphi}_\xi\bar{\varphi}_{\xi\xi} + 2\bar{\psi}_\zeta\bar{\varphi}_{\xi\zeta} + \frac{2}{\zeta^2}\bar{\psi}_\eta\bar{\varphi}_{\xi\eta} - \\ & - \Delta\bar{\varphi} + \frac{\chi - 1}{2} (2\beta\bar{\psi} - (\beta + 1)\zeta\bar{\psi}_\zeta + 2\alpha\bar{\psi}_\eta + \bar{\psi}_\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\bar{\psi}_\eta^2) \bar{\varphi}_{\xi\xi} = L(\bar{\psi}), \\ & \Delta\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta}\bar{\varphi}_\zeta + \frac{1}{\zeta^2}\bar{\varphi}_{\eta\eta}, \\ & -L(\bar{\psi}) = \beta(\beta - 1)\bar{\psi} + \beta \left(-\frac{\beta + 1}{2}\zeta\bar{\psi}_\zeta + \alpha\bar{\psi}_\eta \right) + (\beta - 1) \left(-\frac{\beta + 1}{2}\zeta\bar{\psi}_\zeta + \alpha\bar{\psi}_\eta \right) + \\ & + \left(\frac{\beta + 1}{2} \right)^2 \zeta^2\bar{\psi}_{\zeta\zeta} + \alpha^2\bar{\psi}_{\eta\eta} + 2\bar{\psi}_\zeta \left(\beta\bar{\psi}_\zeta - \frac{\beta + 1}{2}\zeta\bar{\psi}_{\zeta\zeta} + \alpha\bar{\psi}_{\eta\zeta} \right) + \frac{2}{\zeta^2}\bar{\psi}_\eta\bar{\psi}_\zeta\bar{\psi}_{\eta\zeta} + \\ & + \frac{2}{\zeta^2}\bar{\psi}_\eta \left(\beta\bar{\psi}_\eta - \frac{\beta + 1}{2}\zeta\bar{\psi}_{\zeta\eta} + \alpha\bar{\psi}_\eta \right) + \bar{\psi}_\zeta^2\bar{\psi}_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta^4}\bar{\psi}_\eta^2\bar{\psi}_{\eta\eta} - \frac{1}{\zeta^3}\bar{\psi}_\zeta\bar{\psi}_\eta^2. \end{aligned}$$

Функция $\bar{\psi}$ удовлетворяет уравнению Лапласа: $\bar{\psi}_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta}\bar{\psi}_\zeta + \frac{1}{\zeta^2}\bar{\psi}_{\eta\eta} = 0$.

Уравнение (1.3) допускает также решение **полиномиального вида**

$$\varphi = \sum_{k=0}^3 \varphi_k(r, \theta, t)x^k. \quad (2.2)$$

После подстановки (2.2) в уравнение (1.3) получим для функций $\varphi_0(r, \theta, t)$, $\varphi_1(r, \theta, t)$, $\varphi_2(r, \theta, t)$, $\varphi_3(r, \theta, t)$ систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & 18\varphi_3^2(\chi + 1) - \Delta\varphi_3 = 0, \\ & 6\varphi_{3t} + 18(\chi + 1)\varphi_2\varphi_3 + 6\psi_r\varphi_{3r} + \frac{6}{r^2}\psi_\theta\varphi_{3\theta} - \Delta\varphi_2 = 0, \\ & 4\varphi_{2t} + (\chi + 1)(6\varphi_1\varphi_3 + 4\varphi_2^2) + 4\psi_r\varphi_{2r} + \frac{4}{r^2}\psi_\theta\varphi_{2\theta} - \Delta\varphi_1 + \\ & + 6(\chi - 1)\varphi_3 \left(\psi_t + \frac{1}{2}\psi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\psi_\theta^2 \right) = 0, \\ & 2\varphi_{1t} + 2(\chi + 1)\varphi_1\varphi_2 + 2\psi_r\varphi_{1r} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\varphi_{1\theta} - \Delta\varphi_0 + \\ & + 2(\chi - 1)\varphi_2 \left(\psi_t + \frac{1}{2}\psi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\psi_\theta^2 \right) = -L(\psi). \end{aligned} \right.$$

В классе решений (2.2) в случае установившихся течений содержится решение, которое описывает течение газа в соплах Лавалля с постоянным ускорением ($\varphi_{xx} = const$) и учитывает закрутку потока ($\psi = \Gamma\theta$, $\Gamma = const$):

$$\varphi = ax^2 + (\chi + 1)a^2r^2x + \left[\frac{\chi - 1}{2}\Gamma^2a \ln^2 r + \frac{1}{8}(\chi + 1)^2a^3r^4 \right]. \quad (2.3)$$

При $r \rightarrow 0$ составляющая скорости $V_r = \varepsilon^3\varphi_r$ имеет особенность $\ln r/r$, которая обусловлена изначально особенностью задания составляющей $V_\theta (V_\theta = \varepsilon\Gamma/r)$. Уравнение звуковой поверхности для (2.3), согласно (1.7), имеет вид

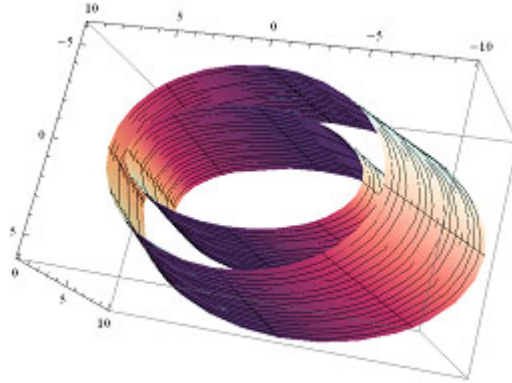
$$x = -\frac{\chi + 1}{2}ar^2 - \frac{\Gamma^2}{4ar^2}.$$

При $\chi \rightarrow 1$ влияние закрутки потока на распределение скоростей уменьшается, а особенность для φ_r при $r \rightarrow 0$ исчезает.

Условия (1.6) имеют вид: $\frac{\partial r_0}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial r_2}{\partial x} = \varphi_r$ (φ_r вычисляется при $r = r_0$). Определив r_0 и $r_2(x)$, получим уравнение обтекаемой поверхности:

$$r = r_0 + \varepsilon^4 \left[r_0 a^2 (\chi + 1) x^2 + \left((\chi - 1) \Gamma^2 a \frac{\ln r_0}{r_0} + \frac{1}{2} (\chi + 1)^2 a^3 r_0^3 \right) x + C \right], \quad r_0 = const. \quad (2.4)$$

Решение (2.3) можно использовать для описания течений в кольцеобразных каналах, уравнения внутренней и внешней стенок которых получим из (2.4) при $r_0 = r_0^{(1)}$, $r_0 = r_0^{(2)}$, $r_0^{(k)} = const \neq 0$ (см. Рисунок 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Обтекаемые поверхности вида (2.4) при $r_0 = 3$, $r_0 = 5$.

При $\Gamma = 0$ в (2.3) получим известное решение, описывающее течение в центре сопла Лаваля.

Укажем решение для случая $\psi = \Gamma \theta$, обладающее свойствами: $V_x, V_r, V_\theta \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$

$$\varphi = f(x, \theta) r^{-2} + g(r, \theta), \quad \Delta g = 0. \quad (2.5)$$

Подставив решение (2.5) и ψ в уравнение (1.3), получим уравнение для функции $f(x, \theta)$:

$$(\chi + 1) f_x f_{xx} + 2\Gamma f_{x\theta} + (\chi - 1) \Gamma^2 f_{xx} - 4f - f_{\theta\theta} = 0.$$

Решение (2.5) допускает обобщение: $\varphi = f(\xi, \eta) r^{-2} + g(r, \theta)$, $\xi = x + \alpha \ln r$, $\eta = \theta + \beta \ln r$, α, β - произвольные числа.

Рассмотрим случай, соответствующий движению газа между вращающимися плоскостями $\theta = \theta_1(t)$, $\theta = \theta_2(t)$. В этом случае

$$\psi = r^2(a(t) \cos 2\theta + b(t) \sin 2\theta) = r^2 f(\theta, t), \quad (2.6)$$

при этом в (1.3)

$$L(\psi) = r^2(8(a' a + b' b) + 8(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)(2ab \sin 4\theta + a^2 \cos 4\theta - b^2 \cos 4\theta) + a'' \cos 2\theta + b'' \sin 2\theta) = r^2 G(\theta, t).$$

Функции $a(t)$, $b(t)$ определяются из условий непротекания (1.6):

$$f_\theta(\theta_k(t), t) = \frac{\partial \theta_k(t)}{\partial t}, \quad k = 1, 2,$$

и соответственно равны

$$a(t) = \frac{1}{A}(\theta'_2 \cos 2\theta_2 - \theta'_1 \cos 2\theta_1), \quad b(t) = \frac{1}{A}(\theta'_2 \sin 2\theta_1 - \theta'_1 \sin 2\theta_2),$$

где $A = 2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2)$. Подставляя (2.6) в (1.3), получим уравнение для $\varphi(x, r, \theta, t)$:

$$2\varphi_{xt} + (\chi + 1)\varphi_x\varphi_{xx} + 4r(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)\varphi_{xr} + 4(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)\varphi_{x\theta} - \Delta\varphi + (\chi - 1)r^2(a' \cos 2\theta + b' \sin 2\theta + 2a^2 + 2b^2)\varphi_{xx} = -r^2G(\theta, t). \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) допускает решение вида (2.2). Тогда получим систему четырех уравнений для функций $\varphi_0(r, \theta, t)$, $\varphi_1(r, \theta, t)$, $\varphi_2(r, \theta, t)$, $\varphi_3(r, \theta, t)$:

$$\begin{cases} 18\varphi_3^2(\chi + 1) - \Delta\varphi_3 = 0, \\ 6\varphi_{3t} + 18(\chi + 1)\varphi_2\varphi_3 + 12(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)\varphi_{3\theta} + 12r(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)\varphi_{3r} - \\ - \Delta\varphi_2 = 0, \\ 4\varphi_{2t} + (\chi + 1)(6\varphi_1\varphi_3 + 4\varphi_2^2) + 8r(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)\varphi_{2r} - \Delta\varphi_1 + \\ + 8(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)\varphi_{2\theta} + 6(\chi - 1)r^2\varphi_3(a' \cos 2\theta + b' \sin 2\theta + 2a^2 + 2b^2) = 0, \\ 2\varphi_{1t} + 2(\chi + 1)\varphi_1\varphi_2 + 4r(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)\varphi_{1r} + 4(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)\varphi_{1\theta} - \Delta\varphi_0 + \\ + 2(\chi - 1)r^2(a' \cos 2\theta + b' \sin 2\theta + 2a^2 + 2b^2)\varphi_2 = r^2G(\theta, t). \end{cases} \quad (2.8)$$

При этом можно положить $\varphi_3 = g(\theta, t)r^{-2}$, где $g(\theta, t)$ определяется из уравнения: $18(\chi + 1)g^2 - 4g - g_{\theta\theta} = 0$.

В частном случае, для установившихся течений рассмотрим решение

$$\varphi(x, r, \theta) = \varphi_2(\theta)x^2 + \varphi_1(\theta)r^2x + \varphi_0(\theta)r^4. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в систему (2.8), получим систему трех уравнений для функций $\varphi_2(\theta)$, $\varphi_1(\theta)$, $\varphi_0(\theta)$:

$$\begin{cases} \varphi_2'' = 0, \\ 4(\chi + 1)\varphi_2^2 + 8(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)\varphi_2' - 4\varphi_1 - \varphi_1'' = 0, \\ 2(\chi + 1)\varphi_1\varphi_2 + 4(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)\varphi_1' - 16\varphi_0 - \varphi_0'' + 8(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)\varphi_1 + \\ + 4(\chi - 1)(a^2 + b^2)\varphi_2 = G(\theta). \end{cases}$$

Учитывая условия непротекания $\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = 0, \frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta}|_{\theta=\theta_1} = 0, \frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta}|_{\theta=\theta_2} = 0, k = 0, 1, 2\right)$, получим, что $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi n}{2}, n \in N$, $\varphi_2 = const = C_1$. Тогда $\varphi_1 = C_1^2(1 + \chi) + C_2 \cos 2\theta$, а функция φ_0 определяется из уравнения:

$$\varphi_0'' + 16\varphi_0 = 2(\chi + 1)C_1(C_1^2(1 + \chi) + C_2 \cos 2\theta) - 8C_2 \sin 2\theta(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta) + \\ + 8(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)(C_1^2(1 + \chi) + C_2 \cos 2\theta) + 4(\chi - 1)(a^2 + b^2)C_1 - 8(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta) \times \\ \times (2ab \sin 4\theta + a^2 \cos 4\theta - b^2 \cos 4\theta) = H(\theta).$$

Рассмотрим **обтекание поверхности, мало отличающейся от цилиндра** ($r_0 = R$). В этом случае, предполагая поперечное обтекание поверхности **безотрывным**, положим $\psi = V_\infty \cos \theta(r + R^2r^{-1})$. Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$2\varphi_{xt} + (\chi + 1)\varphi_x\varphi_{xx} + 2V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \varphi_{xr} - 2V_\infty \frac{\sin \theta}{r} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \varphi_{x\theta} + \\ + \frac{\chi - 1}{2}V_\infty^2\varphi_{xx} \left(1 - 2\frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{R^4}{r^4}\right) - \Delta\varphi = \\ = -2 \left(\frac{R^2}{r^3}\right) V_\infty^3 \cos \theta \left(1 - \frac{2R^2}{r^2} + \frac{R^4}{r^4} - 4 \sin^2 \theta\right). \quad (2.10)$$

От правой части (обозначим ее $\alpha(r, \theta)$) уравнения (2.10) можно освободиться, введя новую функцию $\bar{\varphi} = \varphi + g(r, \theta)$, $\Delta g = \alpha(r, \theta)$. Тогда в стационарном случае получим уравнение для функции $\bar{\varphi}$:

$$(\chi + 1)\bar{\varphi}_x\bar{\varphi}_{xx} + 2V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\bar{\varphi}_{xr} - 2V_\infty \frac{\sin \theta}{r} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\bar{\varphi}_{x\theta} - \Delta\bar{\varphi} + \frac{\chi - 1}{2}V_\infty^2\bar{\varphi}_{xx} \left(1 - 2\frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta + \frac{R^4}{r^4}\right) = 0. \tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) имеет решение вида (2.2), где φ_k зависят от r, θ , при этом можно положить $\varphi_3 = g(\theta)r^{-2}$ (в частности, $g = 0$ или $g = 1/(3(\chi + 1)\cos^2 \theta)$). Для течения вдали от тела $r \rightarrow 0$ решение уравнения (2.11) можно искать в виде

$$\bar{\varphi} = r^\lambda f(\xi, \theta) + \dots, \quad \xi = xr^{-n}.$$

Так как при $V_\infty = 0$ мы должны получить асимптотику, соответствующую классическому уравнению $(\chi + 1)\varphi_x\varphi_{xx} - \Delta\varphi = 0$, то можно, по-видимому, положить $\lambda = 3n - 2$. Отметим, что при формальном переходе в (2.10) при $r \rightarrow \infty$ получим предельное уравнение

$$M(\varphi) \equiv 2\varphi_{xt} + (\chi + 1)\varphi_x\varphi_{xx} + 2V_\infty \cos \theta\varphi_{xr} - (2/r)V_\infty \sin \theta\varphi_{x\theta} - \Delta\varphi + ((\chi - 1)/2)V_\infty^2\varphi_{xx} = -(2R^2/r^3)V_\infty^3 \cos \theta(1 - 4\sin^2 \theta), \tag{2.12}$$

которое в стационарном случае допускает точное решение

$$\varphi = rf(\xi, \theta) + g(\theta)r^{-1}, \quad \xi = x/r, \quad g(\theta) = -R^2V_\infty^3 \sin^2 \theta \cos \theta.$$

При $R \ll 1$ приближенное решение уравнения (2.10) в стационарном случае можно искать в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_n(x, r, \theta)R^{2n}.$$

Тогда для $\tilde{\varphi}_0$ получим уравнение (2.12) в стационарном случае и без правой части ($M(\tilde{\varphi}_0) = 0$), которое имеет решение вида (2.2), где φ_n не зависят от t , а также решение $\tilde{\varphi}_0 = rf(\xi, \eta) + g(r, \theta)$, $\xi = x/r$, $\eta = \theta + \alpha \ln r$, $\Delta g = 0$. При $V_\infty \ll 1$ решение (2.10) можно искать в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_n(x, r, \theta)V_\infty^n.$$

В этом случае для $\tilde{\varphi}_0$ будем иметь известное трансзвуковое уравнение $(\chi + 1)\tilde{\varphi}_{0x}\tilde{\varphi}_{0xx} - \Delta\tilde{\varphi}_0 = 0$.

В случае **отрывного обтекания**, предполагая, что с поверхности цилиндра сходят две вихревые прямолинейные пелены бесконечной длины с постоянными и противоположными по знаку интенсивностями Γ , выражение для $\psi(r, \theta)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) = & V_\infty \cos \theta(r + R^2/r) + (\Gamma/2\pi) \int_0^\infty (\arctg((r \sin \theta - R)/(r \cos \theta - S)) - \\ & - \arctg((r \sin \theta + R)/(r \cos \theta - S)))dS + \\ & + (\Gamma/2\pi) \int_0^\infty (\arctg((r \sin \theta(S^2 + R^2) + R^3)/(r \cos \theta(S^2 + R^2) - SR^2)) - \\ & - \arctg((r \sin \theta(S^2 + R^2) - R^3)/(r \cos \theta(S^2 + R^2) - SR^2)))dS \end{aligned} \tag{2.13}$$

Точками схода вихрей являются точки $r = R$, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Для определения силового воздействия на обтекаемое тело согласно (1.8) необходимо знать $\psi_\theta(R, \theta)$ ($\psi_r(R, \theta) = 0$) по условию непротекания (1.6), которому функция (2.13) удовлетворяет. Определяя ψ_θ из (2.13) дифференцированием по θ и проводя затем интегрирование по S , получим

$$\psi_\theta(R, \theta) = -(\Gamma + 2V_\infty)R \sin \theta + (\Gamma R/2\pi)(\cos \theta \ln |(1 - \sin \theta)/(1 + \sin \theta)| - 2 \sin \theta (\arctg(\cos \theta/(1 - \sin \theta))) + \arctg(\cos \theta/(1 + \sin \theta))). \quad (2.14)$$

Вклад в выражение для $C_0 = - \int_0^{2\pi} P \cos \theta d\theta$, соответствующий (2.13), согласно (1.8), (2.14) определяется формулой ($V_\infty = R = 1$):

$$\int_0^{2\pi} \psi_\theta^2 \cos \theta d\theta = 2\Gamma^2 + 4\Gamma, \quad \Gamma < -2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P.A.Velmisov, M.D.Todorov, J.A.Kazakova, "Some classes of the solutions of aerohydrodynamic equations", *Applications of Mathematics in Engineering and Economics*, 2008, 427-441.
2. П.А. Вельмисов, Ю.А. Казакова, "О параметрических решениях дифференциальных уравнений с частными производными; приложения в транзвуковой газовой динамике", *Журнал Средневолжского математического общества*, **12:4** (2010), 24-30.
3. Ю.А.Казакова, "О некоторых классах решений уравнений аэрогидромеханики", *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат.науки*, **2(23)** (2011), 289-294.

Asymptotic equations of nonlinear transonic gas flows and their solutions

© P. A. Velmisov³, J. A. Tamarova⁴

Abstract. In this paper an equation for transonic gas flows, taking into account the transverse perturbations, surpassing perturbations of the main stream. Shows some exact particular solutions of this equation and their application to solving a number of problems.

Key Words: partial differential equations, asymptotic expansion, transonic gas flows, partial solutions

³ Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

⁴ Postgraduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; kazakovaua@mail.ru

УДК 517.9

Необходимые условия топологической сопряжённости трёхмерных диффеоморфизмов с гетероклиническими касаниями

© Е. А. Гринес¹, О. В. Починка²

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс трёхмерных диффеоморфизмов с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством и конечным числом орбит гетероклинического касания. Доказывается, что для изучаемых диффеоморфизмов необходимые условия топологической сопряжённости являются обобщением модулей топологической сопряжённости аналогичных двумерных динамических систем.

Ключевые слова: топологическая сопряжённость, гетероклинические касания, модули устойчивости.

Введение

Согласно работе Ш. Ньюхауса и Ж. Палиса [10], существует открытое множество дуг, которые начинаются в диффеоморфизме Морса-Смейла и имеют первую бифуркационную точку в диффеоморфизме с гетероклиническим касанием. В обзоре [1] описаны бифуркации систем, принадлежащих границе множества систем Морса-Смейла, в которую входят системы с конечным множеством неблуждающих траекторий, содержащим неподвижные точки, инвариантные многообразия которых имеют нетрансверсальное пересечение. Очевидно, что нарушение условия трансверсальности гетероклинических пересечений седловых точек диффеоморфизма приводит к его негрубости. Более того, это приводит к возникновению непрерывных топологических инвариантов — *модулей топологической сопряжённости* — и, следовательно, к существованию континуума несопряженных диффеоморфизмов с изоморфными графами и одинаковой геометрией гетероклинического пересечения.

Первым, кто обратил внимание на существование модулей топологической сопряжённости, был Ж. Палис [12]. Он обнаружил, что такими модулями обладают уже двумерные диффеоморфизмы с негрубой гетероклинической траекторией, в точках которой инвариантные многообразия двух разных седловых неподвижных точек имеют одностороннее касание. Существенным продвижением в этом направлении явилась работа В. ди Мелу, С. Ж. ван Стрина [7], в которой были найдены необходимые и достаточные условия того, что диффеоморфизм ориентируемой поверхности имеет конечное число модулей топологической сопряжённости, описывающих все классы топологической сопряжённости, принадлежащие некоторой окрестности такого диффеоморфизма.

В 2010 г. в работе [8] Т.М. Митряковой и О.В. Починки была получена топологическая классификация содержательного класса диффеоморфизмов ориентируемой поверхности с конечным числом модулей топологической сопряжённости. Радикальное отличие от уже упомянутой работы [7] заключается в приведении условий топологической сопряжённости систем не только для некоторой окрестности диффеоморфизмов данного класса, но и для “далёких” систем.

¹ Магистрант кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; grineseugene@mail.ru

² Доцент кафедры теории функций ННГУ им. Н.И. Лобачевского; olga-pochinka@yandex.ru

В случае многообразий размерности большей двух известно лишь несколько результатов. В работе Ш. Ньюхауса, Ж. Пэлиса и Ф. Такенса [11] приведено и доказано необходимое условие топологической сопряженности двух диффеоморфизмов n -мерных многообразий, содержащих одну орбиту одностороннего гетероклинического касания. В работе Ж. Пэлиса и В. ди Мелу [6] рассмотрены диффеоморфизмы n -мерных многообразий с одной орбитой одностороннего гетероклинического касания и приведена классификация диффеоморфизмов в окрестности.

В настоящей работе мы изучаем необходимые условия топологической сопряженности диффеоморфизмов трёхмерных многообразий с несколькими орбитами одностороннего гетероклинического касания.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м) и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

1. Формулировка результатов

В данной работе рассматривается класс $\Psi \subset \text{Diff}^4(M^3)$ диффеоморфизмов f , заданных на гладком трёхмерном замкнутом ориентируемом многообразии M^3 , сохраняющих ориентацию и удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) Цепно рекуррентное множество \mathcal{R}_f конечно и состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек, собственные значения которых положительны и удовлетворяют условию отсутствия резонансов³ вплоть до третьего порядка;
- 2) блуждающее множество диффеоморфизма f содержит конечное число орбит гетероклинического касания;

Пусть p, q — различные гиперболические седловые точки диффеоморфизма f такие, что пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ непусто. Тогда произвольная точка $x \in W_p^s \cap W_q^u$ называется *точкой гетероклинического пересечения*. Она может быть точкой *трансверсального* или *нетрансверсального* пересечения в следующем смысле. Два гладких подмногообразия N_1, N_2 многообразия M^3 *пересекаются трансверсально* в точке $x \in (N_1 \cap N_2)$, если $T_x N_1 + T_x N_2 = T_x M^3$. В противном случае, пересечение в точке x называется *нетрансверсальным пересечением (касанием)*. Изолированная точка касания x гладких двумерных подмногообразий N_1 и N_2 многообразия M^3 называется *точкой одностороннего касания*, если существует окрестность V_x точки x такая, что N_2 пересекается не более, чем с одной компонентой связности множества $V_x \setminus N_1$. Например любая изолированная точка касания двумерных инвариантных многообразий диффеоморфизма $f \in \Psi$ является точкой одностороннего касания.

Пусть σ — седловая точка диффеоморфизма $f \in \Psi$. Обозначим через $J_\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линейный диффеоморфизм, определяемый жордановой формой линейной части диффеоморфизма f в окрестности точки σ . Точка $O(0, 0, 0)$ является седловой точкой диффеоморфизма J_σ . В разделе 2. для каждого типа жордановой формы построена J_σ -инвариантная окрестность U_{J_σ} точки O .

³ Напомним, что для набора собственных чисел $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ некоторой матрицы A *резонансом* называют соотношение $\rho_i = \rho_1^{m_1} \cdot \rho_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \rho_n^{m_n}$, где $i \in \{1, \dots, n\}$, m_j ($j = 1, \dots, n$) — целые неотрицательные числа такие, что $|m| = \sum_{j=1}^n m_j \geq 2$. Число $|m|$ называют *порядком резонанса*.

О п р е д е л е н и е 1.1. f -инвариантную окрестность U_σ седловой точки σ назовем C^1 -линеаризующей, если существует C^1 -диффеоморфизм $\psi_\sigma : U_\sigma \rightarrow U_{J_\sigma}$, сопрягающий диффеоморфизм $f|_{U_\sigma}$ с диффеоморфизмом $J_\sigma|_{U_{J_\sigma}}$.

Следующая лемма доказана в разделе 2.

Л е м м а 1.1. У любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in \Psi$ существует линеаризующая окрестность.

Для диффеоморфизма f обозначим через \mathcal{A} множество таких точек гетероклинического касания, которые образованы в результате касания двумерных инвариантных многообразий. Для любой точки $a \in \mathcal{A}$ обозначим через σ_a^s и σ_a^u седловые точки такие, что a принадлежит пересечению инвариантных многообразий $W_{\sigma_a^s}^s$ и $W_{\sigma_a^u}^u$ диффеоморфизма $f \in \Psi$. Важным является то, что у σ_a^s обязательно есть одномерное неустойчивое многообразие, равно как у σ_a^u есть одномерное устойчивое многообразие. Обозначим через μ_a и λ_a собственное число, соответствующее одномерному собственному направлению для $J_{\sigma_a^s}$ и $J_{\sigma_a^u}$ соответственно.

Для произвольной точки $a \in \mathcal{A}$ определим параметр Θ_a , где $\Theta_a = \frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a}$. Доказательство следующего факта можно найти, например, в статье [11].

П р е д л о ж е н и е 1.1. Если диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма h такого, что $h(a) = a'$ для точки $a \in \mathcal{A}$, $h(\sigma_a^s) = \sigma_{a'}^s$, $h(\sigma_a^u) = \sigma_{a'}^u$, то $\Theta_a = \Theta_{a'}$.

Согласно ранее введённым обозначениям, $U_{\sigma_a^s} = \psi_{\sigma_a^s}^{-1}(U_{J_{\sigma_a^s}})$, $U_{\sigma_a^u} = \psi_{\sigma_a^u}^{-1}(U_{J_{\sigma_a^u}})$ — линеаризующие окрестности. Обозначим за U_a компоненту связности множества $U_{\sigma_a^s} \cap U_{\sigma_a^u}$, содержащую точку a . Для любой точки $p \in U_a$ запишем координаты её образов:

$$p^s = \psi_{\sigma_a^s}(p) = ([p]_x^s, [p]_y^s, [p]_z^s),$$

$$p^u = \psi_{\sigma_a^u}(p) = ([p]_x^u, [p]_y^u, [p]_z^u)$$

и положим

$$g_a = \psi_{\sigma_a^u} \circ \left(\psi_{\sigma_a^s} \Big|_{U_a} \right)^{-1} : \psi_{\sigma_a^s}(U_a) \rightarrow \psi_{\sigma_a^u}(U_a).$$

Отображение g_a можно так же записать в координатном виде как

$$g_a(x, y, z) = (\xi_a(x, y, z), \eta_a(x, y, z), \chi_a(x, y, z)).$$

Рассмотрим теперь подкласс диффеоморфизмов $\Psi^* \subset \Psi$ с дополнительным условием: Θ_a иррационально для любой $a \in \mathcal{A}$. Будем рассматривать такие точки касания $a, d \in \mathcal{A}$, что $\sigma_a^s = \sigma_a^s$, $\sigma_a^u = \sigma_a^u$ и знаки производных $\beta_a = \frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s)$ и $\beta_d = \frac{\partial \chi_d}{\partial z}(d^s)$ совпадают. Для таких точек введём параметр $\tau_d^a = \left| \frac{\beta_a}{\beta_d} \right|^{\frac{1}{\ln \mu_a}}$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

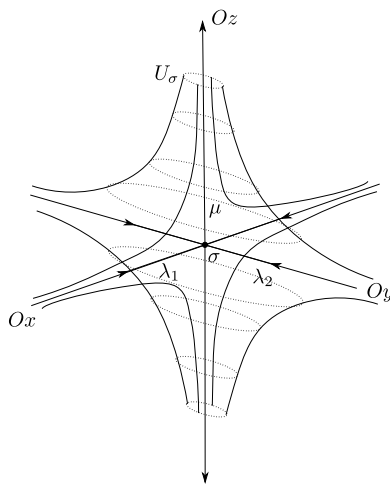
Т е о р е м а 1.1. Если диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi^*$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма h такого, что $h(a) = a'$, $h(d) = d'$, $h(\sigma_a^s) = \sigma_{a'}^s$ и $h(\sigma_a^u) = \sigma_{a'}^u$, то $\tau_d^a = \tau_{d'}^{a'}$.

2. Линеаризующая окрестность

Напомним, что для седловой точки σ диффеоморфизма $f \in \Psi$ мы обозначили через $J_\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линейный диффеоморфизм, определяемый жордановой формой линейной части диффеоморфизма f в окрестности точки σ . Если седловая точка σ имеет двумерное устойчивое многообразие, то диффеоморфизм $J_\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и J_σ -инвариантная окрестность U_{J_σ} седловой точки $O(0, 0, 0)$ диффеоморфизма J_σ имеют один из следующих трёх видов:

1. $J_\sigma(x, y, z) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \mu z)$, где $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ и $\mu > 1$;
 $U_{J_\sigma} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x|z|^{-\log_\mu \lambda_1} \right)^2 + \left(y|z|^{-\log_\mu \lambda_2} \right)^2 \leq 1 \right\}$.
2. $J_\sigma(x, y, z) = (\lambda x + y, \lambda y, \mu z)$, где $0 < \lambda < 1$ и $\mu > 1$;
 $U_{J_\sigma} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(y|z|^{-\log_\mu \lambda} \right)^2 + \left(x|z|^{-\log_\mu \lambda} - \frac{y}{\lambda \ln \mu} \cdot \ln |z| \cdot |z|^{-\log_\mu \lambda} \right)^2 \leq 1 \right\} \cup \{z = 0\}$.
3. $J_\sigma(x, y, z) = (\rho \cdot (x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi), \rho \cdot (x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi), \mu z)$, где $0 < \rho < 1$ и $\mu > 1$;
 $U_{J_\sigma} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2) \cdot |z|^{-\log_\mu \rho} \leq 1 \right\}$.

Аналогичным образом записываются отображение J_σ и окрестность U_{J_σ} в случае, когда седловая точка σ имеет двумерное неустойчивое многообразие.



Р и с у н о к 2.1

Линеаризующая окрестность U_{J_σ} для $J_\sigma(x, y, z) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \mu z)$

Л е м м а 2.1. У любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in \Psi$ существует линеаризующая окрестность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in \text{Diff}^4(M^3)$ и удовлетворяет условию отсутствия резонансов вплоть до третьего порядка, то, согласно теореме Белицкого (см. [2], глава 6, §5 или [15], теорема 3.20), в окрестности точки σ диффеоморфизм f приводится к линейному виду C^1 -гладкой заменой переменных. Таким образом, для диффеоморфизма $f \in \Psi$ существуют окрестности V_σ седловой точки σ диффеоморфизма f , V_O — начала координат $O(0, 0, 0)$ и C^1 -диффеоморфизм $\bar{\psi}_\sigma : V_\sigma \rightarrow V_O$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма f на V_σ с ограничением диффеоморфизма Df_σ на V_O . Определим

множества $\tilde{V}_\sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V_\sigma)$ и $\tilde{V}_O = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} Df_\sigma^n(V_O)$. Так как W_σ^s и W_σ^u являются подмногообразиями M^3 (доказательство проводится аналогично работе [9], пункт 2 теоремы 1), то диффеоморфизм $\tilde{\psi}_\sigma$ можно продолжить до диффеоморфизма $\tilde{\psi}_\sigma : \tilde{V}_\sigma \rightarrow \tilde{V}_O$, определённого на f -инвариантном множестве \tilde{V}_σ , положив его равным $\tilde{\psi}_\sigma(x) = Df_\sigma^{-m}(\tilde{\psi}_\sigma(f^m(x)))$, где m — целое число такое, что $f^m(x) \in V_\sigma$. Линейной заменой координат S в \mathbb{R}^3 можно сопрячь ограничение диффеоморфизма Df_σ на инвариантном множестве \tilde{V}_O с его жордановой формой J_σ на инвариантном множестве \tilde{V}_O .

Для любого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$U_{J_\sigma}^k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{k}x, \sqrt{k}y, z) \in U_{J_\sigma} \right\}.$$

Выберем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $U_{J_\sigma}^k \subset \tilde{V}_O$. Заметим, что линейный диффеоморфизм $J_\sigma|_{U_{J_\sigma}^k}$ сопряжен с диффеоморфизмом $J_\sigma|_{U_{J_\sigma}}$ посредством диффеоморфизма $h(x, y, z) = (\sqrt{k}x, \sqrt{k}y, z)$. Тогда $U_\sigma = \tilde{\psi}_\sigma^{-1} \circ S^{-1}(U_{J_\sigma}^k)$ — искомая линеаризующая окрестность с сопрягающим диффеоморфизмом

$$\psi_\sigma = h \circ S \circ \tilde{\psi}_\sigma : U_\sigma \rightarrow U_{J_\sigma}.$$

Доказательство закончено.

3. Вспомогательные утверждения

Л е м м а 3.1. *Для отображения линеаризующих окрестностей*

$$g_a(x, y, z) = (\xi_a(x, y, z), \eta_a(x, y, z), \chi_a(x, y, z))$$

справедливы следующие соотношения: $\frac{\partial \chi_a}{\partial x}(a^s) = 0$, $\frac{\partial \chi_a}{\partial y}(a^s) = 0$, $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s) \neq 0$.

Доказательство. Между инвариантными многообразиями $W_{\sigma_a^s}^s$, $W_{\sigma_a^u}^u$ и их образами в линеаризующих окрестностях $U_{J_{\sigma_a^s}}$, $U_{J_{\sigma_a^u}}$ есть следующая связь:

- плоскость Oxy в $U_{J_{\sigma_a^s}}$ соответствует $W_{\sigma_a^s}^s$;
- поверхность $\psi_{\sigma_a^s}(W_{\sigma_a^u}^u)$ в $U_{J_{\sigma_a^s}}$ соответствует $W_{\sigma_a^u}^u$;
- плоскость Oxy в $U_{J_{\sigma_a^u}}$ соответствует $W_{\sigma_a^s}^s$;
- поверхность $\psi_{\sigma_a^u}(W_{\sigma_a^s}^s)$ в $U_{J_{\sigma_a^u}}$ соответствует $W_{\sigma_a^s}^s$.

Пусть a — точка касания $W_{\sigma_a^s}^s$ и $W_{\sigma_a^u}^u$. В силу того, что $\psi_{\sigma_a^s}$ и $\psi_{\sigma_a^u}$ — диффеоморфизмы, то $\psi_{\sigma_a^s}(a)$ и $\psi_{\sigma_a^u}(a)$ так же будут точками касания для образов $W_{\sigma_a^s}^s$ и $W_{\sigma_a^u}^u$ в соответствующих окрестностях $U_{J_{\sigma_a^s}}$ и $U_{J_{\sigma_a^u}}$ (см. [13]).

Рассмотрим теперь пару гладких кривых на плоскости $Oxy \subset U_{J_{\sigma_a^s}}$, проходящих через точку a^s . Пусть касательные векторы к этим кривым в точке a^s равны $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$ соответственно. При действии отображения $g_a(x, y, z)$ на эти кривые они перейдут в кривые, принадлежащие поверхности $\psi_{\sigma_a^u}(W_{\sigma_a^s}^s) \subset U_{J_{\sigma_a^u}}$ и касающиеся плоскости $Oxy \subset U_{J_{\sigma_a^u}}$. По условию, касательные векторы к образам кривых в точке a^u должны

лежать в плоскости $Oxy \subset U_{J_{\sigma_a^u}}$. Воспользуемся теоремой о композиции дифференцируемых отображений, считая, что исходные кривые были параметризованы некоторым параметром t :

$$\begin{pmatrix} \xi'_t \\ \eta'_t \\ \chi'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_a}{\partial x} & \frac{\partial \xi_a}{\partial y} & \frac{\partial \xi_a}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta_a}{\partial x} & \frac{\partial \eta_a}{\partial y} & \frac{\partial \eta_a}{\partial z} \\ \frac{\partial \chi_a}{\partial x} & \frac{\partial \chi_a}{\partial y} & \frac{\partial \chi_a}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{pmatrix},$$

где матрица частных в производных есть в точности матрица Якоби для отображения $g_a(x, y, z)$. Подставим в правую часть известные касательные векторы и получим, что касательные векторы к образам равны $(\frac{\partial \xi_a}{\partial x}, \frac{\partial \eta_a}{\partial x}, \frac{\partial \chi_a}{\partial x})$ и $(\frac{\partial \xi_a}{\partial y}, \frac{\partial \eta_a}{\partial y}, \frac{\partial \chi_a}{\partial y})$. Из условия касания плоскости $Oxy \subset U_{J_{\sigma_a^u}}$ делаем вывод, что $\frac{\partial \chi_a}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \chi_a}{\partial y} = 0$. Однако, так как $g_a(x, y, z)$ – диффеоморфизм, то его якобиан не обращается в ноль, следовательно, необходимо чтобы $\frac{\partial \chi_a}{\partial z} \neq 0$.

Доказательство закончено.

В дальнейшем при доказательстве некоторых утверждений мы будем ссылаться на

Предложение 3.1. Пусть σ – седловая точка и J_σ – одна из перечисленных ранее жордановых форм. Для любой последовательности точек $\{r_n\}$ из $U_{J_\sigma} \setminus Oz$, сходящейся к точке $r \in (Oz \setminus O)$, существует подпоследовательность $\{r_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j \rightarrow +\infty$ и точка q в $Oxy \setminus O$ такие, что последовательность точек $\{f^{k_j}(r_{n_j})\}$ сходится к точке q (доказательство аналогично лемме 2.1.1 в [3]).

Пусть $\{a_\nu\} \subset (U_a \setminus W_{\sigma_a^u}^u)$ – последовательность точек, сходящаяся к точке одностороннего касания $a \in W_{\sigma_a^s}^s \cap W_{\sigma_a^u}^u$ и удовлетворяющая при некоторых положительных константах C_1 и C_2 условиям $|\frac{[a_\nu]_x^s - [a]_x^s}{[a_\nu]_z^s}| < C_1$ и $|\frac{[a_\nu]_y^s - [a]_y^s}{[a_\nu]_z^s}| < C_2$. Заметим, что последняя пара ограничений также запрещает выбор точек на $W_{\sigma_a^s}^s$, то есть, $\{a_\nu\} \subset U_a \setminus (W_{\sigma_a^u}^u \cup W_{\sigma_a^s}^s)$. Из предложения 3.1. следует, что существует подпоследовательность $\{a_{\nu_n}\}$, последовательности натуральных чисел $\{k_n\}$, $\{m_n\}$, точка $b \in (W_{\sigma_a^u}^u \setminus \sigma_a^s)$ и точка $c \in (W_{\sigma_a^s}^s \setminus \sigma_a^u)$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = +\infty$ и последовательности точек $\{b_n = f^{k_n}(a_{\nu_n})\}$, $\{c_n = f^{-m_n}(a_{\nu_n})\}$ сходятся к точкам b и c , соответственно (см. рис. 3.1). Здесь и далее последовательность $\{a_{\nu_n}\}$ для краткости будем обозначать как $\{a_n\}$.

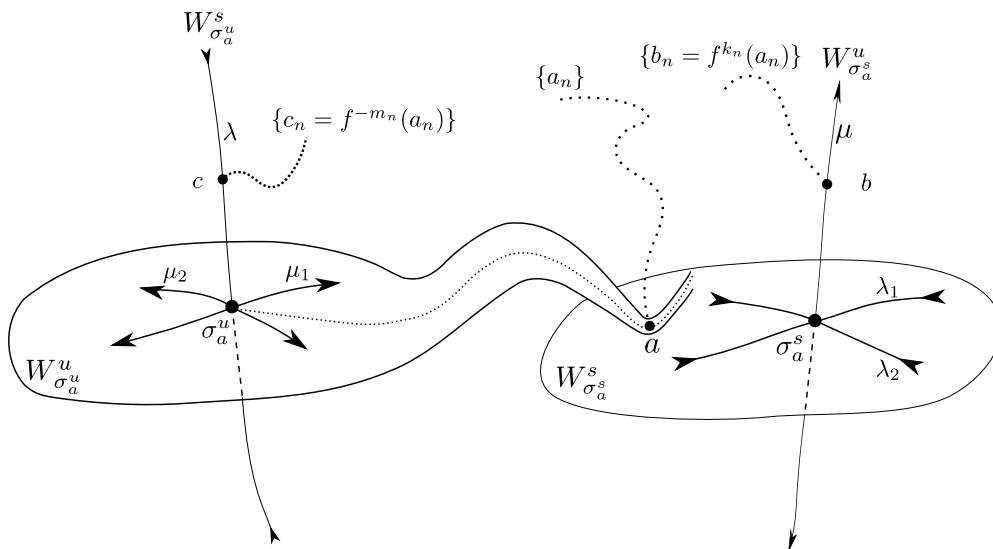


Рисунок 3.1

Иллюстрация к лемме 3.2.

Л е м м а 3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{k_n} = -\frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $c_n = f^{-m_n}(a_n)$ и $a_n = f^{-k_n}(b_n)$, то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} [c_n]_z^u &= \lambda_a^{-m_n} \cdot [a_n]_z^u, \\ [b_n]_z^s &= \mu_a^{k_n} \cdot [a_n]_z^s. \end{aligned}$$

Рассмотрим отношение $\frac{[c_n]_z^u}{[b_n]_z^s} = \lambda_a^{-m_n} \mu_a^{-k_n} \cdot \frac{[a_n]_z^u}{[a_n]_z^s}$. Множитель $\frac{[a_n]_z^u}{[a_n]_z^s}$ может быть представлен в виде

$$\frac{[a_n]_z^u}{[a_n]_z^s} = \frac{\chi_a([a_n]_x^s, [a_n]_y^s, [a_n]_z^s)}{[a_n]_z^s} = \frac{\chi_a([a_n]_x^s, [a_n]_y^s, [a_n]_z^s) - \chi_a([a]_x^s, [a]_y^s, [a]_z^s)}{[a_n]_z^s - [a]_z^s}.$$

Применим к числителю формулу конечных приращений Лагранжа:

$$\begin{aligned} &\frac{\chi_a([a_n]_x^s, [a_n]_y^s, [a_n]_z^s) - \chi_a([a]_x^s, [a]_y^s, [a]_z^s)}{[a_n]_z^s - [a]_z^s} = \\ &= \frac{\frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial z}([a_n]_z^s - [a]_z^s) + \frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial x}([a_n]_x^s - [a]_x^s) + \frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial y}([a_n]_y^s - [a]_y^s)}{[a_n]_z^s - [a]_z^s} = \\ &= \frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial x} \cdot \frac{[a_n]_x^s - [a]_x^s}{[a_n]_z^s - [a]_z^s} + \frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial y} \cdot \frac{[a_n]_y^s - [a]_y^s}{[a_n]_z^s - [a]_z^s}, \end{aligned}$$

где $\frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial x}$, $\frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial y}$, $\frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial z}$ — значения соответствующих частных производных, взятых в некоторой точке отрезка, соединяющего a и a_n . Нетрудно видеть, что в силу ограниченности $\left| \frac{[a_n]_x^s - [a]_x^s}{[a_n]_z^s} \right|$ и $\left| \frac{[a_n]_y^s - [a]_y^s}{[a_n]_z^s} \right|$, а также из условия непрерывности и равенства нулю производных $\frac{\partial \chi_a}{\partial x}$ и $\frac{\partial \chi_a}{\partial y}$ в точке a^s , предел этого выражения при $n \rightarrow +\infty$ стремится к производной $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}$ в точке a^s . Логарифмируя $\frac{[c_n]_z^u}{[b_n]_z^s}$ (если левая или правая часть — отрицательная, то взять по модулю и прологарифмировать), деля на $-k_n \cdot \ln \lambda_a$ и перенося члены в другую часть, получим соотношение

$$\frac{m_n}{k_n} + \frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a} = \frac{1}{k_n \cdot \ln \lambda_a} \cdot \left(\ln \frac{[a_n]_z^u}{[a_n]_z^s} - \ln \frac{[c_n]_z^u}{[b_n]_z^s} \right).$$

Скобка в правой части равенства стремится к константе $\ln \frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s) - \ln \frac{[c]_z^u}{[b]_z^s}$, следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{k_n} = -\frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Доказательство леммы 3.3. использует идеи работ [5] (доказательство леммы 2.3) и [8].

Обозначим через $\ell_{\sigma_a^+}^u$ ($\ell_{\sigma_a^-}^u$) и $\ell_{\sigma_a^+}^s$ ($\ell_{\sigma_a^-}^s$) сепаратрисы инвариантных многообразий $W_{\sigma_a^+}^u$ и $W_{\sigma_a^-}^s$, соответственно, удовлетворяющие условиям $\psi_{\sigma_a^+}(\ell_{\sigma_a^+}^u) = OZ^+ = \{z \in OZ : z > 0\}$ ($\psi_{\sigma_a^-}(\ell_{\sigma_a^-}^u) = OZ^- = \{z \in OZ : z < 0\}$) и $\psi_{\sigma_a^+}(\ell_{\sigma_a^+}^s) = OZ^+$ ($\psi_{\sigma_a^-}(\ell_{\sigma_a^-}^s) = OZ^-$).

Л е м м а 3.3. Пусть $a \in \mathcal{A}$ — точка гетероклинического касания и Θ_a иррационально. Тогда, для любой точки $b \in \ell_{\sigma_a^+}^u$ существует $\varepsilon_a \in \{+, -\}$ такое, что для любой точки $c \in \ell_{\sigma_a^+}^{s\varepsilon_a}$ существует последовательность $\{a_n\} \rightarrow a$ и последовательности $\{m_n\} \rightarrow +\infty$, $\{k_n\} \rightarrow +\infty$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{k_n}(a_n) = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-m_n}(a_n) = c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varepsilon_a = +$, если $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s) > 0$ и $\varepsilon_a = -$, если $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s) < 0$. Пусть, для определенности, $\varepsilon_a = +$ и $c \in \ell_{\sigma_a^+}^{s+}$. Рассмотрим последовательность $\{\alpha_m\}$ точек с координатами $[\alpha_m]_x^s = [a]_x^s$, $[\alpha_m]_y^s = [a]_y^s$, $[\alpha_m]_z^u = \lambda_a^m [c]_z^u$. Так как $c \in \ell_{\sigma_a^+}^{s+}$, то для последовательности $\{\alpha_m\}$ выполняется условие $[\alpha_m]_z^u > 0$. Положим $\beta_m = \frac{[\alpha_m]_z^u}{[\alpha_m]_z^s}$. Поскольку $\frac{[\alpha_m]_x^s - [a]_x^s}{[\alpha_m]_z^s} = 0$ и $\frac{[\alpha_m]_y^s - [a]_y^s}{[\alpha_m]_z^s} = 0$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s) = \beta_a$ (см. лемму 3.2.). Пусть $s_m = \frac{\ln[\alpha_m]_z^s}{\ln \mu_a} = \frac{\ln(\frac{1}{\beta_m} [\alpha_m]_z^u)}{\ln \mu_a} = \frac{\ln(\frac{1}{\beta_m} \lambda_a^m [c]_z^u)}{\ln \mu_a} = \frac{\ln([c]_z^u \frac{1}{\beta_a} \lambda_a^m \frac{\beta_a}{\beta_m})}{\ln \mu_a}$. Тогда $s_m = \frac{\ln([c]_z^u \frac{1}{\beta_a})}{\ln \mu_a} + \frac{\ln \frac{\beta_a}{\beta_m}}{\ln \mu_a} + m \frac{\ln \lambda_a}{\ln \mu_a}$. Положим $\theta = \frac{\ln([c]_z^u \frac{1}{\beta_a})}{\ln \mu_a}$, $\zeta_m = \frac{\ln \frac{\beta_a}{\beta_m}}{\ln \mu_a}$. Тогда $s_m = \theta + \zeta_m + m \frac{\ln \lambda_a}{\ln \mu_a}$. Заметим, что $\frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a} = \Theta_a < 0$, $\theta = const$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta_m = 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = -\infty$. Рассмотрим отображение $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданное формулой $y = x + \omega_a$, где $\omega_a = \frac{1}{\Theta_a}$. Данное отображение индуцирует диффеоморфизм окружности $\hat{y} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ посредством накрытия $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, действующего по формуле $p(x) = e^{2\pi i x}$. По построению, диффеоморфизм \hat{y} является поворотом на угол $2\pi\omega_a$, где $\omega_a < 0$ и $\{\theta + m\omega_a\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} y^m(\theta)$. Так как Θ_a иррационально, то ω_a иррационально и, согласно [4] (предложение 1.3.3), $p(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} y^m(\theta))$ всюду плотно на окружности. Поскольку $\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta_m = 0$, то $p(s_m)$ также всюду плотно на окружности. Для каждого m можно записать $s_m = \xi_m + \tilde{s}_m$, где ξ_m — целая часть s_m , $\tilde{s}_m \in [0, 1)$. Поскольку $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = -\infty$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m = -\infty$. Следовательно, множество $\{\tilde{s}_m\}$ плотно на $[0, 1)$, а значит множество точек $\{\mu_a^{\tilde{s}_m}\}$ плотно в промежутке $[1; \mu_a)$. Пусть q — целое число такое, что $\mu_a^q \leq [b]_z^s < \mu_a^{q+1}$. Тогда $\mu_a^{q+\tilde{s}_m}$ плотно в $[\mu_a^q, \mu_a^{q+1})$. Следовательно, для любой точки $b \in \ell_{\sigma_a^+}^{u+}$, $b = (0, 0, [b]_z^s)$ существует подпоследовательность $\{\tilde{s}_{m_n}\}$ такая, что можно записать $[b]_z^s = \mu_a^{\delta+q}$, где $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_{m_n}$. Следовательно, $[b]_z^s = \mu_a^q \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_a^{\tilde{s}_{m_n}} = \mu_a^q \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_a^{s_{m_n}} \mu_a^{-\xi_{m_n}} = \mu_a^q \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_a^{-\xi_{m_n}} e^{s_{m_n} \ln \mu_a} = \mu_a^q \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_a^{-\xi_{m_n}} e^{\frac{\ln[\alpha_{m_n}]_z^s}{\ln \mu_a} \ln \mu_a} = \mu_a^q \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_a^{-\xi_{m_n}} [\alpha_{m_n}]_z^s$. Положим $-\xi_{m_n} + q = k_n$, $\{a_n\} = \{\alpha_{m_n}\}$, $b_n = f^{k_n}(a_n)$, $c_n = f^{-m_n}(a_n)$. Нетрудно видеть, что построенная последовательность $\{a_n\}$ является искомой.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Пусть $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — линейный диффеоморфизм, оставляющий инвариантными ось Oz и плоскость Oxy . Пусть L действует на оси Oz как растяжение с коэффициентом $\mu > 1$. Пусть для любой точки $P \in Oxy$ итерации отображения $L^n(P)$ стремятся к O при $n \rightarrow +\infty$. Пусть $\Phi = (\Phi_1(x, y, z), \Phi_2(x, y, z), \Phi_3(x, y, z))$ — некоторый диффеоморфизм, коммутирующий с L ; Φ так же оставляет инвариантным многообразие Oxy . Тогда справедлива следующая лемма.

Л е м м а 3.4. *Для отображения Φ производная $\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}$ одинакова во всех точках плоскости Oxy и отлична от нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из инвариантности плоскости Oxy под действием Φ следует, что $\Phi_3(x, y, 0) \equiv 0$. Согласно лемме Адамара (формулировку и доказательство смотри в [14]), функция Φ_3 тогда может быть представлена как $z \cdot g(x, y, z)$, где $g(x, y, z)$ — некоторая непрерывная функция и $g(x, y, 0) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \Big|_{(x,y,0)}$. Далее, из условия коммутирования L и Φ следует, что L^n и Φ так же коммутируют при любом $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим теперь последовательность точек $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, где $x_n = x^*$, $y_n = y^*$, $z_n = \mu^{-2n}$, x^* и y^* — некоторые произвольные координаты точек на плоскости Oxy . Применим равенство $\Phi \circ L^n = L^n \circ \Phi$ к n -ому элементу построенной нами последовательности и изучим поведение z -координаты. Получим равенство

$$\mu^n z_n \cdot g(L^n|_{Oxy}(x_n, y_n), \mu^n z_n) = \mu^n z_n \cdot g(x_n, y_n, z_n)$$

или, что то же самое,

$$g(L^n|_{Oxy}(x_n, y_n), \mu^n z_n) = g(x_n, y_n, z_n).$$

Переходя к пределу, мы получаем, что $g(0, 0, 0) = g(x^*, y^*, 0)$, то есть $\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}|_{(x^*, y^*, 0)} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}|_{(0,0,0)}$ для любых x^* и y^* . Остаётся заметить, что так как $\Phi_3(x, y, 0) \equiv 0$, то $\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}|_{(x,y,0)} \equiv \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}|_{(x,y,0)} \equiv 0$ и $\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}|_{(0,0,0)} \neq 0$ в силу невырожденности якобиана диффеоморфизма Φ . Утверждение леммы доказано.

Доказательство закончено.

Лемма 3.5. Для любых точек $d, a \in \mathcal{A}$ таких, что $\sigma_d^s = \sigma_a^s$ и $\sigma_d^u = \sigma_a^u$, параметр τ_d^a не зависит от выбора линеаризующих окрестностей седловых точек σ_d^s и σ_d^u .

Доказательство.

Напомним, что $\tau_d^a = \left| \frac{\beta_a}{\beta_d} \right|^{\frac{1}{\ln \mu^a}}$, $\beta_a = \frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s)$ и $\beta_d = \frac{\partial \chi_d}{\partial z}(d^s)$ для $a, d \in \mathcal{A}$. Для доказательства леммы достаточно показать, что отношения $\frac{\beta_a}{\beta_d}$ не зависят от выбора диффеоморфизмов $\psi_{\sigma_a^s} : U_{\sigma_a^s} \rightarrow U_{J_{\sigma_a^s}}$ и $\psi_{\sigma_a^u} : U_{\sigma_a^u} \rightarrow U_{J_{\sigma_a^u}}$.

Как было определено ранее, для точки $a \in \mathcal{A}$ отображение $g_a(x, y, z)$ записывается в виде $g_a = \psi_{\sigma_a^u} \circ (\psi_{\sigma_a^s}|_{U_a})^{-1} : \psi_{\sigma_a^s}(U_a) \rightarrow \psi_{\sigma_a^u}(U_a)$, где U_a — компонента связности множества $U_{\sigma_a^s} \cap U_{\sigma_a^u}$, содержащая точку a . Пусть мы выбрали другие линеаризующие окрестности $\tilde{U}_{\sigma_a^s}$ и $\tilde{U}_{\sigma_a^u}$, а также диффеоморфизмы $\tilde{\psi}_{\sigma_a^s} : \tilde{U}_{\sigma_a^s} \rightarrow U_{J_{\sigma_a^s}}$ и $\tilde{\psi}_{\sigma_a^u} : \tilde{U}_{\sigma_a^u} \rightarrow U_{J_{\sigma_a^u}}$, отличные от $\psi_{\sigma_a^s}$ и $\psi_{\sigma_a^u}$ соответственно. Пусть \tilde{U}_a — компонента связности множества $\tilde{U}_{\sigma_a^s} \cap \tilde{U}_{\sigma_a^u}$, содержащая точку a , и $\tilde{g}_a = \tilde{\psi}_{\sigma_a^u} \circ (\tilde{\psi}_{\sigma_a^s}|_{\tilde{U}_a})^{-1}$, где $\tilde{g}_a(x, y, z) = (\tilde{\xi}_a(x, y, z), \tilde{\eta}_a(x, y, z), \tilde{\chi}_a(x, y, z))$. Тогда $\tilde{g}_a = \tilde{\psi}_{\sigma_a^u} \circ \psi_{\sigma_a^u}^{-1} \circ \psi_{\sigma_a^s} \circ \psi_{\sigma_a^s}^{-1} \circ \tilde{\psi}_{\sigma_a^s}^{-1}$. Положим $\Psi^s = \tilde{\psi}_{\sigma_a^s} \circ \psi_{\sigma_a^s}^{-1}$ и $\Psi^u = \tilde{\psi}_{\sigma_a^u} \circ \psi_{\sigma_a^u}^{-1}$. Получим $\tilde{g}_a = \Psi^u \circ g_a \circ (\Psi^s)^{-1}$. По построению, диффеоморфизмы Ψ^s и Ψ^u коммутируют с линейными диффеоморфизмами $J_{\sigma_a^s}$ и $J_{\sigma_a^u}$ соответственно. Положим $\Psi^s(x, y, z) = (\Psi_1^s(x, y, z), \Psi_2^s(x, y, z), \Psi_3^s(x, y, z))$ и $\Psi^u(x, y, z) = (\Psi_1^u(x, y, z), \Psi_2^u(x, y, z), \Psi_3^u(x, y, z))$. Поскольку $\Psi^s(Oxy) = \Psi^u(Oxy) = Oxy$, то $\Psi_3^s(x, y, 0) \equiv \Psi_3^u(x, y, 0) \equiv 0$. Следовательно, $\frac{\partial \Psi_3^s}{\partial x}(x, y, 0) \equiv \frac{\partial \Psi_3^u}{\partial y}(x, y, 0) \equiv 0$ и $\frac{\partial \Psi_3^s}{\partial z}(x, y, 0) \equiv \frac{\partial \Psi_3^u}{\partial z}(x, y, 0) \equiv 0$. Заметим, что из $\tilde{g}_a = \Psi^u \circ g_a \circ (\Psi^s)^{-1}$ следует, что

$$D\tilde{g}_a|_{([\tilde{a}]_x^s, [\tilde{a}]_y^s, 0)} = D\Psi^u|_{([a]_x^u, [a]_y^u, 0)} \cdot Dg_a|_{([a]_x^s, [a]_y^s, 0)} \cdot D(\Psi^s)^{-1}|_{([\tilde{a}]_x^s, [\tilde{a}]_y^s, 0)},$$

где значения якобианов взяты в произвольной точке гетероклинического касания $a \in \mathcal{A}$. Согласно доказанным ранее утверждениям (леммы 3.1. и 3.4.), якобианы отображений имеют следующий вид:

$$Dg_a|_{([a]_x^s, [a]_y^s, 0)} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & \frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s) \end{pmatrix},$$

$$D\Psi^u|_{([a]_x^u, [a]_y^u, 0)} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_3^u}{\partial z}(a^u) \end{pmatrix},$$

$$D(\Psi^s)^{-1}|_{([\tilde{a}]_x^s, [\tilde{a}]_y^s, 0)} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial \Psi_3^s}{\partial z}\right)^{-1}(\tilde{a}^s) \end{pmatrix},$$

где звёздочками заменены значения частных производных, которые не влияют на доказательство утверждения. Перемножая якобианы, мы получаем равенство

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_a}{\partial z} \Big|_{([\tilde{a}]_x^s, [\tilde{a}]_y^s, 0)} = \frac{\partial \Psi_3^u}{\partial z} \Big|_{([a]_x^u, [a]_y^u, 0)} \cdot \frac{\partial \chi_p}{\partial z} \Big|_{([a]_x^s, [a]_y^s, 0)} \cdot \left(\frac{\partial \Psi_s^3}{\partial z} \right)^{-1} \Big|_{([\tilde{a}]_x^s, [\tilde{a}]_y^s, 0)}$$

или же, с учётом леммы 3.4.,

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_p}{\partial z} \Big|_{([\tilde{a}]_x^s, [\tilde{a}]_y^s, 0)} = \frac{\partial \Psi_3^u}{\partial z} \Big|_{(0,0,0)} \cdot \frac{\partial \chi_p}{\partial z} \Big|_{([a]_x^s, [a]_y^s, 0)} \cdot \left(\frac{\partial \Psi_s^3}{\partial z} \right)^{-1} \Big|_{(0,0,0)}.$$

Точно такие же выводы справедливы и для точки $d \in \mathcal{A}$. Следовательно, $\frac{\tilde{\beta}_a}{\tilde{\beta}_d} = \frac{\frac{\partial \tilde{\chi}_a}{\partial z}(\tilde{a}^s)}{\frac{\partial \tilde{\chi}_d}{\partial z}(\tilde{d}^s)} = \frac{\frac{\partial \Psi_3^u}{\partial z}(0,0,0) \frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s) \frac{\partial \Psi_s^3}{\partial z}(0,0,0)}{\frac{\partial \Psi_3^u}{\partial z}(0,0,0) \frac{\partial \chi_d}{\partial z}(d^s) \frac{\partial \Psi_s^3}{\partial z}(0,0,0)} = \frac{\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s)}{\frac{\partial \chi_d}{\partial z}(d^s)} = \frac{\beta_a}{\beta_d}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Пусть \hat{U}_{a^s} – некоторая евклидова окрестность точки касания $a^s \in U_{J_{\sigma_a^s}}$ и $\hat{U}_a = \psi_{\sigma_a^s}^{-1}(\hat{U}_{a^s}) \subset U_a$. Будем считать, что знак производной $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}$ в \hat{U}_{a^s} всюду одинаков (такая окрестность существует в силу непрерывности частной производной). Также будем считать, что окрестность \hat{U}_{a^s} такова, что $\psi_{\sigma_a^s}(W_{\sigma_a^s}^u \cap \hat{U}_a)$ пересекается только с одной компонентой связности $\hat{U}_{a^s} \setminus \psi_{\sigma_a^s}(W_{\sigma_a^s}^s \cap \hat{U}_a)$ (такая окрестность существует в силу односторонности касания). Обозначим за $\hat{U}_{a^s}^+$ и $\hat{U}_{a^s}^-$ множества точек $\{p \in \hat{U}_{a^s} : [p]_z^s > 0\}$ и $\{p \in \hat{U}_{a^s} : [p]_z^s < 0\}$ соответственно. Также обозначим за ε_a знак производной $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s)$; знак, противоположный знаку частной производной в точке a , будем обозначать $\bar{\varepsilon}_a$.

Пусть a и a' – точки гетероклинического касания, $h(a) = a'$, и пусть линеаризующая окрестность $U_{\sigma_a^s}$ выбрана таким образом, что $h(U_{\sigma_a^s}) \subseteq U_{\sigma_{a'}^s}$. Последнего всегда можно добиться: если $h(U_{\sigma_a^s}) \not\subseteq U_{\sigma_{a'}^s}$, то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $U_{\sigma_a^s}^k = \psi_{\sigma_a^s}^{-1}(U_{J_{\sigma_a^s}^k})$, при этом $h(U_{\sigma_a^s}^k) \subseteq U_{\sigma_{a'}^s}$ (см. доказательство леммы 2.1.) и тогда уже $U_{\sigma_a^s}^k$ можно использовать в качестве линеаризующей окрестности $U_{\sigma_a^s}$. Тогда определим гомеоморфизм $\hat{h}_s: \psi_{\sigma_a^s}(U_{\sigma_a^s}) \rightarrow \psi_{\sigma_{a'}^s}(h(U_{\sigma_a^s}))$ формулой $\hat{h}_s = \psi_{\sigma_{a'}^s} h \psi_{\sigma_a^s}^{-1}$. Раз образом точки a^s под действием \hat{h}_s является точка a'^s , то образ окрестности \hat{U}_{a^s} обозначим через $\hat{U}_{a'^s}$; для неё аналогичным образом вводятся множества $\hat{U}_{a'^s}^+$ и $\hat{U}_{a'^s}^-$. Аналогичным образом можно определить гомеоморфизм $\hat{h}_u: \psi_{\sigma_a^u}(U_{\sigma_a^u}) \rightarrow \psi_{\sigma_{a'}^u}(h(U_{\sigma_a^u}))$.

Л е м м а 3.6. Для отображений g_a и \hat{h}_s справедливы следующие утверждения:

1. Образ $\hat{U}_{a^s}^+$ относительно \hat{h}_s есть в точности одно из множеств $\hat{U}_{a'^s}^+$ или $\hat{U}_{a'^s}^-$. Образ $\hat{U}_{a^s}^-$ относительно \hat{h}_s тогда есть другое множество.
2. Образы точек множества $\hat{U}_{a^s}^{\varepsilon_a}$ под действием g_a обладают свойством $\chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, [p]_z^s) > \chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, 0)$. Образы точек множества $\hat{U}_{a^s}^{\bar{\varepsilon}_a}$ тогда обладают свойством $\chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, [p]_z^s) < \chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Первое утверждение очевидным образом следует из свойств гомеоморфизмов. Так как h – сопрягающий гомеоморфизм, то образ инвариантного многообразия $W_{\sigma_a^s}^s$ есть инвариантное многообразие $W_{\sigma_{a'}^s}^s$. В окрестностях $U_{J_{\sigma_a^s}}$ и $U_{J_{\sigma_{a'}^s}}$ им соответствуют плоскости $\{z = 0\}$. Таким образом, плоскость $\{z = 0\} \subset U_{J_{\sigma_{a'}^s}}$ является образом $\{z = 0\} \subset U_{J_{\sigma_a^s}}$ под действием индуцированного гомеоморфизма \hat{h}_s .

Окрестность \hat{U}_{a^s} можно представить в виде объединения трёх непересекающихся частей: $\hat{U}_{a^s} = \hat{U}_{a^s}^+ \cup \hat{U}_{a^s}^- \cup D$, где $D = \hat{U}_{a^s} \cap \{z = 0\}$. Окрестности \hat{U}_{a^s} и $\hat{U}_{a'^s}$ гомеоморфны друг другу; значит, $\hat{U}_{a^s} \setminus D$ и $\hat{U}_{a'^s} \setminus \hat{h}_s(D)$ также гомеоморфны друг другу. Множество $\hat{U}_{a^s} \setminus D$ имеет ровно две компоненты связности ($\hat{U}_{a^s}^+$ и $\hat{U}_{a^s}^-$), следовательно, столько же имеет и $\hat{U}_{a'^s} \setminus \hat{h}_s(D)$. Однако, поскольку $\hat{h}_s(D) = \hat{U}_{a'^s} \cap \{z = 0\}$, то эти компоненты связности суть $\hat{U}_{a'^s}^+$ и $\hat{U}_{a'^s}^-$.

Второе утверждение доказывается рассмотрением выражения $\chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, [p]_z^s) - \chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, 0)$. Снова используя формулу конечных приращений Лагранжа, приходим к соотношению

$$\chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, [p]_z^s) - \chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, 0) = [p]_z^s \cdot \frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial z},$$

где $\frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial z}$ есть значение частной производной $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}$ в некоторой промежуточной точке отрезка, соединяющего точки $([p]_x^s, [p]_y^s, [p]_z^s)$ и $([p]_x^s, [p]_y^s, 0)$. Так как в окрестности \hat{U}_{a^s} знак $\frac{\partial \hat{\chi}_a}{\partial z}$ совпадает со знаком $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s)$, то знак $\chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, [p]_z^s) - \chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, 0)$ есть $\varepsilon_a \cdot \text{sgn}[p]_z^s$. **Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .**

4. Необходимые условия топологической сопряжённости

Пусть a – какая-нибудь точка гетероклинического касания и пусть линеаризующие окрестности $U_{\sigma_a^s}$ и $U_{\sigma_a^u}$ выбраны так, что определены гомеоморфизмы \hat{h}_s и \hat{h}_u , описанные перед леммой 3.6.. Обозначим теперь за \hat{H}_s и \hat{H}_u сужения $\hat{h}_s|_{Oz}$ и $\hat{h}_u|_{Oz}$. Также будем считать, что, как и перед леммой 3.6., определены окрестности \hat{U}_{a^s} и $\hat{U}_{a'^s} = \hat{h}_s(\hat{U}_{a^s})$, но с одним дополнительным условием: во всей $\hat{U}_{a'^s}$ знак $\frac{\partial \chi_{a'}}{\partial z}$ совпадает со знаком $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a'^s)$. Это условие не является обременительным и может быть достигнуто выбором некоторой меньшей евклидовой окрестности внутри \hat{U}_{a^s} .

Л е м м а 4.1. Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi^*$ сопряжены посредством гомеоморфизма h . Пусть $a \in \mathcal{A}$ – произвольная точка гетероклинического касания, $h(a) = a'$. Тогда индуцированные сопрягающие гомеоморфизмы \hat{H}_s и \hat{H}_u имеют вид

$$\hat{H}_s(z) = \begin{cases} \alpha_s^+ \cdot z^\rho, & z > 0 \\ \alpha_s^- \cdot (-z)^\rho, & z < 0 \end{cases}$$

и

$$\hat{H}_u(z) = \begin{cases} \alpha_u^+ \cdot z^\rho, & z > 0 \\ \alpha_u^- \cdot (-z)^\rho, & z < 0 \end{cases},$$

где $\rho = \frac{\ln \mu_{a'}}{\ln \mu_a} = \frac{\ln \lambda_{a'}}{\ln \lambda_a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Возьмём какую-нибудь точку касания $a \in \mathcal{A}$ и соответствующие ей седловые точки σ_a^s и σ_a^u . Под действием гомеоморфизма h точка a перейдёт в точку a' , а σ_a^s и σ_a^u перейдут соответственно в седловые точки $\sigma_{a'}^s$ и $\sigma_{a'}^u$.

Выберем $\psi_{\sigma_{a'}^u}$ и $\psi_{\sigma_a^u}$ так, что под их действием образы точек инвариантных многообразий $W_{\sigma_{a'}^s}^s$ и $W_{\sigma_a^s}^s$ имели неотрицательную z -координату в некоторых окрестностях точек касаний a'^u и a^u соответственно. Если не так, то можно добиться этого, применяя замену координат $\text{mir}_z : (x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$ и полагая $\tilde{\psi}_{\sigma_{a'}^u} = \text{mir}_z \circ \psi_{\sigma_{a'}^u}$ (или $\tilde{\psi}_{\sigma_a^u} = \text{mir}_z \circ \psi_{\sigma_a^u}$). Также выберем $\psi_{\sigma_a^s}$ так, что для точек p^s из $\hat{U}_{\sigma_a^s}^+$ справедливо соотношение $\chi_a(p^s) > \chi_a([p]_x^s, [p]_y^s, 0) \geq 0$. Аналогичным образом выберем $\psi_{\sigma_{a'}^s}$ так, что для

точек p'^s из $\hat{U}_{\sigma_a'}^+$ справедливо соотношение $\chi_a(p'^s) > \chi_a([p']_x^s, [p']_y^s, 0) \geq 0$. Заметим, что при таком выборе окрестностей и отображений автоматически следует, что производные $\frac{\partial \chi_a}{\partial z}(a^s)$ и $\frac{\partial \chi_{a'}}{\partial z}(a'^s)$ положительны, а для гомеоморфизмов \hat{H}_s и \hat{H}_u справедливо

$$\hat{H}_s: OZ^+ \subset U_{J_{\sigma_a^s}} \rightarrow OZ^+ \subset U_{J_{\sigma_{a'}^s}},$$

$$\hat{H}_s: OZ^- \subset U_{J_{\sigma_a^s}} \rightarrow OZ^- \subset U_{J_{\sigma_{a'}^s}},$$

$$\hat{H}_u: OZ^+ \subset U_{J_{\sigma_a^u}} \rightarrow OZ^+ \subset U_{J_{\sigma_{a'}^u}},$$

$$\hat{H}_u: OZ^- \subset U_{J_{\sigma_a^u}} \rightarrow OZ^- \subset U_{J_{\sigma_{a'}^u}},$$

что означает положительность констант α_s^+, α_u^+ и отрицательность констант α_s^-, α_u^- .

Применяя лемму 3.3., получаем, что для любой точки $c \in \ell_{\sigma_a^u}^{s+}$ существует последовательность $\{a_n\} \rightarrow a$, $\{a_n\} \subset (U_a \setminus (W_{\sigma_a^s}^s \cup W_{\sigma_a^u}^u))$ и последовательности $\{k_n\} \rightarrow +\infty$, $\{m_n\} \rightarrow +\infty$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{k_n}(a_n) = b$ (причём $b \in \ell_{\sigma_a^u}^{s+}$), $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-m_n}(a_n) = c$. По построению получаем, что $[b_n]_z^s = \mu_a^{k_n} \lambda_a^{m_n} [c]_z^u$, где $\beta_n = \frac{[a_n]_z^u}{[a_n]_z^s}$. Тогда $\mu_a^{k_n} \lambda_a^{m_n} = \frac{[b_n]_z^s \beta_n}{[c]_z^u}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} [b_n]_z^s = [b]_z^s$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta_a$, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_a^{k_n} \lambda_a^{m_n} = \frac{[b]_z^s \beta_a}{[c]_z^u}$.

Мы будем снабжать штрихом все объекты диффеоморфизма f' , являющиеся образами соответствующих объектов диффеоморфизма f относительно сопрягающего гомеоморфизма h . Для диффеоморфизма f' получим аналогичные формулы: $\mu_{a'}^{k_n} \lambda_{a'}^{m_n} = \frac{[b'_n]_z^s \beta'_n}{[c']_z^u}$, где $\beta'_n = \frac{[a'_n]_z^u}{[a'_n]_z^s}$. Согласно предложению 1.1., $\Theta_a = \Theta_{a'}$, то есть $\frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a} = \frac{\ln \mu_{a'}}{\ln \lambda_{a'}}$. Положим $\rho = \frac{\ln \mu_{a'}}{\ln \lambda_{a'}} = \frac{\ln \lambda_{a'}}{\ln \lambda_a}$. Тогда верно $\mu_{a'}^{k_n} \lambda_{a'}^{m_n} = (\mu_a^{k_n} \lambda_a^{m_n})^\rho$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{a'}^{k_n} \lambda_{a'}^{m_n} = \left(\frac{[b]_z^s \beta_a}{[c]_z^u} \right)^\rho$. Заметим, что справедлива следующая серия соотношений: $\left(\frac{[b_n]_z^s \beta_n}{[c_n]_z^u} \right)^\rho = (\mu_a^{k_n} \lambda_a^{m_n})^\rho = \mu_{a'}^{k_n} \lambda_{a'}^{m_n} = \frac{[b'_n]_z^s \beta'_n}{[c']_z^u} = \frac{[b'_n]_z^s [a'_n]_z^u}{[c']_z^u [a'_n]_z^s}$, а также $\frac{[b'_n]_z^s [a'_n]_z^u}{[c']_z^u [a'_n]_z^s} \geq \frac{[b'_n]_z^s ([a'_n]_z^u - \chi_{a'}([a'_n]_x^s, [a'_n]_y^s, 0))}{[c']_z^u [a'_n]_z^s}$. Исходя из аналогичных рассуждений в доказательстве леммы 3.2., $\frac{[a'_n]_z^u - \chi_{a'}([a'_n]_x^s, [a'_n]_y^s, 0)}{[a'_n]_z^s}$ сходится к $\beta_{a'}$ при $n \rightarrow \infty$. Переходя к пределу, мы получаем, что $\left(\frac{[b]_z^s \beta_a}{[c]_z^u} \right)^\rho \geq \frac{[b]_z^s \beta_{a'}}{[c]_z^u}$. Начав аналогичные рассуждения с диффеоморфизма f' , получим $\left(\frac{[b]_z^s \beta_{a'}}{[c]_z^u} \right)^\rho \geq \frac{[b]_z^s \beta_a}{[c]_z^u}$. Таким образом, $\left(\frac{[b]_z^s \beta_a}{[c]_z^u} \right)^\rho = \frac{[b]_z^s \beta_{a'}}{[c]_z^u}$ или же $\frac{[\beta_a]^\rho}{[\beta_{a'}]} = \frac{[[b]_z^s] \cdot [[c]_z^u]^\rho}{[[c']_z^u] \cdot [[b]_z^s]^\rho}$.

Проинтерпретируем полученный результат. Если мы зафиксируем точку c и будем произвольным образом менять точку b , то верно $\frac{[[b]_z^s]}{[[b]_z^s]^\rho} = \text{const}$; аналогично, фиксируя точку b и меняя произвольным образом точку c , приходим к $\frac{[[c]_z^u]^\rho}{[[c]_z^u]} = \text{const}$. Это и даёт нам соотношения $[b]_z^s = \alpha_s^+ ([b]_z^s)^\rho$ и $[c]_z^u = \alpha_u^+ ([c]_z^u)^\rho$, которые задают гомеоморфизмы $\hat{H}_s^+: OZ^+ \rightarrow OZ^+$ и $\hat{H}_u^+: OZ^+ \rightarrow OZ^+$. Если мы возьмём точку $c \in \ell_{\sigma_a^u}^{s-}$, то докажем аналогичную формулу для гомеоморфизмов $\hat{H}_s^-: OZ^- \rightarrow OZ^-$ и $\hat{H}_u^-: OZ^- \rightarrow OZ^-$, а именно $[b]_z^s = \alpha_s^+ (-[b]_z^s)^\rho$ и $[c]_z^u = \alpha_u^+ (-[c]_z^u)^\rho$ соответственно. В терминах индуцированных гомеоморфизмов полученная ранее формула может быть записана в виде $\frac{[\beta_a]^\rho}{[\beta_{a'}]} = \frac{[\alpha_s^+]}{[\alpha_u^+]} = \frac{[\alpha_s^-]}{[\alpha_u^-]}$.

Заметим, что эта лемма была доказана для частного случая выбора отображений $\psi_{\sigma_a^u}$, $\psi_{\sigma_a^s}$ и $\psi_{\sigma_{a'}^s}$. Однако, все применявшиеся модификации суть композиция инволюции mir_z (отображение симметрии \mathbb{R}^3 относительно плоскости $z = 0$) и некоторых исходных отображений, поэтому, применяя инволюции обратно, можно получить аналогичные формулы для \hat{H}_s и \hat{H}_u во всех случаях.

Доказательство закончено.

Напомним, что в теореме 1.1. рассматриваются такие точки касания $a, d \in \mathcal{A}$, что $\sigma_d^s = \sigma_a^s$, $\sigma_d^u = \sigma_a^u$ и знаки параметров β_d и β_a совпадают.

Теорема 1.1. *Если диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi^*$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма h такого, что $h(a) = a'$, $h(d) = d'$, $h(\sigma_a^s) = \sigma_{a'}^s$ и $h(\sigma_a^u) = \sigma_{a'}^u$, то $\tau_d^a = \tau_{d'}^{a'}$.*

Доказательство. Выберем любую из точек a и d (например, a) и проделаем для неё процедуру выбора линеаризующих окрестностей и отображений перехода в точности, как в доказательстве леммы 4.1.. Из леммы 3.5. следует, что если знаки параметров β_d и β_a совпадали при каком-то выборе, то они совпадут и при любом другом. Нетрудно показать, что процедура выбора из леммы 4.1. приводит к тому, что знаки параметров β_d и $\beta_{d'}$ тоже совпадут. Но тогда имеют место соотношения $\frac{|\beta_a|^p}{|\beta_{a'}|^p} = \frac{|\alpha_a^+|}{|\alpha_{a'}^+|}$ и $\frac{|\beta_d|^p}{|\beta_{d'}|^p} = \frac{|\alpha_d^+|}{|\alpha_{d'}^+|}$. Получаем равенства $\frac{|\beta_a|^p}{|\beta_{a'}|^p} = \frac{|\beta_d|^p}{|\beta_{d'}|^p}$, откуда $\left| \frac{\beta_a}{\beta_{a'}} \right|^{\frac{1}{\ln \mu_a}} = \left| \frac{\beta_{d'}}{\beta_d} \right|^{\frac{1}{\ln \mu_{d'}}}$, то есть имеет место равенство параметров $\tau_d^a = \tau_{d'}^{a'}$.

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников, “Теория бифуркаций”, *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*, **5**, 5–218.
2. Г. Р. Белицкий, В. А. Ткаченко, *Нормальные формы, инварианты и локальные отображения*, Наукова думка, Киев, 1979, 174 с.
3. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 438 с.
4. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, Москва, 1999, 768 с.
5. W. De Melo, “Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms”, *Topology*, **19** (1980), 9–21.
6. W. De Melo, J. Palis, “Moduli of stability for diffeomorphisms”, *Lecture Notes in Mathematics*, **819** (1980), 318–339.
7. W. De Melo, S. J. Strien, “Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli”, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, **7** (1987), 415–462.
8. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности”, *Нелинейная динам.*, 2010, 91-105 6:1 (2010), 91–105.
9. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, Е. А. Шищенко, “О структуре пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством”, *СВМО*, **13:1** (2011), 63–70.

10. S. Newhouse, J. Palis, “Bifurcations of Morse-Smale dynamical systems”, *Dynamical systems*, 1973.
11. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, “Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms”, *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, **57**:1 (1983), 5–71.
12. J. Palis, “A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability”, *Asterisque*, **51** (1978), 335–346.
13. J. Palis, W. Melo, *Геометрическая теория динамических систем*, Мир, Москва, 1998, 301 с.
14. И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Издат. Московского Унив., Москва, 1984, 296 с.
15. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике*, Институт компьютерных исследований, 2003, 428 с.

Necessary conditions for topological conjugacy of 3-manifolds diffeomorphisms with orbits of heteroclinic tangency

© E. A. Grines⁴, O. V. Pochinka⁵

Abstract. In present paper we consider a class of 3-manifolds’ diffeomorphisms with finite hyperbolic chain recurrent set and finite number of heteroclinic tangencies’ orbits. We prove that necessary conditions for topological conjugacy of two diffeomorphisms from this class is a generalization of moduli of stability for analogous two dimensional diffeomorphisms.

Key Words: topological conjugacy, heteroclinic tangencies, moduli of stability

⁴Graduate student of numerical and functional analysis chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; grineseugene@mail.ru

⁵Docent of theory function chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; olga-pochinka@yandex.ru

УДК 517.938

О топологической классификации градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений посредством энергетической функции

© Е. Я. Гуревич¹, А. Н. Сахаров², Е. В. Трегубова³

Аннотация. Работа является продолжением работы [7] и посвящена топологической классификации градиентно-подобных потоков, заданных на гладком замкнутом ориентируемом многообразии M^n размерности $n \geq 3$, с использованием энергетической функции. Рассмотрен класс $G(M^n)$ градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений, все седловые состояния равновесия которых имеют индекс Морса 1 или $(n-1)$. Показано, что необходимое и достаточное условие топологической эквивалентности потоков из класса $G(M^n)$ состоит в эквивалентности соответствующих энергетических функций и одновременном выполнении специального условия эквивалентности функций на выделенной поверхности уровня. Выделен класс потоков $G_0(M^n)$, для которых энергетическая функция является полным топологическим инвариантом. Результаты работы могут быть применены для качественного изучения динамики таких структурно-устойчивых динамических систем, для которых энергетическая функция известна из физического контекста модели (например, как функция энергии для диссипативных систем в механике, потенциал электростатического поля, или, при условии пренебрежения электрическими токами, как потенциал магнитного поля).

Ключевые слова: потоки Морса-Смейла, топологическая классификация, энергетическая функция

1. Введение

Пусть M^n — гладкое замкнутое ориентируемое многообразие. Дважды дифференцируемая функция $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены, то есть для любой критической точки $p \in M^n$ определитель матрицы Гессе $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right) \Big|_p$ в этой точке отличен от нуля. Согласно лемме Морса (см. [10], лемма 2.2), в некоторой окрестности невырожденной критической точки p существуют локальные координаты y_1, \dots, y_n называемые *координатами Морса*, в которых функция φ имеет вид $\varphi(y_1, \dots, y_n) = \varphi(p) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2$. Число $k \in [0, n]$ не зависит от выбора локальных координат и называется *индексом точки p* . Будем обозначать индекс критической точки через $ind(p)$.

Гладкий поток, индуцированный векторным полем $X = -grad \varphi$, называется *градиентным потоком*. Градиентный поток не имеет замкнутых траекторий, а множество состояний равновесия градиентного потока совпадает с множеством критических точек функции φ . Аналогично методам, применявшимся Ляпуновым для исследования устойчивости состояния равновесия, можно показать, что размерность неустойчивого многообразия W_p^u состояния равновесия p (индекс Морса) равна $ind(p)$ (см. также [12], Proposition). Однако, класс топологической эквивалентности градиентного потока, вообще говоря, зависит от выбора метрики на многообразии M^n . В силу работы [16] (Theorem A) градиент-

¹ Доцент кафедры Теории управления и динамики машин ННГУ им. Н.И. Лобачевского; elena_gurevich@list.ru

² доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru.

³ старший преподаватель, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math-ngaa@yandex.ru.

ный поток может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в C^1 -топологии) *поток Морса-Смейла*.

Напомним, что поток f^t называется *поток Морса-Смейла*, если он задается гладким векторным полем⁴ $v : M^n \rightarrow TM^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. неблуждающее множество потока $\Omega(f^t)$ состоит из конечного числа гиперболических особых точек p_1, \dots, p_l (собственные числа линеаризации поля $v(x)$ в особых точках имеют ненулевые действительные части) и конечного числа гиперболических замкнутых траекторий $\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)$ (мультипликаторы⁵ любой замкнутой траектории по модулю не равны 1);
2. устойчивые и неустойчивые многообразия особых точек и периодических решений имеют трансверсальное пересечения.

Поток Морса-Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным потоком*.

Из работы С. Смейла [16] (Theorem B) следует, что для любого градиентно-подобного потока f^t на M^n существует *самоиндексирующаяся энергетическая функция* — такая функция $\varphi : M^n \rightarrow [0, n]$, что:

1. функция φ является функцией Морса;
2. множество критических точек функции φ совпадает с множеством состояний равновесия $\Omega(f^t)$ потока f^t ;
3. $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t > 0$;
4. $\varphi(p) = \text{ind}(p)$ для любого $p \in \Omega(f^t)$.

Более того, Смейл в [16] заметил, что существует такая метрика на M^n , в которой поток f^t является градиентным потоком для своей энергетической функции φ .

К. Мейер в работе [9] обобщил результат Смейла, построив для произвольных потоков Морса-Смейла на M^n энергетическую функцию Морса-Ботта, то есть такую функцию Морса, гессиан которой в каждой критической точке невырожден в направлении, нормальном к критическому множеству уровня. Более того, из результатов работы Мейера следует, что самоиндексирующиеся энергетические функции можно использовать для топологической классификации градиентно-подобных потоков. Для точной формулировки этого результата напомним, что потоки f^t, f'^t на многообразии M^n называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M^n \rightarrow M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях. Для разбиения множества потоков Морса-Смейла на классы относительно отношения топологической эквивалентности при помощи самоиндексирующейся энергетической функции мы будем использовать следующее определение топологической эквивалентности функций, принадлежащее Р. Тому (см. [18]).

О п р е д е л е н и е 1.1. *Две гладкие функции $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi' : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H : M^n \rightarrow M^n$ и $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что*

$$\varphi' H = \chi \varphi.$$

⁴ Как всегда, символы TM^n и NM^n обозначают касательное и нормальное расслоения над гладким многообразием M^n .

⁵ Мультипликаторы периодического решения — собственные значения оператора линейной части отображения за период, определенного в некоторой окрестности этого решения.

Мейер доказал, что топологическая эквивалентности самоиндексирующихся энергетических функций является необходимым условием топологической эквивалентности соответствующих потоков Морса-Смейла, а в случае градиентно-подобных потоков на многообразиях размерности $n = 2$ это условия также является достаточным⁶.

Привлечение энергетической функции к решению задачи топологической классификации оказывается полезным при математическом моделировании, если энергетическая функция известна из физических соображений — например, как функция энергии для диссипативных систем в механике, потенциал электростатического поля, а также, при условии пренебрежения электрическими токами, потенциал магнитного поля (такая модель магнитного поля солнечной короны впервые предложена в работах [15], [1] и развита в [21],[22]).

Цель статьи — получить необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности в терминах энергетических функций для систем из класса $G(M^n)$, состоящего из градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений, все седловые состояния равновесия которых имеют индекс Морса 1 или $(n - 1)$.

Для потока $f^t \in G(M^n)$ обозначим через Ω_i множество неподвижных точек индекса Морса $i \in \{0, 1, n-1, n\}$, и через $|\Omega_i|$ — мощность множества Ω_i . Топология многообразия M^n и структура множества состояний равновесия потока f^t определяется следующей теоремой.

Т е о р е м а 1.1. Пусть $f^t \in G(M^n)$. Тогда $g = \frac{|\Omega_1 \cup \Omega_{n-1}| - |\Omega_0 \cup \Omega_n| + 2}{2}$ является целым неотрицательным числом и справедливы следующие утверждения:

- 1) если $g = 0$, то M^n является сферой S^n ;
- 2) если $g > 0$, то M^n гомеоморфно связной сумме⁷ g копий многообразия $S^{n-1} \times S^1$.

В отличие от двумерной ситуации, уже в классе $G(M^n)$ при $n \geq 3$ существуют топологически неэквивалентные потоки, имеющие эквивалентные энергетические функции (примеры таких потоков описываются, в частности, в разделе 3.1.). Этот факт приводит к необходимости введения дополнительных инвариантов, различающих топологически неэквивалентные потоки. Для построения такого инварианта представим многообразие M^n в виде объединения связных аттрактора $A = W_{\Omega_1 \cup \Omega_0}^u$, репеллера $R = W_{\Omega_{n-1} \cup \Omega_n}^s$ и множества $V = M^n \setminus (A \cup R)$, состоящего из блужающих траекторий потока f^t , идущих от A к R . Будем называть V *характеристическим пространством*.

Пусть $\varphi : M^n \rightarrow [0, n]$ — самоиндексирующаяся энергетическая функция для f^t . Гиперповерхность Σ уровня $c \in (1, n - 1)$ назовем *характеристической секущей* (она пересекает каждую траекторию характеристического пространства в точности в одной точке).

Снабдим штрихом объекты потока $f^t \in G(M^n)$, аналогичные введенным объектам для f^t .

⁶ В работе [9] (proposition) утверждалось, что самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом для потоков Морса-Смейла, заданных на ориентируемых поверхностях. А.А. Ошемков и В.В. Шарко в работе [11] привели пример топологически неэквивалентных потоков Морса-Смейла с замкнутыми траекториями на торе, имеющими эквивалентные самоиндексирующиеся энергетические функции, и отметили, что результат Мейера остается верным только для градиентно-подобных потоков

⁷ Связной суммой $M_1^n \sharp M_2^n$ двух ориентируемых связных n -многообразий M_1^n , M_2^n называется многообразие $M_1^n \sharp M_2^n$, полученное удалением из M_1^n, M_2^n шаров $B_1^n \subset M_1^n$, $B_2^n \subset M_2^n$ и склеиванием оставшихся многообразий с краем при помощи гомеоморфизма $\varphi : \partial B_1^n \rightarrow \partial B_2^n$, обращающего естественную ориентацию ∂B_1^n .

О п р е д е л е н и е 1.2. Самоиндексирующиеся энергетические функции φ, φ' для потоков $f, f^t \in G(M^n)$ назовём согласованно эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H : M^n \rightarrow M^n$ и $\chi : [0, n] \rightarrow [0, n]$ такие, что $\varphi' H = \chi \varphi$ (то есть функции φ, φ' эквивалентны) и $H(W_{\Omega_1}^s \cap \Sigma) = W_{\Omega_1}^s \cap H(\Sigma)$, $H(W_{\Omega_{n-1}}^u \cap \Sigma) = W_{\Omega_{n-1}}^u \cap H(\Sigma)$ для некоторой характеристической секущей Σ .

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.2. Потоки $f^t, f'^t \in G(M^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, их энергетические функции согласованно эквивалентны.

В разделе 3.3. выделяется класс $G_0(M^n) \subset G(M^n)$ потоков, для которых из эквивалентности самоиндексирующихся функций следует их согласованная эквивалентности, и таким образом, самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом. Класс $G_0(M^n)$ состоит из потоков, индекс Морса всех седловых состояний равновесия которых равен 1. Аналогично доказательству теоремы 1.1. (см. также [4], теорема 1) доказывается следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.1. Для любого потока $f^t \in G_0(M^n)$ неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ содержит ровно один источник, $k \geq 0$ седел и $k+1$ сток, а объемлющее многообразие M^n диффеоморфно n -сфере.

Основным результатом раздела 3.3. является следующая теорема.

Т е о р е м а 1.3. Потоки $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их самоиндексирующиеся энергетические функции.

В заключение отметим, что проблема топологической классификации потоков из классов $G(M^3)$, $G(S^n)$, $n \geq 3$, решалась, в частности, в работах [20], [19], [14], [13]. Дж. Флейтасом в [20] получена топологическая классификация полярных потоков⁸ на многообразиях размерности 2 и 3 при помощи диаграмм Хегора. Я. Л. Уманским в [19] получена топологическая классификация потоков Морса-Смейла на трехмерных многообразиях с конечным числом гетероклинических орбит. В этой работе для классификации использовался комбинаторный инвариант, описывающий взаимное расположение особых траекторий потока, аналогичный схеме динамической системы, введенной Е.А. Леонтович и А.Г. Майером для классификации потоков с конечным числом состояний равновесия на сфере S^2 . С.Ю. Пилюгиным в [13] замечено, что в случае $M^n = S^n$, $n \geq 3$, класс $G(S^n)$ совпадает с классом всех градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений и получена полная топологическая классификация таких потоков при помощи обобщения схемы Леонтович-Майера. А.О. Пришляк в [14] получил полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на трехмерных многообразиях. Инвариант, введенный в работе [14], так же как и инвариант Дж. Флейтаса, явно включает информацию о следах двумерных сепаратрис на характеристической секущей. Таким образом, теорема 1.2., фактически, является обобщением упомянутых выше работ на случай потоков из класса $G(M^n)$ на произвольном многообразии M^n размерности $n > 3$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ).

⁸ Полярным потоком называется градиентно-подобный поток, множество состояний равновесия которого содержит в точности один источник, один сток и произвольное конечное число седел.

2. Топология несущего многообразия потоков из $G(M^n)$

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 1.1.

Пусть $f^t \in G(M^n)$. Обозначим через $k \geq 0$ число седловых состояний равновесия потока f^t и через l сдвиг на единицу времени потока f^t . Тогда $f : M^n \rightarrow M^n$ — диффеоморфизм Морса-Смейла, множество седловых периодических точек которого состоит из k неподвижных точек индекса Морса 1.

Если $k = 0$, то неблуждающее множество $\Omega(f)$ диффеоморфизма f состоит в точности из одного источника и одного стока, а объемлющее многообразие диффеоморфно S^n (см., например, [6], теорема 2.2.1).

Предположим, что утверждение верно для $i < k$ и докажем его справедливость для $i = k$. Обозначим через l число стоков и источников диффеоморфизма f .

Для определенности положим, что множество Ω_{n-1} непусто (в противном случае можно перейти к диффеоморфизму f^{-1}). Пусть $\sigma \in \Omega_{n-1}$.

Сфера $S^{n-1} = cl(W_\sigma^u)$ является топологическим аттрактором, следовательно, существует окрестность $U(S^{n-1}) \in M^n$ и целое положительное число $r(\sigma)$ такое, что $f^{r(\sigma)}(U(S^{n-1})) \subset int U(S^{n-1})$. Не уменьшая общности можно считать, что $r(\sigma) = 1$ для любого σ (в противном случае перейдем к некоторой степени диффеоморфизма f , при этом многообразие M^n останется прежним).

Из работ [2], [4] следует, что для каждой седловой точки $\sigma \in \Omega_{n-1}$ диффеоморфизма f существует замкнутая окрестность $V(S^{n-1}) \subset U(S^{n-1})$ сферы S^{n-1} , ограниченная гладко вложенными $(n-1)$ -сферами S_1, S_2 и гомеоморфная прямому произведению $S^{n-1} \times [-1, 1]$. Обозначим через γ_1 и γ_2 устойчивые сепаратрисы точки σ , через α_1 и α_2 источниковые точки, принадлежащие замыканиям γ_1 и γ_2 соответственно (возможно, $\alpha_1 = \alpha_2$). Из локальной сопряженности диффеоморфизма f с линейным отображением следует, что дуги $\gamma_1 \cap V(S^{n-1})$ и $\gamma_2 \cap V(S^{n-1})$ лежат в разных компонентах связности множества $V(S^{n-1}) \setminus S^{n-1}$.

Удалим из многообразия M^n внутренность окрестности $V(S^{n-1})$. Многообразие $M^n \setminus int V(S^{n-1})$ является гладким компактным многообразием с краем, состоящим из сфер S_1, S_2 . Обозначим через \widetilde{M}^n компактное многообразие без края, полученное из многообразия $M^n \setminus int V(S^{n-1})$ приклеиванием вдоль его края двух замкнутых n -шаров B_1^n и B_2^n . Определим диффеоморфизм Морса-Смейла $\tilde{f} : \widetilde{M}^n \rightarrow \widetilde{M}^n$ такой, что:

- 1) $\tilde{f}|_{\widetilde{M}^n \setminus (B_1^n \cup B_2^n)}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $f|_{M^n \setminus int V(S)}$;
- 2) $\tilde{f}|_{B_1^n \cup B_2^n}$ имеет только две неподвижные точки $\omega_1 \in B_1^n, \omega_2 \in B_2^n$, каждая из которых является неподвижным стоком.

Тогда диффеоморфизм \tilde{f} имеет то же число неподвижных точек, что и диффеоморфизм f , и число его неподвижных седловых точек равно $k-1$, а число стоков и источников равно $l+1$. Далее рассмотрим две возможности: а) $M^n \setminus V(S^{n-1})$ не связно и б) $M^n \setminus V(S^{n-1})$ связно.

В случае а) многообразие \widetilde{M}^n является непересекающимся объединением двух многообразий M_1^n и M_2^n , а многообразие M^n — связной суммой $M_1^n \# M_2^n$. Обозначим через f_1 и f_2 ограничения диффеоморфизма \tilde{f} на многообразия M_1^n и M_2^n соответственно, через $k = k_1 + k_2 = k-1$ — число седел и через $\tilde{l} = l_1 + l_2 = l+1$ — число стоков и источников диффеоморфизма \tilde{f} . Так как k_1 и k_2 строго меньше чем k , то по предположению индукции многообразия M_1^n и M_2^n являются связными суммами, соответственно, $g_1 = \frac{k_1-l_1}{2} + 1$ и $g_2 = \frac{k_2-l_2}{2} + 1$ копий $S^{n-1} \times S^1$ (под многообразием, состоящим из 0 копий $S^{n-1} \times S^1$ понимается многообразие S^n). Следовательно, M^n — связная сумма $\frac{k_1-l_1}{2} + 1 + \frac{k_2-l_2}{2} + 1 = \frac{\tilde{k}-\tilde{l}}{2} + 2 = \frac{k-l}{2} + 1$ копий $S^{n-1} \times S^1$. Таким образом, в этом случае

теорема верна.

В случае б) многообразие \tilde{M}^n связно и, в силу [8] (лемма 7), $M^n = M_1^n \# M_*$, где M_* диффеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Снова обозначим через \tilde{k} число седел и \tilde{l} число стоков и источников диффеоморфизма \tilde{f} . Так как $\tilde{k} = k - 1$, то из предположения индукции следует, что M_1^n является либо сферой S^n , если $\frac{\tilde{k}-\tilde{l}}{2} + 1 = 0$, либо связной суммой $\frac{\tilde{k}-\tilde{l}}{2} + 1$ копий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Поскольку $\frac{k-l}{2} + 1 = (\frac{\tilde{k}-\tilde{l}}{2} + 1) + 1$, мы получаем, что M^n — связная сумма $\frac{k-l}{2} + 1$ копий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, таким образом, теорема верна и в этом случае.

3. Топологическая классификация потоков из класса $G(M^n)$

3.1. Примеры топологически неэквивалентных потоков с эквивалентными энергетическими функциями

В этом разделе приводятся две пары топологически неэквивалентных градиентно-подобных потоков на S^3 , имеющих эквивалентные энергетические функции. Алгоритм построения таких потоков на сфере любой размерности $n \geq 3$ описан в работе [13].

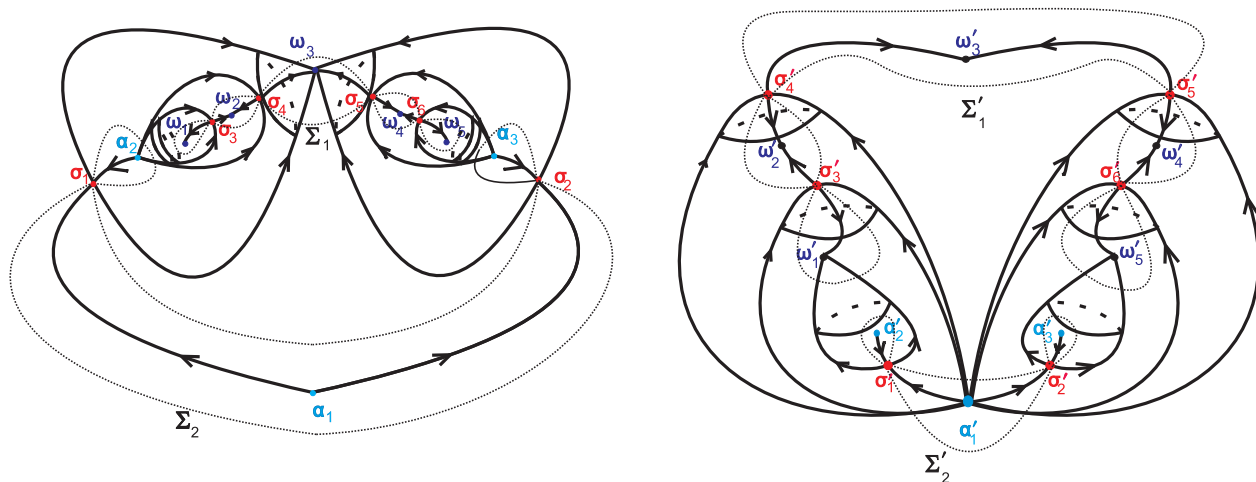


Рис. 1: Фазовые портреты и поверхности уровня энергетических функций топологически неэквивалентных потоков

Покажем, что на рисунке 1 изображены фазовые портреты топологически неэквивалентных потоков из $G(S^3)$, имеющих топологически эквивалентные энергетические функции.

Поток, фазовый портрет которого изображен слева, имеет источник α_1 , лежащий в замыкании в точности двух устойчивых многообразий седел, причем эти многообразия одномерны. Поток, фазовый портрет которого приведен на том же рисунке справа, не имеет источников неподвижных точек, обладающих таким свойством. Поэтому эти потоки топологически неэквивалентны. В тоже время, поверхности Σ_1, Σ'_1 и Σ_2, Σ'_2 критических уровней энергетических функций этих потоков, соответствующие значениям 1 и 2 (они изображены точечным пуктиром), гомеоморфны и делят сферу S^3 на попарно гомеоморфные компоненты, откуда следует топологическая эквивалентность энергетических функций.

Еще один пример топологически неэквивалентных потоков получается при рассмотрении градиентно-подобных потоков на сфере S^3 с неблуждающим множеством, состоящим в точности из четырех неподвижных точек: источника, стока и двух седел разных

индексов. Аналогично работе [5] можно показать, что двумерные инвариантные многообразия седел таких потоков пересекаются как минимум по одной некомпактной кривой (*гетероклинической кривой*). В работе [13] описана схема построения таких потоков, отличающихся количеством гетероклинических кривых. Очевидно, потоки, имеющие разное число гетероклинических кривых, топологически неэквивалентны. В тоже время, аналогично предыдущему случаю, поверхности критических уровней энергетических функций этих потоков, соответствующие значениям 1 и 2, гомеоморфны и делят сферу S^3 на гомеоморфные компонентны, откуда следует топологическая эквивалентность соответствующих энергетических функций.

3.2. Доказательство основного результата

В этом разделе излагается доказательство теоремы 1.2.

Необходимость. Пусть φ и φ' – самоиндексирующиеся энергетические функции топологически эквивалентных потоков Морса-Смейла f^t и f'^t из множества $G_0(M^n)$ и $h : M^n \rightarrow M^n$ гомеоморфизм, преобразующий траектории потока f^t в траектории потока f'^t . Тогда из определения самоиндексирующейся функции и свойств гомеоморфизма h следует, что для любого состояния равновесия p потока f^t имеет место равенство $\varphi(p) = \varphi'(h(p))$. Поэтому выберем в качестве гомеоморфизма χ тождественное отображение, и сконструируем гомеоморфизм H , удовлетворяющий определению 1.2..

Пусть $x \in M^n$ произвольная точка, отличная от состояния равновесия потока f^t . Обозначим через l_x траекторию потока f^t (f'^t), проходящую через точку x и через $\alpha(l_x)$ ($\omega(l_x)$) состояние равновесия, являющееся α -предельным (ω -предельным) множеством траектории l_x . Положим $x' = h(x)$. Тогда $l_{x'} = h(l_x)$. Из свойств гомеоморфизма h следует, что $\alpha(l_{x'}) = h(\alpha(l_x))$, $\omega(l_{x'}) = h(\omega(l_x))$. Кроме того, имеют место равенства: $\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'}))$ и $\varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'}))$. Пусть $c \in (\varphi(\omega(l_x)), \varphi(\alpha(l_x)))$ и $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$ ($\Sigma'_c = (\varphi')^{-1}(c)$). Отметим, что из определения энергетической функции следует, что пересечение $\Sigma_c \cap l_x$ ($\Sigma'_c \cap l_{x'}$) состоит из единственной точки. Тогда на множестве $M^n \setminus \Omega(f^t)$ корректно определено отображение \tilde{H} , ставящее в соответствие точке $y = \Sigma_c \cap l_x$ точку $y' = \Sigma'_c \cap l_{x'}$. По построению отображение \tilde{H} является гомеоморфизмом между множествами $M^n \setminus \Omega(f^t)$ и $M^n \setminus \Omega(f'^t)$, преобразующим траектории потока f^t и множество регулярных уровней функции φ в траектории потока f'^t и множество регулярных уровней функции φ' . В силу свойства $\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'}))$ и $\varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'}))$ для любой точки x , отличной от состояния равновесия, гомеоморфизм однозначно продолжается до искомого гомеоморфизма H , удовлетворяющего условию: $\varphi(x) = \varphi'(H(x))$.

Достаточность. Пусть самоиндексирующиеся энергетические функции φ, φ' согласованно эквивалентны, то есть существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H : M^n \rightarrow M^n$ и $\chi : [0, n] \rightarrow [0, n]$ такие, что $\varphi' H = \chi \varphi$ и $H(W_{\Omega_1}^s \cap \Sigma) = W_{\Omega_1}^s \cap H(\Sigma)$, $H(W_{\Omega_{n-1}}^u \cap \Sigma) = W_{\Omega_{n-1}}^u \cap H(\Sigma)$ для некоторой характеристической секущей Σ . Для любой точки $x \in \Sigma$ положим $x' = H(x)$ и обозначим через $l_x, l_{x'}$ траектории потоков f^t, f'^t , проходящие через точки x, x' . Для $c \in [0, n]$ положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$. Определим гомеоморфизм $H_V : V \rightarrow V'$ формулой $H_V(y) = l_{x'} \cap H(\Sigma_c)$ для любой точки $y = l_x \cap \Sigma_c$, $c \in (0, n)$.

Поскольку гомеоморфизм $H|_{\Sigma}$ переводит следы $(n-1)$ -мерных инвариантных многообразий седловых точек потока f^t на Σ в следы аналогичных объектов потока f'^t на $H(\Sigma)$ и замыкание любой сепаратрисы размерности $(n-1)$ седловой неподвижной точки σ потока f^t состоит из двух точек: точки σ и источника либо стока потока f^t (в

⁹ Регулярным уровнем функции Морса называется уровень, не содержащий критических точек.

зависимости от индекса точки σ), то гомеоморфизм H_V однозначно продолжается на множества $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_{n-1}, \Omega_n$. Сохраним обозначение H_V для полученного гомеоморфизма и продолжим его на одномерные сепаратрисы седловых неподвижных точек.

Для этого отметим, что для любого $c \in (0, 1)$ справедливо $H_V(\Sigma_c \setminus W_{\Omega_1}^u) = H(\Sigma_c) \setminus W_{\Omega_1}^u$, и множества $W_{\Omega_1}^u \cap \Sigma_c$, $W_{\Omega_1}^u \cap H(\Sigma_c)$ являются конечными объединениями одинакового количества точек. Отсюда следует, что гомеоморфизм H_V продолжается по непрерывности гомеоморфизмом $H_1 : W_{\Omega_1}^u \rightarrow W_{\Omega_1}^u$. Аналогично строится гомеоморфизм $H_{n-1} : W_{\Omega_{n-1}}^s \rightarrow W_{\Omega_{n-1}}^s$. Искомый гомеоморфизм $h : M^n \rightarrow M^n$ определим формулой

$$h(x) = \begin{cases} H_V(x), & \text{если } x \in M^n \setminus (W_{\Omega_1}^u \cup W_{\Omega_{n-1}}^s); \\ H_1(x), & \text{если } x \in W_{\Omega_1}^u; \\ H_{n-1}(x), & \text{если } x \in W_{\Omega_{n-1}}^s. \end{cases}$$

Теорема доказана.

3.3. Энергетическая функция как полный топологический инвариант потоков из класса $G_0(M^n)$

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 1.3., которая является непосредственным следствием теоремы 1.2. и приведенной ниже леммы.

Л е м м а 3.1. Пусть φ, φ' самоиндексирующиеся энергетические функции потоков $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ соответственно. Функции φ, φ' соласованно эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что для потоков $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ из эквивалентности функций φ, φ' следует эквивалентность. Для любого $c \in [0, n]$ положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$ и $M_c = \varphi^{-1}([0, c])$. Поскольку функция Ляпунова убывает вдоль блуждающих траекторий потока, то $M_1 \cap W_{\Omega_1}^s = \Omega_1$. Откуда следует, что для каждой компоненты связности Q множества $M_1 \setminus \Omega_1$ существует единственный сток $\omega_Q \in \Omega_0$ такой, что $Q \subset W_{\omega_Q}^s$. Пусть $x \in Q$. Тогда траектория l_x потока f^t , проходящая через точку x имеет ω -предельную точку ω_Q и α -предельную точку α (в силу предложения 1.1. множество Ω_n состоит из одного источника α). Кроме того, для любого $c \in (0, n)$, множество $\Sigma_c \cap l_x$ состоит из единственной точки.

Положим $x' = H(x)$ и снабдим штрихом обозначения объектов потока f'^t , аналогичных введенным выше объектам потока f^t . Для любой характеристической секущей Σ гомеоморфизм H индуцирует гомеоморфизм $h : \Sigma \setminus W_{\Omega_1}^s \rightarrow H(\Sigma) \setminus W_{\Omega_1}^s$, переводящий точку $y = l_x \cap \Sigma$ в точку $h(y) = l_{x'} \cap h(\Sigma)$.

Согласно теории Морса, гиперповерхности уровня Σ , $\Sigma' = H(\Sigma)$ являются гладкими сферами размерности $(n-1)$. Поскольку φ (φ') является энергетической функцией потока f^t (f'^t), то множество $C = \Sigma \cap W_{\Omega_1}^s$ ($C' = \Sigma' \cap W_{\Omega_1}^s$) состоит из k сфер размерности $(n-2)$, по одной на каждом устойчивом многообразии множества $W_{\Omega_1}^s$ ($W_{\Omega_1}^s$). В силу теоремы о кольце¹⁰ существует гомеоморфизм $\tilde{h} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ со следующими свойствами:

- $\tilde{h}(C) = C'$;
- существует окрестность $V(C)$ множества C такая, что $\tilde{h}|_{\Sigma \setminus V(C)} = h|_{\Sigma \setminus V(C)}$.

¹⁰ Теорема о кольце звучит следующим образом: если $h_i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, 2\}$, $n \geq 2$, – топологические вложения, и $K^n \subset \mathbb{R}^n$ – открытая область, ограниченная сферами $h_1(\mathbb{S}^{n-1})$, $h_2(\mathbb{S}^{n-1})$, то замыкание области K^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$. Справедливость гипотезы кольца в случае $n = 2$ следует из теоремы Антуана (1921 г.), в случае $n = 3$ – из теоремы Сандерсона (1960 г.), для $n > 4$ доказана Р. Кирби в 1969 году, а для случая $n = 4$ – Ф. Квинном в 1984 году.

Гомеоморфизм \tilde{h} продолжается до гомеоморфизма $\tilde{H}_V : V \rightarrow V'$, переводящего точку $y \in l_x \cap \Sigma_c$ в точку $\tilde{H}_V(y) = l_{x'} \cap H(\Sigma_c)$, $c \in (0, n)$. Аналогично доказательству необходимости теоремы 1.2., гомеоморфизм \tilde{H}_V продолжается до искомого гомеоморфизма $\tilde{H} : M^n \rightarrow M^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Altschuler M.D., Newlirk Jr. G., "Magnetic fields and the structure of the solar corona", *Solar Physics*, **9**:1 (1969), 131-149.
2. Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E., "Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves", *Topology and its Applications*, **117** (2002), 335 – 344.
3. Conley C., "Isolated Invariant Sets and Morse Index", *CBMS Regional Conference Series in Math.*, **38** (1978).
4. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., "Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех", *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **261** (2008), 61-86.
5. В.З.Гринес, Е.В. Жужома, В.С.Медведев, "О диффеоморфизмах Морса-Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентированных многообразиях", *Мат. зам.*, **74**:3 (2003), 369–386.
6. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2011.
7. В.З. Гринес, О.В. Починка, А.Н. Сахаров, А.В. Рузаев, "Энергетическая функция как полный топологический инвариант градиентно-подобных потоков с седлами одинакового индекса Морса на 3-многообразиях", *Журнал средневожского математического общества*, 2013.
8. Медведев В.С., Уманский Я.Л., "О разложении n -многообразий на простые многообразия", *Известия Высших Учебных заведений*, 1979, № 1, 46-50.
9. Meyer K.R., "Energy Functions for Morse-Smale Systems", *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.
10. Milnor J., *Morse Theory*, Princeton University Press, N.Y., 1963.
11. Ошемков А.А., Шарко В.В., "О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях", *Математический сборник*, **189**:8 (1998), 93–140.
12. Pixton D., "Wild unstable manifolds", *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
13. Пилюгин С.Ю., "Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса-Смейла без периодических траекторий на сферах", *Дифференциальные уравнения*, **14**:2 (1978), 245-254.

14. Prishlyak A. O., “Complete topological invariants of Morse–Smale flows and handle decompositions of 3-manifolds”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **11**:4 (2005), 185–196.
15. Schatten K.H., Wilcox J.M., Ness N.F., “A model of interplanetary and coronal magnetic fields”, *Solar Physics March*, **6**:3 (1969), 442-455.
16. Smale S., “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math*, **1**:1 (1961), 199–206.
17. Смейл С., “Дифференцируемые динамические системы”, *Успехи мат. наук*, **25**:1 (1970), 113 – 125.
18. Thom R., “La stabilite topologique des applications polinomiales”, *Topology*, **1** (1962), 101–120.
19. Уманский Я. Л., “Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса-Смейла с конечным числом особых траекторий”, *Мат. сб.*, **181**:2 (1990), 212 - 239.
20. Fleitas G., “Classification of gradient-like flows in dimension two and three”, *Bol. Soc. Mat. Brasil*, **6** (1975), 155 - 183.
21. Hoeksema J.T., Wilcox J. M., Scherrer P.H., “Structure of the heliospheric current sheet in the early portion of Sunspot Cycle 21”, *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **87**:A12 (1982), 10331–10338.
22. Wang Y.-M., Sheeley Jr. N. R., “On potential field model of the solar corona”, *Astrophysical Journal, part 1*, **392**:1 (1992), 310-319.

On topological classification of gradient-like flows without heteroclinical intersection by means of energy function

© E. Ya. Gurevich¹¹, A. N. Sakharov¹² E.D. Tregubova¹³.

Abstract. Presenting paper is an extension of paper [7] and devoted to topological classification of gradient-like flows on smooth closed orientable manifold M^n of dimension $n \geq 3$ by means of energy function. We consider class $G(M^n)$ of gradient-like flows without heteroclinic intersection, all saddle equilibria of which have Morse index equal 1 or $(n - 1)$. We show that necessary and sufficient condition of topological equivalence for flows from $G(M^n)$ is equivalence of corresponding energy functions and special condition of equivalence energy functions on some level surface. Also we define a class $G_0(M^n)$ of flows for which energy function is complete invariant. Obtained results may be applied for quantity studying of dynamics for structurally stable systems with known energy function from physical contest of the model (as, for instance, energy function of dissipative systems in mechanics, potential of electrostatic fields or potential of current free magnetic field)

Key Words: Morse-Smale flows, energy function, topological equivalence, topological classification

¹¹ Associated Professor of Chair of Theory of Control and Dynamics of Machines, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, elena_gurevich@list.ru

¹² Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru.

¹³ Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math-ngaa@yandex.ru.

УДК 533.9.01

Исследование распространения поверхностных волн в цилиндрическом столбе магнитной жидкости, окружающей пористое ядро

© Э. Н. Егерев¹, О. А. Рунова², А. А. Кормилицин³

Аннотация. Построена и исследована математическая модель распространения и неустойчивости волн на поверхности цилиндрического столба магнитной жидкости бесконечной длины, окружающей коаксиально расположенное, бесконечное ядро (из пористого материала) круглого сечения. Найдены условия, при которых возмущения поверхности жидкого столба становятся неустойчивыми и приводят к его распаду на цепочку из соединенных капель.

Ключевые слова: поверхностные волны, неустойчивость, магнитная жидкость, распад столба жидкости, магнитное поле, пористая среда

1. Введение

Магнитные жидкости получают искусственно: путем коллоидного диспергирования наночастиц твердого ферромагнетика в обычной немагнитной жидкости [1].

Такого вида жидкости широко используются в различных областях техники и технологии. Первоначально задача о поверхностных волнах струи магнитной жидкости рассмотрена в работе [2]. Затем распространение поверхностных волн в слое немагнитной жидкости на пористом основании исследовано в работе [3]. Исследования распространения волн на заряженной поверхности цилиндрического столба электропроводной жидкости, окружающей длинное пористое ядро, проведены в работе [4].

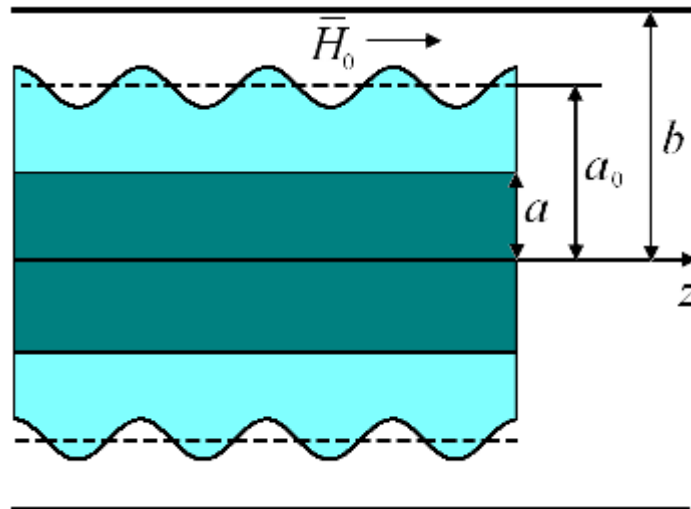
2. Постановка задачи

Рассматривается задача о распространении поверхностных волн в цилиндрическом столбе магнитной жидкости, окружающей длинное пористое ядро. Предполагается, что внутри объема магнитной жидкости находится пористое ядро, пропитанное этой же жидкостью, в форме коаксиально расположенного круглого цилиндра (рисунок 2.1).

¹ Доцент кафедры математики и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; egerevaen@mail.ru

² Аспирант кафедры математики, МордГПИ имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск; runova.olga@list.ru

³ Студент 5-ого курса физико-математического факультета, МордГПИ имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск



Р и с у н о к 2.1

Учитываются силы поверхностного натяжения жидкости. Силы тяжести предполагаются отсутствующими. Ось симметрии пористого цилиндра совпадает с осью симметрии коаксиально расположенного соленоида, создающего однородное магнитное поле с напряженностью \vec{H}_0 . Задача решается в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , в которой жидкий столб покоится. Ось z направлена по оси симметрии пористого цилиндра. Радиусы пористого цилиндра, невозмущенной поверхности жидкости и соленоида обозначены через a , a_0 и b соответственно. Величины, относящиеся к пористой среде, свободной жидкости, находящейся вне пористой среды, и промежутку между жидкостью и соленоидом, будем обозначать во всех случаях индексами 1, 2 и 3 соответственно. Магнитная проницаемость μ_1 , μ_2 , μ_3 в областях 1, 2, 3 предполагается постоянной. Предположим, что $\mu_3 = 1$, а магнитная проницаемость среды в области 1 вычисляется по формуле $\mu_1 = \mu_2\Gamma + \mu_s(1 - \Gamma)$, где μ_s - проницаемость пористой матрицы, Γ - пористость, которая представляет собой отношение объема пор к объему среды. Магнитная сила равна нулю при постоянной проницаемости, однако это не означает, что магнитное поле не влияет на движение жидкости. В самом деле, на поверхностях раздела сред существуют механические напряжения, посредством которых и происходит взаимодействие поля со средой.

3. Уравнения движения

Уравнения движения магнитной жидкости в пористой среде при сделанных предположениях имеют вид [3], [5]

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1 - \frac{\eta}{K} \vec{u}_1, \quad \text{div } \vec{u}_1 = 0. \quad (3.1)$$

Здесь ρ - плотность жидкости, η - вязкость, K - коэффициент проницаемости пористой среды, p_1 - давление, \vec{u}_1 - макроскопическая скорость фильтрации, связанная со средней скоростью жидкости в порах соотношением $\vec{u}_1 = \Gamma \vec{v}_1$.

В линейном приближении уравнения движения свободной жидкости, в предположении, что амплитуда волны значительно меньше ее длины, имеют вид [6]

$$\rho \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} = -\text{grad } p_2, \quad \text{div } \vec{u}_2 = 0, \quad (3.2)$$

где \vec{u}_2 - скорость свободной жидкости.

Ограничиваемся случаем волн достаточно большой длины λ , существенно превышающей радиус a_0 жидкого столба магнитной жидкости, с тем, чтобы пренебречь слагаемыми, содержащими $\Delta\vec{u}_1$ и $\Delta\vec{u}_2$ в уравнениях (3.1) и (3.2).

Уравнения для магнитного поля имеют вид [7]

$$\operatorname{rot} \vec{H}_i = 0, \quad \operatorname{div} \mu_i \vec{H}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.3)$$

Из уравнений (3.1)-(3.3) следует

$$\vec{u}_1 = \nabla\varphi_1, \quad \vec{u}_2 = \nabla\varphi_2, \quad \vec{H}_i = \nabla\psi_i, \quad \Delta\varphi_1 = 0, \quad \Delta\varphi_2 = 0, \quad \Delta\psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.4)$$

Далее все величины будем записывать в виде

$$p_1 = p_{10} + p_{1w}, \quad p_2 = p_{20} + p_{2w}, \quad \vec{H}_i = \vec{H}_{i0} + \vec{H}_{iw}, \quad (3.5)$$

$$\psi_i = \psi_{i0} + \psi_{iw} = zH_{i0} + \psi_{iw} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Нижним индексом 0 обозначены соответственно невозмущенные величины $\vec{H}_{10} = \vec{H}_{20} = \vec{H}_{30} \equiv \vec{H}_0$. Нижним индексом w обозначены малые возмущения, связанные с волной. Возмущения ψ_{iw} также должны удовлетворять уравнениям Лапласа (3.4).

4. Граничные условия

Граничные условия на поверхностях раздела имеют вид:
на границе пористой среды $r = a$:

$$1) u_{1r} = u_{2r}, \quad 2) \psi_1 = \psi_2, \quad 3) \mu_1 \vec{n} \nabla \psi_1 = \mu_2 \vec{n} \nabla \psi_2, \quad (4.1)$$

$$4) p_1 - \frac{\mu_1}{4\pi} H_{1n}^2 + \frac{\mu_1}{8\pi} \vec{H}_1^2 = p_2 - \frac{\mu_1}{4\pi} H_{2n}^2 + \frac{\mu_1}{8\pi} \vec{H}_2^2,$$

на свободной поверхности жидкости $r = a_0 + \xi(\theta, z, t)$:

$$5) u_{2r} = \frac{d\xi}{dt}, \quad 6) \psi_2 = \psi_3, \quad 7) \mu_2 \vec{n} \nabla \psi_2 = \mu_3 \vec{n} \nabla \psi_3,$$

$$8) p_2 - \frac{\mu_2}{4\pi} H_{2n}^2 + \frac{\mu_2}{8\pi} \vec{H}_2^2 - (p_3 - \frac{\mu_3}{4\pi} H_{3n}^2 + \frac{\mu_3}{8\pi} \vec{H}_3^2) = 2\alpha C,$$

где α - коэффициент поверхностного натяжения, C - средняя кривизна поверхности, \vec{n} - единичная нормаль к соответствующей поверхности.

на поверхности соленоида ($r = b$):

$$9) \psi_{3w} = 0,$$

то есть возмущение потенциала равно нулю.

Невозмущенные величины также должны удовлетворять граничным условиям (4.1).

Для возмущений давления из (3.1) и (3.2) с учетом (3.5) следует

$$p_{1w} = -\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\eta}{K} \varphi_1, \quad p_{2w} = -\rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что выражения для \vec{n} и C для деформированной цилиндрической поверхности в линейном приближении имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (n_r, n_\theta, n_z) = \left(1, -\frac{1}{a_0} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}, -\frac{\partial \xi}{\partial z}\right), \\ 2C &= \operatorname{div} \vec{n} = \frac{1}{a_0} - \left(\frac{\xi}{a_0^2} + \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right).\end{aligned}\quad (4.3)$$

На поверхности пористой среды $\vec{n} = (1, 0, 0)$

С учетом вышеизложенного, граничные условия (4.1) в линейном приближении принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \quad (r = a), \\ \psi_{1w} &= \psi_{2w} \quad (r = a), \\ \mu_1 \frac{\partial \psi_{1w}}{\partial r} &= \mu_2 \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial r} \quad (r = a), \\ p_{1w} + \frac{\mu_1 H_0}{4\pi} \frac{\partial \psi_{1w}}{\partial z} &= p_{2w} + \frac{\mu_2 H_0}{4\pi} \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial z} \quad (r = a), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} &= \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (r = a_0), \\ \psi_{2w} &= \psi_{3w} \quad (r = a_0), \\ \mu_2 \left(H_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial r}\right) &= \mu_3 \left(H_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{3w}}{\partial r}\right) \quad (r = a_0), \\ p_{2w} + \frac{\mu_2 H_0}{4\pi} \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial z} - \frac{\mu_3 H_0}{4\pi} \frac{\partial \psi_{3w}}{\partial z} &= -\alpha \left(\frac{\xi}{a_0^2} + \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) \quad (r = a_0), \\ \psi_{3w}(b) &= 0.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Кроме того, на оси пористого цилиндра ($r = 0$) решения уравнений должны быть конечными.

В граничных условиях (4.4) вместо p_{1w}, p_{2w} надо подставить выражения (4.2).

Математическая модель является, таким образом, краевой задачей, состоящей из уравнений Лапласа (3.4) в цилиндрических координатах и граничных условий (4.4).

5. Решение задачи

Решение уравнения (3.4) с граничными условиями (4.4) ищем в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \theta, z, t) &= \hat{\varphi}_1(r) \exp(-\gamma t + ikz + im\theta), \\ \varphi_2(r, \theta, z, t) &= \hat{\varphi}_2(r) \exp(-\gamma t + ikz + im\theta), \\ \psi_{1w}(r, \theta, z, t) &= \hat{\psi}_{1w}(r) \exp(-\gamma t + ikz + im\theta), \\ \psi_{2w}(r, \theta, z, t) &= \hat{\psi}_{2w}(r) \exp(-\gamma t + ikz + im\theta), \\ \psi_{3w}(r, \theta, z, t) &= \hat{\psi}_{3w}(r) \exp(-\gamma t + ikz + im\theta), \\ \xi(r, \theta, z, t) &= \hat{\xi}(r) \exp(-\gamma t + ikz + im\theta),\end{aligned}\quad (5.1)$$

где $\hat{\varphi}_i(r)$ ($i=1, 2$), $\hat{\psi}_j(r)$ ($j=1, 2, 3$), $\hat{\xi}$ - неизвестные величины, $k = 2\pi/\lambda$ -волновое число, $m = 0, 1, 2, \dots$; $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$, $\omega = |\gamma_i|$ -частота, $\beta = \gamma_r$ -коэффициент, который может

быть положительным при затухании возмущения, и отрицательным при неустойчивости, приводящей к нарастанию возмущения.

Подставляя выражения (5.1) для φ_i ($i=1, 2$) и для ψ_{jw} ($j=1, 2, 3$) в уравнения Лапласа, записанные в цилиндрических координатах, получим систему пяти модифицированных уравнений Бесселя порядка для амплитуд, решения которых имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_1 &= C_1 I_m(kr) + C_2 K_m(kr), \\ \hat{\varphi}_2 &= C_3 I_m(kr) + C_4 K_m(kr), \\ \hat{\psi}_{1w} &= C_5 I_m(kr) + C_6 K_m(kr), \\ \hat{\psi}_{2w} &= C_7 I_m(kr) + C_8 K_m(kr), \\ \hat{\psi}_{3w} &= C_9 I_m(kr) + C_{10} K_m(kr).\end{aligned}$$

Здесь I_m и K_m - модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка m . Следует положить $C_2 = 0$ и $C_6 = 0$, так как $K_m(kr) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Граничные условия (4.4) с учетом пяти модифицированных уравнений Бесселя порядка m для амплитуд принимают следующий вид

$$\begin{aligned}1) C_1 I'_m(ka) &= C_3 I'_m(ka) + C_4 K'_m(ka), & (5.2) \\ 2) C_5 I_m(ka) &= C_7 I_m(ka) + C_8 K_m(ka), \\ 3) \mu_1 C_5 I_m(ka) &= \mu_2 C_7 I'_m(ka) + \mu_2 C_8 K'_m(ka), \\ 4) -\frac{\rho\gamma}{\Gamma} C_1 I_m(ka) + \frac{\eta}{K} C_1 I_m(ka) - \frac{ik\mu_1 H_0}{4\pi} C_5 I_m(ka) &= -\rho\gamma [C_3 I_m(ka) + C_4 K_m(ka)] - \\ &- \frac{ik\mu_2 H_0}{4\pi} [C_7 I_m(ka) + C_8 K_m(ka)], \\ 5) kC_3 I'_m(ka_0) + kC_4 K'_m(ka_0) &= -\gamma\hat{\xi}, \\ 6) C_7 I_m(ka_0) + C_8 K_m(ka_0) &= C_9 I_m(ka_0) + C_{10} K_m(ka_0), \\ 7) \mu_2 [ikH_0\hat{\xi} - C_7 k I'_m(ka_0) - C_8 k K'_m(ka_0)] &= \\ &= \mu_3 [ikH_0\hat{\xi} - C_9 k I'_m(ka_0) - C_{10} k K'_m(ka_0)] \\ 8) \rho\gamma^2 [C_3 I_m(ka_0) + C_4 K_m(ka_0)] + \frac{ik\mu_2\gamma H_0}{4\pi} [C_7 I_m(ka_0) + C_8 K_m(ka_0)] - \\ &- \frac{ik\mu_3\gamma H_0}{4\pi} [C_9 I_m(ka_0) + C_{10} K_m(ka_0)] = -\frac{\alpha\gamma\hat{\xi}}{a_0^2} (1 - m^2 - ka_0^2), \\ 9) C_9 I_m(kb) + C_{10} K_m(kb) &= 0.\end{aligned}$$

Здесь i - мнимая единица, штрихами обозначены производные. Для упрощения вычислений далее предполагаем, что соленоид достаточно большого радиуса, то есть $a_0/b \ll 1$. Из системы граничных условий (5.2) выражаем восемь неизвестных коэффициентов $C_1, C_3, C_4, C_5, C_7, C_8, C_9, C_{10}$, через величину $\hat{\xi}$, которую считаем заданной. Подставляя найденные значения коэффициентов в восьмое уравнение системы (5.2), получаем дисперсионное уравнение для поверхностных волн в цилиндрическом столбе магнитной жидкости, окружающей длинное пористое ядро, кубическое относительно γ :

$$A_1\gamma^3 + A_2\gamma^2 + A_3\gamma + A_4 = 0, \quad (5.3)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 - некоторые коэффициенты, зависящие от свойств магнитной жидкости и пористой среды.

Уравнение (5.3) может быть приведено к так называемому неполному кубическому уравнению [8] с дискриминантом $Q = (p/3)^3 + (q/2)^2$, где p и q выражаются через коэффициенты уравнения (5.3). При условии $Q > 0$ существует волновое движение, поскольку уравнение (5.3) имеет два комплексно сопряженных корня. При $Q \leq 0$ волновых движений нет, так как все три корня уравнения (5.3) действительные.

В частном случае, когда при $\Gamma \rightarrow 1$, $\eta/K \rightarrow 0$ (пористую среду заменяем магнитной жидкостью) первое уравнение (3.1) переходит в уравнение Эйлера, а из уравнения (5.3) при $a \rightarrow 0$ следует квадратное относительно γ дисперсионное уравнение, полученное в работе [2], результаты которой согласуются с экспериментом. При отсутствии магнитного поля, когда $H_0 = 0$ или $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, получается классический результат Релея о распаде струи обычной жидкости.

6. Анализ модели

Численное исследование задачи о распространении поверхностных волн в цилиндрическом столбе магнитной жидкости, окружающей длинное пористое ядро проводилось для следующих значений параметров в системе СГС: $\rho = 1$ г/см³; $\alpha = 20$ г/с²; $\eta = 0,01$ г/см·с; $\Gamma = 0,8$; $K = 0,02$ см²; $0 < k < 1,8$ см⁻¹; $H_0 = 20$ Э (эрстед, $1 \text{ Э} = (1/4\pi) \cdot 10^3$ А/м $\approx 79,6$ А/м); $\mu_2 = 2$; $\mu_3 = 1$; $\mu_s = 1$; $m = 0$.

Для симметричных возмущений ($m = 0$) и фиксированных значений a , a_0 , $H_0 = 20$ Э интервал $0 < k < 1,8$ см⁻¹ делится критической точкой k_c ($\lambda_c = 2\pi/k_c$), которая находится из условия $Q = 0$, на два интервала. В интервале $0 < k < k_c$ волны отсутствуют: происходит нарастание возмущений ($\beta < 0$). Амплитуда возмущения растет с наибольшей скоростью при $k = k_m$, при котором $|\beta|$ достигает максимума. Размер образующихся при распаде жидкого столба капель равен $\lambda_m \approx 2\pi/k_m$ [2]. При $k \rightarrow k_c$ движение жидкости замедляется, то есть $\omega \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$. В интервале $k_c < k < 1,8$ см⁻¹ существуют затухающие ($\beta > 0$) волны.

В таблице 3 приведены значения критического волнового числа k_c , максимального волнового числа k_m и соответствующего ему максимального значения безразмерного коэффициента затухания $\beta_m^* \equiv \beta_m^*(k_m)$ в зависимости от толщины пористого ядра a ($0,2 < a < 0,9$) при фиксированном значении $a_0 = 1,1$ см и перечисленных выше значениях остальных параметров. Здесь безразмерный коэффициент затухания $\beta^*(k) = \beta(k)[\alpha/\rho a_0^3]^{-1/2}$.

Таблица 3:

a , см	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k_c , см ⁻¹	0,621	0,622	0,623	0,624	0,625	0,626	0,629	0,633
k_m , см ⁻¹	0,422	0,424	0,428	0,431	0,432	0,433	0,437	0,440
β_m^*	-0,831	-0,817	-0,810	-0,802	-0,787	-0,780	-0,750	-0,728

Из таблицы 3 видно, что критическое волновое число слабо зависит от толщины пористого цилиндра и остается равным $k_c \approx 0,6$ см⁻¹.

В таблице 4 приведены значения k_c , k_m , $\beta_m^* \equiv \beta_m^*(k_m)$ в зависимости от a_0 ($0,7 < a_0 < 1,4$) при фиксированной толщине пористого ядра $a = 0,5$ см.

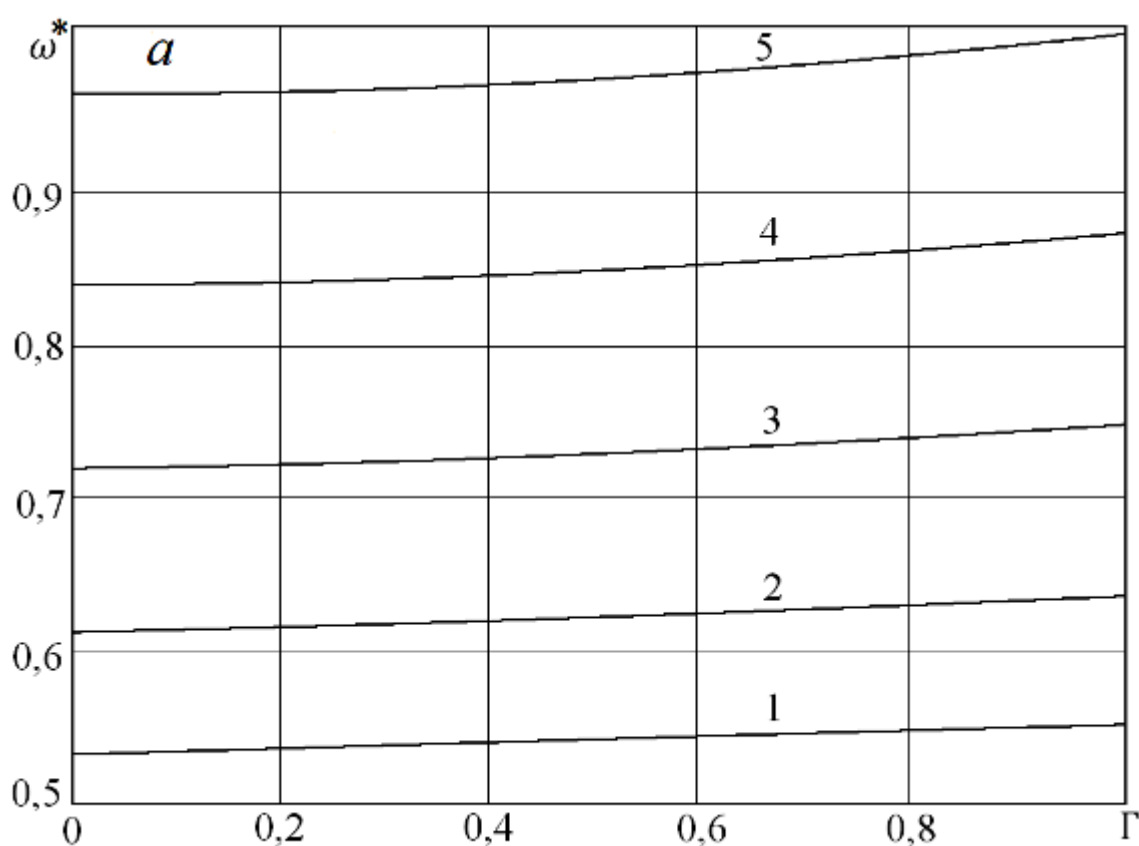
Из таблицы 4 видно, что при увеличении толщины невозмущенной поверхности магнитной жидкости критическое и максимальное значения волнового числа уменьшаются

Таблица 4:

$a_0, \text{см}$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
$k_c, \text{см}^{-1}$	1,132	0,953	0,817	0,710	0,624	0,553	0,494	0,444
$k_m, \text{см}^{-1}$	0,787	0,657	0,563	0,489	0,424	0,372	0,332	0,305
β_m^*	-1,786	-1,429	-1,155	-0,952	-0,798	-0,679	-0,583	-0,5

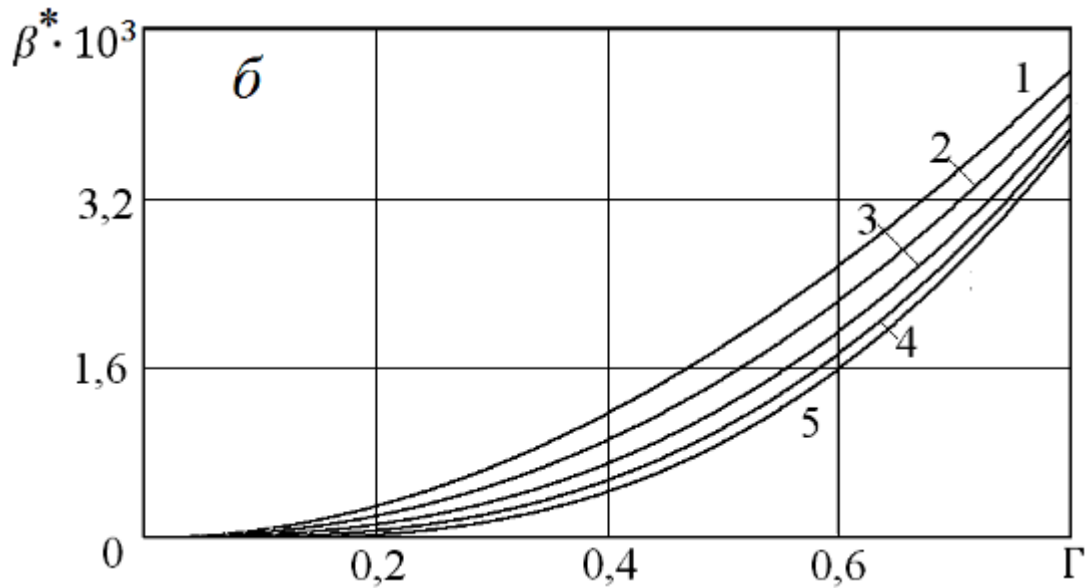
при фиксированном $a = 0,5 \text{ см}$. Максимальное значение безразмерного коэффициента затухания по модулю также уменьшается.

На рисунках 6.1, 6.2 приведены графики зависимостей безразмерных величин частоты $\omega^*(\Gamma) = \omega(\Gamma)[\alpha/\rho a_0^3]^{-1/2}$ и коэффициента затухания $\beta^*(\Gamma)$ от пористости для различных значений магнитной проницаемости жидкости: $\mu_2 = 1, 2; 1, 4; 1, 6; 1, 8; 2$ (1 - 5). На графике кривые показаны номерами 1 - 5 соответственно.



Р и с у н о к 6.1

Зависимость безразмерной частоты ω^* от Γ : $\mu_2 = 1, 2; 1, 4; 1, 6; 1, 8; 2$ (1 - 5); $a = 0,5 \text{ см}$;
 $a_0 = 1,5 \text{ см}$; $k = 0,8 \text{ см}^{-1}$; $m = 0$; $H_0 = 20 \text{ Э}$

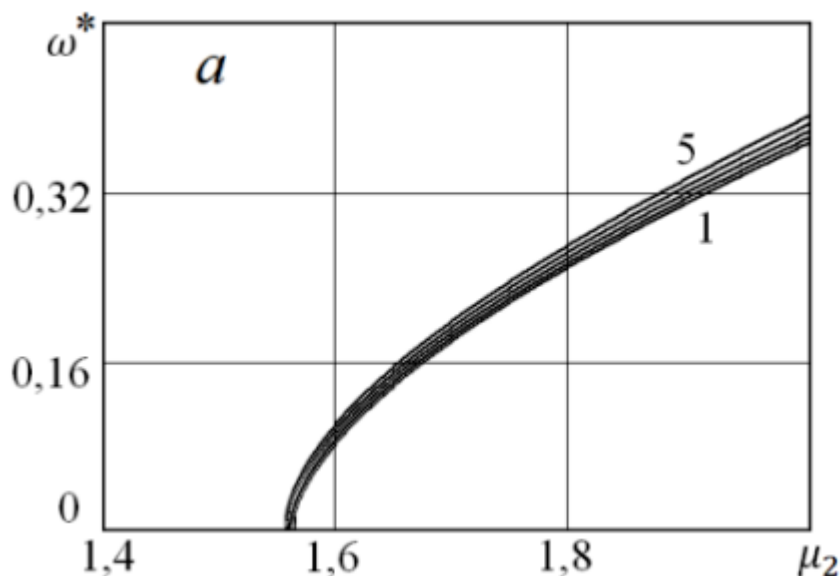


Р и с у н о к 6.2

Зависимость коэффициента затухания β^* от Γ : $\mu_2 = 1, 2; 1, 4; 1, 6; 1, 8; 2$ (1 - 5); $a = 0, 5$ см;
 $a_0 = 1, 5$ см; $k = 0, 8$ см⁻¹; $m = 0$; $H_0 = 20$ Э

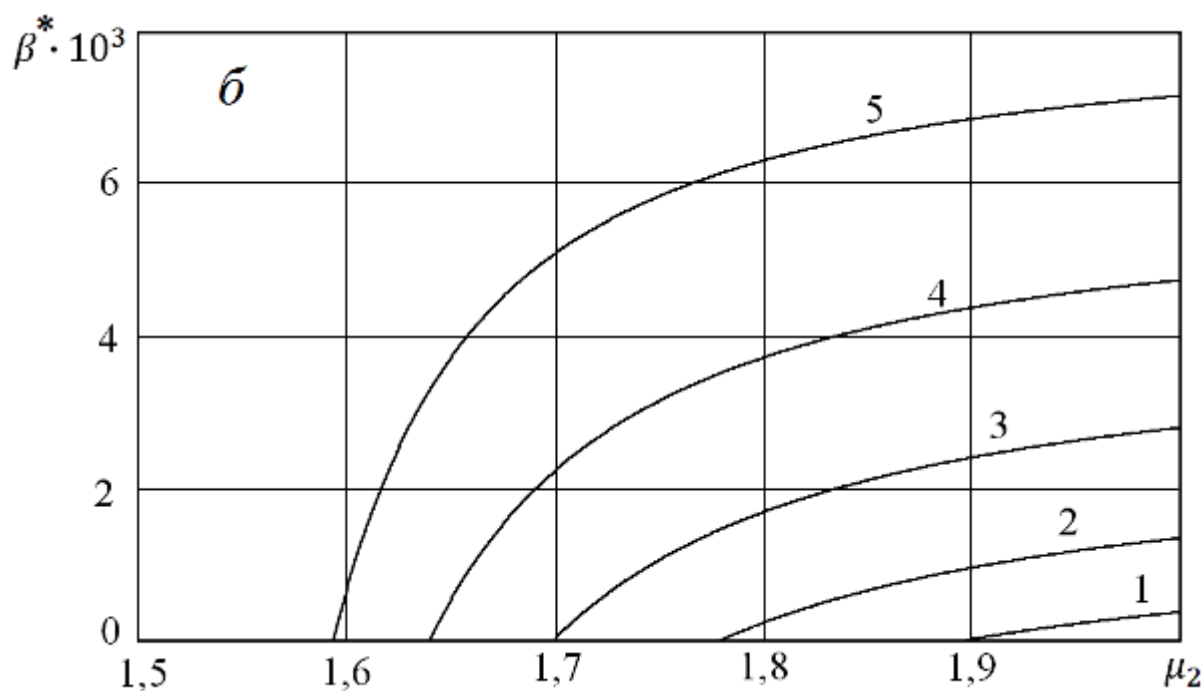
На рисунках 6.3, 6.4 приведены графики зависимостей $\omega^*(\mu_2)$ и $\beta^*(\mu_2)$ при $m = 0$ и фиксированных значениях $H_0 = 20$ Э, $a = 0, 5$ см, $a_0 = 1, 1$ см для разных значений пористости.

Из графиков видно, что безразмерная частота ω^* слабо зависит от пористости ядра рассматриваемой модели. Безразмерный коэффициент затухания β^* при фиксированных значениях Γ увеличивается с увеличением магнитной проницаемости жидкости.



Р и с у н о к 6.3

Зависимость безразмерной частоты ω^* от μ_2 : $\Gamma = 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9$ (1 - 5); $a = 0, 5$ см;
 $a_0 = 1, 5$ см; $k = 0, 8$ см⁻¹; $m = 0$; $H_0 = 20$ Э



Р и с у н о к 6.4

Зависимость коэффициента затухания β^* от μ_2 : $\Gamma = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$ (1 - 5); $a = 0,5$ см;
 $a_0 = 1,5$ см; $k = 0,8$ см⁻¹; $m = 0$; $H_0 = 20$ Э

7. Заключение

Исследовано распространение волн на поверхности цилиндрического столба магнитной жидкости, окружающей ядро из пористого материала в приложенном магнитном поле, направленном вдоль оси жидкого столба. Рассмотрена область длинных волн, которая при симметричных возмущениях, когда $m = 0$, и достаточно слабых полях $0 \leq H_0 \leq 40$ Э делится критической точкой k_c на два интервала. В интервале $0 < k < k_c$ происходит аperiodическое движение ($\beta < 0$) с нарастающей амплитудой, приводящее к распаду жидкого столба на цепочку из соединенных между собой капель, длина которых равна $\lambda_m = 2\pi/k_m$. При $k \rightarrow k_c$ ($\lambda \rightarrow \lambda_c = 2\pi/k_c$) движение жидкости замедляется, то есть $\omega \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, что связано с взаимной нейтрализацией капиллярных и магнитных сил, действующих на поверхности жидкости.

Зависимость безразмерного коэффициента затухания $\beta^*(\mu_2)$ при различных значениях пористости является монотонно возрастающей.

В интервале $k_c < k < 1,8$ см⁻¹ существует затухающее волновое движение с безразмерной частотой $\omega^*(\Gamma)$, монотонно возрастающей с ростом магнитной проницаемости жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слезкин Н. А., "О влиянии пористости дна на плоскую стоячую волну тяжелой жидкости", *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1984, № 4, 160–163.

2. Тактаров Н. Г., “Распад струи магнитной жидкости”, *Магнитная гидродинамика*, 1975, № 2, 35–38.
3. Миронова С. М., Тактаров Н. Г., “Распространение волн на заряженной поверхности цилиндрического столба жидкости, окружающей длинное пористое ядро”, *Изв. РАН. МЖГ*, 2012, № 4, 104–110.
4. Столяров И. В., Тактаров Н. Г., “Распространение волн в слое жидкости на пористом основании”, *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1987, № 5, 183–186.
5. Иванов А. Б., Тактаров Н. Г., “К исследованию фильтрации магнитных жидкостей”, *Магнитная гидродинамика*, 1990, № 3, 138–139.
6. Седов Л. И., *Механика сплошной среды*. Т. 1, Наука, М., 1976, 536 с.
7. Тамм И. Е., *Основы теории электричества*, Наука, М., 1976, 616 с.
8. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*, Наука, М., 1975, 431 с.

Research of propagation of the waves on a surface of a cylindrical column of magnetic fluid surrounding a porous core.

© Е. Н. Egereva⁴, О. А. Runova⁵, А. А. Kormilicin⁶

Abstract. A mathematical model of wave propagation and instability on a surface of an infinite cylindrical configuration of magnetic fluid, surrounding a coaxial infinite cylindrical porous core, is constructed and studied. The conditions are found under which the disturbances of the liquid column become unstable and result in its fragmentation into a chain of connected droplets.

Key Words: waves, magnetic fluid, cylindrical configuration of fluid, magnetic field, long porous core

⁴ Associate professor of the Department of Mathematics and Theoretical mechanics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; egerevaen@mail.ru

⁵ Postgraduate student, Mordovian State Pedagogical Institute named after M.E. Evseyev, Saransk; runova.olga@list.ru

⁶ Student, Mordovian State Pedagogical Institute named after M.E. Evseyev, Saransk

УДК 517.9

Экономные вычислительные подходы в анализе механизмов химических реакций на примере термической гибели ароматических нитрозооксидов

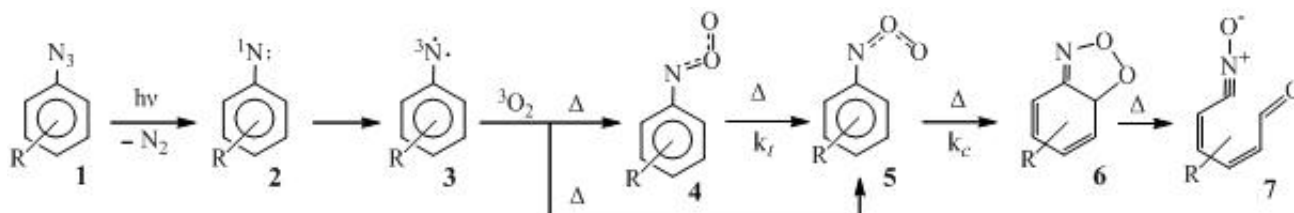
© О. Ю. Забейворота¹, Е. Ю. Панкратьев², И. М. Губайдуллин³

Аннотация. Известно, что ароматические нитрозооксиды, интермедиаты фотохимического окисления ароматических азидов (соединение 1, рис. 1) кислородом, имеют две изомерные формы – транс (4) и цис (5). В термических условиях эти формы быстро гибнут по кинетическому закону реакции первого порядка. Установлено, что транс-изомер $ArNOO$ изомеризуется в цис. В свою очередь, последний претерпевает необычную реакцию циклизации терминального атома кислорода по орто-положению ароматического цикла с последующим мономолекулярным распадом образующегося бицикла (6). Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант РФФИ № 12-07-00324-а и № 13-03-00201-а).

Ключевые слова: нитрозооксиды, квантово-химический расчет, ядерно-независимый химический сдвиг, DFT-метод

1. Введение

Известно [1-6], что ароматические нитрозооксиды, интермедиаты фотохимического окисления ароматических азидов (соединение 1, рис. 1) кислородом, имеют две изомерные формы – транс (4) и цис (5). В термических условиях эти формы быстро гибнут по кинетическому закону реакции первого порядка. Установлено, что транс-изомер $ArNOO$ изомеризуется в цис. В свою очередь, последний претерпевает необычную реакцию циклизации терминального атома кислорода по орто-положению ароматического цикла с последующим мономолекулярным распадом образующегося бицикла (6).



Р и с у н о к 1.1

Механизм термической гибели транс- и цис-изомеров ароматических нитрозооксидов.

2. Постановка задачи

При наличии в ароматической системе исходного азида 1 заместителей, содержащих функциональные группы, как например кратные связи, реакцию термической гибели

¹ Студентка 4 курса, Башкирский государственный университет, г. Уфа; zabeivorota.olga@gmail.com.

² Научный сотрудник, Институт органической химии УНЦ РАН, г. Уфа; paneyu@gmail.com

³ Старший научный сотрудник, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; IrekMars@mail.ru.

$ArNOO$ можно использовать как новый метод синтеза азотсодержащих гетероциклов, перспективных биологически активных соединений [1], [2].

В планировании синтеза органических соединений большую помощь оказывают теоретические методы. Так, используя квантово-химические подходы можно предсказать возможные направления взаимодействия функциональных групп в молекуле (в нашем случае это, например, нитрилоксидная группа и кратная связь), регио- и стереоселективность и т.д.

Нитрозооксиды $RNOO$ (изомеры (4),(5)) являются 1,3-диполярными пероксидами, особенностью электронного строения которых является трёхцентровая четырёхэлектронная π -система [7],[8], для корректного описания которой требуется использовать высокозатратные в вычислительном плане многоконфигурационные квантово-химические приближения. Однако было показано, что в ряде случаев можно использовать однодетерминантные методы (например, функционалы плотности в рамках DFT) для приближённого описания превращений и свойств ароматических нитрозооксидов.

Транс-изомеры нитрозооксидов (4) имеют существенный вклад бирадикальной резонансной формы в электронную структуру молекулы, поэтому для изучения транс-цис ((4) \rightarrow (5)) превращения мы не можем использовать большинство функционалов DFT ($B3LYP$) и композитных методов ($G3MP2B3$), ранее хорошо зарекомендовавшие себя для исследования реакций цис-формы. Известно, что метод $B3LYP$ существенно переоценивает стабильность синглетных бирадикалов, что приводит к занижению барьера транс-цис перехода [2]. В случае же композитного метода $G3MP2B3$ один из этапов расчёта проходит на уровне MP2, не применимого для описания синглетных бирадикальных систем. Однако ранее на примере незамещённого $HNOO$ было показано [7], что pure-DFT функционалы $mPWPW91$ и $OLYP$ удовлетворительно описывают искомое превращение.

Цис-изомеры нитрозооксидов (5) проявляются преимущественно цвиттер-ионную природу, поэтому для изучения их превращений можно использовать квантово-химические приближения $UB3LYP/6-311+G(d,p)$ и $G3MP2B3$.

Общеизвестно, что квантово-химические расчеты превращений молекул нужно проводить в едином приближении. Однако выше было показано, что электронную структуру изомеров ароматических нитрозооксидов и продуктов их превращения трудно представить в рамках одного однодетерминантного квантово-химического подхода. Поэтому целью настоящей работы является поиск альтернативных экономных в вычислительном плане методов анализа механизмов превращений транс- и цис-изомеров $ArNOO$ и способов предсказания их реакционной способности.

Также данная работа демонстрирует, что выбор оптимальных теоретических подходов для прогнозирования реакционной способности химических соединений может существенно уменьшить требуемые вычислительные ресурсы, и как следствие, увеличить максимальный размер задачи, для которого можно использовать предлагаемые подходы.

3. Концептуальные корреляционные подходы

Математически, любая интересующая исследователей физико-химиков величина (например, реакционная способность, выраженная в виде константы скорости реакции k) может быть представлена как некая функция f от многих аргументов. Параметрами f выступает набор характеристик составных частей системы и внешние условия (температура, давление). Пусть неизвестна ни математическая форма этой зависимости, ни природа

и значения всех элементарных параметров. Единственное, что доступно, это некий конечный набор экспериментально определённых или рассчитанных параметров. Поскольку воздействие различных параметров на величину f может быть разграничено, то и изменение каждой конкретной f связано, в большинстве случаев, с изменением лишь соответствующих элементарных параметров.

Таким образом, неизвестная функция f может быть приближённо заменена на функцию известной формы, содержащей только известные параметры. Доказано [8], что любую непрерывную и монотонную функцию в рассматриваемом промежутке, а такими в большинстве и являются экспериментальные величины, можно заменить полилинейной зависимостью. Приложение математического формализма полилинейных функций в физической химии отражено в виде принципа линейности энергий и свободных энергий (ЛЭСЭ).

Принцип ЛЭСЭ нашёл широкое применение при интерпретации экспериментальных результатов и тестирования механизмов реакций (одинаковый тип или разный, а тип механизма реакции тоже может быть представлен как параметр функции f) в физической органической химии.

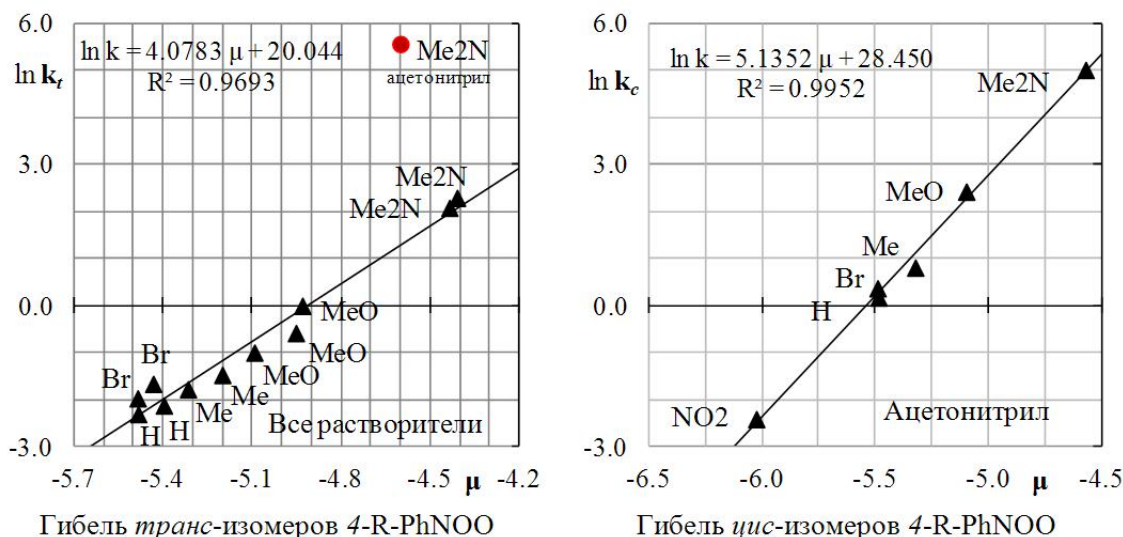
Используя феноменологический подход, т. е. такой подход, который не подразумевает знание механизма явления, можно выявлять корреляционные зависимости между интересующей нас функцией и некоторыми элементарными параметрами, параметры, с которыми функция лучше всего коррелирует, а также предсказывать значение функции из ранее полученной корреляционной зависимости для нового значения параметра.

В последнее время наиболее перспективным является использование концептуальных подходов, который отличается от феноменологического тем, что природа зависимости уже ясна. Мы попытались применить подобные подходы к предсказанию реакционной способности ароматических нитрозооксидов.

4. Индексы глобальной реакционной способности

Известно [8], что на скорость гибели изомерных форм сильное влияние оказывает природа как заместителя, так и растворителя. С повышением полярности растворителя скорость гибели транс-изомеров падает, а цис – растёт.

В настоящей работе используя квантово-химический метод $UB3LYP/6-311+G(d,p)$ рассчитаны индексы глобальной реакционной способности: потенциал ионизации, сродство к электрону, химический потенциал μ , глобальная жёсткость, мягкость и электрофильность. Изучены их корреляции с экспериментальными константами гибели транс- (k_t) и цис-изомеров (k_c) арилнитрозооксидов.



Р и с у н о к 4.1

Корреляционные зависимости скорости термической мономолекулярной гибели *транс*- и *цис*-изомеров пара-арил-нитрозооксидов и химического потенциала соответствующих нитрозооксидов, рассчитанных для различных растворителей

Установлено, что наилучшая корреляция с k_t и k_c наблюдается для химического потенциала. Значение k_t для 4-диметиламино-фенил-*транс*-нитрозооксид в ацетонитриле выпадает из корреляции, что указывает на иной механизм его гибели.

5. Ядерно-независимые химические сдвиги

Ароматичность – одно из ключевых понятий в органической химии. Это свойство связано с циклической делокализацией электронов, в результате дополнительной стабилизации в случае ароматических соединений и дестабилизации в случае неароматических соединений. Ароматичность – способность соединения поддерживать индуцированный (наведенный) ток кольца.

NICS (ядерно-независимые химические сдвиги) определяются как отрицательное значение абсолютного магнитного экранирования, рассчитываемого по центру кольца. NICS предусматривает соответствующую информацию о ароматичности различных углеводородов. Чем больше отрицательное значение этого показателя, тем больше ароматический характер молекулярной системы.

Успех NICS в качестве меры ароматичности очень значителен и NICS используется в качестве эффективного индекса ароматичности. В последнее время изучена актуальность NICS в понимании ароматичности бензола и родственных соединений. NICS обычно вычисляются в кольце центров, в точках выше, и даже как сетки и вокруг молекулы. Одна из задач, которую нужно было решить, это определение расстояния от центра ароматического цикла (область наибольших токов), для которого значение ядерно-независимого химического сдвига является максимальным. Для молекулы бензола это расстояние равно 0.8 \AA . На примере молекулы бензола были рассмотрены различные DFT-приближения для расчета значений ядерно-независимых химических сдвигов. Для дальнейших расчетов были выбраны приближения $PBE/\lambda 2$, $PBE/\lambda 33$. Было сделано предположение, что для исследуемых фенилнитрозооксидов расстояние аналогично бензолу. Необходимо было

найти координаты точки, в которой значение магнитного экранирования являлось максимальным. Для этого бензольное кольцо рассматривалась как плоскость, а искомая точка принадлежала вектору нормали к этой плоскости. Для простоты, центр плоскости кольца определялся как среднее арифметическое соответствующих координат атомов углерода (по x , y , z), полученных при решении задачи геометрической оптимизации молекулы.

6. Заключение

На основе проведенных исследований было установлено, что структуры, в которых заместители имеют донорную природу, достаточно хорошо описываются данным методом ядерно-независимых химических сдвигов. А такие заместители как $-\text{Br}$ или $-\text{NO}_2$ (акцепторная природа) не позволяют ставить соответствие между экспериментальными и расчетными данными. Квантово-химические расчёты проведены на кластерном суперкомпьютере ИОХ УНЦ РАН в лицензионном пакете программ Gaussian 09.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chainikova E. M., Pankratyev E. Y., Teregulova A. N., Gataullin R. R., Safiullin R. L., "Thermal Intramolecular Transformations of Key Intermediates in the Photooxidation of para-Allyl-Substituted Phenyl Azide", *J. Phys. Chem. A.*, **117**:13 (2013), 2728–2737.
2. Талипов М. Р., Хурсан С. Л., Сафиуллин Р. Л., "Новая внутримолекулярная трансформация ароматических нитрозооксидов", *Журнал физической химии*, **86**:2 (2012), 292–301.
3. Chainikova E. M., Safiullin R. L., Spirikhin L. V., Erastov A., "Synthesis of nitrogen-containing heterocyclic compounds by photooxidation of aromatic azides", *Tetrahedron*, **54**:17 (2013), 2140–2142.
4. Панкратьев Е. Ю., Сафиуллин Р. Л., *Бутлеровские сообщения*, **30**:6 (2012), 26–36.
5. Грицан Н. П., *Успехи химии*, **76**:12 (2007), 1218–1240.
6. Sawwan N., Greer A., "Rather Exotic Types of Cyclic Peroxides: Heteroatom Dioxiranes", *Chem. Rev.*, **107**:7 (2007), 3247–3285.
7. Talipov M. R., Khursan S. L., Safiullin R. L., "RRKM and Ab Initio Investigation of the NH (X) Oxidation by Dioxygen", *J. Phys. Chem. A.*, **113**:23 (2009), 6468–6476.
8. Пальм В. А., *Основы количественной теории органических реакций*, Химия, Ленинград., 1977.

Sensitivity analysis to changes in the kinetic curves of the reaction rate constants for the reaction of olefins hydroalumination.

© O. Y. Zabeivorota⁴, E. Y. Pankratyev⁵, I. M. Gubaidullin⁶

Abstract.

Key Words: As known that the aromatic nitroso oxydes , intermediates of photochemical oxidation of aromatic azides by oxygen have two isomeric forms - trans (4) and cis-(5). In thermal conditions, these forms quickly perish under the kinetic law of reaction of the first order. It is established that the ArNOO trans –isomer to cis isomerization. In turn, the last undergoes unusual reaction of cyclization of terminal atom of oxygen under the orto-provision of an aromatic cycle with the subsequent monomolecular disintegration of a being formed bicycle (6). Work will be executed with financial support of the Russian Federal Property Fund (a grant of the Russian Federal Property Fund № 12-07-00324-a and № 13-03-00201-a)

nitroso oxydes, quantum- chemical calculations, nuclear- independent chemical shift, DFT-method

⁴ Fourth year student at the Department of mathematical modelling, Bashkir State University, Ufa; Zabeivorota.olga@gmail.com.

⁵ Research associate, Institute of Organic Chemistry, Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa; paneyu@gmail.com

⁶ Senior Research Associate in the Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; IrekMars@mail.ru.

УДК 517.929

Устойчивость неограниченных решений по первому приближению

© С. В. Зубов¹

Аннотация. В настоящей статье изучаются свойства инвариантных множеств динамических периодических систем, определяющие уходящие движения

Ключевые слова: время, движение, равенство, ряд, степень, величина, оценка, условие, уравнение

1. Введение

Необходимым математическим аппаратом описания динамических процессов являются системы дифференциальных уравнений. Поэтому задачи современной автоматики, т.е. задачи создания новых эффективных систем управления различными технологическими комплексами и техническими объектами, обуславливают развитие методов исследования линейных и нелинейных систем обыкновенных и в частных производных дифференциальных уравнений, описывающих динамику функционирования систем автоматического управления. Задачи управления на протяжении последних десятилетий были основными "потребителями" достижений качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории нелинейных колебаний.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + F(X, Z), \\ \dot{Z} &= R + G(X, Y),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}X &= (x_1, \dots, x_n)^*, \quad Z = (z_1, \dots, z_k)^*, \quad R = (r_1, \dots, r_k)^*, \\ F(0, Z) &= 0, \quad G(0, Z) = 0.\end{aligned}$$

Пусть для достаточно малых величин $\delta > 0$ при $\|X\| < \delta$ имеют место оценки

$$\forall Z \in E_k \quad \|F(X, Z)\| \leq c_1 \|X\|^{1+\alpha} \quad (\alpha > 0, c_1 > 0).$$

Здесь $\|X\| = \sqrt{X^*X}$. Пусть $r_i > 0$. Пусть также $\|G\| \leq c_2 \|X\|^a \|Z\|^b$ ($a, b, c_2 > 0$). Тогда система (2.1) имеет семейство равновесных движений

$$X = 0, \quad Z = Rt + Z_0.\tag{2.2}$$

Наряду с системой (2.1) рассмотрим систему

$$\dot{X} = AX, \quad \dot{Z} = R,\tag{2.3}$$

которую назовем *системой первого приближения*. Система (2.3) имеет семейство решений (2.2). Поведение системы (2.3) по отношению к устойчивости семейства (2.2) определяется

¹ Доцент кафедры теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

свойствами собственных чисел матрицы A . Естественно ожидать, что требования к собственным числам матрицы A , обеспечивающие устойчивость или неустойчивость семейства (2.1) системы (2.3), обеспечивают устойчивость или неустойчивость семейства равновесных решений (2.2) системы (2.1). Покажем это. Пусть $Re\lambda_j < 0$, где λ_j ($j = 1, \dots, n$) - собственные числа матрицы A . Тогда существует положительно определенная квадратичная форма $V(X)$, удовлетворяющая уравнению

$$(\nabla V(X), AX) = W(X), \quad (2.4)$$

где $W(X)$ - отрицательно определенная квадратичная форма [1]. Пусть a_1, a_2 - соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы квадратичной формы $V(X)$, b_1, b_2 - аналогичные значения для $W(X)$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} a_1\|X\|^2 &\leq V(X) \leq a_2\|X\|^2, \\ b_1\|X\|^2 &\leq W(X) \leq b_2\|X\|^2, \\ b_1 &\leq b_2 \leq 0 \leq a_1 \leq a_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отметим, что при малых $\|X\|$ справедливы оценки $\forall Z \in E_k$

$$(b_1 - \mu)\|X\|^2 W(X) + (\nabla V(X), FD(X, Z)) = (b_2 + \mu)\|X\|^2, \quad (2.6)$$

где μ - малое положительное число [1]. Продифференцируем $V(X)$ в силу системы (2.1). Имеем

$$\frac{dV}{dt}|_{(2)} = W + (\nabla V(X), F(X, Z)). \quad (2.7)$$

Разделим обе части этого выражения на V и проинтегрируем в пределах от t_0 до t :

$$\int_{t_0}^t \frac{dV}{V} = \int_{t_0}^t (W + (\nabla V, F(X, Z)))V^{-1} d\tau.$$

Отсюда

$$V = V_0 \exp\left(\int_0^t (W + (\nabla V, F(X, Z)))V^{-1} d\tau\right).$$

Если заменить числитель и знаменатель дроби под интегралом на большее и соответственно меньшее значения из (2.5), (2.6), то получим неравенство

$$V \leq V_0 \exp\left(\frac{b_2 + \mu}{a_1}(t - t_0)\right).$$

Таким образом,

$$a_1\|X\|^2 \leq a_2\|X_0\|^2 \exp\left(\frac{b_2 + \mu}{a_1}(t - t_0)\right).$$

Очевидно, что $\|X\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ (так как $b_2 > 0$). Подставив оценку для $\|X\|$ в оценку $\|G\|$, получим

$$\|G(X, Z)\| \leq c_2\|X_0\|^a \exp\left(\frac{a}{2a_1}(b_2 + \mu)(t - t_0)\right)\|Z\|^b, \quad (2.8)$$

где $c_2 > 0$. Отсюда видно, что за счет выбора X_0 мы всегда обеспечим неравенства

$$|g_i(X, Z)| < \frac{r_i}{2}.$$

Тогда

$$z_i \leq \frac{3}{2}r_i(t - t_0) + z_i^0,$$

и выражение (2.8) будет справедливо при $t \geq 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2.1. Пусть для системы (2.1) собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, $F(0, Z) = 0$, $G(0, Z) = 0$, компоненты вектора R положительны, $\forall Z \in E_k$ справедливы оценки: 1) $\|F(X, Z)\| \leq c_1 \|X\|^{1+\alpha}$ при малых $\|X\|$, где $c_1, \alpha > 0$; 2) $\|G\| \leq c_2 \|X\|^a \|Z\|^b$ ($a, b, c_2 > 0$). Тогда равновесное решение (2.2) системы (2.1) орбитально асимптотически устойчиво.

2.1. Случай нескольких нулевых корней

Далее будем рассматривать систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= PX + \mu F(X, z), \\ \dot{z} &= r + \mu h(X, z), \end{aligned} \quad (2.9)$$

здесь $X = (x_1, \dots, x_N)^*$, $P - N \times N$ - матрица, $r > 0$, μ - малый параметр, $F = (f_1, \dots, f_n)$ - векторная, $h(X, z)$ - скалярная функция переменных x_1, \dots, x_N, z . Система вида (2.9) с матрицей P размерности $N \times N$, $N = k + n$, у которой собственные числа таковы, что

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_{k+i} < 0, \\ i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и нулевым корням отвечают простые элементарные делители, может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \mu X_s(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z), \\ \dot{y}_i &= \sum p_{ji} y_i + \mu Y_j(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z), \\ \dot{z} &= r + \mu h(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z), \\ s &= 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь X_s, Y_j - голоморфные функции переменных $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z$, разложения которых при достаточно малых $|x_s|$, $|y_j|$ не содержат членов, линейных относительно величин $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n$; $(n \times n)$ - матрица $\{p_{ij}\}$ имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями; μ - малый параметр. Пусть при $x_1 = \dots = x_k = y_1 = \dots = y_n = 0$ функции X_s, Y_j, h обращаются в нуль. Тогда система (2.10) будет иметь семейство равновесных решений $x_1 = \dots = x_k = y_1 = \dots = y_n = 0$, $z = z + rl$, представляющее собой прямую в $(k + n + 1)$ - мерном пространстве. Задача состоит в изучении свойств этих решений. Посмотрим, как ведут себя переменные x_s, y_j в качестве функции z . Разделим первые $n + k$ уравнений системы (2.10) на последнее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dz} &= \mu \bar{X}_s(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z), \\ \frac{dy_j}{dz} &= \sum_{i=1}^n p_{ji} y_i + \mu \bar{Y}_j(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Собственные числа матрицы $\{\bar{p}_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, n$, имеют отрицательные вещественные части. Относительно функций \bar{X}_s, \bar{Y}_j мы будем предполагать, что они разлагаются в сходящиеся при достаточно малых $|x_s|$, $|y_j|$ ряды по целым положительным степеням x_s, y_j . Причем эти ряды сходятся равномерно по z . С помощью замены, не нарушающей [2] устойчивости,

$$y_j = u_j + \eta_j,$$

где u_j - решение системы уравнений, получаем

$$\sum_{i=1}^n p_{ji} u_i + \mu \bar{Y}_j(x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_n, z) = 0.$$

Систему (2.11) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{dX_s}{dz} &= \mu \bar{X}_s(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z) = 0, \\ \frac{d\eta_j}{dz} &= \sum_{i=1}^n p_{ji} \eta_i + \mu V_j(x_1, \dots, x_k, u_1 + \eta_1, \dots, z), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$V_j = \sum_{i=1}^n p_{ji} u_i + \mu \bar{V}_j(x_1, \dots, x_k, u_1 + \eta_1, \dots, z) - \sum_{i=1}^k \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \bar{X}_i(x_1, \dots, x_k, u_1 + \eta_1, \dots, u_n + \eta_n, z).$$

Ясно, что при достаточно малых η_j функции V_j обладают свойствами функций \bar{X}_s, \bar{Y}_s . Если $\bar{X}_s(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z) \equiv 0$, то у системы (2.11) имеется k не зависящих от z голоморфных интегралов

$$c_s = x_s + \varphi_s(x_1, \dots, x_k, y_1 - \eta_1, \dots, y_n - \eta_n), \quad s = 1, \dots, k.$$

С помощью замены $x_s = c_s + f_s$, где f_s - решения системы

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial \eta_j} \left(\sum_{i=1}^n (p_{ji} + c_{ji}) \eta_i + \mu V_j' \right) = \sum_{i=1}^n \gamma_{si} \eta_i + \mu u_s(f_1, \dots, f_k, \eta_1, \dots, \eta_n, c_1, \dots, c_k),$$

в которую переходит система в частных производных

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial z} = \mu \bar{X}_s, \quad s = 1, \dots, k,$$

где c_{ij}, γ_{si} - голоморфные по c_1, \dots, c_k функции, а c_s - достаточно малые произвольные постоянные, получим из второй группы уравнений (2.12).

$$\frac{d\eta_j}{dz} = \sum (p_{ji} + c_{ji}) \eta_i + V_j'(f_1, \dots, f_k, \eta_1, \dots, \eta_n, c_1, \dots, c_k). \quad (2.13)$$

Нулевое решение (2.13) асимптотически устойчиво по отношению к величинам c_1, \dots, c_k . Так как функции f_s таковы, что

$$f_s \equiv 0 \text{ при } \eta_1 = 0, \dots, \eta_n = 0,$$

$$f_s \equiv 0 \text{ при } c_1 = 0, \dots, c_k = 0,$$

имеем

$$\eta_j(t, \eta_1^0, \dots, \eta_n^0) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Следовательно, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2.2. *Если $X_s(x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_n, z) \equiv 0$, то нулевое решение системы (2.13) устойчиво по Ляпунову относительно переменной z . При этом любое решение этой системы*

$$x_s = c_s, y_j = u_j(c_1, \dots, c_k), \quad s = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n,$$

условно асимптотически устойчиво.

Вернемся теперь к последнему уравнению системы (2.11)

$$\dot{Z} = Z + \mu h.$$

По сделанному выше предположению справедлива оценка

$$h \leq k_0 \left(\sum_{s=1}^k |X_s^0| + \sum_{j=1}^n |Y_j^0| \right)^a z^b,$$

где $k_0 > 0$. При каких же условиях $z \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$? Возможны случаи $b \leq 0$ и $b > 0$. При $b \leq 0$ можно сделать $|\mu h| < r/2$. Тогда $z \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. При $b > 0$ можно показать [3], что для любого конечного \bar{z} найдется μ_0 такое, что для μ , не превосходящего по модулю μ_0 для любого $\varepsilon > 0$, любое движение, начинающееся в области $|x_s^0| < \delta$, $|y_j^0| < \delta$, будет оставаться в области $|x_s| < \varepsilon$, $|y_j| < \varepsilon$ при возрастании z от 0 до \bar{z} . Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 2.3. *Если выполнены условия теоремы 2.2., но $b > 0$, то для любого конечного \bar{z} за счет выбора x_s^0 , y_j^0 , μ величины $|x_s|$, $|y_j|$ будут оставаться малыми при возрастании от 0 до \bar{z} .*

Рассмотрим общий случай

$$X_s(x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_n, z) \equiv 0.$$

Пусть m - наименьшая степень форм, которыми начинается разложение $X_s(x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_n, z)$:

$$X_s = X_s^{(m)} + X_s^{(m+1)}.$$

Тогда наименьшая степень форм v , с которых в действительности начинается разложение функций

$$V_j^{(0)} = V_j(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0, z),$$

будет удовлетворять неравенству $v \geq m + 1$. Впрочем, величину v всегда можно сделать достаточно большой [4].

Т е о р е м а 2.4. *Если нулевое решение системы*

$$\frac{dx_s}{dz} = X_s^{(m)} \tag{2.14}$$

асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (2.11) также асимптотически устойчиво. При этом любое решение, начинающееся в области $|x_s^0| < \delta$, $|\eta_j^0| < \delta$, удовлетворяет неравенствам

$$|x_s| \leq \psi(z), |\eta_j| \leq \psi(z), \tag{2.15}$$

где

$$\psi(z) = c_1 \left(\sum_{s=1}^k |x_s^0| + \sum_{j=1}^n |\eta_j^0| \right) \times \left(1 + c_2 \left(\sum_{s=1}^k |x_s^0| + \sum_{j=1}^n |\eta_j^0| \right)^{m+1} z \right)^{-1/(m-1)},$$

$$c_1 > 0, c_2 > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нулевое решение системы (2.14) асимптотически устойчиво. Тогда существуют однородные функции V, W со свойствами: 1) V - положительно определенная, W - отрицательно определенная; 2)

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial U}{\partial x_i} X_i^{(m)} = W.$$

Построим положительно определенную квадратичную форму V_1 так, чтобы

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial \eta_i} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} \eta_j \right) = - \sum_{i=1}^n \eta_i^2,$$

что всегда можно сделать. Положим

$$U = V + V_1, \quad V = V(x_1, \dots, x_k), \quad V_1 = V_1(\eta_1, \dots, \eta_n).$$

Вычислим dU/dz в силу системы (2.12):

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dV}{dz} + \frac{dV_1}{dz} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial \eta_i} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} \eta_j \right) + \frac{\partial V}{\partial z} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial V}{\partial x_s} \bar{X}_s.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dU}{dz} = W - \sum_{i=1}^n \eta_i^2 + \sum_{s=1}^k \frac{\partial V}{\partial x_s} - \sum_{N=m+1}^{\infty} X_s^{(N)} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial \eta_j} V_j.$$

В малой окрестности начала координат функция $dU/dz = W_1$ будет отрицательно определенной, следовательно, нулевое решение (2.12) асимптотически устойчиво, и нулевое решение (2.11) тоже асимптотически устойчиво. Требуемые оценки получаются интегрированием неравенств, которые выполнены при малых $|x_s|, |\eta_j|$:

$$\begin{aligned} a_1 \|X\|^2 &\leq U \leq a_2 \|X\|^2, \\ -b_1 \|X\|^{m+1} &\leq \frac{dU}{dz} \leq -b_2 \|X\|^{m+1}, \\ \|X\| &= \sum_{s=1}^k |x_s| + \sum_{j=1}^n |\eta_j|, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 > 0. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Получив оценки (2.15), вернемся к уравнению $\dot{z} = r + \mu h$ и оценим величину $|h|$:

$$|h| \leq k_0 z^{b-2/(m-1)} \left(\sum |x_s^0| + \sum |\eta_j^0| \right)^a.$$

При каких же условиях $z \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$? Возможны три случая: 1) $D = b - \frac{a}{m-1} < 0$; 2) $D=0$; 3) $D>0$. В первых двух случаях за счет выбора x_s^0, η_j^0, μ можно обеспечить выполнение неравенства $|\mu h| < r/2$. Тогда $z \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. В третьем случае можно показать [4], что для любого конечного \bar{z} найдется $\mu_0 > 0$ такое, что при $|\mu| < \mu_0$ на любом движении, начинающемся в области $|x_s^0| < \delta, |\eta_j^0| < \delta$, будут сохраняться неравенства (2.15), а величина z будет монотонно возрастать от 0 до \bar{z} . Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Т е о р е м а 2.5. Если выполнены условия теоремы 2.4. и $D \leq 0$, то равновесное решение системы (2.2) орбитально асимптотически устойчиво.

Т е о р е м а 2.6. Если выполнены условия теоремы 2.4. и $D > 0$, то для любого конечного \bar{z} за счет выбора x_s^0, η_j^0 величины $|x_s|, |\eta_j|$ становятся сколь угодно малыми при возрастании времени.

Исследуем теперь равновесное решение на устойчивость. Обозначим равновесное решение через $Z(t)$, через P_t - гиперплоскость, проходящую через точку $Z(t)$ при фиксированном t перпендикулярно оси z и определяемую уравнением

$$(X - Z(t), \dot{Z}(t)) = 0.$$

Интегральная кривая $X = X(t, X_0)$ достигает P_t за время $\tau = \tau(t, X_0)$, следовательно, вектор $Y = X(\tau, X_0) - Z(t)$ лежит в P_t . Таким образом, $(Y, \dot{Z}(t)) = 0$. Следуя [5], дифференцируем последние два равенства:

$$\dot{\tau} = \frac{r}{r + \mu h}, \quad \dot{x}_s = \mu X_s \frac{r}{r + \mu h}, \quad (2.16)$$

$$\dot{y}_j = \sum_{i=1}^n (p_{ji} y_i + \mu Y_j) \frac{r}{r + \mu h}.$$

Сделаем замену $\tau = t + \theta$. Первое уравнение этой системы примет вид

$$\dot{\theta} = -\frac{\mu h}{r + \mu h}. \quad (2.17)$$

К системе (2.16) применим теорему 2.4.. Получим оценки

$$|x_s| \leq \psi(t), \quad |y_j| \leq \psi(t),$$

где

$$\psi(t) = c_1 \left(\sum_{s=1}^k |x_s^0| + \sum_{j=1}^n |y_j^0| \right) \times \left(1 + c_2 \left(\sum_{s=1}^k |x_s^0| + \sum_{j=1}^n |y_j^0| \right)^{m-1} t \right)^{-1/(m-1)}.$$

Интегрируя уравнение (2.17), получаем

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t -\frac{\mu h}{r + \mu h} d\tau.$$

Но величина подынтегральной функции ограничена:

$$\left| \frac{\mu h}{r + \mu h} \right| \leq c_0 \left(\sum_{s=1}^k |x_s^0| + \sum_{j=1}^n |y_j^0| \right) t^D,$$

где $c_0 > 0$ [5]. При $D < -1$ интеграл сходится, и за счет выбора x_s^0, y_j^0, μ величина $\theta - \theta_0$ становится сколь угодно мала, поэтому верна следующая теорема.

Т е о р е м а 2.7. Если выполнены условия теоремы 2.4. относительно функций X_s, Y_j и $D < -1$, то равновесное решение (2.11) устойчиво по Ляпунову.

3. Выводы

Результаты, полученные в настоящем параграфе, относятся к тому случаю, когда параметр μ мал. Но учитывая, что функция Ляпунова будет представлять собой ряд по степеням параметра, результаты будут оставаться верными и в том случае, когда функция Ляпунова существует (соответствующие ряды сходятся), отрицательна и $z \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Zubov, О. А. Шабурова, *Управление динамическими системами*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2005, 83 с.
2. А. В. Zubov, С. В. Zubov, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб., 2012, 357 с.
3. А. В. Zubov, Н. В. Zubov, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2009, 172 с.
4. И. В. Zubov, Н. В. Zubov, М. В. Стрекопытова, *Анализ управляемых систем и равновесных движений*, ВВМ, СПб., 2012, 322 с.
5. А. В. Zubov, Н. В. Zubov, С. В. Zubov, А. Ф. Зубова, *Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем*, ВВМ, СПб., 2011, 362 с.

The stability in limiting solutions on first approaches

© S. V. Zubov ²

Abstract. In giving article is learning measures invariant multitudes of dynamics periodical systems, is defines of going motions

Key Words: time, motion, equality, row, degree, size, estimate, condition, equation

² Docent, c.f.-m.n, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК 517.938

Соленоидальные базисные множества A -дiffeоморфизмов Смейла-Виеториса

© Н. В. Исаенкова¹, Е. В. Жужома², Л. А. Куприна³

Аннотация. В статье вводятся диффеоморфизмы Смейла-Виеториса, которые включают классические ДЕ-отображения с соленоидами Смейла. Главный результат состоит в установлении соответствия между базисными множествами A -дiffeоморфизмов Смейла-Виеториса и неособыми эндоморфизмами, удовлетворяющими аксиоме A .

Ключевые слова: гиперболичность, неблуждающее множество, неособый эндоморфизм, базисное множество

1. Введение

Стивен Смейл в своей знаменитой статье [20] ввел так называемые ДЕ-отображения, которые возникают из растягивающих отображений. Пусть T - замкнутое многообразие размерности не меньше 1, и N - n -мерный диск, $n \geq 2$. Опуская детали, можно сказать, что ДЕ-отображение есть косое отображение

$$f : T \times N \rightarrow T \times N, \quad (x; y) \mapsto (g_1(x); g_2(x, y)),$$

где $g_1 : T \rightarrow T$ - растягивающее отображение степени $d \geq 2$, и

$$g_2|_{\{x\} \times N} : \{x\} \times N \rightarrow \{g_1(x)\} \times N$$

есть равномерно сжимающее отображение из n -диска $\{x\} \times N$ в n -диск $\{g_1(x)\} \times N$ для каждого $x \in T$. Кроме того, f должен быть диффеоморфизмом на свой образ $T \times N \rightarrow f(T \times N)$. В случае, когда $T = S^1$ - окружность, получается классическая конструкция Смейла, см. рис. 1.

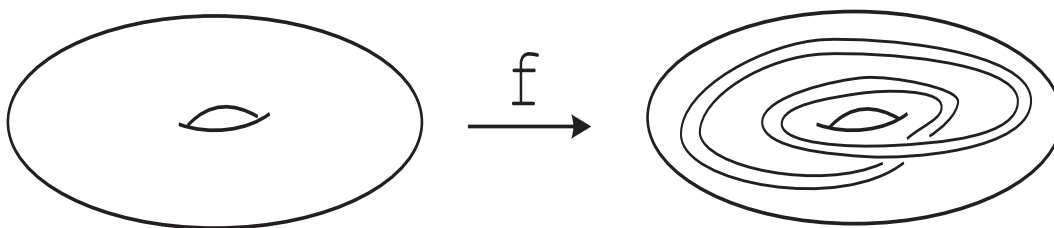


Рис. 1: ДЕ-отображение Смейла

Можно доказать, что инвариантное множество $\bigcap_{i \geq 0} f^i(T \times D^2) = \mathfrak{S}(f)$ является топологическим соленоидом. Напомним, что определение топологического соленоида было

¹ доцент кафедр математики, информатики и информационных технологий, Нижегородская академия МВД России; math-ngaa@yandex.ru, nisaenkova@mail.ru

² профессор кафедры Теории управления и динамики машин ННГУ им. Н.И. Лобачевского; zhuzhoma@mail.ru.

³ доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math-ngaa@yandex.ru.

введено Виеторисом [22] в 1927 (независимо, соленоид был введен Ван Данцигом [9] в 1930, см. обзор [21]). Смейл [20] доказал, что $\mathfrak{S}(f)$ является гиперболическим растягивающимся аттрактором. Эта конструкция была обобщена Вильямсом [23], [24], определившим g_1 как растягивающее отображение ветвленного многообразия (что позволило Вильямсу классифицировать внутреннюю динамику растягивающихся аттракторов), и Блоком [4], рассматривающим g_1 как эндоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А. Последняя работа посвящена Ω -устойчивости и доказательству разложения неблуждающего множества в так называемые базисные множества (спектральная теорема разложения для А-эндоморфизмов). Идеологически, наша статья есть продолжение [4], где был доказан следующий результат (Теорема А). Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - диффеоморфизм Смейла-Виеториса замкнутого n -мерного многообразия M^n и пусть на $\mathfrak{B} \subset M^n$ задано косое отображение Смейла $f|_{\mathfrak{B}}$ (см. определения ниже). Тогда $f|_{\mathfrak{B}}$ удовлетворяет аксиоме А на \mathfrak{B} тогда и только тогда, когда g удовлетворяет аксиоме А на T .

Отметим, что в рамках конструкции Смейла-Вильямса были построены интересные примеры растягивающихся аттракторов в работах [1], [6], [10], [13], [18]. Боте [5] классифицировал соленоиды Смейла на трехмерных многообразиях. Он был первым, кто доказал, что ДЕ-отображение $S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$ может быть продолжено до диффеоморфизма некоторого замкнутого трехмерного многообразия $M^3 \supset S^1 \times D^2$ (см. также [7], [11], [12]).

Я. Зельдович и др. (см. [8]) предположили, что отображения типа Смейла могут быть полезны при изучении возникновения достаточно больших магнитных полей астрофизических тел. Поэтому естественно рассматривать различные обобщения классического отображения Смейла. В духе конструкции Смейла, в этой статье мы рассмотрим диффеоморфизмы, полученные из неособых эндоморфизмов. Основная цель состоит в изучении типов базисных множеств таких диффеоморфизмов. Вначале приведем необходимые определения и сформулируем основные результаты.

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условию $n \geq 2k + 1$, и пусть N - $(n - k)$ -мерное компактное риманово многообразие с непустым краем (например, $N = D^{n-k}$ - $(n - k)$ -шар). Для подмножества $N_1 \subset N$, определим диаметр $diam N_1 = \max_{a, b \in N_1} \{\rho_N(a, b)\}$ из N_1 , где ρ_N метрика на N . Обозначим через $\mathbb{T}^k = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_k$ - k -мерный тор,

$k \in \mathbb{N}$. Пусть $E_d : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ - сохраняющее ориентацию линейное отображение степени $d \geq 2$. Очевидно, что E_d определяется целочисленной $k \times k$ матрицей с определителем равным d . Сюръективное отображение $g : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ называется d -накрытием, если g является сохраняющим ориентацию локальный гомеоморфизмом степени d . Это означает, что для любой точки $t \in \mathbb{T}^k$, $g^{-1}(t)$ состоит из d точек. Естественно, что E_d является d -накрытием.

Косое отображение

$$F : \mathbb{T}^k \times N \rightarrow \mathbb{T}^k \times N, \quad (t, z) \mapsto ((g(t); \omega(t, z))) \quad (1.1)$$

называется *косым отображением Смейла*, если выполняются следующие условия :

- $F : \mathbb{T}^k \times N \rightarrow F(\mathbb{T}^k \times N)$ - диффеоморфизм на свой образ;
- $g : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ является d -накрытием, $d \geq 2$;
- для любого $t \in \mathbb{T}^k$, ограничение $w|_{\{t\} \times N} : \{t\} \times N \rightarrow \mathbb{T}^k \times N$ является равномерно сжимающим вложением

$$\{t\} \times N \rightarrow int(\{g(t)\} \times N) \quad (1.2)$$

т.е., существуют $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие что

$$diam(F^n(\{t\} \times N)) \leq C\lambda^n diam(\{t\} \times N), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Когда $g = E_d$, косое отображение Смейла является ДЕ-отображением Смейла [20].

Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ замкнутого n -мерного многообразия M^n называется диффеоморфизмом *Смейла-Виеториса*, если имеется n -мерное подмногообразие $\mathbb{T}^k \times N \subset M^n$ такое что ограничение $f|_{\mathbb{T}^k \times N} \stackrel{\text{def}}{=} F$ является косым отображением Смейла. Подмногообразие $\mathbb{T}^k \times N \subset M^n$ будем называть *базовым многообразием косого отображения Смейла*.

Положим

$$\cap_{l \geq 0} F^l(\mathbb{T}^k \times N) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{S}(f).$$

Можно доказать, что множество $\mathfrak{S}(f) = \mathfrak{S}$ является инвариантным и замкнутым, и ограничение $f|_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ является диффеоморфизмом.

Т е о р е м а 1.1. Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - диффеоморфизм Смейла-Виеториса замкнутого n -мерного многообразия M^n , $\mathbb{T}^k \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ - базовое многообразие косого отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}}$,

$$f|_{\mathfrak{B}} = F : \mathbb{T}^k \times N \rightarrow \mathbb{T}^k \times N, \quad (t, z) \mapsto ((g(t); \omega(t, z))).$$

Тогда ограничение $f|_{\mathfrak{S}}$ сопряжено обратному пределу отображения $g : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$, где $\mathfrak{S} = \cap_{l \geq 0} F^l(\mathbb{T}^k \times N)$.

Следующая теорема показывает взаимосвязь между базисными множествами $f|_{\mathfrak{B}}$ и базисными множествами эндоморфизма g .

Т е о р е м а 1.2. Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - A -диффеоморфизм Смейла-Виеториса замкнутого n -мерного многообразия M^n , $\mathbb{T}^k \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ - базовое многообразие косого отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}}$,

$$f|_{\mathfrak{B}} = F : \mathbb{T}^k \times N \rightarrow \mathbb{T}^k \times N, \quad (t, z) \mapsto ((g(t); \omega(t, z))).$$

Ω - базисное множество $g : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ и $\mathfrak{S} = \cap_{l \geq 0} F^l(\mathbb{T}^k \times N)$. Тогда $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ содержит единственное базисное множество $\Omega_{\mathfrak{S}}$ для f , где $p_1 : \mathbb{T}^k \times N \rightarrow \mathbb{T}^k$ - естественная проекция на первый множитель. Более того,

1. если Ω - тривиальное базисное множество (изолированная периодическая орбита) g , то и $\Omega_{\mathfrak{S}}$ - тривиальное базисное множество.
2. если Ω - нетривиальное базисное множество g , то и $\Omega_{\mathfrak{S}}$ - нетривиальное базисное множество.
3. если Ω - назад g -инвариантное базисное множество g , $\Omega = g^{-1}(\Omega)$, (следовательно, Ω - нетривиальное), то $\Omega_{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$.

При $k = 1$ в качестве первой компоненты будет окружность $\mathbb{T}^1 = S^1$, в этом случае имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 1.3. Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - A -диффеоморфизм Смейла-Виеториса замкнутого n -мерного многообразия M^n , $\mathbb{T}^k \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ - базовое многообразие косого отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}}$. Тогда неблуждающее множество $NW(F)$ принадлежит $\mathfrak{S} = \cap_{l \geq 0} F^l(\mathbb{T}^1 \times N)$, и $NW(F)$ содержит единственное нетривиальное базисное множество $\Lambda(f)$, которое может быть либо

- одномерным растягивающимся аттрактором и $\Lambda(f) = \mathfrak{S}$, либо

- нульмерным базисным множеством, и тогда $NW(F)$ состоит из $\Lambda(f)$, конечного (ненулевого) числа изолированных периодических точек и конечного числа (возможно, нулевого) седловых изолированных периодических точек коразмерности один, имеющих стабильный индекс Морса.

Обе возможности реализуются.

Таким образом, при $k = 1$ получается полное описание спектрального разложения неблуждающего множества, которое может состоять из одномерного соленоида Смейла, или из одного нетривиального нульмерного базисного множества с конечным числом изолированных периодических орбит.

Благодарности. Авторы благодарят В. З. Гринеса, О. В. Починку, С. В. Гонченко за плодотворные обсуждения и К. Кирсенко (музыканту и бизнесмену) за финансовую поддержку. Исследования проводились при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, а именно, грантов 13-01-12452-офи-м, 12-01-00672-а.

2. Определения

Отображения $F : M \times N \rightarrow M \times N$, имеющие вид $F(x; y) = (g(x); h(x, y))$, называются *косыми отображениями* (в литературе также можно встретить названия *косых произведений преобразований* над g или, коротко, *косых произведений*). Обозначим через $End(M)$ пространство C^1 эндоморфизмов $M \rightarrow M$, т. е. C^1 отображений M на себя. Эндоморфизм g является *неособым*, если якобиан $|Dg| \neq 0$. Это означает, что g является локальным диффеоморфизмом. В частности, g является d -накрытием. В этой статье мы будем рассматривать неособые эндоморфизмы $g \in End(M)$, $Dg \neq 0$, которые не являются диффеоморфизмами.

Рассмотрим $g \in End(M)$. Точка $x \in M$ называется *неблуждающей*, если для любой окрестности этой точки $U = U(x)$, существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $g^m(U) \cap U \neq \emptyset$. Обозначим $NW(g)$ - множество неподвижных точек отображения g . Очевидно, $NW(g)$ является замкнутым множеством и $g(NW(g)) \subset NW(g)$, т. е. $NW(g)$ - вперед g -инвариантное множество. Множество $O(x_0) = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ называется *g -орбитой* точки x_0 , если $g(x_i) = x_{i+1}$ для каждого целого i . Подмножество $\{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+r}\} \subset O(x_0)$, состоящее из конечного числа точек множества $O(x_0)$, называется *компактной частью* g -орбиты $O(x_0)$. g -орбита $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ является *периодической*, если существует целое число $p \geq 0$ такое, что $g^p(x_i) = x_{i+p}$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $NW(g)$ содержит все периодические g -орбиты.

Орбита $O(x_0)$ называется *гиперболической* если существует непрерывное разложение касательного расслоения

$$\mathbb{T}_{O(x_0)}M = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{T}_{x_i}M = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_{x_i}^s \oplus \mathbb{E}_{x_i}^u$$

которое инвариантно относительно производной Dg так что

$$\|Dg^m(v)\| \leq c\mu^m \|v\|, \|Dg^m(w)\| \geq c^{-1}\mu^{-m} \|w\| \quad \text{для } v \in \mathbb{E}^s, w \in \mathbb{E}^u, \forall m \in \mathbb{N}$$

для некоторых констант $c > 0$, $0 < \mu < 1$ и Римановой метрики на $\mathbb{T}M$. Отметим, что $\mathbb{E}^u(x_0)$ зависит от g -орбит $O(x_0)$ (точнее, от отрицательных полуорбит $\{x_i\}_{i=-\infty}^0$). Возможен следующий факт, что $\mathbb{E}^u(x_0) \neq \mathbb{E}^u(y_0)$ при условии $x_0 = y_0$, но при этом $O(x_0) \neq O(y_0)$. Однако, такого не может быть для $\mathbb{E}^s(x_0)$, которое зависит только от x_0 [16].

Неособый эндоморфизм $g \in \text{End}(M)$ удовлетворяет аксиоме A , или g является A -эндоморфизмом, если

- периодические g -орбиты плотны в $NW(g)$ (следует, что $g(NW(g)) = NW(g)$);
- все g -орбиты в $NW(g)$ являются гиперболическими, и соответствующие разбиения на касательном расслоении $\mathbb{T}_{NW(g)}$ непрерывно зависят на компактных частях g -орбит.

Напомним, что спектральная теорема разложения Смейла говорит о том, что у диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A , неблуждающее множество распадается на непустые замкнутые инвариантные множества, каждое из которых транзитивно. Подобная теорема для A -эндоморфизмов была рассмотрена в [4] (Теорема C), [16] (Теорема 3.11 and Предложение 3.13). Итак, если g - неособый A -эндоморфизм, тогда неблуждающее множество $NW(g)$ представляет собой объединение непересекающихся, так называемых *базисных*, множеств $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$, при этом каждое множество Ω_i - замкнутое, инвариантное и содержит точки, g -орбиты которых плотны в Ω_i .

Следуя Вильямсу, [23], [24], введем понятие обратного предела для $g : T \rightarrow T$. Обозначим

$$\prod_g = \{ (t_0, t_1, \dots, t_i, \dots) \in T^{\mathbb{N}} : g(t_{i+1}) = t_i, i \geq 0 \}$$

Это множество наделено индуцированной топологией счетных факторов. В этой топологии окрестность задается набором (ε, r) и определяется следующим образом

$$U = \{ \{x_i\}_0^\infty \in \prod_g : x_i \in U_\varepsilon(t_i), 0 \leq i \leq r \text{ для некоторых } \varepsilon > 0, r \in \mathbb{N} \},$$

где $\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$. Определим отображение сдвига

$$\hat{g} : \prod_g \rightarrow \prod_g, \hat{g}(t_0, t_1, \dots, t_i, \dots) = (g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i, \dots), (t_0, t_1, \dots, t_i, \dots) \in \prod_g.$$

Отображение $\hat{g} : \prod_g \rightarrow \prod_g$ называется *обратным пределом* g . Известно, что \hat{g} является гомеоморфизмом. [17], [24].

3. Доказательство основных результатов

Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - диффеоморфизм Смейла-Виеториса замкнутого n -мерного многообразия M^n , $\mathbb{T}^k \times N = \mathfrak{B} \subset M^n$ - базовое многообразие косоуго отображения Смейла $f|_{\mathfrak{B}}$,

$$f|_{\mathfrak{B}} = F : \mathbb{T}^k \times N \rightarrow \mathbb{T}^k \times N, (t, z) \mapsto ((g(t); \omega(t, z))).$$

Обозначим через $p_1 : \mathbb{T}^k \times N \rightarrow \mathbb{T}^k$, $p_2 : \mathbb{T}^k \times N \rightarrow N$ естественные проекции, действующие по правилам $p_1(t, z) = t$ и $p_2(t, z) = z$. Слой $\{t\} \times N \stackrel{\text{def}}{=} N_t$ тривиального слоя расслоения p_1 называется *t -листом*. Из (1.1) следует, что $F = f|_{\mathfrak{B}}$ переводит t -лист в $g(t)$ -лист.

Пусть $t \in \mathbb{T}^k$ и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $U_\varepsilon(t)$ - ε -окрестность точки t , $U_\varepsilon(t) = \{x \in \mathbb{T}^k : \varrho(x, t) < \varepsilon\}$, где ϱ есть метрика на \mathbb{T}^k .

Доказательство теоремы 1.1.

Напомним, что для любой точки $t_0 \in \mathbb{T}^k$, прообраз $g^{-1}(t_0)$ содержит d точек $t_0^1, t_0^2, \dots, t_0^d \in \mathbb{T}^k$. Поскольку F является диффеоморфизмом на свой образ, множества $F(N_{t_0^1}), \dots, F(N_{t_0^d})$ попарно не пересекаются,

$$F(N_{t_0^i}) \cap F(N_{t_0^j}) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (3.4)$$

Разобьем доказательство теоремы на шаги, каждый из которых оформим как предложение.

Предложение 3.1. (Шаг 1) Для любой точки $p \in \mathfrak{S}$ существуют единственная последовательность точек $\{t_i\}_{i=0}^\infty$, $t_i \in \mathbb{T}^k$ и соответствующая последовательность $\{N_{t_i}\}_{i=0}^\infty$ из листов такие, что

- $p = \bigcap_{i \geq 0} F^i(N_{t_i})$;
- $p \in \dots \subset F^i(N_{t_i}) \subset F^{i-1}(N_{t_{i-1}}) \dots \subset F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$;
- $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

Доказательство Шага 3.1. Положим $t_0 = p_1(p) \in \mathbb{T}^k$. Пусть $g^{-1}(t_0) = \{t_0^1, t_0^2, \dots, t_0^d\}$. Из (3.4) следует, что существует единственная точка t_0^j такая, что $p \in F(N_{t_0^j})$. Обозначим $t_0^j = t_1$. Отметим также, что $F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$. $g^{-1}(t_1)$ содержит d точек $t_1^1, t_1^2, \dots, t_1^d$. Поскольку верно (3.4), множества $F(N_{t_1^1}), \dots, F(N_{t_1^d})$ попарно не пересекаются. Так как $p \in F^2(\mathbb{T}^k \times N)$, существует единственная точка t_1^i такая, что $p \in F^2(N_{t_1^i})$. Обозначим $t_1^i = t_2$. Заметим, что $p \in F^2(N_{t_2}) \subset F(N_{t_1}) \subset N_{t_0}$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем последовательности $\{t_i\}_{i=0}^\infty$, $\{N_{t_i}\}_{i=0}^\infty$. Из (1.3) следует, что $\text{diam } F^i(N_{t_i}) = \text{diam } (F^i(\{t_i\} \times N)) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Таким образом, $p = \bigcap_{i \geq 0} F^i(N_{t_i})$. \diamond

$\hat{g} : \prod_g \rightarrow \prod_g$ - обратный предел отображения $g : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$, $\prod_g = \{(t_0, t_1, \dots, t_i, \dots) \in \mathbb{T}^\mathbb{N} : g(t_{i+1}) = t_i, i \geq 0\}$. Возьмем точку $p \in \mathfrak{S}$ и, следуя шагу 3.1., зададим отображение по правилу

$$\theta : \mathfrak{S} \rightarrow \prod_g, \quad p \longmapsto P(t_0, t_1, \dots, t_i, \dots), \quad t_i \in \mathbb{T}^k.$$

Предложение 3.2. (Шаг 2) Отображение θ является гомеоморфизмом.

Доказательство Шага 3.2. Из (1.3) следует, что θ - инъективное отображение. Поскольку пересечение последовательности вложенных замкнутых подмножеств не является пустым, θ сюръективно. Остается только доказать, что θ и θ^{-1} являются непрерывными отображениями. Возьмем окрестность U точки $\theta(p)$, $p \in \mathfrak{S}$. Эта окрестность задается парой чисел (ε, r) .

$$U = \{ \{x_i\}_0^\infty \in \prod_g : x_i \in U_\varepsilon(t_i), 0 \leq i \leq r \text{ for some } \varepsilon > 0, r \in \mathbb{N} \},$$

где $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$. Множество $g^{-1}(U_\varepsilon(t_i))$ состоит из d попарно непересекающихся областей $0 \leq i \leq r$. Так как $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$, можно показать справедливость равенств $t_{r-j} = g^j(t_r)$ для всех $1 \leq j \leq r$. Аналогично, $x_{r-j} = g^j(x_r)$, $1 \leq j \leq r$. Поскольку g является непрерывным отображением, существует $0 < \delta \leq \varepsilon$ такое, что из принадлежности $x_r \in U_\delta(t_r)$ следует $x_i \in U_\varepsilon(t_i)$ для всех $i = 0, \dots, r$. Ограничение

$F|_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ является диффеоморфизмом. Таким образом, существует окрестность $U(p)$ точки p в \mathfrak{S} такая, что

$$p_1(F^{-i}(U(p))) \subset U_\delta(t_i) \quad \text{для всех } 0 \leq i \leq r.$$

Поскольку $g^{-1}(U_\varepsilon(t_i))$ состоит из d попарно непересекающихся областей, $0 \leq i \leq r$, можно показать, что $\theta(U(p)) \subset U$. Таким образом, θ - непрерывное отображение. Так как \prod_g компактное отображение, θ^{-1} - непрерывно. \diamond

Предложение 3.3. (Шаг 3) Верно равенство $\theta \circ F|_{\mathfrak{S}} = \hat{g} \circ \theta|_{\mathfrak{S}}$.

Доказательство Шага 3.3. Возьмем $p \in \mathfrak{S}$ и $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ где $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$. Используя правило задания отображения $\hat{g} : \prod_g \rightarrow \prod_g$, преобразуем правую часть равенства

$$\hat{g} \circ \theta(p) = \hat{g}(\theta(p)) = \hat{g}(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) = \{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}.$$

Из (1.2) следует, что $F(p) \in F(\{t_0\} \times N) \subset N_{g(t_0)}$. Следуя Шагу 3.1., последовательности точек $\{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ соответствует $\theta(F(p))$, поскольку

$$\begin{aligned} F(p) &= F(\cap_{i \geq 0} F^i(\{t_i\} \times N)) = \cap_{i \geq 0} F^{i+1}(\{t_i\} \times N) = \cap_{i \geq 0} F^{i+1}(\{t_i\} \times N) \cap N_{g(t_0)} = \\ &= N_{g(t_0)} \cap F(N_{t_0}) \cap F^2(N_{t_1}) \cap \dots \cap F^{i+1}(N_{t_i}) \cap \dots \diamond \end{aligned}$$

Из шага 3.2. и 3.3. следует, что отображение θ является сопрягающим для $F|_{\mathfrak{S}}$ и \hat{g} . Теорема 1.1. доказана. \square

Доказательство Теоремы 1.2.

Вначале приведем некоторые дополнительные результаты.

Лемма 3.1. Пусть $\bar{t} = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$, $g(t_{i+1}) = t_i$, $i \geq 0$. Предположим, что $t_i \in NW(g)$ для всех $i \geq 0$. Тогда $\bar{t} \in NW(\hat{g})$ и $\theta^{-1}(\bar{t}) \in NW(F)$.

Доказательство. Рассмотрим V - (ε, r) -окрестность точки

$$\bar{t} = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} = \{g^r(t_r), g^{r-1}(t_r), \dots, t_r, \dots\}$$

т.е.,

$$\begin{aligned} V &= \{ \{x_i\}_{i \geq 0} \in \prod_g : x_i \in U_\varepsilon(t_i), 0 \leq i \leq r \} = \\ &= \{ \{g^r(x_r), g^{r-1}(x_r), \dots, x_r, \dots\} : g^i(x_r) \in U_\varepsilon(g^i(t_r)), 0 \leq i \leq r \}. \end{aligned}$$

Так как g, g^2, \dots, g^r равномерно непрерывны, существует $0 < \delta \leq \varepsilon$ такое, что из принадлежности $x \in U_\delta(y)$ следует $g^i(x) \in U_\varepsilon(g^i(y))$ для всех $0 \leq i \leq r$. По условию, $t_r \in NW(g)$, значит, существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $g^{n_0}(V_\delta(t_r)) \cap V_\delta(t_r) \neq \emptyset$. Поэтому существует точка $x_0 \in V_\delta(t_r)$ такая, что $g^{n_0}(x_0) \in V_\delta(t_r)$.

Возьмем $\bar{x}_0 = \{g^r(x_0), g^{r-1}(x_0), \dots, x_0, \dots\} \in \prod_g$. Поскольку $x_0 \in V_\delta(t_r)$, $g^i(x_0) \in U_\varepsilon(g^i(t_r))$ для всех $0 \leq i \leq r$, получаем то, что $\bar{x}_0 \in V$. Так как $g^{n_0}(x_0) \in V_\delta(t_r)$, $g^{n_0+i}(x_0) \in U_\varepsilon(g^i(t_r))$ для всех $0 \leq i \leq r$. Значит,

$$\hat{g}^{n_0}(\bar{x}_0) = \{g^{n_0+r}(x_0), g^{n_0+r-1}(x_0), \dots, g^{n_0}(x_0), \dots\} \in V.$$

Следовательно, $\hat{g}^{n_0}(V) \cap V \neq \emptyset$ и $\bar{t} \in NW(\hat{g})$. Сопрягающее отображение переводит неблуждающее множество в неблуждающее множество. По Теореме 1.1., $\theta^{-1}(\bar{t}) \in NW(F)$.

\square

С л е д с т в и е 3.1. *Имеют место следующие равенства*

$$p_1[NW(f_{\mathfrak{B}})] = p_1[NW(F)] = NW(g).$$

Доказательство. Так как проекция p_1 непрерывна, $p_1[NW(F)] \subset NW(g)$. Возьмем точку $t_0 \in NW(g)$. Поскольку g является А-эндоморфизмом, $g[NW(g)] = NW(g)$ [4], [16]. Таким образом, существует последовательность $t_i \in NW(g)$ такая, что $g(t_{i+1}) = t_i$ для каждого $i \geq 0$. Из Леммы 3.1. следует, что $\bar{t} = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in NW(\hat{g})$ и $\theta^{-1}(\bar{t}) \in NW(F)$. По определению отображения θ имеем $\theta^{-1}(\bar{t}) \in p_1^{-1}(t_0)$. Значит, $NW(g) \subset p_1[NW(F)]$. \square

Л е м м а 3.2. *Пусть $(t_0, z_0) \in \mathfrak{S}$ неблуждающая точка f и $\theta(t_0, z_0) = \{t_i\}_{i \geq 0}$. Тогда $t_i \in NW(g)$ для всех $i \geq 0$.*

Доказательство. Согласно Следствию 3.1., $p_1[NW(f_{\mathfrak{B}})] = p_1[NW(F)] = NW(g)$. Таким образом, $t_0 \in NW(g)$. Поскольку $F_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ является диффеоморфизмом, $F^{-1}(NW(F)) = NW(F)$ и $F^{-1}(t_0, z_0) = (t_1, z_1) \in NW(F) = NW(f_{\mathfrak{B}})$. Значит, из шага 1, $t_1 \in NW(g)$. Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что $t_i \in NW(g)$ для всех $i \geq 0$. \square

С л е д с т в и е 3.2. *Пусть $(t_0, z_0) \in \mathfrak{S}$ неблуждающая точка f и $\theta(t_0, z_0) = \{t_i\}_{i \geq 0}$. Предположим, что t_0 принадлежит базисному множеству Ω отображения g . Тогда $t_i \in \Omega$ для всех $i \geq 0$.*

Доказательство. По лемме 3.2., $t_i \in NW(g)$ для всех $i \geq 0$. Так как Ω является вперед g -инвариантным множеством, $t_i \in \Omega$ для всех $i \geq 0$. \square

Л е м м а 3.3. *Пусть Ω - нетривиальное базисное множество g и $t_0 \in \Omega$. Предположим, что две точки $(t_0, z_1), (t_0, z_2) \in \mathfrak{S}$ принадлежат неблуждающему множеству f . Тогда эти точки $(t_0, z_1), (t_0, z_2)$ будут принадлежать базисному множеству f .*

Доказательство. Обозначим через Ω_j базисное множество F , содержащее точки (t_0, z_j) , $j = 1, 2$. Очевидно, $\Omega_j \subset \mathfrak{S}$. Мы хотим доказать, что $\Omega_1 = \Omega_2$. Для этого достаточно будет показать, что найдется точка $q \in NW(F)$ такая, что каждая из точек (t_0, z_1) и (t_0, z_2) лежит в ω -предельном множестве q .

Пусть $\bar{t}_j = \theta(t_0, z_j) = \{t_0, t_1^{(j)}, \dots, t_i^{(j)}, \dots\}$, $j = 1, 2$. По Следствию 3.2., $t_i^{(j)} \in \Omega$ для всех $i \geq 0$, $j = 1, 2$. Так как базисное множество Ω является транзитивным, существует точка $x_0 \in \Omega$ такая, что ее положительная полуорбита $O_g^+(x_0)$ плотна в Ω , $\text{clos}(O_g^+(x_0)) = \Omega$.

Из Следствия 3.1., существует $\bar{x}_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots\} \in \prod_g$ такая, что $x_i \in \Omega$ для всех $i \geq 0$. Возьмем произвольную (ε, r) -окрестность $U(\bar{t}_1)$ точки \bar{t}_1 . Поскольку g, g^2, \dots, g^r - равномерно непрерывные отображения, существует $\delta > 0$ такое, что из $x \in U_\delta(y)$ следует $g^i(x) \in U_\varepsilon(y)$ для всех $0 \leq i \leq r$. Так как полуорбита $O_g^+(x_0)$ плотна в Ω , существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $g^{n_0}(x_0) \in U_\delta(t^{(1)})$. Таким образом, $\hat{g}^{n_0}(\bar{x}_0) \in U(\bar{t}_1)$. Поэтому, $\bar{t}_1 = \theta(t_0, z_1)$ принадлежит ω -предельному множеству \bar{x}_0 . Аналогично можно доказать, что $\bar{t}_2 = \theta(t_0, z_2)$ также лежит в ω -предельном множестве \bar{x}_0 . Поскольку θ является сопрягающим отображением, точки $(t_0, z_1) = \theta^{-1}(\bar{t}_1)$ и $(t_0, z_2) = \theta^{-1}(\bar{t}_2)$ лежат в ω -предельном множестве точки $q = \theta^{-1}(\bar{x}_0) \in NW(F)$. \square

Доказательство Теоремы 1.2.. Мы знаем, что $p_1[NW(F)] = NW(g)$. Таким образом, $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ содержит базисные множества f . Предположим, что Ω является тривиальным, т.е. Ω - изолированная периодическая орбита

$$\Omega = Orb_g(q) = \{q, g(q), \dots, g^{p-1}(q), g^p(q) = q\}, \quad \text{где } q \in \mathbb{T}^k \text{ и } p \in \mathbb{N} \text{ период } q.$$

По определению Смейла косоуго отображения, конструкция $F = f|_{\mathfrak{B}}$ на втором множителе N имеет непрерывный растягивающийся аттрактор. Поэтому,

$$N_q \supset f^p(N_q) \supset \dots \supset f^{mp}(N_q) \supset \dots$$

и пересечение $\bigcap_{m \geq 0} f^{mp}(N_q)$ единственная точка, скажем Q .

Аналогично, $\bigcap_{m \geq 0} f^{mp}(N_{g^i(q)})$ - единственная точка $f^i(Q)$ для каждого $0 \leq i \leq p - 1$. Из (1.1) следует, что $\{Q, f(Q), \dots, f^{p-1}(Q), f^p(Q) = Q\}$ является изолированной периодической орбитой $Orb_f(Q)$ такой, что $NW(F) \cap p_1^{-1}(\Omega) = Orb_f(Q)$. Таким образом, $Orb_f(Q) = \Omega_{\mathfrak{S}}$ является единственным базисным множеством F , принадлежащим $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$.

Рассмотрим случай, когда Ω - нетривиальное базисное множество. Из Леммы 3.3. следует, что базисное множество F содержится в $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$. Следовательно, $\Omega_{\mathfrak{S}}$ является единственным базисным множеством f , содержащимся в $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$.

Пусть теперь Ω - назад g -инвариантное базисное множество g . Заметим, что из равенства $\Omega = g^{-1}(\Omega)$ следует, что Ω может быть тривиальным базисным множеством, так как g является d -накрытием, $d \geq 2$. Из Леммы 3.1. следует, что каждая точка $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ является неблуждающей точкой f . По Лемме 3.3., $\mathfrak{S} \cap p_1^{-1}(\Omega)$ - единственное базисное множество. Теорема 1.2. доказана. \square

Доказательство Теоремы 1.3.

Напомним, что d -накрытие $g : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ также является неособым эндоморфизмом окружности $S^1 = \mathbb{T}^1$. Важным результатом в доказательстве Теоремы 1.3. является следующая лемма.

Л е м м а 3.4. Пусть $g : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ - неособый A -эндоморфизм, $NW(g)$ - неблуждающее множество g . Тогда $NW(g)$ либо совпадает с \mathbb{T}^1 , либо $NW(g)$ представляет собой объединение множества канторовского типа Σ , конечного (ненулевого) числа изолированных притягивающих периодических орбит и конечное (возможно, нулевого) числа растягивающих изолированных периодических орбит. Кроме того, в последнем случае, Σ является назад g -инвариантным множеством.

Доказательство. Предположим, что $NW(g) \neq \mathbb{T}^1$. Из [19] следует, что g полусопряжено растягивающемуся линейному отображению E_d , $E_d(t) = dt \text{ mod } 1$, т.е. существует непрерывное отображение $h : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ такое, что $g \circ h = h \circ E_d$. Кроме того, h монотонное отображение [14], тогда для каждой точки $t \in \mathbb{T}^1$, прообразом $h^{-1}(t)$ является либо точка, либо замкнутый сегмент. Случае, когда $NW(g) \neq \mathbb{T}^1$, h не является гомеоморфизмом. Значит, существуют точки $t \in \mathbb{T}^1$, для которых $h^{-1}(t)$ - нетривиальные замкнутые сегменты. Обозначим множество таких точек через χ . Легко проверить, что полученное множество χ является счетным и инвариантным относительно E_d , $E_d(\chi) = E_d^{-1}(\chi) = \chi$ [3], [14]. Тогда $h^{-1}(\chi)$ также будет инвариантным относительно g . В результате получаем множество $\Sigma = \mathbb{T}^1 \setminus \text{clos}(h^{-1}(\chi))$ канторовского типа, состоящее из неблуждающих

точек эндоморфизма g . Кроме того, Σ является инвариантным относительно g (в частности, назад g -инвариантным). Из [15] следует, что неблуждающее множество $NW(g)$ состоит из Σ , конечного (ненулевого) числа изолированных притягивающихся периодических орбит и конечного (возможно, нулевого) числа растягивающихся изолированных периодических орбит. \square

Непосредственно Теорема 1.3., кроме части, касающейся реализации, следует из Теоремы 1.2. и Леммы 3.4., идея построения примеров аналогична Теореме 2 [2].

\square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О классификации одномерных растягивающихся аттракторов.”, *Матем. зам.*, **86**:3 (2009), 333-341.
2. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 47-68..
3. Aranson S.Kh., Belitsky G., Zhuzhoma E., “Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces”, *Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc.*, **153** (1996).
4. Block L., “Diffeomorphisms obtained from endomorphisms.”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **214** (1975), 403-413.
5. Bothe H., “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69-102.
6. Bothe H., “Transversally wild expanding attractors”, *Math. Nachr.*, **157** (1992), 25-49.
7. Boju Jiang, Yi Ni, Shicheng Wang., “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 43-82.
8. Childress S., Gilbert A., “Stretch, twist and fold: the fast dynamo”, *Lecture Notes in Physics*, **37** (1995).
9. van Danzig D., “Über topologisch homogene Kontinua.”, *Fund. Math.*, **14** (1930), 102-105.
10. Farrell F., Jones L., “107-133”, *Jour. Diff. Geom.*, **15** (1980).
11. Jiming Ma, Bin Yu., “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds.”, *Topology and its Appl.*, **154** (2007), 3021-3031.
12. Jiming Ma, Bin Yu., “Genus two Smale-Williams solenoids in 3-manifolds”, *J. Knot Theory Ramifications*, **20** (2011), 909-926.
13. Jones L., “Locally strange hyperbolic sets”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **275**:1 (1983), 153-162.
14. de Melo W., van Strien S, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, NY, 1993.
15. Nitecki Z., “203-220”, *Proc. Symp. Pure Math.*, **14** (1970).

16. Przytycki F., “Anosov endomorphisms”, *Studia Math.*, **58:3** (1977), 249-285.
17. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math., Sec. edition.*, CRC Press, 1999.
18. Robinson C., Williams R., “Classification of expanding attractors: an example”, *Topology*, **15** (1976), 321-323.
19. Shub M., “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175-199.
20. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747-817.
21. Takens F., “Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors”, *Topology and Appl.*, **152** (2005), 219-225.
22. Vietoris L., “Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen.”, *Math. Ann.*, **97** (1927), 454-472.
23. Williams R.F., “473-487”, *Topology*, **6** (1967).
24. Williams R., “Expanding attractors”, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169-203.

Solenoidal basic sets of Smale-Vietoris A-diffeomorphisms

© N. Isaenkova⁴, E. Zhuzhoma⁵, L. Kuprina⁶

Abstract. We introduce Smale-Vietoris diffeomorphisms that include the classical DE-mappings with Smale solenoids. The main result is a correspondence between basic sets of axiom A Smale-Vietoris diffeomorphism and the corresponding nonsingular axiom A endomorphism.

Key Words: hyperbolicity, non-wandering set, nonsingular endomorphism, basic set

⁴ Associated professor of Chair of mathematics, computer science and information technology, MIA academy of Nizhnii Novgorod; math-ngaa@yandex.ru, nisaenkova@mail.ru

⁵ Professor of Chair of Theory of Control and Dynamics of Machines, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

⁶ Associated professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math-ngaa@yandex.ru.

УДК 517.930

Задача на собственные значения для оператора Лапласа в s -мерном шаре со смещениями в производных

© Б. В. Логинов¹, Н. Н. Юлдашев², А. В. Герасимов³

Аннотация. В классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых до 2-го порядка функций рассматривается задача на собственные значения для оператора Лапласа в s -мерном единичном шаре Ω со смещениями в производных по радиусам на концентрических сферах радиусов $0 < r_0 < 1$ и 1 , $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ и $\frac{\partial u(r_0, \Theta)}{\partial r} = \frac{\partial u(1, \Theta)}{\partial r}$. Определены собственные значения и при $s = 2$ доказано, что длина соответствующих жордановых цепочек не превышает трех. При использовании справочных изданий [1, 3, 4] выполнено их вычисление, получено условие их существования. Отметим работы [5, 6] по вычислению собственных и присоединенных функций оператора Лапласа со смещением в функциях.

Ключевые слова: Оператор Лапласа, единичный шар в \mathbb{R}^s , собственные значения, собственные и присоединенные функции при $s = 2$

1. Введение. Построение сопряженной задачи.

В общем случае s -мерного шара в \mathbb{R}^s $s \geq 2$ задача определения собственных функций для оператора Лапласа со смещениями в производных в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций до второго порядка включительно определяется условиями

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda)u^{(1)} &= \frac{1}{r^{s-1}} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^{s-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Theta} u + \lambda u = 0, \quad u \in C^{2+\alpha}(\Omega), \\ \frac{\partial u(r_0, \Theta)}{\partial r} &= \frac{\partial u(1, \Theta)}{\partial r}, \quad \Omega = \{r, \Theta | r < 1, \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где Δ_{Θ} – оператор Лапласа на единичной сфере S^{s-1} в \mathbb{R}^s .

Разделяя переменные $u(r, \Theta) = X(r)Y(\Theta)$, получаем уравнение для полисферических функций [1, 2]

$$\Delta_{\Theta} Y_{s,n} - n(n+s-2)Y_{s,n} = 0$$

и после подстановки $X(r) = r^{-\frac{s}{2}+1}x(r)$ – уравнение Бесселя

$$x'' + \frac{1}{r}x' + \left[\lambda - \frac{(n + \frac{s}{2} - 1)^2}{r^2} \right] x = 0$$

При этом смещение дает в предположении ограниченности решения условие, определяющее собственные значения $\lambda = \alpha^2$ как корни уравнения

$$f(\alpha) \equiv \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] = 0. \quad (1.2)$$

¹ Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; bvllbv@yandex.ru.

² Доцент кафедры высшей математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности, г. Ташкент; nurilla1956@mail.ru.

³ Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск; gerasimov_artuom@mail.ru.

Для определения сопряженной задачи рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_{S_1} (\Delta u) v \rho^{s-1} dS_1 d\rho = \int_{S_1} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{s-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \rho^{s-3} \Delta_{\Theta} u \right] v d\rho dS_1 = \\
 &= \int_{S_1} \left(\int_0^{r_0-0} + \int_{r_0+0}^1 \right) d\rho \left(\rho^{s-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) v dS_1 + \int_0^1 \rho^{s-3} \int_{S_1} \Delta_{\Theta} u \cdot v dS_1 d\rho = \\
 &= \int_{S_1} \left[\rho^{s-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} v(\rho, \Theta) \right] \left(\int_0^{r_0-0} + \int_{r_0+0}^1 \right) - \int_{S_1} \left(\int_0^{r_0-0} + \int_{r_0+0}^1 \right) \rho^{s-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} d\rho dS_1 + \int_0^1 \rho^{s-3} \int_{S_1} u \Delta_{\Theta} v dS_1 d\rho,
 \end{aligned}$$

в силу симметричности поверхностного оператора Лапласа. Заменяя в последнем выражении второе слагаемое согласно равенству

$$\begin{aligned}
 &\int_{S_1} \left(\int_0^{r_0-0} + \int_{r_0+0}^1 \right) u \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^{s-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) d\rho dS_1 = \\
 &= \int_{S_1} \left(u \rho^{s-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \left(\int_0^{r_0-0} + \int_{r_0+0}^1 \right) dS_1 - \int_{S_1} \left(\int_0^{r_0-0} + \int_{r_0+0}^1 \right) \left(\rho^{s-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) d\rho dS_1,
 \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{S_1} \left(v \rho^{s-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \left(\int_0^{r_0-0} + \int_{r_0+0}^1 \right) dS_1 - \int_{S_1} \left(u \rho^{s-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \left(\int_0^{r_0-0} + \int_{r_0+0}^1 \right) dS_1 + \int_{S_1} \left(\int_0^{r_0-0} + \int_{r_0+0}^1 \right) u \times \\
 &\times \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^{s-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) d\rho dS_1 + \int_0^1 \rho^{s-3} \int_{S_1} u \Delta_{\Theta} v dS_1 d\rho = \int_{S_1} \left(\int_0^{r_0-0} + \int_{r_0+0}^1 \right) u \left[\frac{1}{\rho^{s-1}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^{s-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \Delta_{\Theta} v \right] \times \\
 &\times \rho^{s-1} d\rho dS_1 + \int_{S_1} \left[v(r_0 - 0, \Theta) r_0^{s-1} \frac{\partial u(r_0-0, \Theta)}{\partial \rho} - v(r_0 + 0, \Theta) r_0^{s-1} \frac{\partial u(r_0+0, \Theta)}{\partial \rho} - u(r_0 - 0, \Theta) r_0^{s-1} \times \right. \\
 &\times \left. \frac{\partial v(r_0-0, \Theta)}{\partial \rho} + u(r_0 + 0, \Theta) r_0^{s-1} \frac{\partial v(r_0+0, \Theta)}{\partial \rho} + v(1, \Theta) \frac{\partial u(1, \Theta)}{\partial \rho} - u(1, \Theta) \frac{\partial v(1, \Theta)}{\partial \rho} \right] dS_1.
 \end{aligned}$$

Если v имеет непрерывные вторые производные в подобластях Ω_{r_0} и $\Omega \setminus \Omega_{r_0}$, принадлежащие классу Гельдера с показателем α , то учитывая периодичность функции $u(r, \Theta)$ по угловым переменным, непрерывность и непрерывную дифференцируемость всюду в Ω и смещение (1.1), приходим к сопряженной задаче вида

$$\Delta v + \lambda v = 0 \text{ в областях } \Omega_{r_0} \text{ и } \Omega \setminus \Omega_{r_0} \tag{1.3}$$

с условиями

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v(r_0 - 0, \Theta)}{\partial r} &= \frac{\partial v(r_0 + 0, \Theta)}{\partial r}, \quad \frac{\partial v(1, \Theta)}{\partial r} = 0, \\
 r_0^{s-1} [-v(r_0 + 0, \Theta) + v(r_0 - 0, \Theta)] + v(1 - 0, \Theta) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если же кроме того предположить непрерывность v в Ω , то возникают условия

$$v(r_0 - 0, \Theta) = v(r_0 + 0, \Theta), \quad \frac{\partial v(r_0 - 0, \Theta)}{\partial r} = \frac{\partial v(r_0 + 0, \Theta)}{\partial r}, \quad v(1, \Theta) = 0 \tag{1.5}$$

З а м е ч а н и е 1.1. Условия (1.4) или (1.5) в сопряженной задаче возникают, если в прямой задаче вместо $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ предположить только $u \in C^{2+\alpha}(\Omega_{r_0}) \cup C^{2+\alpha}(\Omega \setminus \Omega_{r_0})$.

2. Собственные значения, собственные и присоединенные функции прямой задачи при $s = 2$.

Разделяя переменные прямой задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda)u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u = 0, \quad u \in C^{2+\alpha}(\Omega), \\ \Omega &= \{r, \theta | r < 1\}, \quad \frac{\partial u(r_0, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial u(1, \theta)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$u(r, \theta) = X^{(1)}(r)Y(\theta)$, используя условия периодичности $Y(\theta + 2\pi) = Y(\theta)$ и ограниченности $Y(\theta)$ в нуле, получаем $Y(\theta) = c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta)$ и уравнение Бесселя для $X^{(1)}(r)$:

$$X_{rr}^{(1)''} + \frac{1}{r} X_r^{(1)'} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) X^{(1)} = 0, \quad |X^{(1)}(0)| < \infty, \quad X^{(1)'}(r_0) = X^{(1)'}(1).$$

Собственные функции $X^{(1)}(r) = J_n(\alpha r)$ отвечают собственным значениям $\lambda = \alpha^2$, являющимися корнями уравнения

$$f(\alpha) = J_n'(\alpha) - J_n'(\alpha r_0) = 0. \quad (2.2)$$

Сопряженная к (2.1) задача

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda)v &= 0, \quad u \in C^{2+\alpha}(\Omega_{r_0}) \cup C^{2+\alpha}(\Omega \setminus \Omega_{r_0}), \\ v_r'(r_0 - 0, \theta) &= v_r'(r_0 + 0, \theta), \quad v_r'(1, \theta) = 0, \quad v(1, \theta) + r_0[v(r_0 - 0, \theta) - v(r_0 + 0, \theta)] = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

в силу ограниченности и периодичности $v(r, \varphi)$ по φ имеет решение $v(r, \theta) = \mathcal{X}^{(1)}(r)(d_1 \cos(n\theta) + d_2 \sin(n\theta))$, где

$$\mathcal{X}^{(1)}(r) = \begin{cases} D_{11}^{(1)} J_n(\alpha r), & 0 \leq r < r_0 \\ D_{21}^{(1)} J_n(\alpha r) + D_{22}^{(1)} N_n(\alpha r), & r_0 < r \leq 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

$N_n(\alpha r)$ – функция Неймана. Условия налагаемые в (2.3) на функцию $v(r, \varphi)$ дают систему для определения постоянных в (2.4)

$$\begin{aligned} D_{11}^{(1)} J_n'(\alpha r_0) & & -D_{21}^{(1)} J_n'(\alpha r_0) & & -D_{22}^{(1)} N_n'(\alpha r_0) & = 0 \\ & & D_{21}^{(1)} J_n'(\alpha) & & D_{22}^{(1)} N_n'(\alpha) & = 0 \\ D_{11}^{(1)} r_0 J_n(\alpha r_0) & + D_{21}^{(1)} [J_n(\alpha) - r_0 J_n(\alpha r_0)] & + D_{22}^{(1)} [N_n(\alpha) - r_0 N_n(\alpha r_0)] & = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

с тем же самым определителем $\Delta_\theta = J_n'(\alpha r_0)[J_n'(\alpha)N_n(\alpha) - J_n(\alpha)N_n'(\alpha)] + r_0 J_n'(\alpha) \times [J_n(\alpha r_0)N_n'(\alpha r_0) - J_n'(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)] = \frac{2}{\pi\alpha} [J_n'(\alpha) - J_n'(\alpha r_0)] = \frac{2}{\pi\alpha} f(\alpha) = 0$. Здесь $-J_n'(\alpha)N_n(\alpha) + J_n(\alpha)N_n'(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha}$ определитель Вронского и т.к. $J_n'(\alpha)J_n'(\alpha r_0) \neq 0$ из первого уравнения системы (2.5) следует $D_{11}^{(1)} = \frac{1}{J_n'(\alpha)} [D_{21}^{(1)} J_n'(\alpha r_0) + D_{22}^{(1)} N_n'(\alpha r_0)]$. Тогда

$$\mathcal{X}^{(1)}(r) = D \begin{cases} [N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)] J_n(\alpha r), & 0 \leq r < r_0 \\ J_n'(\alpha) N_n(\alpha r) - N_n'(\alpha) J_n(\alpha r), & r_0 < r \leq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Т е о р е м а 2.1. *Задача (2.1) имеет собственные значения $\lambda = \alpha^2(n)$, определяемые равенством (2.2) с собственными функциями $\Phi_n^{(1)}(r, \theta) = J_n(\alpha r)[\bar{c}_{n1} \cos(n\theta) + \bar{c}_{n2} \sin(n\theta)]$. Ей отвечает сопряженная задача (2.3) с теми же собственными значениями, которым соответствуют собственные функции $\Psi_n^{(1)}(r, \theta) = \mathcal{X}^{(1)}(r)[d_{n1} \cos(n\varphi) + d_{n2} \sin(n\varphi)]$. Условие отсутствия присоединенных элементов $\Phi^{(2)}(r, \theta)$ имеет вид*

$$I_n^1(\alpha) = \frac{1}{\pi r_0 \alpha^3} [(n^2 - \alpha^2) r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2 \alpha^2 - n^2) J_n(\alpha r_0)] = \frac{1}{\alpha \pi} f'(\alpha) \neq 0. \quad (2.7)$$

Действительно, условием отсутствия присоединенных элементов является неравенство

$$I_n^1(\alpha) = \int_0^1 \rho X^{(1)}(\rho) \mathcal{X}^{(1)}(\rho) d\rho \neq 0, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} I_n^1(\alpha) &= \left(\int_0^{r_0} \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho \right) [N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)] + \int_{r_0}^1 \rho [J_n'(\alpha) N_n(\alpha\rho) - N_n'(\alpha) J_n(\alpha\rho)] J_n(\alpha\rho) d\rho = \\ &= -N_n'(\alpha) \int_0^1 \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho + N_n'(\alpha r_0) \int_0^{r_0} \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho + J_n'(\alpha) \int_{r_0}^1 \rho J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho \stackrel{[3]}{=} -\frac{N_n'(\alpha)}{2} \times \\ &\times \left[J_n'^2(\alpha) + \frac{\alpha^2 - n^2}{\alpha^2} J_n^2(\alpha) \right] + \frac{N_n'(\alpha r_0)}{2} \left[r_0^2 J_n'(\alpha r_0) + \left(r_0^2 - \frac{n^2}{r_0^2} \right) J_n^2(\alpha r_0) \right] + J_n'(\alpha) \{ x^2 [2J_n(\alpha x) \times \\ &\times N_n(\alpha x) - J_{n+1}(\alpha x) N_{n-1}(\alpha x) - J_{n-1}(\alpha x) N_{n+1}(\alpha x)] \} \Big|_0^1 = -\frac{N_n'(\alpha)}{2} \left[J_n'(\alpha) + \frac{\alpha^2 - n^2}{\alpha^2} J_n^2(\alpha) \right] + \\ &+ \frac{N_n'(\alpha r_0)}{2} \left[r_0^2 J_n^2(\alpha r_0) + \left(r_0^2 - \frac{n^2}{r_0^2} \right) J_n^2(\alpha r_0) \right] + \frac{J_n(\alpha)}{4} \{ [2J_n(\alpha) N_n(\alpha) - N_{n-1}(\alpha) J_{n+1}(\alpha) - \\ &- J_{n-1}(\alpha) N_{n+1}(\alpha)] - r_0^2 [2J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) - J_{n+1}(\alpha r_0) N_{n-1}(\alpha r_0) - J_{n-1}(\alpha r_0) N_{n+1}(\alpha r_0)] \}. \end{aligned}$$

Используя формулы повышения (понижения) по индексу

$$C_{\nu+1}(x) = \frac{\nu C_\nu(x)}{x} - C_\nu'(x), \quad C_{\nu-1}(x) = \frac{\nu C_\nu(x)}{x} + C_\nu'(x), \quad (2.8)$$

справедливые как для функций Бесселя, так и для функций Неймана [4], а также формулу для Вронскиана, продолжаем вычисления

$$I_n^1(\alpha) = \frac{1}{\pi\alpha} \left\{ \frac{n^2}{\alpha^2 r_0} [r_0 J_n(\alpha) - J_n(\alpha r_0)] + (r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha)) \right\} = \frac{1}{\pi r_0 \alpha^3} [(n^2 - \alpha^2) r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2 \alpha^2 - n^2) J_n(\alpha r_0)] = \frac{1}{\pi\alpha} f'(\alpha) \neq 0.$$

Т.к. $J_n''(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} J_n'(\alpha) - \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha)$, $J_n''(\alpha r_0) = -\frac{1}{\alpha r_0} J_n'(\alpha r_0) - \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 r_0^2}\right) J_n(\alpha r_0)$, то $f'(\alpha) = \frac{1}{r_0 \alpha^2} [(n^2 - \alpha^2) r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2 \alpha^2 - n^2) J_n(\alpha r_0)]$.

Пусть теперь α таково что $f(\alpha) = 0$ и $f'(\alpha) = 0$, $0 < r < 1$. $X^{(2)}(r)$ определяется как решение уравнения Бесселя с правой частью $J_n(\alpha)$

$$X^{(2)''}(r) + \frac{1}{r} X^{(2)'}(r) + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) X^{(2)} = J_n(\alpha r), \quad |X^{(2)}(r)| < \infty,$$

$$X^{(2)'}(r_0) = X^{(2)'}(1), \quad X^{(2)(k)}(r_0 - 0) = X^{(2)(k)}(r_0 + 0), \quad k = 0, 1.$$

Согласно методу Лагранжа вариации произвольных постоянных, применяемому отдельно в областях $0 \leq r < r_0$ и $r_0 \leq r \leq 1$ решение $X^{(2)}(r)$ ищется в виде

$$X^{(2)}(r) = \begin{cases} C_{11}^{(2)}(r) J_n(\alpha r) + C_{12}^{(2)}(r) N_n(\alpha r), & 0 \leq r < r_0, \\ C_{21}^{(2)}(r) J_n(\alpha r) + C_{22}^{(2)}(r) N_n(\alpha r), & r_0 \leq r \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} C_{11}^{(2)}(r) &= -\frac{\pi}{2} \int_0^r \rho J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho \stackrel{1.9.5(3)[3]}{=} -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^2}{4} [2J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - J_{n+1}(\alpha r) N_{n-1}(\alpha r) - \\ &- J_{n-1}(\alpha r) N_{n+1}(\alpha r)] \stackrel{(2.8)}{=} \frac{\pi r^2}{8} \left[-2J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) + \left(\frac{n J_n(\alpha r)}{\alpha r} - J_n'(\alpha r) \right) \left(\frac{n N_n(\alpha r)}{\alpha r} + N_n'(\alpha r) \right) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{n J_n(\alpha r)}{\alpha r} + J_n'(\alpha r) \right) \left(\frac{n N_n(\alpha r)}{\alpha r} - N_n'(\alpha r) \right) \right] = \frac{\pi r^2}{4} \left[-J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) + \frac{n^2 J_n(\alpha r)}{\alpha^2 r^2} N_n(\alpha r) - \right. \\ &- \left. J_n'(\alpha r) N_n'(\alpha r) \right] = -\frac{\pi r^2}{4} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) + \frac{n^2 \pi}{4 \alpha^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{\pi r^2}{4} J_n'(\alpha r) N_n'(\alpha r). \end{aligned}$$

$$C_{12}^{(2)}(r) = \frac{\pi}{2} \int_0^r \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho \stackrel{1.8.3(11)[3]}{=} \frac{\pi r^2}{4} J_n^2(\alpha r) + \frac{\pi r^2}{4} J_n^2(\alpha r) - \frac{\pi n^2}{4 \alpha^2} J_n^2(\alpha r).$$

Итак, на интервале $0 \leq r < r_0$ $X^{(2)}(r) = -\frac{r}{2\alpha} J_n'(\alpha r) + C_{110} J_n(\alpha r)$, $0 \leq r < r_0$. Возникающая на интервале $r_0 \leq r < 1$ система

$$\begin{cases} C_{21}^{(2)'} J_n(\alpha r) + C_{22}^{(2)'} N_n(\alpha r) = 0, \\ C_{21}^{(2)'} J_n'(\alpha r) + C_{22}^{(2)'} N_n'(\alpha r) = \frac{1}{\alpha} J_n(\alpha r), \end{cases}$$

определяет при интегрировании по промежутку $[r_0; r]$, $r < 1$ $X^{(2)}(r) = -\frac{r}{2\alpha} J'_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{4} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha r_0) N'_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{\pi n^2}{4\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4} J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4} J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \frac{\pi n^2}{4\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + C_{210}^{(2)} J_n(\alpha r) + C_{220}^{(2)} N_n(\alpha r)$.

Непрерывность в точке x_0 $X^{(2)}(r_0 - 0) = X^{(2)}(r_0 + 0)$ дает соотношение

$$[C_{110}^{(2)} - C_{210}^{(2)}] J_n(\alpha r_0) - C_{220}^{(2)} N_n(\alpha r_0) = \frac{r_0}{2\alpha} J'_n(\alpha r_0) = \frac{r_0}{2\alpha} J'_n(\alpha). \quad (2.9)$$

Непрерывная дифференцируемость $X^{(2)}(r)$ и смещение в производных $X^{(2)'}(r_0 - 0) = X^{(2)'}(r_0 + 0) = X^{(2)'}(1)$ приводят соответственно к равенствам

$$C_{110}^{(2)} - C_{210}^{(2)} = C_{220}^{(2)} \frac{N'_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)} + \frac{n^2 - \alpha r_0^2}{2\alpha^3 r_0} \frac{J_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)}, \quad (2.10)$$

$-C_{220}^{(2)} \alpha [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] = \frac{1}{2} (r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha)) + \frac{n^2}{2\alpha^2 r_0} [r_0^2 J_n(\alpha) - J_n(\alpha r_0)] - \frac{\pi r_0^2 \alpha}{4} J_n^2(\alpha) [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] + \frac{\pi(n^2 - r_0^2 \alpha^2)}{4\alpha} J_n^2(\alpha r_0) [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)]$, где постоянная $C_{210}^{(2)}$ сокращается в силу равенства коэффициентов $J'_n(\alpha r_0) = J'_n(\alpha)$, т.е.

$$\begin{aligned} C_{220}^{(2)} &= \frac{\pi}{4\alpha^2} [n^2 J_n^2(\alpha r_0) - \alpha^2 r_0^2 (J_n^2(\alpha r_0) + J_n^2(\alpha))] + \\ &+ \frac{\alpha^2 r_0 [r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha)] - n^2 [r_0 J_n(\alpha) - J_n(\alpha r_0)]}{2\alpha^3 r_0 [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)]} \stackrel{(2.7)}{=} \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \frac{\pi}{4\alpha^2} [-n^2 J_n^2(\alpha r_0) + \alpha^2 r_0^2 (J_n^2(\alpha r_0) + J_n^2(\alpha))] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Далее (2.9) и (2.10) дают

$$C_{110}^{(2)} - C_{210}^{(2)} = C_{220}^{(2)} \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} + \frac{r_0}{2\alpha} \frac{J'_n(\alpha)}{J_n(\alpha r_0)} = C_{220}^{(2)} \frac{N'_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)} + \frac{n^2 - \alpha^2 r_0^2}{2\alpha^3 r_0} \frac{J_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)}$$

позволяет определить $C_{220}^{(2)}$ в виде (2.11) в подтверждение правильности расчетов. При этом согласно условию $f'(\alpha) = 0$ выражение $C_{220}^{(2)}$ может быть записано в другой форме

$$\begin{aligned} C_{220}^{(2)} &= \left[\frac{n^2 - \alpha^2 r_0^2}{2\alpha^3 r_0} \frac{J_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)} - \frac{r_0}{2\alpha} \frac{J'_n(\alpha)}{J_n(\alpha r_0)} \right] \left[\frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} - \frac{N'_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)} \right]^{-1} = \frac{(n^2 - \alpha^2 r_0^2) J_n^2(\alpha r_0) - \alpha^2 r_0^2 J_n^2(\alpha)}{2\alpha^3 r_0 [N_n(\alpha r_0) J'_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha r_0) N'_n(\alpha r_0)]} \\ \Rightarrow C_{220}^{(2)} &= \frac{\pi}{4\alpha^2} [(\alpha^2 r_0^2 - n^2) J_n^2(\alpha r_0) + \alpha^2 r_0^2 J_n^2(\alpha)] = \frac{\pi}{4\alpha^2} [-n^2 J_n^2(\alpha r_0) + \alpha^2 r_0^2 (J_n^2(\alpha r_0) + J_n^2(\alpha))]. \end{aligned}$$

Тем самым на участке $r_0 \leq r < 1$ определено $X^{(2)}(r)$ с точностью до $C_{110}^{(1)} X^{(1)}(r)$ $X^{(2)}(r) = -\frac{r}{2\alpha} J'_n(\alpha r)$, т.е.

$$X^{(2)}(r) = -\frac{r}{2\alpha} J'_n(\alpha r), \quad 0 \leq r < 1. \quad (2.12)$$

Условие существования $X^{(3)}(r)$ определяется интегралом

$$\begin{aligned}
 I_n^{(2)} &= \int_0^1 \rho X^{(2)}(\rho) \mathcal{X}'(\rho) d\rho = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha\rho) J_n'(\alpha\rho) d\rho [N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)] - \frac{J_n'(\alpha)}{2\alpha} \times \\
 &\times \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n'(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{N_n'(\alpha)}{2\alpha} \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) J_n'(\alpha\rho) d\rho = -\frac{N_n'(\alpha r_0)}{2\alpha} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha\rho) J_n'(\alpha\rho) d\rho + \\
 &+ \frac{N_n'(\alpha)}{2\alpha} \int_0^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) J_n'(\alpha\rho) d\rho - \frac{J_n'(\alpha)}{2\alpha} \int_{r_0}^1 \rho J_n'(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho = -\frac{1}{2\alpha} N_n'(\alpha r_0) \left[-\frac{r_0^2}{2\alpha} J_n^2(\alpha) + \right. \\
 &+ \left. \frac{n^2}{2\alpha^3} J_n^2(\alpha r_0) \right] + \frac{1}{2\alpha} N_n'(\alpha) \left[-\frac{1}{2\alpha} J_n^2(\alpha) + \frac{n^2}{2\alpha^3} J_n^2(\alpha) \right] - \frac{J_n'(\alpha)}{2\alpha} \left[-\frac{1-r_0^2}{2\pi\alpha} + \frac{n^2}{2\alpha^3} J_n(\alpha) N_n(\alpha) - \right. \\
 &- \left. \frac{n^2}{2\alpha^3} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) - \frac{1}{2\alpha} J_n'(\alpha) N_n'(\alpha) + \frac{r_0^2}{2\alpha} J_n'(\alpha r_0) N_n'(\alpha r_0) \right] = \frac{n^2}{4\alpha^4} J_n(\alpha r_0) \times \\
 &\times [-J_n(\alpha r_0) N_n'(\alpha r_0) + J_n'(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0)] + \frac{n^2}{4\alpha^4} J_n(\alpha) [J_n(\alpha) N_n'(\alpha) - J_n'(\alpha) N_n(\alpha)] + \\
 &+ \frac{J_n'(\alpha)(1-r_0^2)}{4\pi\alpha^2} = \frac{1-r_0^2}{4\pi\alpha^2} J_n'(\alpha) - \frac{n^2}{2\pi\alpha^5 r_0} J_n(\alpha r_0) + \frac{n^2}{2\pi\alpha^5} J_n(\alpha) = \\
 &= \frac{1}{4\pi\alpha^5 r_0} [2n^2(r_0 J_n(\alpha) - J_n(\alpha r_0)) + \alpha^3 r_0(1-r_0^2) J_n'(\alpha)]
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Упростим (2.13), используя условие (2.7) $f'(\alpha) \cong n^2(r_0 J_n(\alpha) - J_n(\alpha r_0)) + r_0^2 \alpha^2 J_n(\alpha r_0) - \alpha^2 r_0 J_n(\alpha) = 0$, где "волна" означает "с точностью до ненулевого множителя":

$$\begin{aligned}
 2n^2(r_0 J_n(\alpha) - J_n(\alpha r_0)) + \alpha^3 r_0(1-r_0^2) J_n'(\alpha) &= -2\alpha^2 r_0(r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha)) + \\
 + \alpha^3 r_0(1-r_0^2) J_n'(\alpha) &= -\alpha^2 r_0[2(r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha)) + \alpha(r_0^2 - 1) J_n'(\alpha)] \cong f''(\alpha) \cong I_n^{(2)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

т.к. $f''(\alpha) = n^2 r_0 J_n'(\alpha) - \alpha^2 r_0 J_n''(\alpha) - 2\alpha r_0 J_n(\alpha) + 2\alpha r_0^2 J_n(\alpha r_0) + r_0^3 \alpha J_n'(\alpha r_0) - n^2 r_0 J_n'(\alpha r_0) = \alpha^2 r_0(r_0^2 - 1) J_n'(\alpha) + 2\alpha r_0(r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha)) = \alpha r_0[\alpha(r_0^2 - 1) J_n'(\alpha) + 2(r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha))]$.

Таким образом, установлен следующий результат

Т е о р е м а 2.2. При условии (2.7) $f'(\alpha) = 0$ существует второй элемент (2.12) обобщенной жордановой цепочки (ОЖЦ) прямой задачи. Если же кроме того выполнено (2.14), то существует $X^{(3)}(r)$, и тем самым $\Phi^{(3)}(r, \varphi)$.

Найдем $f_\alpha'''(\alpha)$, это понадобится после определения $X^{(3)}(r)$ для определения существования $X^{(4)}(r)$ или обрыва ОЖЦ на номере $n = 3$.

$$\begin{aligned}
 f_\alpha'''(\alpha) &\cong (r_0^2 - 1) J_n'(\alpha) + \alpha(r_0^2 - 1) J_n''(\alpha) + 2(r_0^2 J_n'(\alpha r_0) - J_n'(\alpha)) \cong (r_0^2 - 1) J_n'(\alpha) + \\
 + \alpha(r_0^2 - 1) \left[-\frac{1}{\alpha} J_n'(\alpha) - J_n(\alpha) + \frac{n^2}{\alpha^2} J_n(\alpha) \right] + 2(r_0^2 - 1) J_n'(\alpha) &= -\alpha^2(r_0^2 - 1) J_n(\alpha) + \\
 + n^2(r_0^2 - 1) J_n(\alpha) + 2\alpha(r_0^2 - 1) J_n'(\alpha) &\cong (n^2 - \alpha^2) J_n(\alpha) + 2\alpha J_n'(\alpha).
 \end{aligned}$$

Т е о р е м а 2.3. Одновременное выполнение условий $f^{(k)}(\alpha) = 0$, $k = 0, 1, 2, 3$ невозможно.

Предполагая противное, составим систему

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) = 0 &\sim (n^2 - \alpha^2) r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2 \alpha^2 - n^2) J_n(\alpha r_0) &= 0 \\
 f''(\alpha) = 0 &\sim -2J_n(\alpha) + 2r_0 J_n(\alpha r_0) + \alpha(r_0^2 - 1) J_n'(\alpha) &= 0 \\
 f'''(\alpha) = 0 &\sim (n^2 - \alpha^2) J_n(\alpha) &+ 2\alpha J_n'(\alpha) = 0
 \end{aligned}$$

Исключив $\alpha J'_n(\alpha)$ из последних двух уравнений, имеем

$$\begin{aligned} -4J_n(\alpha) + 4r_0 J_n(\alpha r_0) - (r_0^2 - 1)(n^2 - \alpha^2)J_n(\alpha) &= 0 \Rightarrow \\ \left\{ \begin{aligned} [4 + (r_0^2 - 1)(n^2 - \alpha^2)] J_n(\alpha) - 4r_0 J_n(\alpha r_0) &= 0, \\ (n^2 - \alpha^2)r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2 \alpha^2 - n^2)J_n(\alpha r_0) &= 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Определитель системы $\Delta = 4r_0^2(n^2 - \alpha^2) + 4(r_0^2 \alpha^2 - n^2) + (r_0^2 - 1)(n^2 - \alpha^2)(r_0^2 \alpha^2 - n^2) = 4n^2(r_0^2 - 1) + (r_0^2 - 1)(n^2 - \alpha^2)(r_0^2 \alpha^2 - n^2) \cong n^2[4 + \alpha^2(r_0^2 + 1)] - r_0^2 \alpha^2 - n^4$. Если бы этот определитель был равен нулю, то $J_n(\alpha)$ и $J_n(\alpha r_0)$ были бы линейно зависимы (что невозможно при целых n) и были бы линейно зависимы все три функции $J_n(\alpha)$, $J'_n(\alpha)$ и $J_n(\alpha r_0)$. Если же он был бы отличен от нуля, то $J_n(\alpha)$ и $J_n(\alpha r_0)$ равнялись бы одновременно нулю, что также невозможно. Обращение в ноль Δ дает квадратное уравнение относительно n^2 , что невозможно при целых n .

С л е д с т в и е 2.1. *ОЖЦ прямой задачи обрываются на третьем элементе, т.е. имеют длину три.*

Действительно, система $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) = 0$ разрешима, т. к. её определитель $\Delta_{12} = n^2(r_0^2 - 1) \neq 0$.

Теперь в условиях $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) = 0$ ((2.2), (2.7), (2.14)) можно приступить к вычислению $X^{(3)}(r)$, являющемуся решением неоднородного уравнения Бесселя с теми же граничными условиями смещения и гладкости

$$\begin{aligned} X^{(3)'''} + \frac{1}{r} X^{(3)''} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) X^{(3)} &= -\frac{r}{2\alpha} J'_n(\alpha r), \quad 0 \leq r < 1, \\ |X^{(3)}(r)| < \infty, \quad X^{(3)(k)}(r_0 - 0) &= X^{(3)(k)}(r_0 + 0), \quad k = 0, 1, \quad X^{(3)}(r_0) = X^{(3)}(1). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Действуя по Лагранжу, разыскиваем решение (2.15) в том же виде как для $X^{(2)}(r)$. Здесь на полуинтервале $0 \leq r < r_0$ $C_{220}^{(3)} = 0$

$$\begin{aligned} C_{11}^{(3)}(r) &= \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^r \rho^3 N_n(\alpha\rho) J'_n(\alpha\rho) d\rho = \frac{\pi}{4\alpha^2} \int_0^r \rho^3 N_n(\alpha\rho) dJ_n(\alpha\rho) = \frac{\pi}{4\alpha^2} r^3 J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \\ &- \frac{\pi}{4\alpha^2} \int_0^r J_n(\alpha\rho) [3\rho^2 N_n(\alpha\rho) + \rho^3 \alpha N'_n(\alpha\rho)] d\rho = \frac{\pi r^3}{4\alpha^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{3\pi}{4\alpha^2} \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho - \\ &- \frac{\pi}{4\alpha} \int_0^r \rho^3 J_n(\alpha\rho) N'_n(\alpha\rho) d\rho = \frac{\pi r^3}{4\alpha^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{3\pi}{4\alpha^2} \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho - \frac{\pi}{4\alpha} \int_0^r \rho^3 \left[\frac{2}{\pi\alpha\rho} + \right. \\ &+ \left. N_n(\alpha\rho) J'_n(\alpha\rho) \right] d\rho = \frac{\pi r^3}{4\alpha^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{3\pi}{4\alpha^2} \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho - \frac{r^3}{6\alpha^2} - \frac{\pi}{4\alpha^2} \times \\ &\times \int_0^r \rho^3 N_n(\alpha\rho) dJ_n(\alpha\rho) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$C_{11}^{(3)}(r) = \frac{\pi r^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{r^3}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + C_{110}^{(3)},$$

$$C_{12}^{(3)}(r) = -\frac{\pi}{8\alpha^2} \int_0^r \rho^3 dJ_n^2(\alpha\rho) = -\frac{\pi}{8\alpha^2} r^3 J_n^2(\alpha r) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^r \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho.$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично, на интервале } r_0 \leq r < 1 \quad C_{21}^{(3)}(r) &= -\frac{\pi}{4\alpha^2} \int_{r_0}^r \rho^3 N_n(\alpha\rho) dJ_n(\alpha\rho) = \frac{\pi r^3}{4\alpha^2} J_n(\alpha r) \times \\ &\times N_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^3}{4\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) - \frac{3\pi}{4\alpha^2} \int_{r_0}^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho - \frac{\pi}{4\alpha} \int_{r_0}^r \rho^3 \left[\frac{2}{\pi\alpha\rho} + N_n(\alpha\rho) J'_n(\alpha\rho) \right] d\rho = \\ &= \frac{\pi r^3}{4\alpha^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^3}{4\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) - \frac{r^3 - r_0^3}{6\alpha^2} - \frac{3\pi}{4\alpha^2} \int_{r_0}^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho - \frac{\pi}{4\alpha^2} \times \\ &\times \int_{r_0}^r \rho^3 N_n(\alpha\rho) dJ_n(\alpha\rho) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$C_{21}^{(3)}(r) = \frac{\pi r^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) - \frac{r^3 - r_0^3}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_{r_0}^r \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho + C_{210}^{(3)}.$$

$$C_{22}^{(3)}(r) = -\frac{\pi\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2\alpha^2} \int_{r_0}^r \rho^3 J_n(\alpha \rho) J_n'(\alpha \rho) d\rho = -\frac{\pi}{8\alpha^2} \int_{r_0}^r \rho^3 dJ_n^2(\alpha \rho) = -\frac{\pi}{8\alpha^2} r^3 J_n^2(\alpha r) + \frac{\pi}{8\alpha^2} r_0^3 J_n^2(\alpha r_0) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_{r_0}^r \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho + C_{220}^{(3)}.$$

Здесь $\int_{r_0}^r \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho = \frac{1}{\alpha^3} \int_{\alpha r_0}^{\alpha r} x^2 J_n^2(x) dx \stackrel{1.8.3(4)[3]}{=} \frac{1}{2\alpha^3} (n^2 - \frac{1}{4}) \int_{\alpha r_0}^{\alpha r} J_n^2(x) dx + \frac{x}{4\alpha^3} \left\{ [x J_n'(x) - \frac{1}{2} J_n(x)]^2 + (x^2 - n^2 + \frac{1}{4}) J_n^2(x) \right\} \Big|_{\alpha r_0}^{\alpha r} = \frac{1}{2\alpha^3} (n^2 - \frac{1}{4}) \int_{\alpha r_0}^{\alpha r} J_n^2(x) dx + \frac{r}{4\alpha^2} \left\{ [\alpha r J_n'(\alpha r) - \frac{1}{2} J_n(\alpha r)]^2 + (\alpha^2 r^2 - n^2 + \frac{1}{4}) J_n^2(\alpha r) \right\} - \frac{r_0}{4\alpha^2} \left\{ [\alpha r_0 J_n'(\alpha r_0) - \frac{1}{2} J_n(\alpha r_0)]^2 + (\alpha^2 r_0^2 - n^2 + \frac{1}{4}) \times J_n^2(\alpha r_0) \right\}$, где $\int J_n^2(x) dx$ вычисляется по формуле 1.8.3(2)[3] $\int x^\lambda J_\mu(x) J_\nu(x) dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda - \mu - \nu + 1} [J_{\mu-1}(x) J_{\nu-1}(x) + J_\mu(x) J_\nu(x)] - \frac{\lambda + \mu + \nu - 1}{\lambda - \mu - \nu + 1} \int x^\lambda J_{\mu-1}(x) J_{\nu-1}(x) dx$ при $\lambda = 0, \mu = \nu = n$, т. е. $\int J_n^2(x) dx = -\frac{x}{2n-1} [J_{n-1}^2(x) - J_n^2(x)] + \int J_{n-1}^2(x) dx = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{2n-2k-1} [J_{n-k-1}^2(x) + J_{n-k}^2(x)] + \int J_0^2(x) dx = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{4(n-k)x}{(2n-2k-1)(2n-2k+1)} J_{n-k}^2(x) + \int J_0^2(x) dx$.

Сходимость интегралов $\int_{r_0}^r \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho$, $\int_{r_0}^r \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho$ и $\int_{\alpha r_0}^{\alpha r} J_n^2(x) dx$ очевидна, однако в таблицах [3] они отсутствуют и нет никаких указаний для их вычисления, кроме того что было сделано. Вычисляем $X^{(3)}(r)$ на имеющемся материале. Итак,

$$X^{(3)}(r) = \begin{cases} C_{11}^{(3)}(r) J_n(\alpha r) + C_{12}^{(3)}(r) N_n(\alpha r), & 0 \leq r < r_0 \\ C_{21}^{(3)}(r) J_n(\alpha r) + C_{22}^{(3)}(r) N_n(\alpha r), & r_0 \leq r < 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{r^3 J_n(\alpha r)}{12\alpha^2} + \frac{\pi r^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho + C_{110}^{(3)} J_n(\alpha r) - \\ -\frac{\pi r^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r) N_n(\alpha r) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho, & 0 \leq r < r_0, \\ -\frac{r^3 - r_0^3}{12\alpha^2} J_n(\alpha r) + \frac{\pi r^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\ -\frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_{r_0}^r \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho + C_{210}^{(3)} J_n(\alpha r) - \frac{\pi r^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r) N_n(\alpha r) + \\ + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n(\alpha r) \int_{r_0}^r \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho + C_{220}^{(3)} N_n(\alpha r), & r_0 \leq r < 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{r^3 J_n(\alpha r)}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho + C_{110}^{(3)} J_n(\alpha r), \\ 0 \leq r < r_0, \\ -\frac{r^3 - r_0^3}{12\alpha^2} J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_{r_0}^r \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho + \\ + C_{210}^{(3)} J_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n(\alpha r) \int_{r_0}^r \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho + C_{220}^{(3)} N_n(\alpha r), & r_0 \leq r < 1. \end{cases}$$

Из непрерывности $X^{(3)}(r)$ при $r = r_0$ следует

$$-\frac{r_0^3 J_n(\alpha r_0)}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n(\alpha r_0) \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho + C_{110}^{(3)} J_n(\alpha r_0) -$$

$$-C_{210}^{(3)}J_n(\alpha r_0) = C_{220}^{(3)}N_n(\alpha r_0) \Rightarrow$$

$$C_{110}^{(3)} - C_{210}^{(3)} = C_{220}^{(3)} \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} + \frac{r_0^3}{12\alpha^2} + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho -$$

$$- \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho. \quad (2.16)$$

Непрерывная дифференцируемость $X^{(3)}(r)$ при $r = r_0$ дает: $-\frac{r_0^2 J_n(\alpha r_0)}{4\alpha^2} -$

$$-\frac{r_0^3 J_n'(\alpha)}{12\alpha} - \frac{3\pi}{8\alpha} J_n'(\alpha) \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho - \frac{3\pi r_0^2}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{3\pi}{8\alpha} N_n'(\alpha r_0) \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho +$$

$$+ \frac{3\pi}{8\alpha^2} r_0^2 J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + C_{110}^{(3)} \alpha J_n'(\alpha) - C_{210}^{(3)} \alpha J_n'(\alpha) = -\frac{r_0^2 J_n(\alpha r_0)}{4\alpha^2} - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha} J_n(\alpha r_0) J_n'(\alpha) N_n(\alpha r_0) -$$

$$- \frac{3\pi}{8\alpha^2} r_0^2 J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha} J_n^2(\alpha r_0) N_n'(\alpha r_0) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} r_0^2 J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + C_{220}^{(3)} \alpha N_n'(\alpha r_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{110}^{(3)} - C_{210}^{(3)} = \frac{r_0^3}{12\alpha^2} + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho -$$

$$- \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} \frac{J_n^2(\alpha r_0) N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} + C_{220}^{(3)} \frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)}. \quad (2.17)$$

Из (2.16) и (2.17) с одинаковыми правыми частями следует:

$$C_{220}^{(3)} \left[\frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} - \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} \right] + \frac{r_0^3}{12\alpha^2} + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho -$$

$$- \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} \frac{J_n^2(\alpha r_0) N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} - \frac{r_0^3}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} \times$$

$$\times \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{220}^{(3)} \frac{2}{\pi \alpha r_0 J_n(\alpha r_0) J_n'(\alpha)} = \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{2}{\pi \alpha r_0 J_n(\alpha r_0) J_n'(\alpha)} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} \frac{J_n(\alpha r_0) [J_n'(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha r_0) N_n'(\alpha r_0)]}{J_n'(\alpha)}$$

$$C_{220}^{(3)} = \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0). \quad (2.18)$$

Значение $C_{220}^{(3)}$ вычисляется также из условия смещения $X^{(3)'}(r_0 - 0) = X^{(3)'}(r_0 + 0) = X^{(3)'}(1 - 0)$:

$$-\frac{r_0^2 J_n(\alpha r_0)}{4\alpha^2} - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha} J_n(\alpha r_0) J_n'(\alpha) N_n(\alpha r_0) - \frac{3\pi}{8\alpha^2} r_0^2 J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + C_{210}^{(3)} \alpha J_n'(\alpha) -$$

$$- \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0) N_n'(\alpha r_0) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} r_0^2 J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + C_{220}^{(3)} \alpha N_n'(\alpha r_0) = -\frac{1}{4\alpha^2} J_n(\alpha) - \frac{1-r_0^3}{12\alpha} J_n'(\alpha) -$$

$$- \frac{\pi r_0^3}{8\alpha} J_n(\alpha r_0) J_n'(\alpha) N_n(\alpha r_0) - \frac{3\pi}{8\alpha} J_n'(\alpha) \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho + C_{210}^{(3)} \alpha J_n'(\alpha) + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha} J_n^2(\alpha r_0) N_n'(\alpha) +$$

$$+ \frac{3\pi}{8\alpha} N_n'(\alpha) \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha) N_n(\alpha) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha) N_n(\alpha) + C_{220}^{(3)} \alpha N_n'(\alpha) \Rightarrow$$

$$C_{220}^{(3)} \alpha [N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)] = \frac{r_0^2 J_n(\alpha r_0)}{4\alpha^2} - \frac{1}{4\alpha^2} J_n(\alpha) - \frac{1-r_0^3}{12\alpha} J_n'(\alpha) - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha} J_n^2(\alpha r_0) [N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)] -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3\pi}{8\alpha} J'_n(\alpha) \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha} N'_n(\alpha) \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho, \Rightarrow \\
& C_{220}^{(3)} = -\frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0) + [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)]^{-1} \left\{ \frac{r_0^2 J_n(\alpha r_0)}{4\alpha^3} - \frac{J_n(\alpha)}{4\alpha^3} - \right. \\
& \left. - \frac{1-r_0^3}{12\alpha^2} J'_n(\alpha) - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N'_n(\alpha) \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho \right\} \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Это позволяет выписать следующее соотношение на основе равенств (2.18) и (2.19):

$$\begin{aligned}
\frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho &= [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)]^{-1} \left\{ \frac{r_0^2 J_n(\alpha r_0)}{4\alpha^3} - \frac{J_n(\alpha)}{4\alpha^3} - \frac{1-r_0^3}{12\alpha^2} J'_n(\alpha) - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) \times \right. \\
&\times \left. \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N'_n(\alpha) \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho \right\} \text{ и тем самым вычислить интеграл}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho &= -\frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N'_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho + \\
&+ \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N'_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)} \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho + \frac{r_0^2}{4\alpha^3} \frac{J_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)} - \frac{1}{r^3} \frac{J_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)} - \frac{1-r_0^3}{12\alpha^3}. \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Постоянная $C_{210}^{(3)}$ определяется из равенства (2.16) в виде $C_{210}^{(3)} = C_{110}^{(3)} - C_{220}^{(3)} \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} - \frac{r_0^3}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho \stackrel{(2.18)}{=} C_{110}^{(3)} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} \times \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} J_n^2(\alpha r_0) - \frac{r_0^3}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)} \times \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho = C_{110}^{(3)} + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) - \frac{r_0^3}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho.$

Таким образом, с точностью до $C_{110}^{(3)} J_n(\alpha r)$ выписывается третий элемент $X_n^{(3)}(r)$ жордановой цепочки

$$\begin{aligned}
X_n^{(3)}(r) &= \begin{cases} -\frac{r^3 J_n(\alpha r)}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho, \\ 0 \leq r < r_0, \\ -\frac{r^3 - r_0^3}{12\alpha^2} J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \\ + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{r_0^3}{12\alpha^2} J_n(\alpha r) - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \\ + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n(\alpha r) \int_{r_0}^r \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n(\alpha r) \int_0^{r_0} \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho - \\ - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r), \quad r_0 \leq r < 1, \end{cases} = \\
&= -\frac{r^3 J_n(\alpha r)}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n^2(\alpha\rho) d\rho, \\
&\quad 0 \leq r < r_0, \quad r_0 \leq r < 1.
\end{aligned}$$

т.е. одинаковое выражение на обеих составляющих промежутка $[0, 1]$.

Тем самым доказан следующий результат

Т е о р е м а 2.4. В условиях $f^{(k)}(\alpha) = 0$, $k = 0, 1, 2$, третий элемент жордановой цепочки $X_n^{(3)}(r)$ имеет вид

$$X_n^{(3)}(r) = -\frac{r^3 J_n(\alpha r)}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2} N_n(\alpha r) \int_0^r \rho^2 J_n^2(\alpha \rho) d\rho \quad (2.21)$$

Непрерывная зависимость $C_{220}^{(3)}$ от r_0 , т.е. корректность задачи по отношению к малым изменениям r_0 в любом промежутке $[\varepsilon, 1-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ может дать возможность вычисления интеграла $\int_0^r \rho^2 J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho$. При этом пути надо исследовать предельную задачу при $r_0 = 0$.

Полученные результаты поддержаны ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (соглашение 14.В37.21.0373).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, **2**, Наука, М., 1966, 246 с.
2. Виленкин Н. Я., *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1965, 585 с.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983, 780 с.
4. Абрамовиц М., Стиган И., *Справочник по специальным функциям*, Наука, М., 1979, 832 с.
5. Логинов Б. В., Нагорный А. М., "Об одной краевой задаче для уравнения Гельмгольца со смещениями внутри области", *Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей*, 1987, № 4, 170–182.
6. Логинов Б. В., Нагорный А. М., "О спектре одной задачи Бицадзе-Самарского", *Дифференциальные уравнения*, **24**:11 (1988), 2012–2016.

The eigenvalue problem for the Laplace operator in s -dimensional unit ball Ω with displacement in derivatives

© B. V. Loginov⁴, N. N. Yuldashev⁵, A. V. Gerasimov⁶

Abstract. In the class of continuous and continuously differentiable up to second order functions it is considered the eigenvalue problem for the Laplace operator in s -dimensional unit ball Ω with displacement in derivatives along radii of concentric spheres S_{r_0} , $0 < r_0 < 1$, and S_1 , $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ and $\frac{\partial u(r_0, \Theta)}{\partial r} = \frac{\partial u(1, \Theta)}{\partial r}$. The relevant eigenvalues are determined and when $s = 2$ it is moved the length of the corresponding Jordan chains not exceeded three. At the usage of handbooks [1, 3, 4] the conditions of their existence are obtained and their computations are made. Note, that in the works [5, 6] the analogous problem with displacements in functions was solved.

Key Words: the Laplace operator, unit ball in \mathbb{R}^s , eigenvalues, eigen and adjoint functions for $s = 2$

⁴ Professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; bvllbv@yandex.ru.

⁵ Docent of Higher Mathematics Chair, Tashkent Institute of Textile and Light Industry, Tashkent; nurilla1956@mail.ru.

⁶ Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Ogarev Mordovia State University, Saransk; gerasimov_artyom@mail.ru.

УДК 512.917+513.9

Инварианты энтропийного типа для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей

© М. И. Малкин¹

Аннотация. Рассматриваются счетные топологические марковские цепи (ТМЦ), вообще говоря, нетранзитивные. Предполагается, что любая степень матрицы переходов ТМЦ имеет конечный след и, тем самым, для ТМЦ корректно определена динамическая дзета-функция Артина-Мазура. Кроме того, предполагается, что радиус сходимости дзета-функции у подсистем ТМЦ, соответствующих подматрицам с достаточно большими номерами состояний, меньше радиуса сходимости $r(A)$ дзета-функции исходной ТМЦ с матрицей переходов A . Данные условия являются естественными, т.к. выполняются для счетных ТМЦ, являющихся символическими моделями одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией. В работе показано, что при данных условиях различные инварианты ТМЦ энтропийного типа (такие, как радиус сходимости $r(A)$, логарифм энтропии $-\log h_{top}(A)$ и некоторые другие) на самом деле совпадают.

Ключевые слова: топологические марковские цепи, динамическая зета-функция, топологическая энтропия

1. Введение

Топологические марковские цепи могут служить символическими моделями для различных классов динамических систем с гиперболической структурой, включая неравномерно гиперболические и частично гиперболические системы, когда фазовое пространство таких систем обычно допускает марковское разбиение (возможно, счётное). К таким классам систем относятся системы, удовлетворяющие аксиоме А С.Смейла, гиперболические бильярды, геометрические модели аттрактора Лоренца, одномерные кусочно-монотонные отображения с положительной топологической энтропией и др. (см. [1], [3],[4], [8], [2], [6]). В частности, Ф. Хофбауэр доказал (см. [5]), что для кусочно-монотонного, кусочно-непрерывного отображения f интервала I с положительной топологической энтропией можно построить конечную или счётную ТМЦ (Ω_A, σ) с матрицей переходов A , такую, что $f : I \rightarrow I$ топологически сопряжено с отображением сдвига $\sigma : \Omega_A \rightarrow \Omega_A$. Тем самым, изучение топологических и эргодических свойств одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией можно свести к рассмотрению счётных топологических марковских цепей.

В отличие от конечных топологических марковских цепей, пространство Ω_A счётной ТМЦ некомпактно и поэтому возникают проблемы при обобщении результатов теории марковских цепей, в частности теории Перрона-Фробениуса. В случае сложных систем с неравномерно гиперболической или частично гиперболической структурой спектральное разложение неблуждающего множества на транзитивные компоненты может оказаться бесконечным, и тогда предельное поведение системы, вообще говоря, не сводится к изучению поведения на транзитивных компонентах. Аналогичная ситуация имеет место для ТМЦ. Для неразложимой бесконечной матрицы переходов A соответствующая ТМЦ топологически транзитивна, и в этом случае, как показали Д. Вер-Джонс и Б.М. Гуревич (см. [13], [11], [12]) удастся частично обобщить результаты теории Перрона-Фробениуса.

¹ доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; malkin@unn.ru

В данной статье рассматриваются счетные ТМЦ с разложимыми матрицами переходов A . В этом случае динамическая система (Ω_A, σ) нетранзитивна и поэтому, в силу некомпактности пространства Ω_A , могло, априори, оказаться так, что неблуждающее множество компактификации данной системы содержит, кроме неблуждающих точек транзитивных компонент, еще и точки, аккумулирующиеся на бесконечности. В таком случае возникали бы серьезные проблемы из-за усложнения структуры предельных орбит и, соответственно, проблемы с аппроксимацией топологической энтропии и инвариантных мер. Как показывает результат статьи автора [7], на самом деле неблуждающее множество отображения сдвига на компактификации пространства орбит представляется в виде несвязной суммы неблуждающих множеств транзитивных компонент плюс, возможно, одна устойчивая неподвижная точка — символическая бесконечность. При помощи этого результата в данной статье доказывается, что различные инварианты ТМЦ энтропийного типа (такие, как радиус сходимости $r(A)$ динамической дзета-функции, логарифм топологической энтропии $-\log h_{top}(A)$ и некоторые другие) совпадают. Таким образом, для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей обобщена теорема Б.М. Гуревича об аппроксимации топологической энтропии счетной ТМЦ и, кроме того, получена возможность оценки энтропийных характеристик с вычислительной точки зрения.

Условия, накладываемые на ТМЦ, рассматриваемые в данной статье ТМЦ, следующие. Предполагается, что любая степень матрицы переходов ТМЦ имеет конечный след и, тем самым, для ТМЦ корректно определена динамическая дзета-функция Артина-Мазура. Кроме того, предполагается, что радиус сходимости дзета-функции у подсистем ТМЦ, соответствующих подматрицам с достаточно большими номерами состояний, меньше радиуса сходимости $r(A)$ дзета-функции исходной ТМЦ с бесконечной матрицей переходов A . Точнее, предполагается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(\hat{A}|_n) > r(A), \quad (*)$$

где $\hat{A}|_n$ — это подматрица матрицы A , у которой (бесконечное) индексное множество есть $\{n, n+1, \dots\}$. Данное условие означает, что "хвостовая" подматрица матрицы переходов становится всё более разреженной, когда индексы принимают достаточно большие значения.

Отметим, что указанные условия являются естественными, т.к. они выполняются для счетных ТМЦ, являющихся символическими моделями одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией.

2. Инварианты энтропийного типа счетных ТМЦ

Рассмотрим бесконечную матрицу $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ из нулей и единиц. Данной матрице следующим образом ставится в соответствие счетная топологическая марковская цепь (ТМЦ). Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество символов (алфавит) и пусть $\Omega_A \subset \mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$ — множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей $\underline{x} = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ натуральных чисел, для которых при всех $n \in \mathbf{Z}$ выполняется

$$a_{x_n, x_{n+1}} = 1.$$

Метрика ρ на пространстве Ω_A вводится так:

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|}} \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right|. \quad (2.1)$$

ТМЦ (Ω_A, σ) есть топологическое (метрическое) пространство Ω_A , на котором действует отображение сдвига $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$, задаваемое формулой $\sigma(\underline{x}) = \underline{y}$, где $y_n = x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, метрика ρ согласована с топологией прямого (тихоновского) произведения на пространстве $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$; здесь предполагается, что множество \mathbf{N} наделено дискретной топологией.

Таким образом, пространство Ω_A некомпактно. Чтобы компактифицировать Ω_A , рассмотрим расширенный алфавит с дополнительным символом ∞ , т.е. $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Метрика на $\overline{\mathbf{N}}$ задается по формуле $d(n, m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$, где естественно предполагается, что $\frac{1}{\infty} = 0$. Далее рассматривается замыкание пространства Ω_A в $\overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$, т.е. $\overline{\Omega}_A = \text{Clos}(\Omega_A)$. Легко видеть, что на пространство $\overline{\Omega}_A$ корректно продолжается метрика ρ , задаваемая формулой (1), и, кроме того, $\overline{\Omega}_A$ является σ -инвариантным.

Мы всюду без ограничения общности предполагаем, что A — бесконечная матрица из нулей и единиц, не имеющая ни нулевых строк, ни нулевых столбцов (иначе соответствующий символ следует исключить из алфавита). Далее, мы предполагаем, что для матрицы A определены (конечны) все положительные степени, т.е. A^k , i.e. $a_{i,j}^{(k)} < +\infty$ при любых i, j, k . Для $I \subset \mathbf{N}$ мы обозначаем через $A|_I$ подматрицу матрицы A с индексным множеством I . Для простоты записи мы обозначаем через $A|_n$ конечную подматрицу $A|_{\{1,2,\dots,n\}}$, а через $\hat{A}|_k$ — бесконечную подматрицу $A|_{\{k,k+1,\dots\}}$.

Матрица A называется неразложимой, если для любых $i, j \in \mathbf{N}$ найдется натуральное число k такое, что $a_{i,j}^{(k)} > 0$. В противном случае матрица A разложима. Точно так же, как и в случае конечных ТМЦ (см., например, [9]), доказывается, что неразложимость матрицы A эквивалентна транзитивности системы (Ω_A, σ) . Для неразложимой матрицы A обозначим через $d = d(A)$ её индекс цикличности (период). В случае $d > 1$ множество индексов \mathbf{N} можно разбить на d подмножеств I_1, I_2, \dots, I_d так, что для любых двух индексов $i \in I_s, j \in I_t$ будет существовать $k > 0$, удовлетворяющее условию $a_{i,j}^{(k)} > 0$, в том и только в том случае, когда $k \equiv (s - t) \pmod d$.

Пусть $h(A)$ — топологическая энтропия сдвига σ на компактификации $\overline{\Omega}_A$. Для конечной матрицы B обозначим через $h(B)$ топологическую энтропию ограничения $h(\sigma|_{\Omega_B})$. Б.М. Гуревич показал (см. [11], [12]), что для неразложимой матрицы A существует последовательность конечных неразложимых подматриц $A|_{J_n}$, такая, что

$$J_n \subset J_{n+1} \text{ для всех } n, \bigcup J_n = \mathbf{N} \quad (2.2)$$

и выполняется

$$h(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A|_{J_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A|_n). \quad (2.3)$$

В работе [7] доказано, что равенство $h(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A|_n)$ справедливо и для разложимых матриц. Для разложимой матрицы A и индекса $i \in \mathbf{N}$ обозначим через $I(i)$ максимальное подмножество (возможно, пустое) $J \subset \mathbf{N}$ такое, что $i \in J$ и матрица $A|_J$ неразложима, т.е.

$$I(i) = \{j \in \mathbf{N} : \exists k_1 > 0, \exists k_2 > 0 \text{ т.ч. } a_{ij}^{(k_1)} > 0, a_{ji}^{(k_2)} > 0\}.$$

Обозначим для простоты матрицу $A|_{I(i)}$ через A_i . Заметим, что если множество $I(i)$ конечно, то $\overline{\Omega}_{A_i} = \Omega_{A_i}$, где запись $\overline{\Omega}_{A_i}$ означает замыкание множества Ω_{A_i} в пространстве $\overline{\Omega}_A$. Легко показать, что для бесконечной разложимой матрицы A неблуждающее множество $NW(\sigma|_{\Omega_A})$ (очевидно, некомпактное) представляется в виде объединения орбит транзитивных компонент:

$$NW(\sigma|_{\Omega_A}) = \bigcup_i NW(\sigma|_{\Omega_{A_i}}) = \bigcup_i \Omega_{A_i}.$$

В работе [7] показано, что неблуждающее множества компактификации $(\bar{\Omega}_A, \sigma)$ обладает аналогичным спектральным разложением. Точнее, в [7] доказана следующая теорема (в её формулировке использовано обозначение $(\infty) = (\dots \infty \infty \dots) \in \bar{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$.

Т е о р е м а 2.1. *Неблуждающее множество отображения сдвига σ на компактификации $\bar{\Omega}_A$ представляется в виде*

$$NW(\sigma|\bar{\Omega}_A) = \left(\bigcup \bar{\Omega}_{A_i}\right) \cup P,$$

где $P = (\infty)$, когда индексное множество $I(i)$ конечно для всех i , и $P = \emptyset$ в противном случае.

Нам потребуются некоторые соотношения для производящих функций, ассоциированных с матрицей A . Для произвольных индексов i, j эти функции определяются следующим образом):

$$T_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k; \quad F_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} z^k; \quad L_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{i,j}^{(k)} z^k \quad (2.4)$$

где $a_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}; f_{i,j}^{(0)} = l_{i,j}^{(0)} = 0; a_{i,j}^{(1)} = f_{i,j}^{(1)} = l_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}$

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_n a_{i,n}^{(k)} a_{n,j}; \quad f_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n \neq j} a_{i,n} f_{n,j}^{(k)}; \quad l_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n \neq i} l_{i,n}^{(k)} a_{n,j}$$

Справедливы соотношения (см. [13]):

$$T_{i,i}(z) = 1/(1 - F_{i,i}(z)) = 1/(1 - L_{i,i}(z)) \quad (2.5)$$

$$T_{i,j}(z) = T_{i,i}(z) \cdot L_{i,j}(z) = F_{i,j}(z) \cdot T_{j,j}(z), \quad (i \neq j) \quad (2.6)$$

$$F_{i,j}(z) = z a_{i,j} (1 - F_{j,j}(z)) + z \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} F_{k,j}(z); \quad L_{i,j}(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} L_{i,k}(z) a_{k,j} + z a_{i,j} (1 - L_{i,i}(z)) \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_{i,k}(z) F_{k,i}(z) = z \frac{dF_{ii}(z)}{dz} - F_{ii}(z) \cdot (1 - F_{ii}(z)) \quad (2.8)$$

Мы будем также обозначать данные функции $T_{i,j}(A, z), F_{i,j}(A, z), L_{i,j}(A, z)$, когда требуется подчеркнуть зависимость от A . Напомним некоторые свойства неразложимых матриц (см. [13]). Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ существует предел $\lim (a_{i,j}^{(k)})^{-1/k}$, когда $k \rightarrow \infty$, находясь в таком подмножестве индексов I_m , для которого не все степени $a_{i,j}^{(k)}$ равны нулю. Этот предел, скажем, R , не зависит от i, j и, кроме того, он равен радиусу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k$. Число $R = R(A)$ называется *параметром сходимости* матрицы A .

Неразложимая матрица A с параметром сходимости R называется *R-рекуррентной*, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} R^k$ расходится, т.е. $T_{i,j}(R) = \infty$. Если, кроме того, $a_{i,j}^{(k)} R^k$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то A называется *R-положительной* (и это определение корректно, т.к. не зависит от i, j в силу неразложимости матрицы A). Далее мы будем использовать следующий результат.

Л е м м а 2.1. *Пусть A — R-рекуррентная матрица и пусть $B = A|_J$ — её R-рекуррентная подматрица. Тогда $B = A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5), R -рекуррентность равносильна равенству $F_{ii}(R) = 1$. Из определения функции $F_{i,j}$ следует, что $f_{i,j}^{(k)}(B) \leq f_{i,j}^{(k)}(A)$ для всех k и всех $i, j \in J$. Если B — подматрица A , не совпадающая с самой матрицей, то, в силу неразложимости A , существуют индексы i_0, j_0 такие, что $i_0 \in J, j_0 \notin J$ и $a_{i_0, j_0} = 1$. Тогда из определения F_{i_0, i_0} следует, что

$$f_{i_0, i_0}^{(k+1)}(A) \geq f_{i_0, i_0}^{(k+1)}(B) + a_{i_0, j_0} \cdot f_{j_0, i_0}^{(k)}(A) = f_{i_0, i_0}^{(k+1)}(B) + f_{j_0, i_0}^{(k)}(A)$$

Поскольку существует k такое, что $f_{j_0, i_0}^{(k)} > 0$ (иначе, в силу (6) мы бы имели равенство $T_{j_0, i_0}(A, z) = 0$, что противоречило бы неразложимости матрицы A), отсюда следует, что $F_{i_0, i_0}(B, R) < F_{i_0, i_0}(A, R) = 1$. Но это противоречит R -рекуррентности матрицы B .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Для неразложимой R -положительной матрицы A следующие свойства можно рассматривать как (частичное) обобщение теоремы Перрона-Фробениуса (см. [13], [12]).

Существуют две последовательности положительных вещественных чисел $\bar{\alpha} = (\alpha_i), \bar{\beta} = (\beta_i), i \in \mathbf{N}$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,j} = \frac{1}{R} a_j; \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} \beta_j = \frac{1}{R} \beta_i \quad (2.9)$$

при всех $i, j \in \mathbf{N}$. Более того, $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ определяются однозначно (с точностью до постоянного множителя) как решения уравнений (9). Далее, для любых $i, j \in \mathbf{N}$ предел $\lim a_{i,j}^{(k)} R^k$ существует, когда $k \rightarrow \infty$, находясь в таком индексном множестве, для которого не все $a_{i,j}^{(k)}$ равны нулю, и выполняется

$$\lim a_{i,j}^{(k)} R^k = \frac{d\beta_i \alpha_j}{\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \beta_m} \quad (2.10)$$

Кроме того, для неразложимой матрицы имеет место равенство

$$h(A) = -\log R(A) \quad (2.11)$$

Далее мы будем предполагать, что для любого k след $N_k(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i}^{(k)}$ конечен. Следующие две леммы следуют непосредственно из целочисленности матрицы переходов.

Л е м м а 2.2. Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ и $k > 0$ существует $\tilde{n} = \tilde{n}(k, i, j)$ такое, что $a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k)}|_n$ при $n > \tilde{n}$ (здесь $a_{i,j}^{(k)}|_n$ — это элемент матрицы $(A|_n)^k$ с индексами i, j).

Л е м м а 2.3. Для любого $k > 0$ существует $\hat{n} = \hat{n}(k)$ такое, что $N_k(A) = N_k(A|_n)$ для всех $n > \hat{n}$.

Легко видеть, что $N_k(A)$ равно числу неподвижных точек отображения $\sigma^k|_{\Omega_A}$. Для системы (Ω_A, σ) дзета-функция Артина-Мазура $\zeta_A(z)$ определяется следующим образом:

$$\zeta_A(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k(A) z^k}{k}\right). \quad (2.12)$$

Другое представление дзета-функции дается формулой:

$$\zeta_A(z) = \prod_{orb} (1 - z^{p(orb)})^{-1} \quad (2.13)$$

где бесконечное произведение берется по всем периодическим орбитам системы (Ω_A, σ) , а $p(orb)$ обозначает период соответствующей орбиты. Из этого представления вытекает следующая лемма.

Л е м м а 2.4. Для бесконечной матрицы A выполняется:

$$\zeta_A(z) = \prod \zeta_{A_i}(z),$$

где произведение берется по всем максимальным неразложимым подматрицам $A_i = A|_{I(i)}$.

Пусть $r(A)$ — радиус сходимости ряда (11), т.е. $r(A) = (\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{N_k(A)})^{-1}$. Из определений радиуса и параметра сходимости с помощью приведенных лемм нетрудно получить следующий результат.

Л е м м а 2.5. Если A — неразложимая бесконечная матрица, то $r(A) \leq R(A) < 1$.

Обобщением на разложимые матрицы является следующая лемма.

Л е м м а 2.6. Для бесконечной матрицы A выполняется

$$r(A) \leq \exp(-h(A)). \quad (2.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $r(A) \leq r(A_i)$ для любой неразложимой подматрицы A_i . Поэтому, применяя лемму 2, лемму 6 и равенство (11), будем иметь

$$r(A) \leq \inf_i r(A_i) \leq \inf_i R(A_i) = \inf_i \exp(-h(A_i)) = \exp(-h(A)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Далее мы докажем, что на самом деле имеет место равенство $r(A) = \exp(-h(A)) = R(A)$. Для этого сначала установим следующие несложные факты (леммы 8 – 11).

Л е м м а 2.7. Последовательность дзета-функций $\zeta_{A|_n}(z)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к $\zeta_A(z)$ равномерно в любом диске $|z| \leq r_0 < r(A)$.

Обозначим через $R_{i,j} = R_{i,j}(A)$ радиус сходимости ряда $T_{i,j}(z)$ (здесь в случае разложимой матрицы A параметр сходимости $R_{i,j}$ может зависеть от i, j).

Л е м м а 2.8. Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ последовательность $T_{i,j}(A|_n, z)$ сходится равномерно к $T_{i,j}(z)$ в любом замкнутом диске $|z| \leq R_0$, where $R_0 < R_{i,j}$.

Будем говорить, что бесконечная матрица B (над \mathbf{C}) имеет сходящийся определитель, если последовательность определителей $\det B|_n$ сходится.

Л е м м а 2.9. Для любой точки z_0 из открытого круга сходимости ряда ζ_A матрица $E - z_0 A$ имеет сходящийся определитель (здесь E — единичная матрица); более того, выполняется

$$\det(E - z_0 A) = \frac{1}{\zeta_A(z_0)} \quad (2.15)$$

Для произвольной матрицы B (над \mathbf{C}) обозначим через $B_{i,j}^*$ подматрицу, которая получается из B удалением i -ой строки и j -го столбца. Аналогично, для подмножеств $I, J \subset \mathbf{N}$ пусть $B_{I,J}^*$ обозначает матрицу, которая получается из B удалением строк и столбцов с индексами, принадлежащими I и J соответственно.

Л е м м а 2.10. Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ и любой точки z_0 из диска $|z| \leq \min(R_{j,i}(A), r(A))$ матрица $(E - zA)_{i,j}^*$ имеет сходящийся определитель. Более того, выполняется

$$\det(E - zA)_{i,j}^* = (-1)^{i+j} T_{j,i}(z) \det(E - zA). \quad (2.16)$$

Теперь рассмотрим бесконечные подматрицы $\hat{A}|_n = A|_{\{n, n+1, \dots\}}$. Очевидно, что $r(\hat{A}|_n) \leq r(\hat{A}|_{n+1})$ при всех n . Мы будем использовать естественное ограничение на матрицу A , определяемое условием:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(\hat{A}|_n) > r(A). \quad (*)$$

Имеют место две леммы, использующие данное условие и предыдущие результаты

Л е м м а 2.11. Если бесконечная матрица A удовлетворяет условию $(*)$, то $\inf_{i \in \mathbf{N}} R_{i,i}(A) = r(A)$.

Л е м м а 2.12. Если неразложимая матрица A удовлетворяет условию $(*)$, то
 i) $r(A) = R(A)$, и
 ii) для любого конечного множества $J_0 \subset \mathbf{N}$ существует n_0 такое, что для $n > n_0$ можно выбрать неразложимую подматрицу H_n матрицы $A|_n$, обладающую следующими свойствами: i) индексное множество подматрицы H_n содержит J_0 , и ii) $r(H_n) = r(A|_n)$.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему о совпадении инвариантов энтропийного типа для счетных ТМЦ с матрицей переходов, удовлетворяющей условию $(*)$. Доказательство теоремы нетрудно получить, используя последние две леммы, а также леммы 8, 9 и представление дзета-функции в виде бесконечного произведения (13).

Т е о р е м а 2.2. Если матрица переходов A удовлетворяет условию $(*)$, то

$$r(A) = \exp(-h(A)) = \lim_{n \rightarrow \infty} r(A|_n) = \inf_j R_{j,j}(A) = \inf_i R(A_i) = \inf_i r(A_i),$$

и более того, все нижние грани в указанных соотношениях достигаются.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 12-01-00672, 13-01-00589.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Lecture Notes Math.*, Springer-Verlag, New York, 1975.
2. W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.
3. L. A. Bunimovich, N. I. Chernov, Ya. G. Sinai, "Markov partitions for two-dimensional hyperbolic billiards", *Uspekhi Matem. Nauk*, **45**:3 (1990), 97-134.
4. Y. Guivarch, J. Hardy, "Theorem limites pour une classe de chaines de Marcov et applications aux classe de chaines de Marcov et applications aux diffeomorphismes d'Anosov", *Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist.*, **24** (1988), 73-98..

5. F. Hofbauer, “On intrinsic ergodicity of piecewise monotone transformations with positive entropy”, *Israel J. Math.*, **34** (1979), 213-236.
6. M. Malkin, “On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval”, *Selecta Mathematica Sovietica*, **8** (1989), 131-139.
7. М.И. Малкин, “Разложение неблуждающего множества для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей”, *Журнал СВМО*, **15** (2013), 49-54.
8. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, *Труды ММО*, **44** (1982), 150-212.
9. А.Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М, 1999.
10. М.-С.Ли, М.Малкин, “Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps”, *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353-3372.
11. Б.Н. Гуревич, “Топологическая энтропия счетной цепи Маркова”, *ДАН СССР*, **187** (1969), 715-718..
12. Б.Н. Гуревич, “Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве счетного графа”, *ДАН СССР*, **192** (1970), 963-965.
13. D. Vere-Jones, “Ergodic properties of nonnegative matrices”, *Pacific Journ. Math.*, **22** (1967), 361-386.

Invariants of the entropy type of non-transitive countable topological Markov chains

© М. I. Malkin²

Abstract. Countable topological Markov chains (TMC) ((non-transitive, in general) are considered. It is assumed that any power of the transition matrix of TMC has a finite trace, so the dynamical Artin-Mazur zeta function of TMC is well defined. It is also assumed that the radius of convergence for zeta-function of subsystems of TMC which correspond to submatrices with indexes sufficiently big is less than the radius $r(A)$ for zeta function of the initial TMC with matrix A . These conditions are natural because they are satisfied for countable TMC being symbolic models of one-dimensional piecewise monotone maps with positive topological entropy. We show in the paper that under these condition, several invariants of the entropy type (such as the radius of convergence $r(A)$, logarithm of the entropy $-\log h_{top}(A)$ and some others) actually coincide.

Key Words: topological Markov chain, dynamical zeta function, topological entropy

² Assistant professor department of differential equations and mathematical analysis, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; malkin@mm.unn.ru.

УДК 517.9

Расчет допустимых сбросов загрязняющих веществ для многовидовой модели вольтерровского типа

© Т. Ф. Мамедова,¹ А. А. Ляпина²

Аннотация. Рассматривается математическая модель экосистемы вольтерровского типа. В работе проведена оценка допустимых сбросов загрязняющих веществ в водные объекты Республики Мордовия.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, допустимые сбросы загрязняющих веществ, модель Лотки-Вольтерра, динамика экосистем

1. Введение

В настоящее время многие экологические процессы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В связи с этим одной из важнейших проблем, возникающих в задачах математического моделирования, является проблема исследования устойчивости состояний равновесия, изучения асимптотических свойств решений таких систем, определение сценария взаимодействия компонент системы.

Для описания экологических процессов и исследования динамических систем необходим математический аппарат, связанный с нелинейными системами дифференциальных уравнений. Поэтому появляется необходимость в развитии методов исследования таких систем и создании новых эффективных методов анализа.

2. Постановка задачи

Задача оценки допустимых сбросов загрязняющих веществ в водные объекты заключается в определении и нормировании расчетным путем количественных и качественных характеристик сбросов загрязняющих веществ.

Для исследования устойчивости таких экосистем и расчета нормативов допустимых сбросов загрязняющих веществ рассмотрим математическую модель экологической системы в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Пусть загрязнение и биологически активную среду можно характеризовать следующими сценариями взаимодействия:

1. При небольших выбросах загрязняющих веществ биологически активная среда их полностью перерабатывает (устойчивый сценарий).

2. При увеличении выбросов загрязняющих веществ и других факторов биологически активная среда может находиться, как в устойчивом, так и неустойчивом состоянии (бистабильная ситуация).

3. При больших выбросах загрязняющих веществ биологически активная среда погибает (неустойчивая ситуация).

В связи с этим возникает задача определения сценария взаимодействия компонент системы.

¹ профессор кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, mamedovatf@yandex.ru.

² аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, lyarina.rm@gmail.com.

Рассмотрим модель динамики взаимодействия загрязнения и водной биомассы:

$$\frac{dP_i}{dt} = P_i(t) \left(r_i - \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^n P_j(t) a_{ij} \right), i = \overline{1, n}, \tag{2.1}$$

где P_i - допустимая концентрация i -ого загрязняющего вещества;

P_j - допустимая концентрация j -ого загрязняющего вещества;

r_i - скорость распространения i -ого загрязняющего вещества;

k_i - эффективные коэффициенты взаимодействия загрязняющих веществ с водной биомассой;

$a_{ij}, i \neq j$ - величины показывают соответственно характер влияния j -ого вещества на i -ое.

Ставится задача изучения процессов изменения состояний экосистем, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, методом сравнения Е. В. Воскресенского [2-4].

3. Алгоритм исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений вольтерровского типа

Алгоритм решения поставленной задачи включает две части [6], [5]:

1. Исследование нелинейной динамической системы дифференциальных уравнений на устойчивость.

2. Нахождение решения нелинейной динамической системы дифференциальных уравнений численным методом.

Построим вычислительную схему метода.

Рассмотрим дифференциальные уравнения:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \tag{3.2}$$

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{3.3}$$

где $A(\cdot) : [T, +\infty) \rightarrow Hom(R^n, R^n)$, $f \in C^{(0,1)}(R_+^1 \times R^n, R^n)$.

Пусть решение $x(t : t_0, x_0)$ уравнения (3.2) существует для всех начальных условий $(t_0, x_0) \in T \times R^n$ и $t \in T$, $T = [0, +\infty)$.

Предположим так же, что уравнение (3.2) имеет решение $x(t) \equiv 0$.

Рассмотрим множества $N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \overline{M_0} \subseteq N$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Алгоритм. Пусть задано исследуемое уравнение (3.2). Первая часть алгоритма включает выбор уравнения сравнения (3.3) и проверку условий метода сравнения.

1. Выбор уравнения сравнения (3.3).

2. Построение фундаментальной матрицы решений системы $Y(t) = (y_{ij}(t))$, $i, j = \overline{1, n}$, $Y(t_0) = E$, $t_0 \in [T_0, +\infty)$, $T_0 \geq T$.

3. Построение обратной матрицы $Y^{-1}(s) = (y^{ij}(s))$, $i, j = \overline{1, n}$.

4. Оценка нелинейной части системы $|f_j(t, x_j, \dots, x_n)| \leq \lambda_j(t, |x_{j_1}|, \dots, |x_{j_q}|)$, $\forall j \in N$, $\{j_1, \dots, j_q\} \in M_0$, $\lambda_j(t, r_1, \dots, r_i, \dots, r_q) \leq \lambda_j(t, \overline{r}_1, \dots, \overline{r}_i, \dots, \overline{r}_q)$, $r_i \leq \overline{r}_i$, $i = \overline{1, q}$ при всех $t \in [T, +\infty)$.

5. Вычисление эталонных функций сравнения. Функции $\mu_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+^1$, $m_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+^1$, $R_+^1 = [0, +\infty)$, удовлетворяют неравенствам $\mu_i \geq \max_{j \in N_0} \{|y_{ij}(t)|\}$, $T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$, если $N_0 \neq \emptyset, j \in N_0$ и $\mu_i(t) \geq 0$, если $N_0 = \emptyset$, $i \in M_0$, $m_i(t) \geq$

$\max\{\max_{j \in M_0}\{|y_{ij}(t)|\}, \mu_i(t)\}$, $T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$. $|\varphi_i(t)| \leq c\mu_i(t)$, $i = \overline{1, q}$, $\varphi \in C([T, +\infty], R^n)$.

6. Определение равномерной сходимости несобственного интеграла по t при $c \rightarrow 0$, $\mu_i(t) \rightarrow 0, \forall t \in [T, +\infty), \forall i \in M_0$ на любом компакте из $[T; +\infty)$ для выражения $J_i(t, \varphi) = \int_{t_0}^t \sum_{\substack{j \in M \\ k \in B}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds - \int_t^{+\infty} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in B}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds$, $B = N - M$, $J_i(t, \varphi)$ которое существует $\forall i \in N$, $c \in R_+^1$ и $J_i(t, \varphi) = o(\mu_i(t))$ при $t \rightarrow +\infty$ и $\forall i \in M_0$.

7. Построение уравнения сравнения, которое имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k, j \in N} |y^{jk}(t)| \lambda_j(t, z m(t)), \quad (3.4)$$

Нахождение решений уравнения (3.4), определенных на любом компакте из $[T, +\infty)$.

8. Выполнение пунктов 2-7 для уравнений (3.2) и (3.3) гарантирует асимптотическую эквивалентность по Брауэру. Переход ко второй части алгоритма.

9. Переход к пункту 1.

Вторая фаза алгоритма.

Рассмотрим уравнение (3.2) с начальными данными $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}; \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} \gamma_{12} y(t) x(t) \\ \gamma_{21} y(t) x(t) \end{pmatrix}.$$

Представим (3.2) в виде:

$$\dot{z} = A(t)z(t). \quad (3.5)$$

1. Нахождение решения уравнения (3.5)

$$z(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(t) dt \right).$$

2. Построение итерационной схемы решений:

$$x_n(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t u_{n-1}(t) dt \right),$$

$$y_n(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t v_{n-1}(t) dt \right),$$

где $u_{n-1}(t) = \mu_1 - \gamma_{12} y_{n-1}(t)$, $v_{n-1} = -\mu_2 + \gamma_{21} x_{n-1}(t)$, n - шаг итерации.

3. Проверка сходимости итерационной схемы с помощью соотношений вида:

$$\|x_n - x_{n-1}\| < \varepsilon_1,$$

$$\|y_n - y_{n-1}\| < \varepsilon_2.$$

4. Если выполняется условие 3, то вывод результатов.

4. Численная реализация алгоритма расчета допустимых сбросов загрязняющих веществ для многовидовой модели

Математическая модель многовидовой экологической системы с управлением, описываемая системой дифференциальных уравнений, рассмотрена в работе [1].

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерра, описывающую динамику взаимодействия двух загрязняющих веществ и водной биомассы.

$$\begin{cases} \frac{dP_i}{dt} = P_i(t) \left(r_i - \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^n P_j(t) a_{ij} \right), i = \overline{1, m}; \\ \frac{dP_i}{dt} = P_i(t) \left(r_i - \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^n P_j(t) a_{ij} + u_i(t) \right), i = \overline{m+1, n}; \end{cases} \quad (4.6)$$

где функции $u_i(t)$ обозначают управление. Управление удовлетворяет двум типам ограничений:

- 1) $0 \leq u_i(t) \leq b_i$,
- 2) $0 \leq u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_i(t) \leq B$, $u_i \geq 0$.

$P_i, i = 1..8$ - допустимая концентрация i -ого загрязняющего вещества;

Q - биологически активная окружающая среда (плотность водной биомассы);

dQ/dt - описывает динамику водной биомассы в отсутствии загрязнителей;

c_i - предельно допустимая концентрация i -ого загрязняющего вещества в воде соответственно, концентрация вещества в воде, выше которой вода непригодна для одного или нескольких видов водопользования. Предельно допустимые концентрации определяются исходя из Перечня нормативов качества воды водных объектов рыбохозяйственного значения, в том числе нормативов предельно допустимых концентраций вредных веществ в водах водных объектов рыбохозяйственного значения (приказ Федерального агентства по рыболовству от 12 января 2010 года № 20);

k_i - коэффициенты неконсервативности (скорости разрушения) по нефтепродуктам и нитритам соответственно, зависящий от характера веществ. Значения коэффициентов неконсервативности принимаются по данным натурных наблюдений или по справочным данным и пересчитываются в зависимости от температуры и скорости течения реки;

q - расход воды, расчетный расход в водотоке в фоновом створе;

φ - коэффициент извилистости (отношение расстояния до контрольного створа по фарватеру к расстоянию по прямой);

χ - коэффициент, зависящий от места выпуска сточных вод;

s - емкость среды;

b - продолжительность пробега воды от места выпуска сточных вод до расчетного створа (коэффициент смещения, характеризующий долю расхода воды в реке, которая смешивается со сточными водами);

n_w - коэффициент шероховатости (шероховатость ложа реки). Величина численно характеризующая сопротивление, оказываемое руслом протекающему потоку, интегральная характеристика гидравлических сопротивлений. Точное определение коэффициентов местных сопротивлений затруднительно, поэтому коэффициент шероховатости целесообразно определять по таблице М. Ф. Срибного (классификации естественных русел и нормы сопротивления движению по данным М.Ф. Срибного).

Гидрологические характеристики реки Мокша представлены государственным учреждением «Мордовский республиканский центр по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды».

Нормативы допустимых концентраций вредных веществ в водных объектах и сточных водах устанавливаются исходя из условий целевого использования водного объекта. Река Мокша объект рыбохозяйственного назначения 2 категории, поэтому нормы предельно допустимых сбросов устанавливаются по «Перечню предельно допустимых концентраций и ориентировочно безопасных условий воздействия вредных веществ для воды рыбохозяйственных водоемов».

Сточные воды, после очистных сооружений сбрасываются в реку Мокша.

Сточная вода загрязнена:

- нитритами - 0,14 мг/л;
- солями железа - 0,67 мг/л;
- органическими веществами (по БПК-5) - 11,3 мг/л;
- нефтепродуктами - 0,25 мг/л ;
- фосфатами - 0,66 мг/л;
- аммонием солевым - 0,86 мг/л;
- взвешенными веществами - 11,3 мг/л.

Гидрологические характеристики реки Мокша представлены ГУ «Мордовским ЦГМС»:

- расход воды 95 ВП - 5,06 м³/сек;
- средняя глубина реки - 0,52 м;
- средняя скорость течения - 0,16 м/с;
- коэффициент шероховатости - 0,04;
- коэффициент извилистости - 1,2.

Для численной реализации системы (4.6) определены следующие параметры:

$c_1 = 0,08$, $c_2 = 0,08$, $c_3 = 2,18$, $c_4 = 0,05$, $c_5 = 0,1$, $c_6 = 0,5$, $c_7 = 20,75$, $k_1 = 10,8$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0,23$, $k_4 = 0,1$, $k_5 = 0$, $k_6 = 0,07$, $k_7 = 0$, $q = 5,06$, $\chi = 1$, $s = 30$, $r_1 = 0,0096$, $r_2 = 0,00042$, $\varphi = 1,2$, $n_w = 0,04$, $b = 0,0003$.

Тогда система (4.6) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_1}{dt} = P_1(t) \left(-0,08 + 10,8P_1(t) + \frac{5,06P_1(t)}{Q(t)+30} \right) - 0,00042; \\ \frac{dP_2}{dt} = P_2(t) \left(-0,08 + \frac{5,06P_2(t)}{Q(t)+30} \right) + 0,00042; \\ \frac{dP_3}{dt} = P_3(t) \left(-2,18 - 0,23P_3(t) + \frac{5,06Q(t)}{Q(t)+30} \right) - 0,00042; \\ \frac{dP_4}{dt} = P_4(t) \left(-0,05 + 0,1P_4(t) + \frac{5,06Q(t)}{Q(t)+30} \right) + 0,00042; \\ \frac{dP_5}{dt} = P_5(t) \left(-0,1 + \frac{5,06Q(t)}{Q(t)+30} \right) - 0,00042; \\ \frac{dP_6}{dt} = P_6(t) \left(-0,5 + 0,07P_6(t) + \frac{5,06Q(t)}{Q(t)+30} \right) - 0,00042; \\ \frac{dP_7}{dt} = P_7(t) \left(-20,75 + \frac{5,06Q(t)}{Q(t)+30} \right) - 0,00042; \\ \frac{dQ}{dt} = 0,048 (P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) + P_5(t) + P_6(t) + P_6(t) - Q(t)). \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Точка $(-0,0084; 0,0029; -0,00019; 0,0033; -0,0027; -0,00083; -0,0002; -0,00089)$ - положение равновесия системы.

Сделаем замену переменных $P_i = x_i + x_{0i}$ и перейдем к исследованию нулевого решения:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (x_1 - 0.0084) \left(-0.08 + 10.8(x_1 - 0.0084) + \frac{5.06(x_1 - 0.0084)}{(x_8 - 0.00089) + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dx_2}{dt} &= (x_2 + 0.0029) \left(-0.08 + \frac{5.06(x_2 + 0.0029)}{(x_8 - 0.00089) + 30} \right) + 0.00042; \\ \frac{dx_3}{dt} &= (x_3 - 0.00019) \left(-2.18 - 0.23(x_3 - 0.00019) + \frac{5.06(x_3 - 0.00019)}{(x_8 - 0.00089) + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dx_4}{dt} &= (x_4 + 0.0033) \left(-0.05 + 0.1(x_4 + 0.0033) + \frac{5.06(x_4 + 0.0033)}{(x_8 - 0.00089) + 30} \right) + 0.00042; \\ \frac{dx_5}{dt} &= (x_5 - 0.0027) \left(-0.1 + \frac{5.06(x_5 - 0.0027)}{(x_8 - 0.00089) + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dx_6}{dt} &= (x_6 - 0.00083) \left(-0.5 + 0.07(x_6 - 0.00083) + \frac{5.06(x_6 - 0.00083)}{(x_8 - 0.00089) + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dx_7}{dt} &= (x_7 - 0.0002) \left(-20.75 + \frac{5.06(x_7 - 0.0002)}{(x_8 - 0.00089) + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dx_8}{dt} &= 0.048((x_1 - 0.0084) + (x_2 + 0.0029) + (x_3 - 0.00019) + (x_4 + 0.0033) + \\ &+ (x_5 - 0.0027) + (x_6 - 0.00083) + (x_7 - 0.0002) - (x_8 - 0.00089)). \end{aligned} \right. \quad (4.8)$$

Запишем систему в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -0.06x_1 + f_1(t, x), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -0.08x_2 + f_2(t, x), \\ \frac{dx_3}{dt} &= -2.18x_3 + f_3(t, x), \\ \frac{dx_4}{dt} &= -0.05x_4 + f_4(t, x), \\ \frac{dx_5}{dt} &= -0.1x_5 + f_5(t, x), \\ \frac{dx_6}{dt} &= -20.75x_6 + f_6(t, x), \\ \frac{dx_7}{dt} &= -0.08x_7 + f_7(t, x), \\ \frac{dx_8}{dt} &= 0.048(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - x_8) + f_8(t, x). \end{aligned} \right. \quad (4.9)$$

Первое линейное приближение системы (4.8) имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -0.06y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -0.08y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} &= -2.18y_3, \\ \frac{dy_4}{dt} &= -0.05y_4, \\ \frac{dy_5}{dt} &= -0.1y_5, \\ \frac{dy_6}{dt} &= -20.75y_6, \\ \frac{dy_7}{dt} &= -0.08y_7, \\ \frac{dy_8}{dt} &= 0.048(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 - y_8). \end{aligned} \right. \quad (4.10)$$

Фундаментальная матрица системы (4.10) и обратная к ней имеют вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{3t}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2t}{25}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{109t}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{83t}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{2t}{25}} & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & e^{-\frac{6t}{125}} \end{pmatrix};$$

где $a_1 = -\frac{4}{9}e^{-\frac{6t}{125}} + \frac{4}{9}e^{\frac{3t}{50}}$, $a_2 = -\frac{3}{2}e^{-\frac{2t}{25}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_3 = -\frac{12}{533}e^{-\frac{109t}{50}} + \frac{12}{533}e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_4 = -24e^{-\frac{t}{20}} + 24e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_5 = -\frac{12}{13}e^{-\frac{t}{10}} + \frac{12}{13}e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_6 = -\frac{24}{10351}e^{-\frac{83t}{4}} + \frac{24}{10351}e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_7 = -\frac{3}{2}e^{-\frac{2t}{25}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{6t}{125}}$.

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{\frac{3s}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2s}{25}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{109s}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s}{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s}{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{83s}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{2s}{25}} & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & e^{-\frac{6s}{125}} \end{pmatrix}.$$

$$\text{где } b_1 = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{4}{9}e^{-\frac{2911s}{125}} - \frac{4}{9}e^{-\frac{1159s}{50}} \right), \quad b_2 = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{3}{2}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{3}{2}e^{-\frac{5787s}{250}} \right), \\ b_3 = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{12}{533}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{12}{533}e^{-\frac{2631s}{125}} \right), \quad b_4 = e^{\frac{5807}{250}} \left(24e^{-\frac{1159s}{50}} - 24e^{-\frac{11589s}{500}} \right), \\ b_5 = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{12}{13}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{12}{13}e^{-\frac{2891s}{125}} \right), \quad b_6 = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{24}{10351}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{24}{10351}e^{-\frac{1239s}{500}} \right), \\ b_7 = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{3}{2}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{3}{2}e^{-\frac{5787s}{250}} \right).$$

Множество $N = \{1, \dots, 8\}$, $\bar{M}_0 = N$. Предположим справедливы оценки:

$$\|f_1(t, x)\| \leq \lambda_1(t, |x|), \quad \|f_2(t, x)\| \leq \lambda_2(t, |x|), \quad \|f_3(t, x)\| \leq \lambda_3(t, |x|), \quad \|f_4(t, x)\| \leq \lambda_4(t, |x|), \\ \|f_5(t, x)\| \leq \lambda_5(t, |x|), \quad \|f_6(t, x)\| \leq \lambda_6(t, |x|), \quad \|f_7(t, x)\| \leq \lambda_7(t, |x|), \quad \|f_8(t, x)\| \leq \lambda_8(t, |x|),$$

поэтому $M_0 = \{1, \dots, 8\}$, $M = M_0$, $B = N - M = \emptyset$. Тогда эталонные функции сравнения $\mu_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+$, $m_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+$ удовлетворяют неравенствам $\mu_i \geq \max_{j \in N_0} |y_{ij}(t)|$, $T \leq t_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$ если $N_0 \neq \emptyset$; если $N_0 = \emptyset$, то $\mu_i \geq 0$, $m_i(t) \geq \max_{j \in M_0} \{\max\{|y_{ij}(t)|, \mu_i(t)\}\}$, $T_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$ и будет иметь вид:

$$\mu_1(t) = e^{\frac{3t}{50}}, \quad \mu_2(t) = e^{-\frac{2t}{25}}, \quad \mu_3(t) = e^{-\frac{109t}{50}}, \quad \mu_4(t) = e^{-\frac{t}{20}}, \quad \mu_5(t) = e^{-\frac{t}{10}}, \quad \mu_6(t) = e^{-\frac{83t}{4}}, \\ \mu_7(t) = e^{-\frac{2t}{25}}, \quad \mu_8(t) = -\frac{4}{9}e^{-\frac{6t}{125}} + \frac{4}{9}e^{\frac{3t}{50}}. \\ m_1(t) = e^{\frac{3s}{50}}, \quad m_2(t) = e^{-\frac{2s}{25}}, \quad m_3(t) = e^{-\frac{109s}{50}}, \quad m_4(t) = e^{-\frac{s}{20}}, \quad m_5(t) = e^{-\frac{s}{10}}, \quad m_6(t) = e^{-\frac{83s}{4}}, \\ m_7(t) = e^{-\frac{2s}{25}}, \quad m_8(t) = -\frac{4}{9}e^{-\frac{6s}{125}} + \frac{4}{9}e^{\frac{3s}{50}}.$$

Рассмотрим

$$J_i(t, \varphi) = \int_{t_0}^t \sum_{\substack{j \in N \\ k \in B}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds - \int_t^{+\infty} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in M}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds.$$

Выражение $J_i(t, \varphi)$ существует $\forall i \in N$, $c \in R_+$ и $J_i(t, \varphi) = o(\mu_i(t))$ при $t \rightarrow +\infty$. Несобственные интегралы сходятся равномерно по t на любом компакте из $[T; +\infty)$.

Все решения уравнения $\frac{dz}{dt} = \sum_{\substack{k \in N \\ j \in N}} |y^{jk}(t)| \lambda_j(t, zm(t))$ определены на компакте $[T_0, t_0]$.

Отсюда следует, что каждое решение системы (4.10) определено на множестве $[T_0, +\infty)$.

Таким образом, условия 2-7 алгоритма выполняются, следовательно, система уравнений (4.10) асимптотически устойчива по переменным y_1, y_3, y_5, y_6, y_7 . Тогда тривиальное решение системы уравнений (4.8) обладает этим же свойством по переменной x_1, x_3, x_5, x_6, x_7 .

Выводы.

Из устойчивости исследуемой системы уравнений (4.8) по переменным x_1, x_3, x_5, x_6, x_7 , следует, что концентрации соответствующие переменным веществ, а именно, нитритов, органических веществ, фосфатов, аммония солевого, взвешенных веществ не превышают нормы сброса загрязняющих веществ в реку.

Из неустойчивости исследуемой системы уравнений (4.8) по переменным x_2, x_4, x_8 , следует, что концентрации соответствующие переменным веществ, а именно, солей железа, нефтепродуктов и водной биомассы превышают нормы сброса загрязняющих веществ в реку. Такая ситуация соответствует второму сценарию взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашихмина И. В., “Управление многовидовыми экологическими системами”, *Информатика и системы управления*, **3:29** (2011), 133–141.
2. Ляпина А.А., Мамедова Т.Ф., “Об исследовании устойчивости модели вольтерровского типа”, *Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сборник статей VI Международной научно-технической конференции*, 2011, 44–46.
3. Ляпина А.А., Мамедова Т.Ф., “Об исследовании устойчивости решения системы дифференциальных уравнений вольтерровского типа”, *Научно-технический вестник Поволжья*, **1** (2012), 195–198.
4. Mamedova T.F., Lyapina A.A., “On solution stability of differential equations of Volterra type Moldavia”, *The 20th conference on applied and industrial mathematics*, 2012, 158.
5. Мамедова Т.Ф., Десяев Е.В., Ляпина А.А., “Устойчивость математических моделей типа "хищник-жертва"", *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико - математические науки*, **2:22** (2012), 98–105.
6. Мамедова Т.Ф., Ляпина А.А., “Асимптотическая эквивалентность дифференциальных уравнений вольтерровского типа”, *Научно-технический вестник Поволжья от 2012*, **6**, 303–306.

Calculation of allowable discharges of pollutants for a multispecies models of Volterra type

© Т. Ф. Mamedova³, А. А. Lyapina⁴

Abstract. A mathematical model of the ecosystem of Volterra type. In the work the allowable discharge of pollutants into water bodies of the Republic of Mordovia.

Key Words: system of ordinary differential equations, allowable discharges of pollutants, Lotka-Volterra, ecosystem dynamics

³ Professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; mamedovatf@yandex.ru

⁴ Postgraduate student of Applied Mathematics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk, lyapina@e-mordovia.ru

УДК 517.9

Построение информационных множеств в моделях системной динамики

© С. И. Спивак¹, О. Г. Кантор², Г. Н. Юсупова³

Аннотация. Приведен алгоритм распараллеливания процесса перебора параметров, определенных в многомерной области, обеспечивающих приемлемую точность моделей системной динамики, позволяющий формировать информационные множества модели.

Ключевые слова: уравнения системной динамики, информационное множество, параллельное программирование, алгоритм распараллеливания

В моделях системной динамики для всех переменных пишутся уравнения одного и того же типа [5]:

$$\frac{dx}{dy} = y^+ - y^-, \quad (1.1)$$

где y^+ и y^- - положительный и отрицательный темпы скорости переменной y , называемой системным уровнем. Каждая из величин y^+ и y^- включает в себя все факторы, вызывающие соответственно рост и убывание y . Предполагается, что y^+ и y^- являются функциями только системных уровней.

Таким образом, уравнения системной динамики представляют собой дифференциальные уравнения вполне определенной структуры, общий вид которых в случае исследования модели с тремя переменными следующий

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} z^{\gamma_1} - a_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} z^{\gamma_2}, \\ \frac{dy}{dt} = a_3 x^{\alpha_3} y^{\beta_3} z^{\gamma_3} - a_4 x^{\alpha_4} y^{\beta_4} z^{\gamma_4}, \\ \frac{dz}{dt} = a_5 x^{\alpha_5} y^{\beta_5} z^{\gamma_5} - a_6 x^{\alpha_6} y^{\beta_6} z^{\gamma_6}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Традиционным подходом при решении задачи построения модели (1.1) является определение такого набора значений параметров $\{a_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j\}$, $j = \overline{1, 6}$, который обеспечивал бы приемлемую точность модели. При этом под точностью модели обычно понимается близость расчетных и экспериментальных данных согласно какому-либо числовому критерию. Именно такая задача решалась авторами при моделировании численности населения Российской Федерации [2], [3], [4]. На основе использования комплекса методов численного и эконометрического моделирования в сочетании со специально разработанными программными продуктами были получены значения параметров модели системной динамики

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = 8.139 \cdot 10^{-22} \cdot \frac{N^{2.05} \cdot D^2}{I^2} - 64.1 \cdot \frac{N^{0.33} \cdot D^{0.3}}{I^{0.3}}, \\ \frac{dD}{dt} = 560 \cdot D^{0.35} - 9900 \cdot I, \\ \frac{dI}{dt} = 0.131 \cdot I^{-0.4} - 0.0072 \cdot \frac{N^{0.092} \cdot D^{0.092}}{I^{0.092}}. \end{cases} \quad (1.3)$$

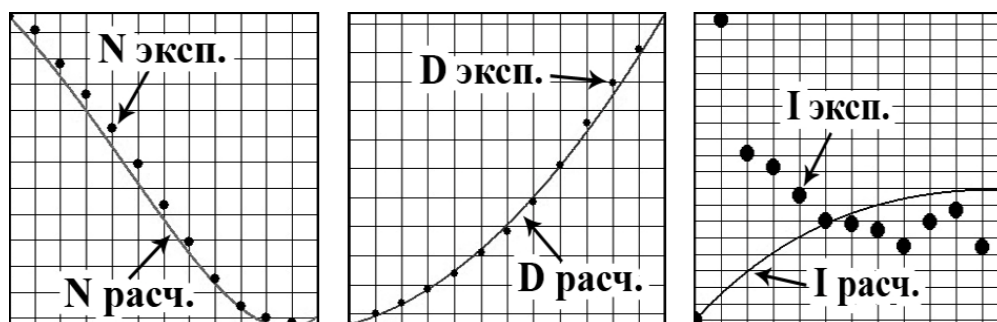
где N - численность населения РФ, чел.; D - душевые доходы за год, руб./чел. в год; I - индекс потребительских цен, доля ед. Информационную базу исследования составили данные официальной статистической отчетности за период с 2000 по 2009 гг.

¹ Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; s. spivak@bashnet.ru.

² Старший научный сотрудник института социально-экономических исследований, Уфимский научный центр Российской академии наук, г. Уфа; o_kantor@mail.ru

³ Аспирант, Башкирский государственный университет, г. Уфа; gulnur0104@rambler.ru

Модель (1.3) с достаточно высокой точностью описывает экспериментальные данные, что подтверждается значениями показателей средних ошибок аппроксимации по каждому уравнению $\{\overline{A_N}, \overline{A_D}, \overline{A_I}\}$ (рис 1.1)



Р и с у н о к 1.1

Графическая иллюстрация результатов численного интегрирования системы (1.3) методом Рунге-Кутты

Отличительной особенностью примененного подхода являлось включение в модель ряда дополнительных условий, в том числе и на будущие значения переменных модели, вытекающих из смысла решаемой задачи, что не позволяло применять классические методы для определения параметров модели. Идеология реализованного подхода базировалась на использовании идеи Л.В. Канторовича, высказанной в работе [1]. Точность модели (1.3) в дальнейшем была подтверждена практикой (табл. 1).

Таблица 1: Сравнение прогнозных и фактических значений численности населения РФ, тыс. чел.

	На 1 янв. 2010 г.	На 1 янв. 2011 г.	На 1 янв. 2012 г.
По данным Федеральной службы государственной статистики	142833,0	142865,0	143056,0
Согласно модели системной динамики(3)	142025,2	142649,1	143793,4
Погрешность	807,8 (0,57%)	215,9(0,15%)	737,4(0,52%)

В целях обеспечения комплексного подхода к исследованию модели (1.3), а именно для реализации принципа множественности моделей, целесообразным является наряду с найденными точечными оценками параметров $\{a_j^0, \alpha_j^0, \beta_j^0, \gamma_j^0\}, j = \overline{1,6}$ определять множество альтернативных значений этих параметров, обеспечивающих соответствие модельных и экспериментальных данных согласно определенному критерию. Знание совокупности приемлемых значений параметров позволит исследователю не быть „привязанным“ к единственному виду модели и иметь дополнительную свободу при выборе значений ее параметров. Более того, на основе совокупности приемлемых значений параметров $\{a_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j\}, j = \overline{1,6}$ могут проводиться расчеты, организуемые для проверки выдвигаемых гипотез относительно переменных модели (1.3).

Таким образом, актуальной является задача построения **информационного множества** для модели (1.3), под которым будем понимать совокупность значений параметров $\{a_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j\}, j = \overline{1,6}$ принадлежащих некоторой окрестности их точечных оценок $\{a_j^0, \alpha_j^0, \beta_j^0, \gamma_j^0\}, j = \overline{1,6}$ и обеспечивающих приемлемое соответствие расчетных и экспериментальных данных. В качестве критерия, характеризующего близость расчетных и

экспериментальных данных по каждому уравнению в отдельности, будем использовать средние ошибки аппроксимации $\{\overline{A_N}, \overline{A_D}, \overline{A_I}\}$.

Для определения информационного множества необходимо организовать вычислительную процедуру, цель которой заключается в формировании массива, содержащего значения параметров модели (1.2), удовлетворяющие заданным качественным характеристикам, на основе перебора значений параметров $\{a_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j\}, j = \overline{1, 6}$

Для достижения названной цели были поставлены и решены следующие задачи:

- построение алгоритма формирования наборов параметров, заданных в многомерной области, с требуемыми качественными характеристиками;

- построение алгоритма распараллеливания, заключающегося в разбиении перебора на несколько процессов, с возможностью идентификации набора параметров по номеру итерации;

- решение системы дифференциальных уравнений (1.2) для каждого из наборов параметров с обязательной проверкой на соответствие качественным критериям;

- решение системы дифференциальных уравнений (1.2) для каждого из наборов параметров с обязательной проверкой на соответствие качественным критериям;

Диапазоны вариации параметров модели (1.2) были взяты следующими:

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 \in [0; 5], & \beta_1 \in [1,02; 5], & \gamma_1 \in [-5; 5] & (a_1 - a_2) \in [-14151439,74; 23,37], \\ \alpha_2 \in [0,11; 1,41], & \beta_2 \in [0; 1,03], & \gamma_2 \in [-2,06; 4,06] & (a_3 - a_4) \in [7173,5; -3459,3], \\ \alpha_3 \in [0; 0,13], & \beta_3 \in [0,32; 0,33], & \gamma_3 \in [-1,21; -1,14] & (a_5 - a_6) \in [1559,58; -686,59], \\ \alpha_4 \in [0; 2], & \beta_4 \in [0; 2], & \gamma_4 \in [-2; 2] & \\ \alpha_5 \in [0; 3], & \beta_5 \in [0; 2,99], & \gamma_5 \in [-1,99; 3] & \\ \alpha_6 \in [0; 3], & \beta_6 \in [0,01; 3], & \gamma_6 \in [-2; 3] & \end{array}$$

Как отмечалось ранее, в качестве критерия, характеризующего близость расчетных и экспериментальных данных по каждому уравнению в отдельности, будем использовать средние ошибки аппроксимации $\{\overline{A_N}, \overline{A_D}, \overline{A_I}\}$, приемлемые значения которых определим на уровне, не превышающем 10%.

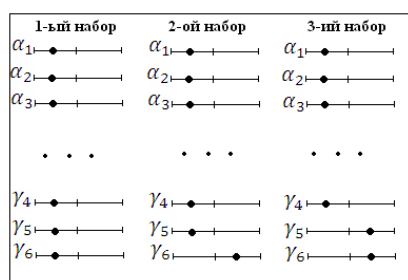
Решение системы дифференциальных уравнений реализовано методом Рунге-Кутты. Эту часть программы назовем модулем решения системы.

Поскольку перебор параметров должен осуществляться в многомерной области (размерность в нашем случае равна 24), требуется очень большое количество итераций. Уже при рассмотрении только двух точек для каждого параметра из заданного для него интервала, возникает 2^{24} наборов параметров. Учитывая, что для каждого такого набора необходимо решить систему дифференциальных уравнений (1.2), получим, что модуль решения этой системы и соответствующий расчет погрешностей потребует выполнения 2^{24} раз. Если осуществлять перебор напрямую, получится 23 вложенных цикла, в каждой итерации которого будет вызываться модуль решения системы. Очевидно, что такой способ решения поставленной задачи является очень трудоемким и затратным по времени.

Однако если этот перебор будут совершать несколько независимых процессов, время сократится в среднем пропорционально количеству независимых процессов. В связи с этим, актуальной является задача разбиения процесса перебора наборов параметров таким образом, чтобы каждый набор прогонялся (в том числе и через модуль решения системы) только в одном процессе. То есть необходимо упорядочить наборы таким образом, чтобы по их порядковому номеру однозначно определялся номер процесса, который будет проверять соответствие набора заданным условиям.

Поясним суть предлагаемого подхода для случая, когда интервалы задания параметров модели делятся на два отрезка и только одна точка из каждого отрезка участвует в построении наборов. Для удобства в качестве таких точек будем брать середины отрезков. На рисунке 1.2 дана иллюстра-

ция этого случая (выделены точки, которые участвуют в построении наборов).



Р и с у н о к 1.2

Графическая иллюстрация выбора точек из заданных интервалов при разбиении их на 2 равных отрезка

Очевидно, что в наборе по каждому параметру участвует либо точка из первого отрезка, либо из второго. Таким образом, в случае, когда точка выбирается из первого отрезка, ей может быть сопоставлена цифра 0, а если из второго - цифра 1. При таком подходе каждому набору параметров будет соответствовать набор чисел, состоящий из 0 и 1. Если интервалы, на которых определены параметры, будут делиться на 3 отрезка, в каждом из которых выбираются точки, то аналогично каждому набору параметров можно поставить в соответствие набор чисел, состоящий из 0, 1 и 2. Аналогичный подход может быть использован и при разбиении на большее число отрезков.

Таким образом, в числовом представлении набора участвуют только числа, используемые в системе счисления, соответствующей количеству отрезков, на которое производится разбиение интервалов.

Важным этапом является распараллеливание процесса перебора этих чисел так, чтобы одно и то же число (или, что то же самое, один и тот же набор) не проверялся несколькими процессами. Для непосредственной реализации распараллеливания была разработана специальная процедура. Суть ее заключается в следующем: внутри одной программы создаются несколько потоков, каждый из которых независимо от других выполняет свой перебор. Предположим, что программа разбивается на 5 процессов. Тогда задача сводится к тому, чтобы всю совокупность двоичных чисел (в случае разбиения интервалов на два отрезка), которые мы сопоставили набору точек, разбить на непересекающиеся множества, элементы каждого из которых будут проверяться внутри единственного процесса. При разбиении интервалов параметров модели на 2 отрезка возникает 2^{24} процессов. Переводя это число в двоичную систему счисления, получим 1 000 000 000 000 000 000 000 000. Как было сказано выше, 0 и 1 показывают из какого именно отрезка (первого или второго) необходимо взять точку. Поскольку в наборе участвуют 24 точки, значит, достаточно рассмотреть с конца 24 цифры. Все они равны 0, это означает, что данный набор параметров модели (2) формируется из точек, взятых только из первых отрезков соответствующих интервалов задания параметров. Набору параметров, все компоненты которого кроме последнего, взяты из первых отрезков, а последний компонент - из второго, будет соответствовать следующая последовательность нулей и единиц 000 000 000 000 000 000 000 000 001, что совпадает с десятичным представлением числа 1. Нетрудно заметить, что от 000 000 000 000 000 000 000 001 до 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 двоичные числа охватывают все возможные комбинации цифр 0 и 1.

Поэтому при делении интервалов задания параметров на 2 отрезка, если производить цикл от 1 до 2^{24} с переводом номера шага в двоичную систему, получается упорядоченный

набор параметров всех возможных комбинаций. И по номеру итерации возможно однозначно определить, для какого набора осуществляется проверка на соответствие условию задачи.

В предлагаемой процедуре распараллеливания первый поток прогоняет цикл от 1 до целой части деления 2^{24} на 5 (поскольку номер итерации должен быть целым числом), то есть практически пятая часть общего количества наборов, аналогично второй поток будет считать следующие 20% вариантов и т.д. Внутри каждого потока номер итерации переводится в двоичную систему счисления и по каждому такому двоичному представлению однозначно устанавливается соответствие с набором параметров модели согласно описанному алгоритму.

Каждый поток вызывает модуль решения системы, осуществляющий решение системы методом Рунге-Кутты и подсчет средней ошибки аппроксимации. Если средняя ошибка аппроксимации по найденному набору менее 10%, то наборы параметров и соответствующее значение средней ошибки аппроксимации записываются в отдельный текстовый файл. Наименование файла представляет собой номер итерации (соответственно и порядковый номер набора) в двоичной системе, на которой был получен этот набор. Такая запись полученных данных обусловлена тем, что все потоки одновременно производят поиск и запись найденных файлов, а работа только с одним файлом может привести к ошибкам.

Поскольку при разбиении на два отрезка каждый параметр принимает лишь одно из двух значений, перебор получается очень грубым и вполне вероятно, что при таком подходе не удастся определить ни одного набора, удовлетворяющего критерию качества набора. Очевидно, что при разбиении интервалов значений параметров на большее число отрезков повышается точность «просмотра» многомерной области задания параметров. Однако при этом существенно возрастает необходимое количество итераций. Так, при разбиении указанных интервалов на 3 части количество итераций увеличивается примерно в 17 000 раз. Поэтому в такой ситуации целесообразным является использование принципа декомпозиции задачи, выражающегося в последовательном (возможно, более детальном) решении отдельных частей проблемы.

Описанный подход был апробирован при разбиении интервалов значений параметров только первого уравнения (кроме a_1 и a_2), с фиксацией значений остальных параметров на уровнях, соответствующих модели (1.3). Интервалы значений для шести варьируемых параметров разбивались на 10 равных частей, в качестве значений параметров $\{a_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j\}, j = \overline{1, 2}$ рассматривались центры интервалов. Общее количество всевозможных наборов составило 10^6 . Результаты применения описанного подхода позволили в качестве приемлемых вариантов значений варьируемых параметров модели (1.3) определить следующие (табл. 2).

Предложенный алгоритм распараллеливания процедуры перебора значений параметров модели (1.2), позволил определить 79 наборов значений параметров, удовлетворяющих введенным критериям качества модели, которые составляют часть информационного множества модели (1.3). Анализ этого подмножества показал, что изначально заданный интервал значений параметра α_2 при проведении дальнейших исследований может быть существенно сужен, а это, в свою очередь, позволит оптимизировать вычислительный процесс на следующих стадиях формирования информационного множества модели (1.3).

Таблица 2: Фрагмент информационного множества модели (1.3) по варьируемым параметрам $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$

№	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2
1	1,75	0,57	1,22	0,05	-4,5	-1,75
2	0,75	0,44	1,62	0,05	-3,5	-1,75
3	0,25	0,31	2,81	0,67	-3,5	-1,75
4	2,25	0,18	1,62	0,98	-3,5	-1,75
5	0,25	0,31	4,80	0,57	2,5	-1,75
6	0,75	0,18	3,21	0,67	4,5	3,14
7	2,75	0,18	1,22	0,05	-3,5	-1,14
8	1,75	0,18	1,62	0,36	3,5	3,75
9	0,25	0,31	4,40	0,36	3,5	3,75
10	4,25	0,18	2,81	0,36	4,5	3,75
Макс	4,25	0,57	4,80	0,98	4,5	3,75
Мин	0,25	0,18	1,22	0,05	-4,5	-1,75

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. В. Канторович, “О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений”, *Сибирский математический журнал*, **3:5** (1962), 701–709.
2. С. И. Спивак, О. Г. Кантор, “Оценка параметров моделей системной динамики”, *Журнал СВМО*, **13:3** (2011), 107–113.
3. С. И. Спивак, О. Г. Кантор, И. Р. Салахов, “О программе, корректирующей систему уравнений”, *Журнал СВМО*, **13:4** (2011), 87–93.
4. С. И. Спивак, О. Г. Кантор, “Оценка качества спецификации моделей системной динамики”, *Журнал СВМО*, **14:2** (2012), 34–39.
5. Дж. Форрестер, *Мировая динамика*, Наука, М., 1978.

Construction of the information sets in models of system dynamics.

© S. I. Spivak⁴, O. G. Kantor⁵, G. N. Yusupova⁶

Abstract. An algorithm for parallelizing process of sorting parameters is defined in a multidimensional region, providing an acceptable accuracy of system dynamics models, allows you to shape the information sets model is given.

Key Words: equation of system dynamics, the information set, parallel programming, algorithm parallelizing

⁴ Head of Mathematical modelling Chair, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

⁵ Senior Research Scientist, Institute for Social and Economic Research, Ufa; o_kantor@mail.ru

⁶ Postgraduate Student, Bashkir State University, Ufa; gulnur0104@rambler.ru

УДК 517.9

ОДУ второго порядка, допускающие двумерные алгебры динамических симметрий

© М. И. Тимошин¹

Аннотация. Построено обобщение классификации С.Ли обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по двумерным алгебрам точечных симметрий. Приведены первые интегралы найденных типов обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассмотрена возможность нахождения двумерных алгебр динамических симметрий над числовым полем. Демонстрируется взаимосвязь динамических и касательных симметрий. На конкретном примере показана процедура разложения касательного преобразования в суперпозицию точечных преобразований и преобразований Лежандра.

Ключевые слова: динамические симметрии, касательные симметрии, инварианты, двумерные алгебры, первые интегралы, касательные преобразования

1. Введение

Понятие динамических симметрий приведено, например, в [1]. Дифференциальное уравнение в этом случае заменяется системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y'' = f(x, y, y') \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z). \quad (1.1)$$

Затем рассматривается вопрос об инфинитезимальном преобразовании

$$X = \xi(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + \mu(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.2)$$

переводящем решение системы (1.1) в решение этой же системы. Для этого оператор (1.2) должен удовлетворять условию

$$[X, A] = \lambda(x, y, z) A, \quad (1.3)$$

где $A = \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$. Важно отметить, что компоненты оператора (1.2) не удовлетворяют предложенной С.Ли формуле продолжения $\mu = \frac{d\eta}{dx} - z \frac{d\xi}{dx}$. У оператора динамической симметрии (1.2) компоненты определяются только условием (1.3).

Известно, что оператор точечной симметрии

$$X_2 = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta_1(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + \eta_2(x, y, y', y'') \frac{\partial}{\partial y''}, \quad (1.4)$$

компоненты которого удовлетворяют формуле продолжения $\eta_i = \frac{d\eta_{i-1}}{dx} - y^{(i)} \frac{d\xi}{dx}$, обладает свойством продолжения инвариантов. Если для заданного оператора (1.4) известны инвариант $v = v(x, y)$ и дифференциальный инвариант $u = u(x, y, y')$, то выражение

¹ Ульяновск, Ульяновский Технический Университет; midvolga@mail.ru

$w = \frac{du}{dv} = \frac{u'_x + u'_y y' + u'_{yy} y''}{v'_x + v'_y y'}$, является дифференциальным инвариантом второго порядка оператора (1.4).

В работе [2] предлагается начинать процедуру нахождения симметрий с инвариантов, при этом компоненты соответствующего оператора выписываются непосредственно с помощью дифференцирования и арифметических действий. Если функции $u = u(x, y, y')$, $v = v(x, y, y')$ являются инвариантами оператора (1.2), то естественно потребовать, чтобы выражение $\frac{du}{dv} = \frac{u'_x + u'_y y' + u'_{yy} y''}{v'_x + v'_y y' + v'_{yy} y''}$ также являлось бы инвариантом один раз продолженной динамической симметрии (1.2). Удобнее записать компоненты оператора динамической симметрии в виде

$$X = \xi(x, y, y') \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y} + \mu(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + \mu_1(x, y, y', y'') \frac{\partial}{\partial y''} \tag{1.5}$$

и определить их, разрешая систему уравнений

$$Xu = 0, \quad Xv = 0, \quad X \frac{du}{dv} = 0. \tag{1.6}$$

Таким образом, компоненты динамической симметрии определяются с точностью до функционального множителя. При нахождении симметрий ОДУ второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$, можно использовать критерий инвариантности

$$XF|_{F=0} = 0. \tag{1.7}$$

В общем случае, критерий инвариантности (1.7), также как и критерий инвариантности (1.3), не приводит к системе дифференциальных уравнений. Преимуществом критерия (1.7) является то, что он позволяет говорить о динамической симметрии (1.5), удовлетворяющей уравнениям (1.6) с точностью до функционального множителя.

Отметим, что все точечные симметрии можно рассматривать как частный случай динамических симметрий, когда $u = \frac{\beta'_x + \beta'_y y'}{\alpha'_x + \alpha'_y y'}$, $v = \beta(x, y)$, где $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ произвольные функции.

Желая сохранить возможность сведения критерия (1.7) к системе дифференциальных уравнений, естественно ставить вопрос о динамических симметриях как о расширении множества точечных симметрий, ограничиваясь функциями двух переменных.

Софус Ли [3], приводит классификацию ОДУ второго порядка на основе классификации двумерных алгебр операторов преобразования плоскости:

- I. $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, [X_1, X_2] = 0, X_1 \vee X_2 \neq 0, y'' = f(y');$
- II. $X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, [X_1, X_2] = 0, X_1 \vee X_2 = 0, y'' = f(x);$
- III. $X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, [X_1, X_2] = X_1, X_1 \vee X_2 \neq 0, y'' = \frac{1}{x} f(y');$
- IV. $X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, [X_1, X_2] = X_1, X_1 \vee X_2 = 0, y'' = f(x) y'.$

В работе [4] рассматриваются двумерные алгебры, образованные из дважды продолженного оператора точечной симметрии (1.4) и оператора динамической симметрии (1.5) с инвариантами $v = x$, $u = \alpha(x, y) + \beta(x, y) y'$, $u_1 = \alpha'_x + y'(\alpha'_y + \beta'_x) + y'^2 \beta'_y + y'' \beta$. Показано,

что в рассматриваемом классе алгебр содержатся все указанные Софусом Ли уравнения и уравнение

$$y'' + y' \frac{d\lambda}{dy} = f(y' + \lambda(y)). \quad (1.8)$$

Других уравнений второго порядка в этом классе нет.

2. Классификация ОДУ второго порядка допускающих двумерные алгебры динамических симметрий

Рассмотрим двумерные алгебры, образованные из оператора точечной симметрии (1.4) и оператора динамической симметрии (1.5). Потребуем при этом, чтобы в некоторой системе координат инварианты динамической симметрии принимали вид

$$v = x, \quad u = \frac{\alpha(x, y) + \beta(x, y)y'}{\chi(x, y) + \delta(x, y)y'}. \quad (2.1)$$

Заметим, что инвариант u , определяемый выражением (2.1) может быть представлен одним из двух способов:

- a) $u = \alpha(x, y) + \beta(x, y)y'$;
- b) $u = \frac{\alpha(x, y)}{y' + \chi(x, y)} + \beta(x, y)$.

Случай a) ранее был рассмотрен в работе [4]. Случай b) с помощью точечного преобразования $y = \psi(t, p)$, $t = x$ может быть приведен к виду $u = \frac{\gamma(t, p)}{\dot{p}} + \lambda(t, p)$. Таким образом, чтобы описать ОДУ второго порядка, допускающие двумерные алгебры указанного типа, достаточно рассмотреть динамическую симметрию с инвариантами

$$v = x, \quad u = \alpha(x, y) + \frac{\beta(x, y)}{y'}, \quad u_1 = \alpha'_x + \alpha'_y y' + \beta'_y + \frac{\beta'_x}{y'} - \frac{y''\beta}{y'^2},$$

и дважды продолженный оператор точечной симметрии (1.4).

Пусть дифференциальное уравнение

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2.2)$$

допускает точечную симметрию (1.4). В этом случае конечное однопараметрическое преобразование, порождаемое оператором (1.4), обладает следующими свойствами:

- I. Преобразует решение уравнения (2.2) в решение этого же уравнения.
- II. Преобразует гиперповерхность, определяемую уравнением (2.2), в себя.

Умножив оператор (1.4) на произвольный функциональный множитель $\varphi(x, y, y', y'')$ получим оператор

$$\hat{X}_2 = \varphi(x, y, y', y'') \left(\xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta_1(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + \eta_2(x, y, y', y'') \frac{\partial}{\partial y''} \right). \quad (2.3)$$

Конечное однопараметрическое преобразование, порождаемое оператором (2.3), уже не будет обладать первым свойством. Второе свойство при этом сохранится, так как операторы (1.4) и (2.3) обладают одинаковым набором инвариантов.

При решении задачи о нахождении ОДУ второго порядка основную роль играют именно инварианты, и в этом случае можно рассматривать двумерные алгебры не над числовым, а над функциональным полем. Переход к функциональному полю существенно облегчает задачу, поскольку позволяет перейти от рассмотрения полных систем дифференциальных уравнений к якобиевым.

Рассмотрим двумерные алгебры, состоящие из оператора (1.4) и оператора динамической симметрии (1.5).

Потребуем, чтобы оператор (1.5) в некоторой новой системе координат

$$t = t(x, y), \quad p = p(x, y), \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt}, \quad \ddot{p} = \frac{d^2p}{dt^2}, \tag{2.4}$$

обладал инвариантами $v = t, u = \alpha(t, p) + \beta(t, p) \left(\frac{dp}{dt}\right)^{-1}$. Отметим, что преобразование (2.4) является точечным, следовательно, наиболее общий вид оператора точечной симметрии (1.4) не изменится. Разрешая систему (1.6) и используя старые обозначения x, y, y', y'' , придем к операторам

$$\begin{aligned} X_2 &= \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta_1(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + \eta_2(x, y, y', y'') \frac{\partial}{\partial y''}, \\ \eta_1 &= \eta'_x + y'(\eta'_y - \xi'_x) - \xi'_y y'^2, \\ \eta_2 &= \eta''_{xx} + y'(2\eta''_{xy} - \xi''_{xx}) + y'^2(\eta''_{yy} - 2\xi''_{xy}) - y'^3 \xi''_{yy} + y''(\eta'_y - 2\xi'_x - 3\xi'_y y'); \\ \tilde{X} &= \varphi(x, y, y', y'') \left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + \mu_1(x, y, y', y'') \frac{\partial}{\partial y''} \right), \\ \mu &= (\alpha'_y y' + \beta'_y) y' \beta^{-1}, \\ \mu_1 &= \alpha'^2_y \beta^{-2} y'^4 + (\alpha'_y \beta)'_y \beta^{-2} y'^3 + \left((\alpha'_y \beta^{-1})'_x + \beta''_{yy} \beta^{-1} \right) y'^2 + \\ &\quad + (\beta'_y \beta^{-1})'_x y' + (2\alpha'_y y' + \beta'_y) \beta^{-1} y''. \end{aligned}$$

Для определения ОДУ второго порядка, допускающего приведенные операторы, необходимо решить систему линейных уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \xi(x, y) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \eta_1(x, y, y') \frac{\partial \vartheta}{\partial y'} + \eta_2(x, y, y', y'') \frac{\partial \vartheta}{\partial y''} = 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \mu(x, y, y') \frac{\partial \vartheta}{\partial y'} + \mu_1(x, y, y', y'') \frac{\partial \vartheta}{\partial y''} = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Система дифференциальных уравнений (2.5) является полной, поскольку предполагается, что операторы образуют двумерную алгебру.

Перейдя к переменным $x = x, y = y, u = \alpha(x, y) + \frac{\beta(x, y)}{y'}, u_1 = \alpha'_x + \alpha'_y y' + \beta'_y + \frac{\beta'_x}{y'} - \frac{y'' \beta}{y'^2}$, получим систему вида

$$\begin{cases} \xi(x, y) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \tilde{\eta}_1(x, y, u) \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \tilde{\eta}_2(x, y, u, u_1) \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0; \end{cases} \tag{2.6}$$

где преобразованные компоненты $\tilde{\eta}_1(x, y, u), \tilde{\eta}_2(x, y, u, u_1)$ рационально зависят от новых переменных u, u_1 .

Система (2.6) приводится к якобиевому виду, например, если $\xi(x, y) \neq 0$, то придем к системе

$$\begin{cases} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\tilde{\eta}_1(x, y, u)}{\xi(x, y)} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \frac{\tilde{\eta}_2(x, y, u, u_1)}{\xi(x, y)} \frac{\partial \vartheta}{\partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из якобиевости системы (2.7) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{\eta}_1(x, y, u)}{\xi(x, y)} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{\eta}_2(x, y, u, u_1)}{\xi(x, y)} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при u, u_1 в системе (2.8), получим переопределенную систему дифференциальных уравнений относительно функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$.

Анализ переопределенной системы с точностью до точечных преобразований, позволяет выделить обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие соответствующие алгебры.

Исследование системы (2.6), в общем случае, позволяет наряду с дифференциальными уравнениями, приведенными Софусом Ли, и уравнением (1.8), получить обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка и соответствующие им первые интегралы:

$$r_3(x)y'^3 + R'(x)r_3(x)y'^2 + r_3'(x)r_3(x)^{-1}y' + y'' = 0, \quad r_3(x)y'(R(x) + C_1 + y) - 1 = 0, \quad (2.9)$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{X} = \varphi(x, y, y', y'') \left(\frac{\partial}{\partial y} - r_3(x)y'^2 \frac{\partial}{\partial y'} + y' \left(r_3(x)^2 y'^3 - r_3'(x)y' - 2r_3(x)y'' \right) \frac{\partial}{\partial y''} \right);$$

$$\frac{d}{dx} \left(\alpha(x)^{-1} \ln \left(-\frac{y' + \beta(x)}{y'\psi(x)} \right) \right) + y' = 0, \quad \alpha(x)^{-1} \ln \left(-\frac{y' + \beta(x)}{y'\psi(x)} \right) + y + C_1 = 0, \quad (2.10)$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{X} = \varphi(x, y, y', y'') \left(\frac{\partial}{\partial y} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial y'} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y''} \right), \quad \text{where } \xi_1 = \alpha(x)\beta(x)^{-1}y'(y' + \beta(x)),$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = \left(2y' \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + \alpha(x) \right) y'' + y'^4 \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right)^2 + 2y'^3 \frac{\alpha(x)^2}{\beta(x)} + \\ + y'^2 \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right) + \alpha(x)^2 \right) + y' \frac{d\alpha(x)}{dx}; \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\beta(x)^{-1} \left(R(x) - \ln \left(\frac{\beta(x)}{\psi(x)} y' + \alpha(x) \right) \right) \right) - y' = 0, \quad (2.11)$$

$$\beta(x)^{-1} \left(R(x) - \ln \left(\frac{\beta(x)}{\psi(x)} y' + \alpha(x) \right) \right) - y + C_1 = 0,$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{X} = \varphi(x, y, y', y'') \left(\frac{\partial}{\partial y} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial y'} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y''} \right), \quad \text{where } \xi_1 = -\beta(x)y' - \alpha(x)\psi(x),$$

$$\xi_2 = -\beta(x)y'' + \beta(x)^2 y'^2 + \left(2\beta(x)\alpha(x)\psi(x) - \frac{d\beta(x)}{dx} \right) y' + \alpha(x)^2 \psi(x)^2 - \frac{d(\alpha(x)\psi(x))}{dx};$$

$$\frac{d}{dx} \left(\alpha(y) + \frac{\beta(y)}{y' + \psi(y)} \right) = \Omega \left(\alpha(y) + \frac{\beta(y)}{y' + \psi(y)} \right), \quad \int \frac{d \left(\alpha + \frac{\beta}{y' + \psi} \right)}{\Omega \left(\alpha + \frac{\beta}{y' + \psi} \right)} = x + C_1, \quad (2.12)$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \tilde{X} = \varphi(x, y, y', y'') \left(\frac{\partial}{\partial y} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial y'} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y''} \right),$$

where $\xi_1 = \alpha'_y \beta^{-1} y'^2 + (\beta'_y + 2\psi \alpha'_y) \beta^{-1} y' + \left(\alpha'_y + \frac{d}{dy} \left(\frac{\beta}{\psi} \right) \right) \psi^2 \beta^{-1},$

$$\xi_2 = (2y' \alpha'_y + \beta'_y + 2\psi \alpha'_y) \beta^{-1} y'' + (\beta^{-1} \alpha'_y)^2 y'^4 + A_1 y'^3 + A_2 y'^2 + A_3 y' + A_4,$$

$$A_1 = \left(4\psi (\alpha'_y)^2 + \frac{d}{dy} (\beta \alpha'_y) \right) \beta^{-2},$$

$$A_2 = \left(2\psi \beta \alpha''_{yy} + 4\psi \alpha'_y \beta'_y + 6 (\psi \alpha'_y)^2 + \beta \beta''_{yy} \right) \beta^{-2},$$

$$A_3 = \left(4\psi^3 (\alpha'_y)^2 + 5\psi^2 \alpha'_y \beta'_y + \beta \psi \beta''_{yy} - \beta^2 \psi''_{yy} + \beta \psi^2 \alpha''_{yy} - 2\beta \psi \alpha'_y \psi'_y - \beta \beta'_y \psi'_y + \psi (\beta'_y)^2 \right) \beta^{-2},$$

$$A_4 = \left(-2\beta \psi^2 \alpha'_y \psi'_y + (\psi \beta'_y)^2 + (\beta \psi'_y)^2 + 2\psi^3 \alpha'_y \beta'_y - 2\beta \psi \beta'_y \psi'_y + (\psi^2 \alpha'_y)^2 \right) \beta^{-1}.$$

Других уравнений второго порядка в этом классе алгебр нет.

3. Нахождение двумерных алгебр динамических симметрий над числовым полем

На примере уравнения (2.9) рассмотрим двумерные алгебры динамических симметрий над числовым полем. Прежде всего, отметим, что уравнение (2.9) может быть представлено в виде

$$y'' r'(x) - y' r''(x) + y'^2 R'(x) + y'^3 = 0. \tag{3.1}$$

если положить $r_3(x) = \frac{1}{r'(x)}$. Введя в рассмотрение новую независимую переменную $t = r(x)$, приходим к уравнению

$$y''_{tt} + \frac{R'(x)}{r'(x)} y_t'^2 + y_t'^3 = 0. \tag{3.2}$$

Учитывая, что выражение $\frac{R'(x)}{r'(x)}$ есть производная по t от функции $R = R(x)$, $t = r(x)$, заданной в параметрическом виде, запишем уравнение (3.2) в виде

$$y''_{tt} + R'(t) y_t'^2 + y_t'^3 = 0, \tag{3.3}$$

с первым интегралом

$$y_t' (R(t) + C_1 + y) - 1 = 0. \tag{3.4}$$

Оператор динамической симметрии принимает при этом вид

$$\tilde{X} = \varphi(t, y, y_t') \left(\frac{\partial}{\partial y} - y_t'^2 \frac{\partial}{\partial y_t'} + y_t' (y_t'^3 - 2y''_{tt}) \frac{\partial}{\partial y''_{tt}} \right).$$

Использование критерия (1.3) в этом случае, приводит к уравнению

$$-\varphi'_t - y_t' \varphi'_y + (R_t y_t'^2 + y_t'^3) \varphi'_{y_t'} - \varphi y_t'^2 = 0.$$

Как уже отмечалось в работе [2] задача решения полученного уравнения равносильна задаче интегрирования исходного уравнения (3.3).

Двумерная алгебра динамических симметрий уравнения (3.3) над числовым полем может быть найдена, если записать оператор динамической симметрии через функции, определяющие конечную группу динамических преобразований. Согласно [5], если функции $\Omega_1(t, y, y'_t), \Omega_2(t, y, y'_t)$, являются инвариантами группового однопараметрического преобразования, то конечная группа преобразований может быть записана в виде

$$\Omega(t^*, y^*, z^*) = \Omega(t, y, z) + \tau, \quad \Omega_1(t^*, y^*, z^*) = \Omega_1(t, y, z), \quad \Omega_2(t^*, y^*, z^*) = \Omega_2(t, y, z),$$

где $z = y'_t$, τ – групповой параметр.

Рассматриваемый оператор динамической симметрии обладает инвариантами $t, y - z^{-1}$, следовательно, соответствующая однопараметрическая группа может быть записана в виде

$$\Omega(t^*, y^*, z^*) = \Omega(t, y, z) + \tau, \quad y^* - \frac{1}{z^*} = y - \frac{1}{z}, \quad t^* = t. \quad (3.5)$$

Выражения (3.5) позволяют выписать оператор динамической симметрии в виде

$$\tilde{X} = \frac{1}{\Omega'_y - z^2 \Omega'_z} \left(\frac{\partial}{\partial y} - z^2 \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (3.6)$$

Использование критерия (1.3) с оператором (3.6) приводит к дифференциальному уравнению второго порядка

$$z \Omega''_{yy} + z^4 (z + R'_t) \Omega''_{zz} + \Omega''_{ty} - z^2 \Omega''_{tz} - z^2 (2z + R'_t) \Omega''_{yz} - z^2 \Omega'_y + z^3 (3z + 2R'_t) \Omega'_z = 0. \quad (3.7)$$

Очевидно, что уравнение (3.7) допускает точечную симметрию $X = \frac{\partial}{\partial y}$. Указанная точечная симметрия позволяет искать инвариантное решение в виде $\Omega = \Psi(t, z)$. В этом случае от уравнения (3.7) приходим к уравнению

$$z^2 (z + R'_t) \Psi''_{zz} - \Psi''_{tz} + z (3z + 2R'_t) \Psi'_z = 0. \quad (3.8)$$

Используя метод группового анализа дифференциальных уравнений с частными производными, изложенный, например в [6], получим, что уравнение (3.8) допускает точечную симметрию, если функция $R(t)$ определяется в неявном виде выражением $9t + c\sqrt{6aR(t) - b} + R(t)^2 - 9mR(t) - 9n = 0$, где a, b, c, m, n – произвольные числа. Функция $R(t)$ может быть представлена в параметрическом виде

$$R = \frac{b + \rho^2}{6a}, \quad t = \frac{-1}{324a^2} (\rho^4 - (54ma - 2b)\rho^2 + 36ca^2\rho - 54mab + b^2 - 324na^2),$$

где ρ – параметр.

Перейдем в выражениях (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.8) от переменной t к переменной ρ . Таким образом, получим уравнение

$$y''_{\rho\rho} (9ca^2 + b\rho + \rho^3 - 27ma\rho) - 81a^2 y'^3_{\rho} - 27a\rho y'^2_{\rho} + (27ma - b - 3\rho^2) y'_{\rho} = 0. \quad (3.9)$$

первый интеграл

$$-27a (b + \rho^2 + 6aC_1 + 6ay) y'_{\rho} - 18ca^2 - 2b\rho - 2\rho^3 + 54ma\rho = 0, \quad (3.10)$$

однопараметрическую группу динамических преобразований

$$\begin{cases} \Psi(\rho^*, y_\rho^*) = \Psi(\rho, y_\rho) + \tau, \\ y^* + \frac{9ca^2 + b\rho^* + \rho^{*3} - 27ma\rho^*}{81a^2y_\rho^*} = y + \frac{9ca^2 + b\rho + \rho^3 - 27ma\rho}{81a^2y_\rho}, \\ \rho^* = \rho, \end{cases} \quad (3.11)$$

оператор динамической симметрии

$$\tilde{X} = \frac{1}{\Psi'_{y_\rho}} \left(\frac{9ca^2 + b\rho + \rho^3 - 27ma\rho}{81a^2y_\rho^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y_\rho} \right), \quad (3.12)$$

критерий инвариантности

$$y'_\rho \left(g + \frac{3}{4}\rho^2 + \left(9ay'_\rho + \frac{3}{2}\rho \right)^2 \right) \Psi''_{y'_\rho y'_\rho} + (9ca^2 + g\rho + \rho^3) \Psi''_{\rho y'_\rho} + \left(3(9ay'_\rho + \rho)^2 + g \right) \Psi'_{y'_\rho} = 0, \quad (3.13)$$

где $g = b - 27ma$.

Уравнение (3.13) допускает точечную симметрию

$$X = (9ca^2 + g\rho + \rho^3) \left(-9a \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

которая позволяет искать инвариантное решение уравнения (3.13) в виде $\Psi = \chi(p)$, где $p = y + \frac{\rho}{9a}$. С учетом указанной замены, перейдем от уравнения (3.13) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(pg + ac + 81a^2p^3) \frac{d^2\chi}{dp^2} + (g + 243a^2p^2) \frac{d\chi}{dp} = 0. \quad (3.14)$$

Общее решение уравнения (3.14) имеет вид

$$\chi(p) = \chi_1 + \chi_2 \int \frac{dp}{ac + pg + 81a^2p^3}. \quad (3.15)$$

Найденное решение (3.15) позволяет записать другой первый интеграл уравнения (3.9) в виде

$$\int \frac{dp}{ac + pg + 81a^2p^3} + \int \frac{d\rho}{9ca^2 + \rho g + \rho^3} + C_2 = 0. \quad (3.16)$$

Таким образом, первые интегралы (3.10), (3.16) дают общее решение уравнения (3.9). Отметим также, что интеграл в выражении (3.15) берется в элементарных функциях, и, в зависимости от типа корней знаменателя $ac + pg + 81a^2p^3 = 0$, существует четыре типа уравнений (3.9) и их первых интегралов (3.10), (3.16):

А Случай трехкратного корня.

$$\begin{aligned} y''_{\rho\rho}\rho^3 - 81a^2y_\rho'^3 - 27ay_\rho'^2\rho - 3\rho^2y'_\rho &= 0, \\ (27a\rho^2 + 162a^2y + C_1)y'_\rho + 2\rho^3 = 0, & \quad 2\rho^2(9ay'_\rho + \rho)^2 C_2 - 2\rho y'_\rho - 9ay_\rho'^2 = 0. \end{aligned}$$

В Случай двукратного и однократного корней.

$$\begin{aligned} y''_{\rho\rho} (1458a^3l_1^3 - 243a^2\rho l_1^2 + \rho^3) - 81a^2y'_\rho{}^3 - 27a\rho y'_\rho{}^2 + (243a^2l_1^2 - 3\rho^2) y'_\rho &= 0, \\ (C_1 + 162a^2y + 27a\rho^2) y'_\rho + 2916a^3l_1^3 - 486a^2\rho l_1^2 + 2\rho^3 &= 0, \\ C_2(9ay'_\rho + \rho - 9al_1)(18al_1 + \rho) &+ \\ &+ (9ay'_\rho + \rho + 18al_1)(9al_1 - \rho)e^{\left(\frac{243a^2l_1y'_\rho}{(\rho-9al_1)(9ay'_\rho+\rho-9al_1)}\right)} = 0. \end{aligned}$$

С Случай трех различных действительных корней.

$$\begin{aligned} y''_{\rho\rho}(9al_2 - \rho)(9al_1 - \rho)(9a(l_1 + l_2) + \rho) - 27ay'_\rho{}^2(3ay'_\rho + \rho) + \\ + (81a^2(l_1^2 + l_1l_2 + l_2^2) - 3\rho^2) y'_\rho &= 0, \\ (C_1 + 162a^2y + 27a\rho^2) y'_\rho + 1458a^3l_1l_2(l_1 + l_2) - 162a^2\rho(l_1^2 + l_1l_2 + l_2^2) + 2\rho^3 &= 0, \\ C_2 = \left(\frac{9al_2 - 9ay'_\rho - \rho}{9al_2 - \rho}\right)^{2l_1+l_2} \left(\frac{\rho - 9al_1}{9al_1 - 9ay'_\rho - \rho}\right)^{2l_2+l_1} \left(\frac{9al_1 + 9al_2 + \rho + 9ay'_\rho}{9al_1 + 9al_2 + \rho}\right)^{l_2-l_1}. \end{aligned}$$

Д Случай одного действительного и двух комплексно сопряженных корней.

$$\begin{aligned} y''_{\rho\rho}(18al_2 - \rho)((9al_2 - \rho)^2 + 81a^2l_3^2) - 27ay'_\rho{}^2(3ay'_\rho + \rho) + \\ + (243a^2l_2^2 - 81a^2l_3^2 - 3\rho^2) y'_\rho &= 0, \\ (C_1 + 162a^2y + 27a\rho^2) y'_\rho + 2961a^3l_2(l_2^2 + l_3^2) + 162a^2\rho(l_3^2 - 3l_2^2) + 2\rho^3 &= 0, \\ C_2 = \frac{(18al_2 + 9ay'_\rho + \rho)^2((9al_2 - \rho)^2 + 81a^2l_3^2)}{(18al_2 + \rho)^2((9a(l_2 - y'_\rho) - \rho)^2 + 81a^2l_3^2)} e^{\frac{6l_2}{l_3} \arctan\left(\frac{81a^2l_3y'_\rho}{81a^2l_3^2 + (9al_2 - \rho)^2 - 9ay'_\rho(9al_2 - \rho)}\right)}. \end{aligned}$$

Выписанные первые интегралы определяют четыре типа касательных преобразований. В работах [7], [8] отмечалась взаимосвязь касательных преобразований и касательных симметрий. Исходя из приведенных касательных преобразований, легко указать соответствующие касательные симметрии

$$X = \Theta'_{y'_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + (y'_\rho \Theta'_{y'_\rho} - \Theta) \frac{\partial}{\partial y} - (\Theta'_\rho + y'_\rho \Theta'_y) \frac{\partial}{\partial y'_\rho}.$$

А. Случай трехкратного корня.

$$\Theta = \frac{\rho^3(9ay'_\rho + \rho)^3}{y'_\rho{}^2};$$

В. Случай двукратного и однократного корней.

$$\Theta = \frac{(9al_1 - \rho)(9al_1 - 9ay'_\rho - \rho)^3(18al_1 + \rho)^2}{y'_\rho{}^2} \exp\left(\frac{243a^2l_1y'_\rho}{(\rho - 9al_1)(9al_1 - 9ay'_\rho - \rho)}\right);$$

С. Случай трех различных действительных корней.

$$\Theta = \frac{(9al_1 + 9al_2 + 9ay'_\rho + \rho)^{l_1-l_2+1}(9al_1 - 9ay'_\rho - \rho)^{2l_2+l_1+1}(9al_2 - \rho)^{2l_1+l_2+1}}{y'_\rho{}^2(9al_1 + 9al_2 + \rho)^{l_1-l_2-1}(9al_1 - \rho)^{2l_2+l_1-1}(9al_2 - 9ay'_\rho - \rho)^{2l_1+l_2-1}};$$

D. Случай одного действительного и двух комплексно сопряженных корней.

$$\Theta = (18al_2 + 9ay'_\rho + \rho)((9al_2 - \rho)^2 + 81a^2l_3^2)(18al_2 + \rho)((9a(l_2 - y'_\rho) - \rho)^2 + 81a^2l_3^2)y'^{-2}_\rho.$$

Согласно работам [7], [8], если обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка допускает двумерную алгебру точечных симметрий, то соответствующее касательное преобразование может быть представлено как суперпозиция точечных преобразований и преобразований Лежандра.

Например дифференциальное уравнение типа А

$$y''_{\rho\rho}\rho^3 - 81a^2y'^3_\rho - 27ay'^2_\rho\rho - 3\rho^2y'_\rho = 0$$

допускает трехмерную алгебру точечных симметрий

$$X_1 = \rho\frac{\partial}{\partial\rho} + 2y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = -18a\rho(\rho^2 + 18ay)\frac{\partial}{\partial\rho} + (\rho^4 - 18^2a^2y^2)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

С таблицей коммутаторов

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	$2X_2$	$-2X_3$
X_2	$-2X_2$	0	$(18a)^2X_1$
X_3	$2X_3$	$-(18a)^2X_1$	0

Воспользовавшись двумерной алгеброй X_1, X_3 , получим представление касательного преобразования

$$T_A : \begin{cases} t = \frac{y'(9ay' + 2x)}{2x^2(9ay' + x)^2}, \\ u = -(27ax^2y' + 162a^2yy' + 2x^3)y'^{-1}, \\ \frac{du}{dt} = 2x^3(9ay' + x)^3y'^{-2}; \end{cases}$$

в виде произведения точечных преобразований

$$T_1 : \quad t = x, \quad u = \frac{y}{x}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{y'x - y}{x^2};$$

$$T_2 : \quad t = 162a^2y, \quad u = 2\frac{(9ax + 1)^2}{18ax + 1}, \quad \frac{du}{dt} = 2x\frac{9ax + 1}{y'(18ax + 1)^2};$$

$$T_3 : \quad t = x^2, \quad u = y, \quad \frac{du}{dt} = \frac{y'}{2x};$$

и преобразования Лежандра

$$T_L : \quad t = y', \quad u = xy' - y, \quad \frac{du}{dt} = x;$$

$$T_A = T_1 \circ T_L \circ T_2 \circ T_L \circ T_3.$$

Дифференциальные уравнения типов В, С, D не допускают двумерных алгебр точечных симметрий и, по-видимому, соответствующие касательные преобразования не могут быть представлены в виде произведений точечных преобразований и преобразования Лежандра.

Идея представления касательных преобразований в виде суперпозиции точечных преобразований и преобразования Лежандра принадлежит Ф. Клейну [9]. В работе [8] показано, что идея Ф. Клейна позволяет получать интегрируемые обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, которые не допускают точечных симметрий. Очевидно, что произведения точечных преобразований и касательных преобразований T_L , T_B , T_C , T_D приводят к дифференциальным уравнениям, динамические симметрии которых не принадлежат рассматриваемому классу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stephani H., *Differential equations: their solution using symmetries*, Cambridge university Press, 1989.
2. Тимошин М. И., “Динамические симметрии ОДУ”, *УМЖ*, **1:3** (2009), 132-138.
3. Lie S., *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Leipzig: B. G. Teubner, 1891.
4. Тимошин М. И., “Двухмерные алгебры динамических симметрий ОДУ”, *УМЖ*, **4:4** (2012), 140-147.
5. Edouard Goursat, *Cours D’analyse mathematique*. V. 2, part 2, Gauthier-Villars, Paris, 1917.
6. Ibragimov N. H., *Transformation groups applied to mathematical physics*, Reidel, Dordrecht, 1985.
7. Timoshin M. I., *Contact symmetries and finite contact transformation*, Repots present at international conference ”Mogran” USATU, Ufa Math.Journal, Ufa, 2001, 140-143.
8. Timoshin M. I., *To the Problem of Contact Symmetries Similarity for Ordinary Differential Equations*, Reports present at 16 international Symposium on Nonlinear Acoustics Moscow State University, **1**, 2002, 611-614.
9. Klein Felix, *Vorlesungen uber Hohere Geometrie*, Verlag Van Julius Springer, Berlin, 1926.

ODE of second order admitting two-dimensional algebras of dynamic symmetries.

© M.I. Timoshin²

Abstract. A generalization of S.Lie’s classification of second order ODEs on two-dimensional algebras of point symmetries is constructed. First integrals for found types second order ODEs are reduced. The possibility of the determination of two-dimensional algebras of dynamic symmetries over number field is considered. Interconnection of dynamic and contact symmetries is demonstrated. On a concrete example it is shown the procedure of the decomposition of a contact transformation into superposition of point transformation and Legendre transformation.

Key Words: dynamic symmetries, contact symmetries, invariants, two-dimensional algebras, first integrals, contact transformations

² Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University; midvolga@mail.ru

УДК 517.95

О разрешимости смешанной задачи для дифференциальных уравнений параболического типа со смешанными максимумами

© Т. К. Юлдашев¹, А. И. Середкина²

Аннотация. В данной работе изучаются вопросы однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка, содержащего смешанные максимумы по времени в нелинейной правой части уравнения.

Ключевые слова: смешанная задача, уравнение высокого порядка, метод разделения переменных, однозначная разрешимость, смешанные максимумы по времени

1. Постановка задачи и сведение её к счетным системам нелинейных интегральных уравнений

В области D рассматривается нелинейное параболическое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - (-1)^m \nu \frac{\partial^{2m+1} u(t, x)}{\partial t \partial x^{2m}} + \frac{\partial^{4m} u(t, x)}{\partial x^{4m}} = \\ & = f\left(t, x, u(t, x), \max\left\{u(\tau, x) \mid \tau \in [\sigma_1(t), \sigma_2(t)]\right\}\right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

с начальными

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x) \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(t, x)|_{x=0} = u_{xx}(t, x)|_{x=0} = \dots = \frac{\partial^{2(2m-1)}}{\partial x^{2(2m-1)}} u(t, x)|_{x=0} = \\ = u(t, x)|_{x=l} = u_{xx}(t, x)|_{x=l} = \dots = \frac{\partial^{2(2m-1)}}{\partial x^{2(2m-1)}} u(t, x)|_{x=l} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $f(t, x, u, \vartheta) \in C(D \times \mathbb{R}^2)$, $\varphi(x) \in C^{4m+1}(D_l)$, $\varphi(x)|_{x=0} = \varphi''(x)|_{x=0} = \dots = \varphi^{4m-2}(x)|_{x=0} = \varphi(x)|_{x=l} = \varphi''(x)|_{x=l} = \dots = \varphi^{4m-2}(x)|_{x=l} = 0$, $\sigma_k = \sigma_k(t) \in C(D_T)$, $k = 1, 2$, $D \equiv D_T \times D_l$, $D_T \equiv [0, T]$, $D_l \equiv [0, l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$, $0 < m$ – натуральное число, $0 < \nu$ – малый параметр, $[\sigma_1; \sigma_2] = [\min\{\sigma_1, \sigma_2\}, \max\{\sigma_1, \sigma_2\}]$.

Отметим, что качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений с максимумами впервые систематически исследовались в работах [1], [2]. А обыкновенные дифференциальные уравнения со смешанными максимумами были рассмотрены в работах [3-6].

¹ Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; tursunbay@gambler.ru

² Магистрант кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; anytik888@yandex.ru

Исследование решений дифференциальных уравнений со смешанными максимумами требует привлечения ряда новых соображений. В [6], в частности, показано, что дифференциальные уравнения со смешанными максимумами имеют специфические особенности в вопросе постановки задач и их разрешимости.

Пусть функции σ_1 и σ_2 пересекаются в двух точках t_1 и t_2 отрезка $D_T : \sigma_1(t_i) = \sigma_2(t_i)$, $i = 1, 2$, $0 < t_1 < t_2 < T$.

Рассмотрим случай $0 \leq \sigma_1(t) < \sigma_2(t) \leq t_1$ на левом отрезке $D_T^1 \equiv [0, t_1]$, $t_1 \leq \sigma_2(t) < \sigma_1(t) \leq t_2$ на среднем отрезке $D_T^2 \equiv [t_1, t_2]$ и $t_2 \leq \sigma_1(t) < \sigma_2(t) \leq T$ на правом отрезке $D_T^3 \equiv [t_2, T]$, $D_T \equiv D_T^1 \cup D_T^2 \cup D_T^3$.

Для однозначной разрешимости смешанной задачи (1.1)-(1.3) не хватает дополнительные условия склеивания в точках t_1 и t_2 . Смешанную задачу (1.1)-(1.3) будем решать с непрерывными условиями склеивания:

$$u(+t_i, x) = u(-t_i, x), i = 1, 2. \quad (1.4)$$

В данной работе используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1.1)-(1.4) в виде ряда Фурье [7]

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(x), \quad (1.5)$$

где $b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 1, 2, \dots$.

Множество $\left\{ a(t) = (a_n(t)) \mid a_n(t) \in C[0, T], n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ введением нормы

$$\|a(t)\|_{B_2(D_T)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} |a_n(t)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

становится банаховым пространством и его обозначают так $B_2(D_T)$.

Для каждого $a(t) \in B_2(T)$ определяется оператор

$$Qa(t) = u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(x).$$

Через $E_2(D)$ обозначается множество значений этого оператора. Очевидно, что $Q: B_2(T) \rightarrow E_2(D)$ и $E_2(D) \subset L_2(D)$.

Нетрудно показать, что коэффициенты разложения $a_n(t)$ удовлетворяют следующим счетным системам нелинейных интегральных уравнений (СНИУ):

$$\begin{aligned} a_n(t) &= A_{1n}(t; a_n(t)) \equiv \omega_n(t) + \\ &+ \frac{1}{\rho_n} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, Qa(s), \max \{Qa(\tau) \mid \tau \in [\sigma_1(s); \sigma_2(s)]\}\right) \times \\ &\times b_n(y) \cdot e^{-\mu_n(t-s)} dy ds, t \in D_T^1, \omega_n(t) = \varphi_n e^{-\mu_n t}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$a_n(t) = A_{2n}(t; a_n(t)) \equiv A_{1n}(t; a_n(t_1)) e^{-\mu_n(t-t_1)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\rho_n} \int_{t_1}^t \int_0^l f\left(s, y, Qa(s), \max \{Qa(\tau) | \tau \in [\sigma_2(s); \sigma_1(s)]\}\right) \times \\
 & \quad \times b_n(y) \cdot e^{-\mu_n(t-s)} dy ds, \quad t \in D_T^2,
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
 & a_n(t) = A_{3n}(t; a_n(t)) \equiv A_{2n}(t; a_n(t_2)) e^{-\mu_n(t-t_2)} + \\
 & + \frac{1}{\rho_n} \int_{t_2}^t \int_0^l f\left(s, y, Qa(s), \max \{Qa(\tau) | \tau \in [\sigma_1(s); \sigma_2(s)]\}\right) \times \\
 & \quad \times b_n(y) \cdot e^{-\mu_n(t-s)} dy ds, \quad t \in D_T^3, \quad \mu_n = \frac{\lambda_n^{4m}}{\rho_n}, \quad \rho_n = 1 + \lambda_n^{2m} \nu.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Действительно, подстановка ряда (1.5) в уравнение (1.1) дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) b_n(x) - (-1)^m \nu \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) b_n^{(2m)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n^{(4m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) b_n(x), \tag{1.9}$$

где $F_n(t) = \int_0^l f\left(t, y, Qa(t), \max \{Qa(\tau) | \tau \in [\sigma_1(t); \sigma_2(t)]\}\right) b_n(y) dy$.

Учитывая, что $(-1)^m b_n^{(2m)}(x) = -\lambda_n^{2m} b_n(x)$, $b_n^{(4m)}(x) = \lambda_n^{4m} b_n(x)$, из соотношения (1.9) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n^{2m} \nu) a'_n(t) b_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{4m} a_n(t) b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) b_n(x). \tag{1.10}$$

Так как функции $b_n(x)$ ортонормированны в $L_2(D_l)$, то из (1.10) следует

$$\begin{aligned}
 & (1 + \lambda_n^{2m} \nu) a'_n(t) + \lambda_n^{4m} a_n(t) = \\
 & = \int_0^l f\left(t, y, Qa(t), \max \{Qa(\tau) | \tau \in [\sigma_1(t); \sigma_2(t)]\}\right) b_n(y) dy.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Решая счетную систему нелинейных дифференциальных уравнений (1.11) при следующих условиях

$$a_n(0) = \varphi_n, \quad a_n(+t_i) = a_n(-t_i), \quad i = 1, 2,$$

где $\varphi_n = \int_0^l \varphi(y) b_n(y) dy$, получаем ССНИУ (1.6) - (1.8).

2. Однозначная разрешимость ССНИУ со смешанными максимумами

Сначала будем изучать однозначную разрешимость ССНИУ (1.6).

Л е м м а 2.1. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\int_0^{t_1} \|f(t, x, Qw(t), Qw(t))\|_{L_2(D_t)} dt \leq \Delta_1 < \infty$;
2. $f(t, x, u, \vartheta) \in Lip\{L_1(t, x)|_{u, \vartheta}\}$, $0 < \int_0^t \|L_1(t, x)\|_{L_2(D_t)} ds < \infty$;
3. $\|\varphi\|_{l_2} < \infty$.

Тогда ССНИУ (1.6) имеет единственное решение в пространстве $B_2(D_T^1)$. Кроме того, имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|a(t) - a^k(t)\|_{B_2(D_T^1)} \leq \\ & \leq \frac{\chi_1}{(k-1)!} \left[\int_0^t \|L(s, x)\|_{L_2(D_t)} ds \right]^{k-1} \exp \left\{ \chi_2 \int_0^t \|L(s, x)\|_{L_2(D_t)} ds \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $L(s, x) = 2L_1(s, x)$, χ_1, χ_2 – некоторые положительные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = w_n(t), \\ a_n^{k+1}(t) = A_{1n}(t; a_n^k(t)), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, t \in D_T^1. \end{cases} \quad (2.2)$$

В силу условий леммы для первой разности $a_n^1(t) - a_n^0(t)$ из (2.2) получим

$$\begin{aligned} \|a^1(t) - a^0(t)\|_{B_2(D_T^1)} & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \int_0^t \int_0^l |f_0| \cdot |b_n(y)| dy ds \leq \\ & \leq M_1 M_2 \int_0^t \int_0^l |f_0| dy ds \leq M_1 M_2 \sqrt{l} \Delta_1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $f_k \equiv f(t, y, Qa^k(t), \max\{Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_1(t); \sigma_2(t)]\})$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$,

$M_1 = \left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{l_2}$, $M_2 = \|b(x)\|_{B_2(l)}$.

Для второй разности $a_n^2(t) - a_n^1(t)$ из (2.2) имеем

$$\|a^2(t) - a^1(t)\|_{B_2(D_T^1)} \leq M_1 M_2 \int_0^t \int_0^l |f_1 - f_0| dy ds.$$

Так как в силу второго условия леммы

$$\begin{aligned} & \left| f\left(t, x, Qa^1(t), \max\{Qa^1(\tau) | \tau \in [\sigma_1; \sigma_2]\}\right) - \right. \\ & \left. - f\left(t, x, Qa^0(t), \max\{Qa^0(\tau) | \tau \in [\sigma_1; \sigma_2]\}\right) \right| \leq L_1(t, x) \left[|Qa^1(t) - Qa^0(t)| + \right. \\ & \left. + \left| \max\{Qa^1(\tau) | \tau \in [\sigma_1; \sigma_2]\} - \max\{Qa^0(\tau) | \tau \in [\sigma_1; \sigma_2]\} \right| \right], \end{aligned}$$

то из последнего неравенства с учетом (2.3) получим следующую оценку

$$\|a^2(t) - a^1(t)\|_{B_2(D_T^1)} \leq M_1 M_2 \int_0^t \int_0^l L(s, y) \sum_{i=1}^{\infty} |a_i^1(s) - a_i^0(s)| \cdot |b_i(y)| dy ds \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^l L(s, y) \|a^1(s) - a^0(s)\|_{B_2(D_T^1)} dy ds \leq \\ &\leq (M_1 \sqrt{l})^2 M_2^3 \Delta_1 \int_0^t \|L(s, x)\|_{L_2(D_l)} ds, \quad t \in D_T^1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $L(t, x) = 2L_1(t, x)$.

Продолжая этот процесс для произвольного натурального числа $k \geq 2$, из (2.4) по индукции получим

$$\|a^{k+1}(t) - a^k(t)\|_{B_2(D_T^1)} \leq (M_1 \sqrt{l})^{k+1} M_2^{2k+1} \Delta_1 \frac{\left[\int_0^t \|L(s, x)\|_{L_2(D_l)} ds \right]^k}{k!}. \tag{2.5}$$

Далее, в силу (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \|a(t) - a^k(t)\|_{B_2(D_T^1)} &\leq M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^l L(s, y) \|a(s) - a^{k-1}(s)\|_{B_2(D_T^1)} dy ds \leq \\ &\leq M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^l L(s, y) \|a(s) - a^k(s)\|_{B_2(D_T^1)} dy ds + \\ &+ M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^l L(s, y) \|a^k(s) - a^{k-1}(s)\|_{B_2(D_T^1)} dy ds \leq \\ &\leq (M_1 \sqrt{l})^k M_2^{2k} \Delta_1 \frac{\left[\int_0^t \|L(s, x)\|_{L_2(D_l)} ds \right]^{k-1}}{(k-1)!} + \\ &+ M_1 M_2^2 \sqrt{l} \int_0^t \|L(s, x)\|_{L_2(D_l)} \|a(s) - a^k(s)\|_{B_2(D_T^1)} ds. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Применяя к (2.6) неравенство типа Гронуолла-Беллмана, получим (2.1).

Существование решения ССНИУ (1.6) следует из оценки (2.5), так как при $k \rightarrow \infty$ последовательность функций $\{a^k(t)\}$ сходится равномерно по t к функции $a(t) \in B_2(D_T^1)$. Покажем единственность этого решения в пространстве $B_2(D_T^1)$. Пусть ССНИУ (1.6) имеет два решения: $a(t) \in B_2(D_T^1)$ и $\vartheta(t) \in B_2(D_T^1)$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\|a(t) - \vartheta(t)\|_{B_2(D_T^1)} \leq M_1 M_2^2 \sqrt{l} \int_0^t \|L(s, x)\|_{L_2(D_l)} \|a(s) - \vartheta(s)\|_{B_2(D_T^1)} ds. \tag{2.7}$$

Применение к (2.7) неравенства Гронуолла-Беллмана, дает, что $\|a(t) - \vartheta(t)\|_{B_2(D_T^1)} \equiv 0$ для всех $t \in D_T^1$. Отсюда следует единственность решения ССНИУ (1.6) в пространстве $B_2(D_T^1)$.

Доказательство закончено.

Изучим однозначную разрешимость ССНИУ (1.7).

Л е м м а 2.2. Пусть выполняются условия леммы 2.1. и

1. $\int_{t_1}^{t_2} \|f(t, x, u, \vartheta)\|_{L_2(D_t)} dt \leq \Delta_2 < \infty$;
2. $f(t, x, u, \vartheta) \in Lip\{L_2(t, x)|_{u, \vartheta}\}$, $0 < \int_{t_1}^t \|L_2(t, x)\|_{L_2(D_t)} ds < \infty$;
3. $q_1 < 1$, $q_1 = M_1 M_2^2 \sqrt{l} \left(\int_0^{t_1} \|L(s, x)\|_{L_2(D_t)} ds + \int_{t_1}^{t_2} \|\bar{L}(s, x)\|_{L_2(D_t)} ds \right)$,

$$L(t, x) = 2L_1(t, x), \quad \bar{L}(t, x) = 2L_2(t, x).$$

Тогда ССНИУ (1.7) имеет единственное решение в пространстве $B_2(D_T^2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений. Итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = w_n(t), t \in D_T^2 \\ a_n^{k+1}(t) = A_{2n}(t; a_n^k(t)), k = 0, 1, 2, 3, \dots, t \in D_T^2. \end{cases} \quad (2.8)$$

В силу условий леммы для первой разности $a_n^1(t) - a_n^0(t)$ из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \|a^1(t) - a^0(t)\|_{B_2(D_T^2)} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \int_0^{t_1} \int_0^l |f_{01}| \cdot |b_n(y)| dy ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l |f_{02}| \cdot |b_n(y)| dy ds \leq \\ &\leq M_1 M_2 \left(\int_0^{t_1} \int_0^l |f_{01}| dy ds + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l |f_{02}| dy ds \right) \leq M_1 M_2 \sqrt{l} (\Delta_1 + \Delta_2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $f_{k1} \equiv f(t, y, Qa^k(t), \max\{Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_1(t); \sigma_2(t)]\})$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$,

$f_{k2} \equiv f(t, y, Qa^k(t), \max\{Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_2(t); \sigma_1(t)]\})$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Для разности $a_n^{k+1}(t) - a_n^k(t)$ имеем

$$\|a^{k+1}(t) - a^k(t)\|_{B_2(D_T^2)} \leq M_1 M_2 \left(\int_0^{t_1} \int_0^l |f_{k1} - f_{(k-1)1}| dy ds + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l |f_{k2} - f_{(k-1)2}| dy ds \right).$$

Так как в силу второго условия леммы

$$\begin{aligned} &\left| f\left(t, x, Qa^k(t), \max\{Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_2; \sigma_1]\}\right) - \right. \\ &\left. - f\left(t, x, Qa^{k-1}(t), \max\{Qa^{k-1}(\tau) | \tau \in [\sigma_2; \sigma_1]\}\right) \right| \leq L_2(t, x) \left[|Qa^k(t) - Qa^{k-1}(t)| + \right. \\ &\left. + \left| \max\{Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_2; \sigma_1]\} - \max\{Qa^{k-1}(\tau) | \tau \in [\sigma_2; \sigma_1]\} \right| \right], \end{aligned}$$

то из последнего неравенства получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \|a^{k+1}(t) - a^k(t)\|_{B_2(D_T^2)} &\leq M_1 M_2 \left[\int_0^{t_1} \int_0^l L(s, y) \sum_{i=1}^{\infty} |a_i^k(s) - a_i^{k-1}(s)| \cdot |b_i(y)| dy ds + \right. \\ &\left. + \int_{t_1}^t \int_0^l \bar{L}(s, y) \sum_{i=1}^{\infty} |a_i^k(s) - a_i^{k-1}(s)| \cdot |b_i(y)| dy ds \right] \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq M_1 M_2^2 \sqrt{l} \left\{ \int_0^{t_1} \left\| L(s, x) \right\|_{L_2(D_i)} \left\| a^k(s) - a^{k-1}(s) \right\|_{B_2(D_T^1)} ds + \right. \\ &+ \left. \int_{t_1}^t \left\| \bar{L}(s, x) \right\|_{L_2(D_i)} \left\| a^k(s) - a^{k-1}(s) \right\|_{B_2(D_T^2)} ds \right\} \leq q_1 \left\| a^k(t) - a^{k-1}(t) \right\|_{B_2(D_T^2)}, \quad t \in D_T^2. \quad (2.10) \end{aligned}$$

В силу последнего условия леммы из оценок (2.9) и (2.10) следует, что оператор в правой части (2.8) является сжимающим. Следовательно, ССНИУ (1.7) имеет единственное решение в пространстве $B_2(D_T^2)$.

Доказательство закончено.

Изучим однозначную разрешимость ССНИУ (1.8).

Л е м м а 2.3. Пусть выполняются условия леммы 2.2. и

1. $\int_{t_2}^T \|f(t, x, u, \vartheta)\|_{L_2(D_i)} dt \leq \Delta_3 < \infty$;
2. $f(t, x, u, \vartheta) \in Lip\{L_3(t, x)|_{u, \vartheta}\}$, $0 < \int_{t_2}^t \|L_3(t, x)\|_{L_2(D_i)} ds < \infty$;
3. $q_2 < 1$, $q_2 = q_1 + M_1 M_2^2 \sqrt{l} \int_{t_2}^T \|\bar{L}(s, x)\|_{L_2(D_i)} ds$, $\bar{L}(t, x) = 2L_3(t, x)$.

Тогда ССНИУ (1.8) имеет единственное решение в пространстве $B_2(D_T^3)$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. Итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = w_n(t), \quad t \in D_T^3 \\ a_n^{k+1}(t) = A_{3n}(t; a_n^k(t)), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad t \in D_T^3. \end{cases} \quad (2.11)$$

В силу условий леммы в пространстве $B_2(D_T^3)$ для первой разности $a_n^1(t) - a_n^0(t)$ из (2.11) имеем

$$\begin{aligned} \|a^1(t) - a^0(t)\|_{B_2(D_T^3)} &\leq M_1 M_2 \left(\int_0^{t_1} \int_0^l |f_{01}| dy ds + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l |f_{02}| dy ds \right) + \\ &+ M_1 M_2 \int_{t_2}^t \int_0^l |f_{03}| dy ds \leq M_1 M_2 \sqrt{l} (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $f_{k3} \equiv f(t, y, Qa^k(t), \max\{Qa^k(\tau) | \tau \in [\sigma_1(t); \sigma_2(t)]\})$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Для произвольной разности $a_n^{k+1}(t) - a_n^k(t)$ в пространстве $B_2(D_T^3)$ имеем

$$\begin{aligned} \|a^{k+1}(t) - a^k(t)\|_{B_2(D_T^3)} &\leq \left\| A_{2n}(t; a_n^k(t_2)) - A_{2n}(t; a_n^{k-1}(t_2)) \right\|_{B_2(D_T^3)} + \\ &+ M_1 M_2 \int_{t_2}^t \int_0^l |f_{k3} - f_{(k-1)3}| dy ds \leq \\ &\leq q_1 + M_1 M_2^2 \sqrt{l} \int_{t_2}^t \left\| \bar{L}(s, x) \right\|_{L_2(D_i)} \left\| a^k(s) - a^{k-1}(s) \right\|_{B_2(D_T^3)} ds \leq \end{aligned}$$

$$\leq q_2 \|a^k(t) - a^{k-1}(t)\|_{B_2(D_T^3)}, t \in D_T^3. \quad (2.13)$$

В силу последнего условия леммы из оценок (2.12) и (2.13) следует, что оператор в правой части (2.11) является сжимающим. Следовательно, ССНИУ (1.8) имеет единственное решение в пространстве $B_2(D_T^3)$.

Доказательство закончено.

Из доказанных трех лемм следует, что справедлива следующая

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия леммы 2.3. Тогда счетная система нелинейных дифференциальных уравнений (1.11) при условиях

$$a_n(0) = \varphi_n, a_n(+t_i) = a_n(-t_i), i = 1, 2$$

имеет единственное непрерывное решение, которое на отрезке представимо в виде

$$a_n(t) = \begin{cases} A_{1n}(t; a_n(t)), & t \in D_T^1; \\ A_{2n}(t; a_n(t)), & t \in D_T^2; \\ A_{3n}(t; a_n(t)), & t \in D_T^3. \end{cases} \quad (2.14)$$

3. Однозначная разрешимость смешанной задачи (1.1)- (1.4)

Подставляя ССНИУ (2.14) в ряд (1.5), получим формальное решение смешанной задачи (1.1)- (1.4).

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия теоремы 2.1. Если $a(t) \in B_2(D_T)$ является решением ССНИУ (2.14), то ряд (1.5) является решением смешанной задачи (1.1)- (1.4).

Доказательство. Пусть $a(t) \in B_2(D_T)$ решение ССНИУ (2.14). Мы покажем, что в области D справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^k(t, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k(t) b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(x) = u(t, x) \in E_2(D),$$

где $a_n(t)$ определяется из (2.14), $b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 1, 2, \dots$.

Действительно, в силу условий теоремы получим

$$\begin{aligned} |u(t, x) - u^k(t, x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t) - a_n^k(t)| \cdot |b_n(x)| \leq \\ &\leq \|a(t) - a^k(t)\|_{B_2(D_T)} \cdot \|b_n(x)\|_{B_2(l)} < \frac{\varepsilon}{M_2} \cdot M_2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петухов В. Р., “Вопросы качественного исследования решений уравнений с максимумами”, *Известия вузов. Математика*, 1964, № 3, 116–119.
2. Магомедов А. Р., *Обыкновенные дифференциальные уравнения с максимумами*, Элм, Баку, 1991, 220 с.
3. Юлдашев Т. К., “Функционально-дифференциальные уравнения с односточными смещениями максимума”, *Труды средневолжского мат. общества*, **8:1** (2006), 377–383.
4. Юлдашев Т. К., “Краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений с односточными нелинейными интегральными смешанными максимумами”, *Сб. научн. трудов: «Прикладная математика и механика»*, 2007, 279–285.
5. Юлдашев Т. К., “Краевая задача с нелинейными трехточечными смешанными максимумами”, *Вестник СибГАУ*, 2007, № 2, 22–24.
6. Юлдашев Т. К., “Предельная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с двухточечными смешанными максимумами”, *Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки»*, **16:1** (2008), 15–22.
7. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журнал средневолжского мат. общества*, **14:2** (2012), 137–142.

On solvability of mixed value problem for differential equations of parabolic type with mixed maxima

© Т. К. Yuldashev³, А. I. Seredkina⁴

Abstract. In this article it is studied the questions of single-valued solvability of mixed value problem for nonlinear partial differential equation of higher order, consisting mixed time maxima in nonlinear right-hand side.

Key Words: mixed value problem, partial equation of higher order, method of separation variable, single-valued solvability, mixed time maxima

³ Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk; tursunbay@rambler.ru

⁴ Graduate Student of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk; anytik888@yandex.ru

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

Схема использования нейронных сетей при управлении процессом воздействия излучения на структуру полупроводниковых материалов.© О. Е. Каледин¹ Н. К. Сорокина² Л. А. Сухарев³

Аннотация. В работе алгоритм применения нейронных сетей для анализа структуры кремния при лазерном облучении.

Ключевые слова: монокристалл кремния, нейронные сети, статистические данные

Воздействие лазерного излучения на структуру различных монокристаллов кремния изучалось в работах [1] [2], где подробно описана физическая картина изменения структуры этого полупроводникового материала. Было установлено, что при воздействии лазерного излучения определенной мощности на монокристаллический кремний при различных режимах излучения имеет место «залечивание» кристаллической решетки. В связи этим представляет большой практический интерес исследование полупроводниковых материалов на предмет образования новых нано-, микро- и макроструктур с новыми уникальными свойствами.

Разнообразие типов современных квантовых генераторов позволяет выбирать в широком диапазоне такие характеристики, как длина волны, длительность светового импульса, энергия и мощность. На основе этого возможно достаточно свободно варьировать параметры воздействия излучения, добиваясь желаемых результатов. Решение данной проблемы в значительной мере будет зависеть от разработки методологии математического моделирования данного физического процесса и применения его в управлении технологией получения структуры кремния с заданными параметрами.

Задача математического моделирования структуры полупроводникового кремния решалась и ранее, например, в работе [3]. В основе модели лежит бесконечная система дифференциальных уравнений. Однако описание структуры через дифференциальные уравнения не дает количественного ответа на вопрос о параметрах лазерного воздействия на монокристалл кремния, которое необходимо применить для восстановления структуры кристалла.

На сегодняшний день создана база статистических данных лазерного облучения различных монокристаллов кремния [4]. Статистические данные представляют собой значения интегральных интенсивностей поверхности кристалла до и после лазерного облучения при известных параметрах облучения: мощности, значениях расстояний до поверхности кристалла, времени воздействия лазерного облучения, тип лазера. Поэтому в первом приближении задача может быть сформулирована следующим образом.

¹ доцент кафедры алгебры и геометрии, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kaledinoe@mrsu.ru.

² профессор кафедры общей физики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск.

³ доцент кафедры алгебры и геометрии, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; suharev_la@mail.ru.

Необходимо построить математическую модель таким образом, чтобы по имеющимся данным значениям интегральных интенсивностей кристалла кремния до облучения и желаемым данным значениям интегральных интенсивностей этого кристалла после облучения, можно было определить параметры лазерного облучения.

Предлагается решать поставленную задачу с помощью аппарата нейронных сетей, адаптировав исходные данные для реализации алгоритма задачи распознавания образов [5]. Для этого данные по каждому типу кристалла до лазерного облучения и после него будем считать параметрами, характеризующими тип лазера. Основная проблема здесь представляется в выборе «эталонных изображений» лазерного воздействия. Имея данные: 2 типа лазера, 2-4 значения мощности, 2-3 значения расстояния и по 2-3 значения времени воздействия на пластины кремния разного рода, необходимо выделить не более 36 различных «эталонных изображений» лазерного воздействия. По каждому типу лазера, при фиксированном значении мощности, фиксированных расстоянии и времени воздействия имеется 10-20 наборов данных пластинок кристаллов кремния до и после облучения – это данные для обучения нейронной сети.

Обучив нейронную сеть, можно будет на входе нейронной сети задать предполагаемые параметры монокристалла кремния до и после облучения лазером, а на выходе получить искомым распознанный образ в виде значений параметров, характеризующих лазерное облучение необходимое для достижения входных параметров монокристалла кремния. Здесь необходимо отметить проблему «близости образов», характеризующих различные лазерные облучения. Универсальность изложенного подхода видится в возможности его применения для изучения структуры других полупроводниковых материалов при воздействии излучений на них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сорокина Н.К., “Динамика развития поверхностных структур в полупроводниковом кремнии при облучении лазерным излучением”, *Материалы Международной научно-технической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы физики»*, 2009, 161–166, 336 с.
2. Сорокина Н.К., “Использование лазерного излучения для изменения структуры полупроводникового кремния”, *Материалы Международной научно-технической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы физики»*, 2012, 104–108.
3. Сорокина Н.К., Золина Т.В., “Математическое моделирование динамических процессов в кристаллах кремния после лазерного облучения”, *Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н.*, 2007.
4. Каледин О.Е., СТУДЕНТЫ, Сухарев Л.А., “Создание электронной базы данных экспериментов по совершенствованию структуры кристаллов кремния.”, *Печ. Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем: сборник статей VI Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов.*, 2012, 130 – 133.
5. Ферцев А.А., *Вопросы атомной науки и техники: серия «Математическое моделирование физических процессов»*, **1** (2012), 66–74.

Scheme using neural networks for process control exposure to radiation on the structure of semiconductor materials.

© O. E. Kaledin⁴ N. K. Sorokina⁵ L. A. Suharev⁶

Abstract. In this paper, an algorithm for applying neural networks to analyze the structure of silicon by laser irradiation.

Key Words: single crystal silicon, neural networks, statistical data

⁴ docent department of algebra and geometry, Professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kaledinoe@mrsu.ru.

⁵ professor department of general physics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk

⁶ docent department of algebra and geometry, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; suharev_la@mail.ru.

УДК 517.929

Устойчивость по Лагранжу

© С. В. Зубов¹

Аннотация. Основной задачей математической теории автоматического регулирования является установление условий устойчивости по Лагранжу и конструирование систем, при которых траектории системы остаются в заданном множестве.

Ключевые слова: радиус-вектор, траектория, уравнение, координата, окружность, функция

Диссипативность или ограниченность решений совокупных уравнений управляемых систем является самым распространенным требованием, предъявляемым к ним. Изучение ограниченности решений системы совокупных уравнений можно осуществлять несколькими путями. К первому пути относится использование второго метода Ляпунова. Ко второму - изучение устойчивости бесконечно удаленной точки вместо положения равновесия возмущенной системы путем соответствующего преобразования системы.

Вопросами ограниченности решений занимались многие математики, среди которых Йошизава, Рейссиг, Массера и др. [1] Теорема Т. Йошизава дает необходимые и достаточные условия устойчивости по Лагранжу.

Т е о р е м а 1.2. *Для того чтобы система*

$$\dot{X} = F(t, X) \quad (1.1)$$

была устойчива по Лагранжу, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $V(t, X)$ такая, что:

1) $V(t, x) \geq W(X)$, где $W(X) \rightarrow \infty$ при $\|X\| \rightarrow \infty$; *Structure minimization of system observation*

2) $V(t, X)$ является невозрастающей функцией на решениях (1.1).

Для достаточно условие 2) может быть заменено следующим: производная функции $V(t, X)$ в силу системы (1.1) неположительна.

Требования этой теоремы могут быть ослаблены, а именно.

Т е о р е м а 3.3. *Для того чтобы система (1.1) была устойчива по Лагранжу, достаточно, чтобы существовала функция $V(t, X)$ такая, что:*

1) $V(t, x) \geq W(X)$, где $W(X) \rightarrow \infty$ при $\|X\| \rightarrow \infty$;

2) *производная функции $V(t, X)$ в силу системы (1.1) положительна лишь на компактном, не обязательно связном множестве M .*

Поскольку одной из целей книги является рассмотрение систем с простой структурой, важным следствием этой теоремы будет следующее утверждение. Пусть квадратичные знакопеременные функции [2]

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_i, \\ W &= \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i x_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

обладают следующими свойствами: $a_i > 0$, $c_i < 0$ ($i = 1, \dots, n$). Пусть на решениях системы

¹ доцент, СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

$$\dot{X} = F(X) \quad (3.3)$$

выполнено соотношение $\dot{X} = W$ [3].

Т е о р е м а 3.4. *Все решения системы (3.3) ограничены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим функцию

$$V_1 = \sum_{i=1}^n a_i \left(x_i + \frac{b_i}{2a_i}\right)^2 = V + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{4a_i},$$

отличающуюся от функции V на положительную константу. Из этого следует, что

$$\dot{V}_1 = \dot{V}.$$

Функция W представима в следующем виде:

$$W = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i + \frac{d_i}{2c_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{2c_i}.$$

Обозначим

$$W_1 = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i + \frac{d_i}{2c_i}\right)^2, \quad C = - \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{4c_i}.$$

Видно, что $W_1 \geq 0$, $C \geq 0$.

Имеем по условию

$$\dot{V}_1 = W_1 + C, \quad (3.4)$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Из доказанной теоремы следует следующая теорема [4].

Т е о р е м а 3.5. *При выполнении условий теоремы 3.4. система (1.1) имеет аттрактор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в силу 3.4 существует эллипсоид $V_1 = R$, удовлетворяющий условиям теоремы 3.5. Все траектории, начинающиеся вне него, попадают в его внутреннюю часть, пересекая поверхность. Этот эллипсоид включает в себя эллипсоид

$$W_1 = C,$$

что и является определением положительной константы R .

Как мы увидим далее, формы (3.2) характеризуют аттрактор Лоренца, а также дают инструмент построения систем с простой структурой, имеющих компактные глобально устойчивые инвариантные множества. Подобные системы и содержат автоколебания.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В. Зубов, С.В. Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, ВВМ, СПб., 2011, 323 с.
2. А.В. Зубов, Н.В. Зубов, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2009, 172 с.
3. А.В. Зубов, О.А. Шабурова, *Управление динамическими системами*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2005, 83 с.
4. С.В. Зубов, М.В. Стрекопытова, *Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость*, СПбГУ, СПб., 2010, 446 с.

The stability on Lagrangh

© S. V. Zubov²

Abstract. The basis task of mathematical theory automatic regulation is appears establishment the conditions of stability on Lagrange and construction of systems, by those trajectories of systems is remains in giving multitude.

Key Words: radius-vector, trajectory, equation, coordinate, circle, function

² Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК 517.929

Задача построения систем дифференциальных уравнений

© А. В. Зубов¹, К. А. Пешехонов², С. А. Стрекопытов³, М. В. Стрекопытова⁴

Аннотация. Решена задача построения таких систем дифференциальных уравнений, для которых задаваемое предельное множество в виде замкнутой гладкой компактной поверхности будет интегральным и асимптотически устойчивым по Ляпунову инвариантным множеством.

Ключевые слова: независимая переменная, множество, стационарный интеграл, скалярная функция

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x + z + xz, \\ \dot{z} &= xy. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Эта система имеет семейство интегралов $z = x^2/2 + C$, где $C = const$. В связи с этим систему (1.1) можно привести к одному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} = C + (1 + C)x + x^2/2 + x^3/2. \quad (1.2)$$

Умножим обе части (1.2) на \dot{x} и проинтегрируем в пределах от 0 до t . Получим

$$\dot{x}^2/2 = C_1 + Cx + (1 + C)x^2/2 + x^3/6 + x^4/8 \quad (C_1 = const). \quad (1.3)$$

Извлечем квадратный корень и проинтегрируем снова; получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C_1 + 2Cx + (1 + C)x^2 + x^3/3 + x^4/4}} = t + C_2 \quad (C_2 = const). \quad (1.4)$$

Интеграл, стоящий в левой части (1.4), является гиперэллиптическим [1]. Гиперэллиптические функции, появляющиеся при обращении этого интеграла, когда мы хотим явно выписать решение $x(t)$ системы (1.1), характеризуются наличием нескольких периодов, которые зависят от начальных данных.

Рассмотрим еще одну систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= xz + a, \\ \dot{z} &= 4xy + 1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Эта система имеет семейство интегралов $z = 2x^2 + t + C$, что позволяет привести (1.5) к одному уравнению второго порядка $\ddot{x} = 2x^3 + (t + C)x + a$. С помощью подстановки $x = \lambda\eta(\xi)$, $\xi = \mu(t + C)$ это уравнение приводится к нормальному виду Пенлеве [2]

$$\eta'' = 2\eta^3 + \xi\eta + \alpha. \quad (1.6)$$

¹ доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

² к.ф.-м.н., доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

³ доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

⁴ доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Пенлеве показал, что решения уравнения (1.6) описываются принципиально новыми трансцендентными функциями, которые не сводятся к ранее изученным функциям и которые стали называть трансцендентными функциями Пенлеве [1].

Ученик Пенлеве Ж. Шази (1882-1955) изучал, в частности, уравнение $y'' = 2yy'' - 3y'^2$, к которому приводится квадратичная система $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$, $\dot{z} = 2xz - 3y^2$. Шази установил, что интеграл столь простого по виду уравнения имеет весьма сложные особенности и связан с интегралами гипергеометрического уравнения и функциями Шварца.

Приведенные примеры показывают, что решения систем дифференциальных уравнений простой структуры могут иметь чрезвычайно сложную аналитическую природу. «Простота» структуры дифференциальных уравнений обманчива. Известные примеры квадратичных систем, описывающих системы со странными аттракторами, также указывают на это.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, z), \\ \dot{y} &= g(x, y, z), \\ \dot{z} &= h(x, y, z).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Предположим, что у системы (1.7) существует стационарный интеграл

$$v(x, y, z) = c.\tag{1.8}$$

По нашему предположению имеем $\nabla v = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2$, где μ_1, μ_2 - скалярные функции независимых переменных x, y, z .

Если функция v представима в виде $v = v_1 + v_2$, так что выполнено соотношение $\nabla v = \nabla v_1 + \nabla v_2$, а векторы $\nabla v_1, \nabla v_2$ коллинеарны соответственно векторам g_1, g_2 , то справедливы последующие рассуждения. По нашему предположению функция (1.8) существует, следовательно, хотя бы при одном $i = 1, 2$ имеет нетривиальное решение система уравнений

$$\nabla v_i = \mu g_i,\tag{1.9}$$

где $\mu = \mu(x, y, z)$ - некоторая скалярная функция. Выпишем условия интегрируемости уравнений (1.9) в матрично-векторной форме для $i = 1$:

$$A_1 \nabla \mu = \mu F_1.\tag{1.10}$$

Заметим, что матрица A_1 , в силу своей структуры, является вырожденной при любых f, g, h . Отсюда следует, что нетривиальное решение уравнений (1.10) возможно лишь тогда, когда вектор F лежит в подпространстве, натянутом на столбцы матрицы A :

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A, F).$$

Нетривиальным решением для нас будет также ситуация, когда $F_1 = 0$, при этом получается $\mu(x, y, z) = \text{const}$. При $i = 2$ получаем следующие значения для матрицы A и вектора F :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -h(g-h) + f(f-g) & g(f-g) - h(h-f) & 0 \\ -f(h-f) + g(g-h) & 0 & g(f-g) - h(h-f) \\ 0 & -f(h-f) + g(g-h) & h(g-h) - f(f-g) \end{pmatrix}.$$

Матрица A_2 также вырожденная, и решение возможно тоже не всегда.

Таким образом, в вырожденных случаях система дифференциальных уравнений для функций μ_1, μ_2 выглядит следующим образом:

$$A_1 \nabla \mu_1 + A_2 \nabla \mu_2 = \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2. \quad (1.11)$$

Это - система трех дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций. Для ее исследования заметим сначала, что, поскольку матрицы A_1, A_2 вырожденные, уравнения (1.11) не могут быть разрешены относительно всех трех производных $\mu_{1x}, \mu_{1y}, \mu_{1z}$ или $\mu_{2x}, \mu_{2y}, \mu_{2z}$, но в общем случае система (1.11) может быть разрешена относительно двух производных, например по x, y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} &= a(x, y, z) \mu_1 + A(x, y, z, \mu_2, \mu_{2x}, \mu_{2y}, \mu_{2z}), \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial y} &= b(x, y, z) \mu_1 + B(x, y, z, \mu_2, \mu_{2x}, \mu_{2y}, \mu_{2z}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь A, B - линейные функции по $\mu_2, \mu_{2x}, \mu_{2y}, \mu_{2z}$. Дифференцируя первое уравнение по y , а второе по x , получаем $(a_y - b_x) \mu_1 = L[\mu_2]$, где $L[\mu_2] = -(aB - bA + \frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dy})$ - дифференциальный оператор второго порядка. Р. Курант [3] показал, что в аналитическом случае условие

$$a_y = b_x \quad (1.13)$$

является необходимым и достаточным для разрешимости системы.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1.6. *Необходимым условием существования стационарного интеграла для системы (1.11) является выполнение условий (1.13).*

В самом общем случае, приведем систему (1.10) к следующему виду: члены, содержащие величины $\mu_2, \mu_{2x}, \mu_{2y}, \mu_{2z}$, перенесем в правую часть, содержащие величины $\mu_1, \mu_{1x}, \mu_{1y}, \mu_{1z}$ - в левую [5]. Введем новые неизвестные величины $\alpha_1(x, y, z), \alpha_2(x, y, z), \alpha_3(x, y, z)$. Получим соотношения

$$\begin{aligned} A_1[1, 1] \mu_{1x} + A_1[1, 2] \mu_{1y} + F_1[1] \mu_1 &= \alpha_1, \\ A_1[2, 1] \mu_{1x} + A_1[2, 3] \mu_{1z} + F_1[2] \mu_1 &= \alpha_2, \\ A_1[3, 2] \mu_{1y} + A_1[3, 3] \mu_{1z} + F_1[3] \mu_1 &= \alpha_3, \\ A_2[1, 1] \mu_{2x} + A_2[1, 2] \mu_{2y} + F_2[1] \mu_2 &= \alpha_1, \\ A_2[2, 1] \mu_{2x} + A_2[2, 3] \mu_{2z} + F_2[2] \mu_2 &= \alpha_2, \\ A_2[3, 2] \mu_{2y} + A_1[3, 3] \mu_{2z} + F_1[3] \mu_2 &= \alpha_3. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Мы получили две группы уравнений, первую из которых - для неизвестной функции μ_1 , вторую - от μ_2 .

В теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка такие уравнения называются общими линейными [2] или линейными неоднородными [4].

Не ограничивая общности, рассмотрим первые три уравнения (1.14).

$$\begin{aligned} X_1(\mu_1) &= A_1[1, 1] \mu_{1x} + A_1[1, 2] \mu_{1y} + F_1[1] \mu_1 - \alpha_1 = 0, \\ X_2(\mu_1) &= A_1[2, 1] \mu_{1x} + A_1[2, 3] \mu_{1z} + F_1[2] \mu_1 - \alpha_2 = 0, \\ X_3(\mu_1) &= A_1[3, 2] \mu_{1y} + A_1[3, 3] \mu_{1z} + F_1[3] \mu_1 - \alpha_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Введем обозначения

$$\bar{X}_1(\mu_1) = A_1[1, 1] \mu_{1x} + A_1[1, 2] \mu_{1y},$$

$$\bar{X}_2(\mu_1) = A_1[2, 1]\mu_{1x} + A_1[2, 3]\mu_{1x},$$

$$\bar{X}_3(\mu_1) = A_1[3, 2]\mu_{1y} + A_1[3, 3]\mu_{1x}.$$

Поскольку матрица A_1 вырожденная, из системы (1.15) невозможно найти величины μ_{1x} , μ_{1y} , μ_{1z} . Приведем систему (1.15) к замкнутой форме. В общем случае можно взять два линейно независимых по μ_{1x} , μ_{1y} , μ_{1z} уравнения, например X_1 , X_2 и составить скобку Якоби:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] = & A_1[1, 1]\left(\frac{\partial X_2}{\partial x} + \mu_{1x}F_1[2]\right) - A_1[2, 1]\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \mu_{1x}F_1[1]\right) + \\ & + A_1[1, 2]\left(\frac{\partial X_2}{\partial y} + \mu_{1y}F_1[2]\right) - A_1[2, 3]\left(\frac{\partial X_1}{\partial z} + \mu_{1z}F_1[2]\right). \end{aligned}$$

Известно [2, 4], что $[X_1, X_2] = \bar{X}_1(X_2(\mu_1)) - \bar{X}_2(X_1(\mu_1))$. Может оказаться так, что получившееся уравнение линейно независимо с уравнениями X_1 , X_2 , тогда получившуюся систему можно разрешить относительно μ_1 .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, ГИТТЛ, М., 1950.
2. Э. Камке, *Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных*, Наука, М., 1966.
3. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.
4. Н. М. Гюнтер, *Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных*, ОНТИ, Л., 1934.
5. А. В. Зубов, И. В. Зубов, М. В. Стрекопытова, *Анализ систем управления и равновесных движений*, Мобильность-плюс, СПб., 2011, 347 с.

The task of building systems differential equations

© A.V. Zubov⁵, K.A. Peshechonov⁶, S.A. Strecopitov⁷, M. V. Strecopitova⁸

Abstract. In giving article is solves the task of building that systems of differential equations, for that set limiting multitude in case exclusive smooth compact surface will be integral and asymptotic stability, and stability on Lapunov's invariant multitude.

Key Words: independent variable, multitude, stationary integral, scalarity function

⁵ docent SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁶ post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁷ lecturer SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁸ docent SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК УДК 517.929

Анализ систем с неограниченными решениями

© И. В. Зубов¹, С. В. Зубов²

Аннотация. В данной статье изучаются теоретические основы исследования движений систем, не имеющих предельных точек. Открывается новая область исследования - уходящие движения. Изучаются неограниченные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены условия устойчивости неограниченных решений и оценки на скорость приближения траекторий возмущенного движения к траектории невозмущенного.

Ключевые слова: равновесное решение, координата, матрица, асимптотическая устойчивость, положение равновесия

При решении обратной задачи динамики, характерной для задач управления, заключающейся в том, чтобы по заданным или желаемым кинематическим характеристикам движения построить систему дифференциальных уравнений динамики, методы А.М. Ляпунова имеют уже более практическое применение, так как при построении уравнений динамики учитывается требование устойчивости желаемых кинематических характеристик и уравнения возмущенного движения строятся легко.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = PX + Q + \mu F(X). \quad (1.1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)^*$ - вектор фазовых переменных, P, Q - постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно, $F = (f_1, \dots, f_n)^*$ - векторная функция, μ - малый параметр.

Равновесным решением (движением) мы будем называть такое решение (движение)

$$X(t, X_0) = (x_1(t, X_0), \dots, x_n(t, X_0))^*$$

в n -мерном пространстве, у которого одна из координат неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$, а остальные постоянны, например,

$$x_j(t, X_0) \equiv x_j^0, j = 1, \dots, n-1; x_n \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Поставим вопрос о существовании равновесного решения системы (1.1) и о поведении решений этой системы уравнений, начинающихся в некоторой окрестности равновесного решения.

Пусть выполнены условия: собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы P таковы, что $\lambda_n = 0$, $Re \lambda_j < 0$ для $j = 1, \dots, n-1$, $F(\bar{X})$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица [1].

Сделаем замену $X = SY$, где S - вырожденная матрица размерности $n \times n$, и подставим это выражение в (1.1):

$$\dot{Y} = S^{-1}PSY + S^{-1}Q + \mu S^{-1}F(SY). \quad (1.2)$$

¹ профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

² доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Отметим, что $x_i = (S_i^*, Y)$, где S_i — i -я строка матрицы S . Матрица S выбирается так, чтобы матрица $A = S^{-1}PS$ имела последнюю строку и последний столбец нулевыми. Существование такой матрицы очевидно. Например, в качестве S можно взять хотя бы матрицу, составленную из корневых векторов матрицы P ; в этом случае матрица A будет жордановой.

Перепишем систему (1.2) в виде

$$\dot{Y} = AY + R + \mu\Phi(Y), \tag{1.3}$$

где $R = S^{-1}Q = (y_1, \dots, y_n)^*$,

$$\Phi(Y) = S^{-1}F(SY) = (\varphi_1(Y), \dots, \varphi_n(Y))^*.$$

Разделим систему (1.3) на две группы уравнений:

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n-1}y_{n-1} + r_1 + \mu\varphi_1(Y),$$

.....

$$\dot{y}_{n-1} = a_{n-11}y_1 + a_{n-12}y_2 + \dots + a_{n-1n-1}y_{n-1} + r_{n-1} + \mu\varphi_{n-1}(Y),$$

$$\dot{y}_n = r_n + \mu\varphi_n(Y). \tag{1.4}$$

При $\mu = 0$ у системы (1.4) существует положение равновесия $Y_0 = (Y_1^0, \dots, Y_{n-1}^0)$ в силу того, что матрица $\{a_{ij}\}$ ($i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, n-1$) невырожденная. Следовательно, по теореме о существовании неявной функции у системы (1.4) есть положение равновесия $Y(\mu)$ и при любом μ , которое по модулю должно быть меньше некоторого положительного μ_0 . Это прямо следует из теоремы о существовании неявной функции, если учесть, что якобиан совпадает с определителем матрицы $\{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, n-1$.

Отметим, что если правые части $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ не будут зависеть от y_n , то положение равновесия системы (1.4) будет асимптотически устойчиво по Ляпунову и y_n будет меняться по линейному закону

$$y_n = y_{n0} + (r + \mu\varphi_n(Y_\mu))t.$$

Следовательно, равновесное решение системы (1.3) будет устойчиво по Ляпунову.

Посмотрим, какие ограничения на систему (1.1) наложит условие независимости Φ от y_n , т.е.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.5}$$

Так как

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_n} = (\nabla \varphi_i, S_n),$$

где S_n — n -й столбец матрицы S , то (1.5) эквивалентно уравнению

$$(\nabla \varphi_i, S_n) = 0. \tag{1.6}$$

Вектор S_n ортогонален всем строкам матрицы P , т.е. ортогонален подпространству, натянутому на строки матрицы P , и так как

$$\nabla \varphi_i = \sum \sigma_{ij} \nabla f_j,$$

где σ_{ij} - элементы матрицы S^{-1} , то выполнено (1.6), а следовательно, будет справедливо и соотношение (1.5), если ∇f лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P [2].

Рассмотрим равновесное решение $X(t)$. Пусть точка $M \in E_n$. Введем в рассмотрение величину $\rho(M, X(t))$ - расстояние от точки M до траектории $X(t)$: $\rho(M, X(t)) = \min_{\tau \geq t_0} \|M - X(\tau)\|$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Равновесное решение $X(t)$ называется орбитально устойчивым (орбитально асимптотически устойчивым), если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что при $\rho(X_0, X(t)) < \delta$ будет выполняться [3]

$$\rho(X(t, X_0), X(t)) < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq 0 (\rho(X(t, X_0), X(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1. Пусть для системы (1.1) собственные числа матрицы P таковы, что $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ ($j = 1, \dots, n-1$), $\lambda_n = 0$, векторы ∇f_j ($j = 1, \dots, n$) существуют и лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P . Тогда существует такое $\mu_0 > 0$, что для любого μ , по модулю превосходящего μ_0 , существует орбитально асимптотически устойчивое неограниченное равновесное решение системы (1.1), устойчивое по Ляпунову.

Далее будем рассматривать систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= PX + \mu F(X, z), \\ \dot{z} &= r + \mu h(X, z), \end{aligned} \quad (1.7)$$

в которую переходит система вида (1.1), если матрица P имеет хотя бы одно нулевое собственное число. Здесь $X = (x_1, \dots, x_N)^*$, $P - N \times N$ - матрица, $r > 0$, μ - малый параметр, $F = (f_1, \dots, f_N)$ - векторная, $h(X, z)$ - скалярная функция переменных x_1, \dots, x_N, z .

Если $F(0, z) \equiv 0$, $h(0, z) \equiv 0$, то у системы (1.7) существует семейство неограниченных равновесных решений [1.3]

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0, \quad z = z_0 + rt, \quad (1.8)$$

представляющее плоскость в $(N+1)$ -мерном пространстве. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$ [4]. Задача состоит в изучении свойства этого решения. Здесь и далее будем предполагать, относительно функций F, h следующее:

1) функции f_1, \dots, f_N, h разлагаются в ряды по целым положительным степеням переменных x_1, \dots, x_N , равномерно сходящимся относительно z , когда величина $\|X\|$ достаточно мала;

2) разложения функций f_1, \dots, f_N, h не содержат членов, линейных относительно x_1, \dots, x_N ;

3) имеет место оценка $|h| \leq k_0 |z|^b (\sum_{j=1}^N |x_j|)^a$, где $k_0 > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

2. Выводы

Таким образом в данной статье изучаются теоретические основы исследования движений систем, не имеющих предельных точек. Открывается новая область исследования - уходящее движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. В. Zubov, А. Ф. Zubova, *Безопасность функционирования технических систем*, ВВМ, СПб., 2009, 343 с.
2. М. В. Стрекопытова, *Исследование равновесных движений*, СПбГУ, СПб., 2007, 95 с.
3. А. В. Zubov, Н. В. Zubov, Н. И. Zubov, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, АО-ОТ «Мобильность-плюс», СПб., 2010, 319 с.
4. А. В. Zubov, Н. В. Zubov, С. А. Стрекопытов, *Теория устойчивости и теория квазипериодических систем*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб., 2010, 206 с.

The analysis of systems with no limits solutions

© I.V. Zubov³, S.V. Zubov⁴

Abstract. In giving article is learns theoretical bases of investigation motions systems, is not have limiting points. Is opens new region of investigation - going motions. Is learns no limiting solutions of systems ordinary differential equations. Is supposes conditions of stability no limiting solutions and estimates on velocity approaches of trajectories indignant motion to trajectory no indignant.

Key Words: equally measure solution, coordinate, matrix, asymptotical stability, position of equally weight

³ professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁴ docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК 517.929

Задача поиска матрицы минимального ранга

© С.В. Зубов¹

Аннотация. Для квазилинейных систем стабилизации решена задача определения минимального числа управляющих воздействий (входов), при которых тривиальное решение этой системы можно сделать асимптотически устойчивым.

Ключевые слова: управляемая стационарная система, собственное число, матрица, асимптотическая устойчивость, левая полуплоскость, ранг матрицы, стабилизация, фазовая переменная

Для простоты изложения рассмотрим замкнутую линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (1.1)$$

где постоянную матрицу B размера $(n \times r)$ ($B \in R^{n \times r}$) можно выбрать надлежащим образом.

Поставим задачу поиска минимального числа p управляющих воздействий (задачу поиска матрицы B минимального ранга), при которых можно построить линейный закон управления относительно фазовых переменных $U = KX$, $K \in R^{p \times p}$ так, чтобы тривиальное решение системы

$$\dot{X} = AX + BKX \quad (1.2)$$

было асимптотически устойчивым, т. е. чтобы все собственные числа матрицы $A + BK$ лежали в левой полуплоскости [1,2].

О п р е д е л е н и е 1.1. Назовем характеристикой линейной стабилизации системы (1.1) минимальное число p управляющих воздействий, при которых **путем выбора** матрицы B можно построить линейный закон управления относительно фазовых переменных $U = KX$, $K \in R^{p \times p}$ так, чтобы тривиальное решение системы (1.2) было асимптотически устойчивым, т. е. чтобы все собственные числа матрицы $A + BK$ лежали в левой полуплоскости.

Пусть $n - k$ собственных чисел матрицы A лежат в левой полуплоскости, причем здесь и далее собственные числа считаются столько раз какова их кратность. Заметим, что с помощью невырожденного линейного преобразования $X = SY$ систему (1.1) можно привести к виду

$$\dot{Y}_1 = A_1 Y_1 + B_1 U, \quad A_1 \in R^{k \times k}, B_1 \in R^{k \times r}, \quad (1.3)$$

$$\dot{Y}_2 = A_2 Y_2 + B_2 U, \quad A_2 \in R^{(n-k) \times (n-k)}, B_2 \in R^{(n-k) \times r}, \quad (1.4)$$

где все собственные числа матрицы A_2 , являясь собственными числами матрицы A , лежат в левой полуплоскости, а собственные числа матрицы A_1 совпадают с остальными собственными числами матрицы A , т. е. имеют неотрицательные вещественные части ($Re \lambda_i \geq 0$, ($i = \overline{1, k}$)) [4].

¹ Доцент, факультет ПМ-ПУ СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

З а м е ч а н и е 1.1. В дальнейшем мы будем опираться на следующий результат.

О п р е д е л е н и е 1.2. [3]. Характеристикой полной управляемости системы (1.1) называется минимальное число управляющих воздействий, при которых эту систему можно сделать полностью управляемой, **путем выбора** соответствующей матрицы B полного ранга. Иногда, для краткости, говорят о характеристике полной управляемости матрицы A .

Т е о р е м а 1.1. [3]. Характеристика полной управляемости матрицы A совпадает с максимальной геометрической кратностью ее собственных чисел.

Доказательство этой теоремы целиком опирается на доказательство того, что если максимальная геометрическая кратность собственных чисел матрицы A равна p , то всегда можно выбрать p линейно независимых вещественных векторов B_1, \dots, B_p , являющихся столбцами матрицы B так, что ранг матрицы $D = \{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\}$ был равен n . Если же ранг матрицы B меньше p , то система (1.1) не является полностью управляемой [3].

Справедливы теоремы.

Т е о р е м а 1.2. Характеристика линейной стабилизации системы (1.1) совпадает с характеристикой полной управляемости матрицы A_1 , т. е. с максимальной геометрической кратностью собственных чисел матрицы A не принадлежащих левой полуплоскости $Re\lambda_i \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что характеристика полной управляемости матрицы A_1 совпадает с максимальной геометрической кратностью собственных чисел матрицы A не принадлежащих левой полуплоскости $Re\lambda_i \geq 0$, так как при преобразовании системы (1.1) к системе (1.3) -(1.4) имеет место равенство

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где матрица, стоящая в этом равенстве справа имеет клеточный вид. Отсюда в частности вытекает, что число собственных векторов, соответствующих собственным числам λ_i , ($i = \overline{1, k}$) матрицы A не принадлежащих левой полуплоскости ($Re\lambda_i \geq 0$) соответствует числу собственных векторов отвечающих тем же собственным числам λ_i , ($i = \overline{1, k}$) матрицы A_1 . Это и доказывает утверждение сделанное выше.

Таким образом, в системе (1.3) - (1.4) мы можем положить $r = p$ и согласно теореме 1.1. [3] выбрать матрицу B_1 таким образом, что система (1.3) будет полностью управляемой. Тогда согласно известному результату [5] система (1.3) может быть сделана стабилизируемой с помощью линейного закона управления $U = KX$, $K \in R^{p \times n}$ относительно фазовых переменных, т. е. все собственные числа матрицы $A_1 + B_1K$ будут лежать в левой полуплоскости.

В этом случае матрица системы (1.3) -(1.4) примет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 + B_1K & 0 \\ B_2K & A_2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что все собственные числа лежат в левой полуплоскости, т. к.

$$\det(D - \lambda E) = \det(A_1 + B_1K - \lambda E)\det(A_2 - \lambda E).$$

В работе [5] показано, что если система (1.3) не является полностью управляемой, то при любом линейном законе управления $U = KX$ собственные числа матрицы $A_1 + B_1K$ не будут лежать в левой полуплоскости. Это означает, что если число управлений в системе (1.1) меньше p , то систему (1.1) нельзя стабилизировать с помощью линейного закона управления относительно фазовых переменных $U = KX$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Рассмотрим квазилинейную управляемую систему

$$\dot{X} = AX + BU + F(t, X, U) \quad (1.5)$$

где векторная функция F определена при $t \geq 0$, $\|X\| \leq L_1$, $\|U\| \leq L_2$ и удовлетворяет условиям

$$\|F(t, X, U)\| \leq L_3(\|X\| + \|U\|)^{1+\alpha}, \quad \alpha - const, \quad l_1, L_2, L_3 - const,$$

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

По аналогии с результатами, приведенными в монографии [5] на основе введения соответствующей функции Ляпунова можно показать, что справедлива теорема.

Т е о р е м а 1.3. *Положение равновесия $X = 0$ системы (1.5) можно сделать асимптотически устойчивым путем выбора матрицы B и управления U , удовлетворяющего условию*

$$\|U\| \leq \beta \|X\|, \quad \beta - const > 0$$

тогда и только тогда, когда $\text{rang} B \geq p$, где p - характеристика линейной стабилизации матрицы A .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. №10 – 08 – 00624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С., *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М., 2002.
2. Р. Габасов, Ф. Кирилова., *Качественная теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1971.
3. Зубов А.В., Дикусар В.В., Зубов Н.В., “Проблемы полной управляемости и структурной минимизации”, *Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем*, **32** (2008), 32-39.
4. Гантмахер Ф.Д., *Теория матриц*, Наука, М., 1967.
5. В.И. Зубов, *Лекции по теории управления*, Наука, М., 1975.
6. А.Ф. Зубова, *Математические методы исследования надежности колебательных систем в технике и технологических процессах*, СПбГУ, СПб., 2007, 339 с.

7. Н.В. Зубов, А.Ф. Зубова, *Безопасность функционирования технических систем*, НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2010, 342 с.

The task of researches matrix minimum rank

© S. V. Zubov ²

Abstract. For kvasilinear systems of stabilization is solved task of definition minimum number controlling actions (entrances), by that trivial solution this system one can to make asymptotic stability.

Key Words: controlling stationary system, own number, matrix, asymptotical stability, left subplane, rank of matrix, stabilization, faze variable

² Docent, faculty AM-PC SPbGU, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе Т_EX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , \mathcal{D}_i в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\mathcal{D}}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

```
\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}
```

где `степень_сжатия` число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

```
\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}
```

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```
\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}
```

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

```
\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение `thebibliography`. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате `AMSBIB`. Подробности смотрите в прилагаемом файле `amsbib.pdf`. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл `svtobib.sty` (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\RBibitem{метка для ссылки на источник}`.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку `'ivanovb7'`. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в преамбуле).

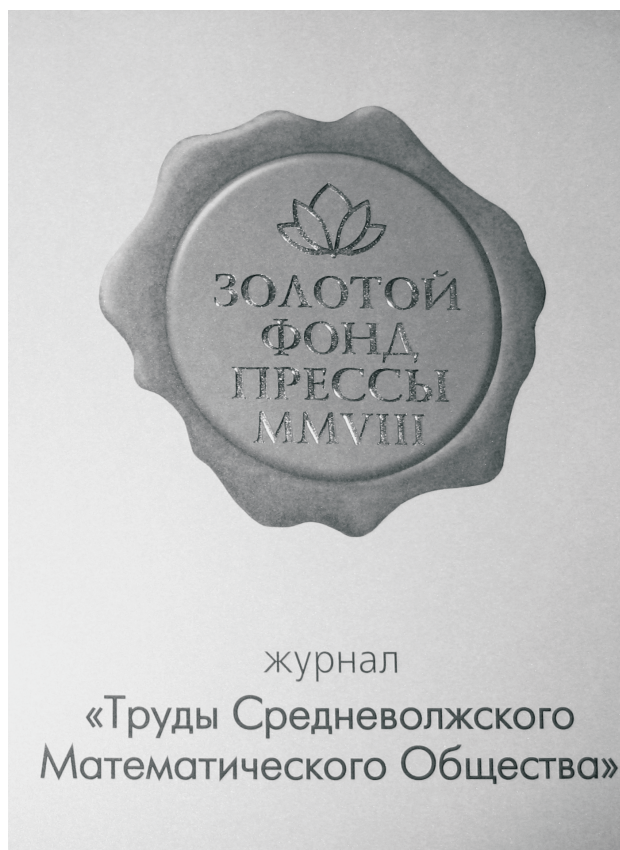
Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи `MiKTeX 2.9`, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Анкилов А. В.	37	Малкин М. И.	148
Баландин Д. В.	47	Мамедова Т. Ф.	156
Блистанова Л. Д.	57	Митрякова Т. М.	9
Бойков И. В.	15	Панкратьев Е. Ю.	111
Бузмакова М. М.	64	Пешехонов К. А.	196
Вельмисов П. А.	37, 70	Починка О. В.	9, 77
Герасимов А. В.	136	Рязанцев В. А.	15
Гринес В. З.	9	Рунова О. А.	101
Гринес Е. А.	77	Сахаров А. Н.	91
Губайдуллин И. М.	111	Середкина А. И.	181
Гуревич Е. Я.	91	Скучилин М. Ю.	47
Егерева Э. Н.	101	Сорокина Н. К.	190
Жужома Е. В.	125	Спивак С. И.	164
Забейворота О. Ю.	111	Стрекопытов И. С.	196
Зубов А. В.	196	Стрекопытов С. А.	57
Зубов В. И.	57	Стрекопытова М. В.	57, 196
Зубов И. В.	57, 200	Судаков В. А.	37
Зубов С. В.	117, 193, 200, 204	Сухарев Л. А.	190
Исаенкова Н. В.	125	Тамарова Ю. А.	70
Каледин О. Е.	190	Тимошин М. И.	170
Кантор О. Г.	164	Трегубова Е. В.	91
Кормилицин А. А.	101	Федченко А. А.	25
Кузьмичев Н. Д.	25	Чугунов М. В.	25
Куприна Л. А.	125	Юлдашев Н. Н.	136
Логинов Б. В.	136, 208	Юлдашев Т. К.	181
Ляпина А. А.	156	Юсупова Г. Н.	164

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в каталоге Российской прессы «Почта России» – 38278.

Для заметок

Для заметок