Диаграммы Юнга и q-комбинаторика

Е.СМИРНОВ

Гауссовы биномиальные коэффициенты

Рассмотрим невозрастающую последовательность натуральных чисел $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$. Сопоставим ей картинку на клетчатой бумаге: в первой строке картинки расположим λ_1 квадратиков, во второй – λ_2, и так далее, так, чтобы все строки были бы выровнены по левому краю. Получившуюся картинку назовем *диаграммой Юнга*, отвечающей последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. В качестве примера на рисунке 1 изображена диаграмма Юнга, отвечающая последовательности $(6, 4, 4, 2)$.

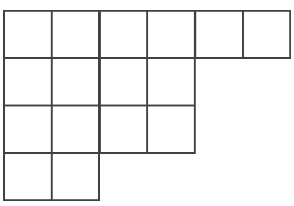

Рис. 1

Зафиксируем два натуральных числа, n и m, и рассмотрим прямоугольник размера $n \times m$ клеток и все диаграммы Юнга, которые можно вписать в этот прямоугольник (мы считаем, что левый верхний угол диаграммы совпадает с левым верхним углом прямоугольника). Они будут отвечать последовательностям $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$, для которых $k \leq n$, а $\lambda_1 \leq m$.

Пример 1. Пусть $m = n = 2$. Тогда таких диаграмм шесть (рис.2).

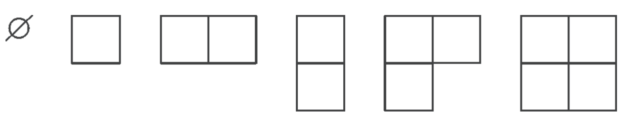

Рис. 2

(Отметим, что пустую диаграмму мы тоже считаем диаграммой Юнга, состоящей из нуля клеточек.)

Найти число диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольник $n \times m$, – это простая задача по комбинаторике. Действительно, каждая диаграмма ограничена снизу и слева путем, который соединяет левый нижний угол прямоугольника с правым верхним. Каждый такой путь состоит из $m + n$ звеньев, причем ровно m из них горизонтальны, а n вертикальны. Значит, число таких путей равно числу способов указать, какие из $m + n$ звеньев будут горизонтальными, т.е. числу сочетаний $\binom{m+n}{m}$ (в этой статье мы будем использовать именно такое обозначение, а не, возможно, более привычное читателю C_{m+n}^{m}). На рисунке 3 изображен пример диаграммы Юнга, вписанной в прямоугольник размера 5×6.

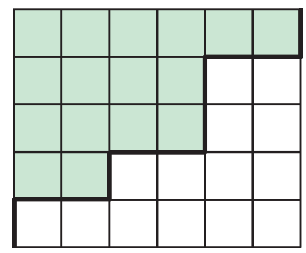

Рис. 3. Путь на клетчатой бумаге, отвечающий диаграмме Юнга

Теперь рассмотрим следующий, более сложный вопрос. Сколько существует диаграмм, вписанных в прямоугольник $n \times m$ и состоящих из заданного числа квадратиков – это число еще называется *весом* диаграммы? Обозначим число диаграмм веса k через a_k (при этом мы считаем m и n фиксированными). Пока что мы можем сказать про эти числа немногое: во-первых, $a_0 = a_{mn} = 1$ (в прямоугольнике существует только одна диаграмма из нуля квадратиков и одна – из mn, т.е. весь прямоугольник). Во-вторых, как мы видели только что, $a_0 + a_1 + \ldots + a_{mn} = \binom{m+n}{m}$: общее число всех диаграмм в прямоугольнике равно числу сочетаний из $m + n$ элементов по m. Также ясно, что при всех k в пределах от 0 до mn значения a_k будут положительны – но как они себя ведут и как их вычислить, не вполне ясно. Дальнейшая наша задача будет состоять в изучении последовательности $a_0, \ldots, a_{mn}$.

Для работы с последовательностями в комбинаторике часто применяется такой полезный инструмент, как производящие функции. А именно, если у нас есть какая-либо последовательность $(b_0, b_1, \ldots, b_m, \ldots)$, конечная или бесконечная, мы можем рассмотреть следующую сумму, зависящую от переменной q:

$$B(q) = b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \ldots + b_m q^m + \ldots$$

Эта сумма называется *производящей функцией* последовательности b_m. Если последовательность конечна, то это выражение является многочленом от переменной q; если же она бесконечна, то это уже будет не многочлен, а *степенной ряд*. Зачастую изучение производящей функции последовательности позволяет получить какие-то новые сведения о самой последовательности; подробнее об этом можно прочесть, например, в книгах С.К.Ландо «Лекции о производящих функциях» (МЦНМО, 2002) и «Введение в дискретную математику» (МЦНМО, 2012).

Вернемся к последовательности a_k (напомним, что она зависит не только от веса диаграммы k, но еще и от размеров прямоугольника, т.е. от m и n). Рассмотрим ее производящую функцию, которую мы будем обозначать несколько необычным образом – через $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q = \sum_{k=0}^{mn} a_k q^k .$$

Это многочлен степени mn.

Пример 2. Несложно вычислить многочлен $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$ при $m = 1$: он равен

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n ,$$

т.е. это сумма геометрической прогрессии со знаменателем q.

Пример 3. Пример 1 показывает, что $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$.

Многочлен $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$ (иногда мы будем опускать индекс q и писать просто $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$) называется *гауссовым биномиальным коэффициентом*, или *q-биномиальным коэффициентом*. Причина такого названия проста: если вычислить его значение при $q = 1$, мы получим сумму всех его коэффициентов – т.е. как раз обычный биномиальный коэффициент $\binom{m+n}{m}$. Далее мы выясним, что эти многочлены обладают рядом свойств, которые очень похожи на свойства обычных биномиальных коэффициентов.

Треугольник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Рис. 4. Треугольник Паскаля

Обычные биномиальные коэффициенты удобно представлять в виде треугольника Паскаля – треугольной таблицы, каждый элемент которой равен сумме двух стоящих над ним элементов (рис.4). Это выражается хорошо известным равенством

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}.$$

Запишем такой же треугольник, в котором теперь будут стоять q-биномиальные коэффициенты. Выпишем первые его несколько строк – например, при $m + n \le 4$. Мы получим следующую таблицу (рис.5):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1+q & & 1 & & \\ & 1 & & 1+q+q^2 & & 1+q+q^2 & & 1 & \\ 1 & & 1+q+q^2+q^3 & & 1+q+2q^2+q^3+q^4 & & 1+q+q^2+q^3 & & 1 \end{array}$$

Рис. 5. q-треугольник Паскаля

При этом, как и для обычных биномиальных коэффициентов, по краям нашей таблицы стоят единицы, т.е. $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = 1$.

Упражнение 1. Докажите, что q-треугольник Паскаля симметричен:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}.$$

Из нашего q-треугольника Паскаля видно, что q-биномиальный коэффициент уже не является суммой двух коэффициентов, стоящих над ним, т.е.

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} \ne \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}$$

(хотя бы потому, что левая и правая части имеют разную степень как многочлены от q).

Однако можно заметить, что рекуррентное соотношение все же имеет место, только выглядит немного иначе: так, каждый элемент таблицы получается как сумма элемента сверху-слева от него и элемента сверху-справа, *домноженного на некоторую степень переменной* q. Так, скажем,

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + q\left(1 + q + q^2\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(1 + q + q^2\right) + q^2\left(1 + q + q^2\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + q^2\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно подметить и общее правило, оно выглядит так:

Предложение 1.

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Доказательство. Как уже было сказано, подстановка $q = 1$ превращает это равенство в равенство с участием обычных биномиальных коэффициентов:

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}. \qquad (**)$$

Приведем сначала доказательство этого равенства, использующее определение биномиального коэффициента как числа диаграмм Юнга, а потом модифицируем его так, чтобы получилось равенство $(*)$.

Будем вести индукцию по $m + n$. База очевидна; докажем индуктивный переход. Рассмотрим произвольную диаграмму Юнга, вписанную в прямоугольник $m \times n$. Она ограничена снизу некоторой ломаной; посмотрим на ее первое звено. Оно может быть либо вертикальным, и тогда оставшаяся часть ломаной ограничивает диаграмму Юнга в прямоугольнике размера $(m-1) \times n$, изображенном на рисунке 6 слева красным цветом; либо горизонтальным – и тогда оставшаяся часть ломаной задает диаграмму в прямоугольнике размера $m \times (n-1)$, который обведен на рисунке 6 справа синей линией. Таким образом, общее количество диаграмм Юнга равно суммарному

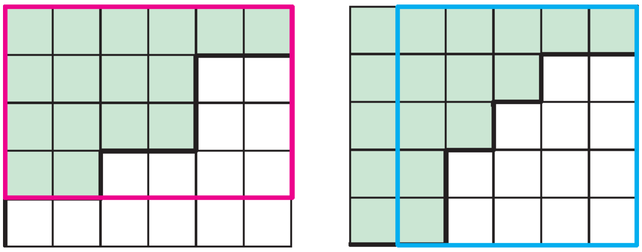

Рис. 6. Два типа диаграмм Юнга

количеству диаграмм Юнга внутри красного и синего прямоугольников. Согласно предположению индукции, диаграмм первого типа будет $\binom{m+n-1}{m}$, а диаграмм второго типа – $\binom{m+n-1}{m}$. Равенство $(**)$ доказано.

Что меняется, когда мы переходим от обычных биномиальных коэффициентов к q-биномиальным? Теперь нас интересует не просто количество всех диаграмм Юнга, а количество диаграмм каждого веса по отдельности. Попробуем проследить за этим.

Итак, пусть первое звено диаграммы вертикально. Тогда пересечение нашей диаграммы и красного прямоугольника есть диаграмма *того же самого веса*, что и исходная, – значит, суммарный вклад в производящую функцию, который дадут диаграммы первого типа, равен в точности $\begin{bmatrix} m+n \\ m-1 \end{bmatrix}$. Напротив, если первое звено горизонтально, то внутри синего прямоугольника будет лежать вся диаграмма, кроме первого столбца, который имеет высоту m, – тем самым, вес всей диаграммы будет на m больше, чем вес диаграммы внутри синего прямоугольника. Поэтому вклад всех диаграмм второго типа будет в q^m раз больше, чем q-биномиальный коэффициент, «считающий» диаграммы в синем прямоугольнике, т.е. будет равняться $q^m \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}$. Сложив эти два выражения, получаем требуемую производящую функцию.

Явная формула для гауссовых биномиальных коэффициентов и q-бином Ньютона

Биномиальные коэффициенты зачастую бывает удобнее вычислять не при помощи рекуррентного соотношения, а по явной формуле:

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} = \frac{(m+n)!}{m!\cdot n!}.$$

Оказывается, что ее аналог существует и для q-биномиальных коэффициентов, и доказательство его лишь незначительно сложнее. Для того чтобы вывести эту явную формулу, определим сперва понятие q-аналога натурального числа.

Всякое натуральное число n встречается в треугольнике Паскаля: $n = \binom{n}{1}$. Условимся, что q-аналогом натурального числа n является многочлен от q, равный $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$. Обозначим этот многочлен через $[n]_q$ (иногда, следуя нашему стандартному соглашению, мы будем писать просто $[n]$). Таким образом, q-аналог натурального числа n – это сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем q и начальным членом 1:

$$[n]_q = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Обратите внимание, что суммирование ведется до $n-1$, а не до n. Однако при подстановке $q = 1$ многочлен $[n]_q$ становится равным в точности n.

Упражнение 2. Докажите, что для любых натуральных n и m имеют место равенства

$$[m+n]_q = [m]_q + q^m [n]_q = [n]_q + q^n [m]_q.$$

Из этого упражнения и полученного нами выше рекуррентного соотношения нетрудно вывести и явную формулу для q-биномиальных коэффициентов:

Предложение 2. *Имеет место формула*

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n+1]\cdot[n+2]\cdot\ldots\cdot[n+m]}{[1]\cdot[2]\cdot\ldots\cdot[m]}.$$

Доказательство. Докажем это равенство по индукции по $m+n$. *База индукции*: при $m+n=1$ равенство очевидно.

Переход. Запишем для $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$ равенство из предложения 2 и воспользуемся для $\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}$ предположением индукции:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{[n+1]\cdot\ldots\cdot[n+m-1]}{[1]\cdot\ldots\cdot[m-1]} + q^m \frac{[n]\cdot\ldots\cdot[n+m-1]}{[1]\cdot\ldots\cdot[m]}.$$

Вынеся за скобку множитель, общий для обеих дробей, получим

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n+1]\cdot\ldots\cdot[n+m-1]}{[1]\cdot\ldots\cdot[m-1]} \left(1 + q^m \frac{[n]}{[m]}\right).$$

Теперь осталось преобразовать выражение в скобках и воспользоваться результатом упражнения 2:

$$1 + q^m \frac{[n]}{[m]} = \frac{[m] + q^m [n]}{[m]} = \frac{[m+n]}{[m]}.$$

Тем самым, мы получаем требуемое:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n+1]\cdot\ldots\cdot[n+m-1]}{[1]\cdot\ldots\cdot[m-1]} \cdot \frac{[m+n]}{[m]}.$$

Это равенство, как и в случае «обычных» биномиальных коэффициентов, можно переписать в более красивом виде, если ввести понятие q-факториала. Обычный факториал числа n определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до n (при этом мы считаем, что $0! = 1$). Точно так же можно определить и q-факториал:

$$[n]! = [1]\cdot[2]\cdot\ldots\cdot[n].$$

Как и прежде, мы полагаем $[0]! = 1$. В соответствии с нашим общим принципом, значение многочлена $[n]!$ при $q = 1$ равняется «обычному» факториалу числа n.

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства из предложения 2 на $[n]!$, получим еще один вариант явной формулы для q-биномиального коэффициента:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[m+n]!}{[m]!\cdot[n]!}.$$

Отсюда, в частности, получается «комбинаторное» доказательство того факта, что $[m+n]!$ делится на $[m]!\cdot[n]!$ без остатка как многочлен от q – отметим, что из явного вида формул для q-факториалов это вовсе не очевидно.

Биномиальные коэффициенты, как следует из самого их названия, возникают в *биноме Ньютона* – в равенстве $(1+x)^n = \sum \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k$. У этого равенства тоже имеется q-аналог, который выглядит следующим образом:

Теорема 1 (q-бином Ньютона).

$$(1+xq)\left(1+xq^2\right)\ldots\left(1+xq^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k.$$

Как и следует ожидать, подстановка $q = 1$ превращает данное равенство в обычный бином Ньютона.

Доказательство этой теоремы мы представим в виде нескольких упражнений.

Упражнения

3. Докажите, что если раскрыть скобки в левой части, то коэффициент при $q^l x^k$ будет равняться числу разбиений числа l в сумму k *различных* целых положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит n.

4. Постройте биекцию (взаимно однозначное соответствие) между разбиениями числа l в сумму k различных целых положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит n, и диаграммами Юнга веса $l - \frac{k(k+1)}{2}$, вписанными в прямоугольник размера $(n-k)\times k$.

5. Выведите теорему 1 из двух предыдущих упражнений.

Формула Эйлера

Итак, мы уже довольно много знаем про функцию $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$ – производящую функцию для числа разбиений, вписанных в прямоугольник размера $m\times n$. Наша дальнейшая цель – получить производящую функцию для числа всевозможных разбиений на плоскости, без каких-либо ограничений на слагаемые и их количество. Делать мы это будем в два этапа.

Сначала выпишем формулу для q-биномиального коэффициента, полученную в предыдущем разделе:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n+1]\cdot[n+2]\cdot\ldots\cdot[n+m]}{[1]\cdot[2]\cdot\ldots\cdot[m]}.$$

В этой дроби в числителе и знаменателе одинаковое число сомножителей, а именно m. Теперь воспользуемся тем, что каждое из q-чисел есть геометрическая прогрессия со знаменателем q, и представим каждое из них в виде дроби:

$$[k] = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q}.$$

Сомножители $1/(1-q)^m$ в числителе и знаменателе сократятся, и мы получим несколько иное выражение для q-биномиального коэффициента:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{\left(1-q^{n+1}\right)\left(1-q^{n+2}\right)\ldots\left(1-q^{n+m}\right)}{(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^m\right)}$$

(еще раз обращаем внимание читателя на то, что правая часть на самом деле является многочленом – числитель делится на знаменатель без остатка как многочлен от q).

Теперь посмотрим, как будет меняться это выражение, если менять n, а m фиксировать. Что будет, если n «очень большое» – скажем, тысяча? Тогда в числителе будет стоять многочлен вида

$$\left(1-q^{1001}\right)\left(1-q^{1002}\right)\ldots\left(1-q^{1000+m}\right) = 1 - q^{1001} + \ldots,$$

свободный член которого равен 1, а потом следуют «очень много» (в данном случае – 1000) коэффициентов, равных нулю. Таким образом, чем больше n, тем больше нулевых коэффициентов подряд будет в числителе. Знаменатель же останется неизменным, он от n никак не зависит.

Таким образом, можно сказать, что при стремлении n к бесконечности выражение в числителе стремится к единице, а сам q-биномиальный коэффициент стремится к величине, обратной знаменателю:

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^m\right)}.$$

Конечно же, как всегда бывает при обращении с разного рода пределами, этому высказыванию нужно придать строгий математический смысл. Это можно сделать двумя разными способами. Один из них состоит в том, чтобы рассматривать все выражения от q как *функции*, а само q – как переменную (скажем, вещественную). Тогда q-биномиальный коэффициент будет функцией на прямой, и в левой части выражения будет стоять функциональная последовательность, с которой уже можно обходиться средствами математического анализа – например, исследовать ее на сходимость при тех или иных значениях q. Так, эта последовательность будет сходиться при $|q| < 1$, а при $|q| > 1$ – расходиться; там, где эта последовательность сходится, ее предел будет равен значению функции, стоящей в правой части. Подробнее об обращении с функциональными последовательностями можно прочесть в любом учебнике математического анализа, например в книге В.А.Зорича «Математический анализ. Том 1» (МЦНМО, 2007).

Другой способ состоит в том, чтобы рассматривать все наши выражения как *формальные степенные ряды*, т.е. «многочлены бесконечной степени». Правую часть равенства при этом также следует понимать как степенной ряд: для этого нужно заменить каждый из сомножителей $\frac{1}{1-q^k}$ на бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем q^k и перемножить все m этих прогрессий. Тогда можно будет говорить о *покоэффициентной* сходимости в вышеописанном смысле: будем говорить, что последовательность формальных степенных рядов $A_n(q)$ сходится к $A(q)$, если каждый коэффициент у $A_n(q)$ и $A(q)$ начиная с какого-то момента совпадает (в качестве упражнения попробуйте записать это при помощи кванторов). Желающих узнать больше об обращении с формальными степенными рядами отсылаем к книге А.Л.Городенцева «Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1» (МЦНМО, 2013) или к уже упоминавшейся книге С.К.Ландо «Введение в дискретную математику».

Комбинаторный смысл последнего выражения тоже понятен: полученный степенной ряд есть производящая функция для числа диаграмм Юнга, вписанных в полосу высоты m (т.е. состоящих не более чем из m строк), но без каких-либо ограничений на длины этих строк. Коэффициент этого ряда при q^k будет равен количеству диаграмм Юнга из k квадратиков, количество строк в которых не превосходит m.

Обратите внимание, что здесь впервые утрачивает смысл подстановка $q = 1$: очевидно, что общее количество диаграмм Юнга в полосе посчитать нельзя (оно бесконечно), тогда как выписать производящую функцию оказывается возможным.

Остался последний шаг: устремим к бесконечности в полученной формуле число m, т.е. максимальное количество строк диаграммы Юнга. Тогда получится производящая функция для числа *всех* диаграмм Юнга, без каких-либо ограничений на их размер. Она будет представляться как *бесконечное произведение*. Мы получили знаменитую теорему Эйлера.

Теорема 2 (Л.Эйлер). *Производящая функция*

$$P(q) = p_0 + p_1 q + \ldots + p_l q^l + \ldots,$$

где p_l – число диаграмм Юнга из l квадратиков, задается бесконечным произведением:

$$P(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}.$$

Бесконечное произведение, возникающее в правой части равенства, есть предел последовательности конечных произведений:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-q^k}.$$

Этот предел также можно понимать одним из двух описанных выше способов: либо как предел последовательности функций, сходящихся при $|q| < 1$, либо как покоэффициентный предел последовательности формальных степенных рядов $(1+q+q^2+\ldots)(1+q^2+q^4+\ldots)\ldots(1+q^m+q^{2m}+\ldots)$. Несложно видеть, что предел, понимаемый во втором смысле, существует, т.е. коэффициенты такого произведения стабилизируются: если умножить произвольный ряд на $\frac{1}{1-q^m} = 1+q^m+q^{2m}+\ldots$, то первые m членов ряда, начиная с нулевого, останутся неизменными. Иначе говоря, чтобы вычислить очередной (k-й) член этого ряда, нужно перемножить только *конечное* число (в данном случае k) первых сомножителей – остальные не окажут на коэффициент при q^k никакого влияния.

Мы получили теорему Эйлера в качестве следствия утверждений о явном виде q-биномиальных коэффициентов. Однако она допускает куда более простое доказательство, которое мы также предлагаем найти читателю.

Упражнение 6. Придумайте доказательство теоремы Эйлера, не использующее q-биномиальных коэффициентов. Иначе говоря, докажите непосредственно, что производящая функция для числа разбиений

$$P(q) = p_0 + p_1 q + p_2 q^2 + \ldots$$

равна

$$P(q) = (1+q+q^2+\ldots)(1+q^2+q^4+\ldots)\ldots(1+q^k+q^{2k}+\ldots)\ldots$$

Пентагональная теорема Эйлера

В связи с теоремой о производящей функции для числа разбиений упомянем еще один замечательный результат, также принадлежащий Эйлеру. Оказывается, если начать вычислять ряд, *обратный* к $P(q)$ – иначе говоря, бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1-q)$, получится следующее:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \ldots$$

(В качестве упражнения предлагаем читателю проверить это вычисление, скажем, до члена q^{10} включительно.)

Здесь можно сделать сразу несколько интересных наблюдений. Во-первых, видно, что все коэффициенты этого ряда равны либо 0, либо ± 1, причем по мере увеличения степени ненулевые члены встречаются все реже и реже. Во-вторых, все члены, кроме свободного, идут парами: два отрицательных, два положительных, потом снова два отрицательных и так далее. Разность между степенями в паре равняется номеру пары: сначала это единица (q и q^2), потом два (q^5 и q^7), потом три (q^{12} и q^{15}) и так далее.

Наконец, последовательность степеней 1, 5, 12, 22, 35 … тоже была хорошо известна Эйлеру – это так называемые *пятиугольные числа*, которые равняются

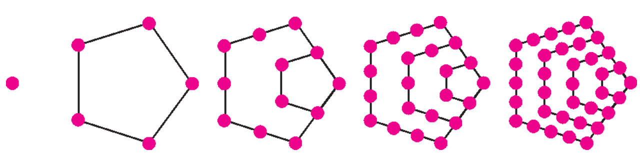

Рис. 7. Пятиугольные числа

числу точек в пятиугольнике, сторона которого равна 1, 2, 3 … точкам соответственно (рис.7). Нетрудно видеть, что m-е пятиугольное число равняется $m(3m-1)/2$.

Оказывается, имеет место следующий результат:

Теорема 3 (пентагональная теорема Эйлера) *Ряд, обратный к ряду* $P(q)=\sum p_n q^n$ *, имеет вид*

$$P(q)^{-1}=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(q^{\frac{m(3m-1)}{2}}+q^{\frac{m(3m+1)}{2}}\right).$$

Эта теорема имеет несколько существенно разных доказательств. Наверное, самое простое из них можно найти в статье Д.Фукса «О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях», опубликованной в журнале «Квант» №8 за 1981 год, или в лекции 3 книги С.Л.Табачникова и Д.Б.Фукса «Математический дивертисмент». И эту статью, и эту книгу мы горячо рекомендуем читателю. Там же можно прочесть о том, как с помощью пентагональной теоремы Эйлера удается очень быстро вычислять числа разбиений p_n.

Еще одно доказательство пентагональной теоремы Эйлера основано на использовании q-бинома Ньютона, с которым мы имели дело выше; это доказательство можно прочесть, например, в брошюре «Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы» (МЦНМО, 2014), принадлежащей автору этой статьи.

Вместо заключения. А что дальше?..

Подведем итоги. Мы выяснили, чему равна производящая функция для диаграмм Юнга в прямоугольнике; оказалось, что эта функция ведет себя очень похоже на обычный биномиальный коэффициент. Нам удалось выписать несколько тождеств на многочлены от q, которые при подстановке $q=1$ дают известные числовые тождества (в частности, бином Ньютона).

Это проявление некоторого общего принципа: у большинства важных комбинаторных объектов и связанных с ними тождеств имеются q-аналоги; их рассмотрение зачастую позволяет глубже понять природу исходных объектов. Так, например, изучение q-биномиальных коэффициентов позволило нам вывести производящую функцию для диаграмм Юнга на плоскости (без каких-либо ограничений).

Задачи, которые мы рассмотрели, допускают огромное количество вариаций и обобщений. Так, например, можно рассматривать диаграммы Юнга не на плоскости, а в пространстве – башни из кубиков. В этом случае даже вопрос о количестве диаграмм Юнга внутри прямоугольного параллелепипеда уже становится довольно нетривиальным; ответ на него получил в начале XX века британский военный и математик П.Макмагон. Макмагону же принадлежит и вычисление производящей функции для числа трехмерных диаграмм – как в ограниченной «коробке», так и на плоскости. Последняя производящая функция также записывается в виде бесконечного произведения, похожего на эйлеровское, – она выглядит так:

$$P_{3D}(q)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^k\right)^k}.$$

Доказательство этой формулы изложено, например, в уже упоминавшейся брошюре автора статьи. Кроме того, много интересного о трехмерных диаграммах Юнга можно прочесть в статье В.Горина «Что можно сложить из кубиков?», опубликованной в «Кванте» №3 за 2012 год.

Интересно, что дальнейшему обобщению производящая функция Макмагона пока что не поддается – никакого ее аналога для четырехмерных диаграмм Юнга не известно! Точно так же неясно, что является правильным четырехмерным аналогом q-биномиальных коэффициентов, т.е. как выглядит производящая функция для числа диаграмм Юнга в четырехмерном параллелепипеде.

Может быть, кому-то из читателей когда-нибудь удастся ответить на эти вопросы?

Но́вый спо́собъ аріѳме́тіки ѳео́ріки илѝ зри́телныѧ

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Плакат с таким названием, напечатанный в 1705 году, был, по всей видимости, первым изданным в России научно-техническим плакатом. Его составил Василий Киприянов, сподвижник Петра I, библиотекарь московской Школы математических и навигацких наук.

На плакате рассказано в общих словах о предназначении арифметики, описаны свойства натуральных чисел и дробей, а также подробно изложены правила основных операций с числами: сложения – «аддицио», вычитания – «субстракцио», умножения – «мултипликацио» и деления – «дивизио». На примерах показано, как все эти действия нужно выполнять – в те времена уже вовсю пользовались привычным для нас методом «в столбик».

Но плакат интересен не только математическим содержанием. Это фактически произведение искусства (кстати, подлинный экземпляр этого плаката хранится в Эрмитаже). В верхней части плаката расположен государственный герб, под ним – аллегорическое изображение дворца точных наук, в центре которого на троне восседает «царица наук» арифметика. Колонны подписаны названиями других наук – геометрии, стереометрии, астрономии, оптики, меркатории (навигации), географии, фортификации и архитектуры. Под каждой колонной есть небольшой рисунок, раскрывающий содержание этих наук. По бокам плаката в медальонах находятся портреты знаменитых ученых: Пифагор, Гиппарх, Птолемей, Коперник, Архимед, «Царь Алфонский» (вероятно, имелся в виду живший в XIII веке в Испании король Леона и Кастилии Альфонс X, увлекавшийся астрономией), Тихо Браге, Фокилид. В нижней части плаката помещено посвящение Петру I, описание некоторых его свершений и побед. Там же изображены Московский Кремль и Петербург в виде крепости с надписью «С. Петрополис, 1703».

Глядя на такое обилие мельчайших деталей и подробностей, остается лишь догадываться, сколько труда потратили на изготовление этой гравюры сделавшие ее мастера!

Подробнее о плакате вы можете прочитать в книге В.В.Данилевского «Русская техническая литература первой четверти XVIII века» (1954 г.) и на сайте «Математических этюдов» www.etudes.ru в разделе «Colloquium».

Е.Епифанов