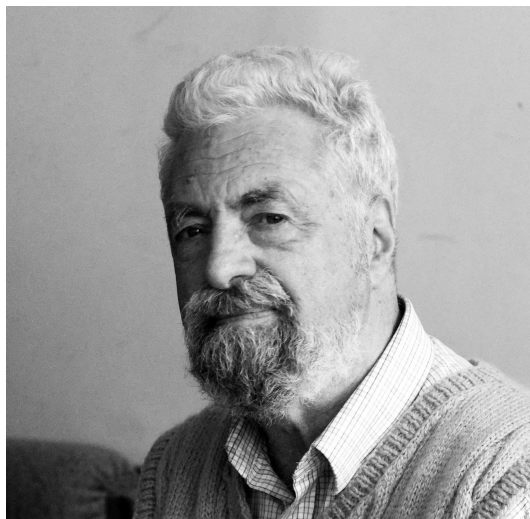


Юлию Сергеевичу Ильяшенко — поздравления
с 70-летним юбилеем



Этот выпуск «Трудов Московского математического общества» посвящён члену редколлегии журнала, многолетнему вице-президенту Московского математического общества Юлию Сергеевичу Ильяшенко, которому 4 ноября 2013 года исполнилось 70 лет. Желаем Юлию Сергеевичу доброго здоровья и дальнейших успехов в его деятельности на благо математики и образования в нашей стране.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ВЫПУСКА
В. А. КЛЕПЦЫНА И И. В. ЩУРОВА

Юлию Сергеевичу Ильяшенко недавно исполнилось 70 лет, и для нас обоих большая честь участвовать в подготовке тома «Трудов Московского математического общества», посвящённого этому замечательному событию.

Математические достижения Ю. С. — нахождение ошибок в стратегии Петровского — Ландиса и указание пробела в мемуаре Дюлака, доказательство индивидуальной теоремы конечности, стратегия Городецкого — Ильяшенко построения примеров и т. д. широко известны. Вместо их перечисления мы хотели бы несколькими штрихами показать Юлия Сергеевича как «отца научного семейства», долгие годы заботящегося о своих учениках.

Каждое лето Ю. С. собирает учеников на летнюю школу, и интенсивная работа в ней зачастую даёт задел на весь следующий год. Эти школы проходят в разных местах — под Дубной, на Соловецких островах, в горах Словакии или в альплагере Безенги. Конечно, занятия математикой неминуемо перемежаются прогулками, которые Ю. С. очень любит; к примеру, диссертация И. Щ. началась с одного разговора на закате в горах, на высоте 3000 м.

Во второй половине 1990-х А. С. Городецкий и Юлий Сергеевич предложили стратегию построения типичных примеров какого-либо поведения динамических систем, большая часть этой работы была ими придумана за одну долгую зимнюю прогулку. А ещё А. С. вспоминает, как к нему на день рождения пришли Юлий Сергеевич, его жена Елена Николаевна и весь семинар — и все еле-еле поместились в восьмиметровой комнатке в общежитии, и это было ужасно трогательно.

Юлий Сергеевич щедро делится идеями со своими учениками. В. К. не может не вспомнить, как проиграл ему научный спор: когда Ю. С. предложил идею, лёгшую в основу работ о мерах с нулевым показателем Ляпунова, первой реакцией В. К. было — «но это же не может сработать!», однако прав оказался Ильяшенко.

Мы не перестаём восхищаться активностью Юлия Сергеевича. И. Щ. вспоминает, как во время командировки в Корнельский университет Ю. С. пригласил его на прогулку, завершившуюся купанием под водопадом. Дело было в конце октября, и купался только Юлий Сергеевич: И. Щ. в это время пытался поплотнее укутаться в тёплую куртку, спасаясь от ледяного ветра. Другая история связана с учебной нагрузкой: однажды, придя на традиционный пятничный семинар после казавшегося ему изнурительным трудового дня (три пары), И. Щ. спросил Юлия Сергеевича, сколько пар в день ему приходилось вести. Оказалось, что четыре, причём совсем недавно. И. Щ. устыдился и больше никому не говорит, что очень устал после трёх пар.

С днём рождения!

Почти комплексные структуры на универсальных накрывающих слоений

А. А. Щербаков

Мы рассматриваем слоения на аналитические кривые на компактных комплексных многообразиях. Известно, что если касательное к слоению линейное расслоение отрицательно, то, в случае общего положения, все слои являются гиперболическими. Многообразие универсальных накрывающих слоёв, проходящих через некоторую трансверсаль, имеет естественную комплексную структуру. Мы показываем, что в типичном случае эта структура может быть определена как гладкая почти комплексная структура на произведении базы и единичного круга. Доказывается, что эта структура квазиконформна на слоях и для соответствующих $(1, 0)$ -форм и их производных по отношению к координатам в базе и в слоях имеются равномерные оценки. Производные растут не быстрее, чем некоторая отрицательная степень расстояния до границы круга.

Библиография: 13 названий. *УДК:* 514.763.4. *MSC:* 32Q30 (53C12).

Ключевые слова и фразы: слоения, метрика Пуанкаре, почти комплексные структуры.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	153
§ 1. Метрики на слоениях	156
§ 2. Почти комплексная структура в геодезических координатах	166
§ 3. Производные в трансверсальных направлениях. Вычисления в локальных картах . . .	178
§ 4. Доказательство оценок (0.3) , (0.4)	191
Список литературы	203

ВВЕДЕНИЕ

Пусть M — комплексное многообразие. Мы говорим, что на M определено слоение с особенностями \mathcal{F} , если существует аналитическое подмножество Σ комплексной коразмерности не меньше 2 и имеется слоение его дополнения на аналитические кривые, которое нельзя продолжить в точки Σ . В типичном случае сингулярное множество Σ состоит из изолированных точек.

Слоение также может быть локально определено при помощи голоморфных векторных полей. Точнее, для задания слоения \mathcal{F} нужно иметь открытое покрытие $\{U_j\}$, $j \in J$, набор голоморфных векторных полей V_j , $j \in J$, и мультипликативный коцикл f_{ij} , $i, j \in J$, такие что:

- (i) V_j — голоморфное векторное поле на U_j ,
- (ii) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ и $V_i = f_{ij} V_j$ на $U_i \cap U_j$.

Работа была поддержана грантом РФФИ 10-01-00739 и грантом РФФИ-CNRS 10-01-93115-CNRS НЦНИЛа.

Касательное расслоение слоения \mathcal{F} — это голоморфное линейное расслоение, ассоциированное с коциклом f_{ij} . Оно определено над всем M , а не только над дополнением к особенностям. Подробнее см., например, [3]. Мы будем обозначать это линейное расслоение $T_{\mathcal{F}}$ и двойственное ему — $T_{\mathcal{F}}^*$.

Накрывающее многообразие слоёв слоения было определено в [9, 10]. Пусть \mathcal{F} — слоение с особенностями на комплексном многообразии M , и пусть B — трансверсальное сечение. Пусть φ_p — слой, проходящий через точку $p \in B$, и пусть $\widehat{\varphi}_p$ — универсальная накрывающая этого слоя с отмеченной точкой p . По определению,

$$\widehat{M} = \bigcup_{p \in B} \widehat{\varphi}_p.$$

В [9, 10] было показано, что по крайней мере для слоения на аффинном пространстве или, в более общем случае, на многообразии Штейна можно определить топологию и комплексную структуру на этом объединении так, что оно будет комплексным многообразием, снабжённым локально биголоморфной проекцией $\tilde{\pi}: \widehat{M} \rightarrow M$ и голоморфным сечением $B \rightarrow \widehat{M}$, обратным справа к голоморфной ретракции $\pi: \widehat{M} \rightarrow B$. Для каждого слоя φ_p ограничение $\tilde{\pi}$ на $\widehat{\varphi}_p$ является универсальным накрывающим отображением на φ_p . Для слоения на \mathbb{CP}^n многообразие универсальных накрывающих может быть не хаусдорфовым, но в типичном случае оно хаусдорфово (см. [4, 5]). Можно построить хаусдорфово универсальное накрытие для произвольных слоений на компактных кэлеровых многообразиях, если мы включим особые точки в слои в некоторых исключительных случаях (см. [4, 6]), но здесь мы не рассматриваем такие ситуации.

Для типичного слоения на \mathbb{C}^n или \mathbb{CP}^n каждый слой является гиперболическим (см. [7] или [12]). Для каждого слоя униформизирующее отображение единственно с точностью до автоморфизмов круга, и после нормализации (чтобы получить единственность) возникает вопрос: что можно сказать о зависимости униформизирующего отображения для φ_p от точки p ? Эквивалентно, можно ввести на каждом слое метрику Пуанкаре, то есть единственную полную эрмитову метрику кривизны, равной -1 , и спросить о зависимости этой метрики от точки p . Гипотеза об одновременной униформизации утверждает, что при подходящем выборе униформизирующего отображения φ_p на подходящую область (зависящую от p) на римановой сфере, можно сделать это отображение аналитически зависящим от p . Известно, что эта гипотеза неверна для общих слоений на многообразиях размерности больше 2 и даже для слоений на общих двумерных многообразиях [8]. Неизвестно, верна ли эта гипотеза для типичных слоений на \mathbb{C}^2 или \mathbb{CP}^2 .

В работе [13] было показано, что для типичного слоения на \mathbb{CP}^n в слоях существует квазиконформная структура, гладко зависящая от точки базы p (см. [13, лемма 2]). Точнее, для типичного слоения многообразие универсальных накрывающих с базой B биголоморфно произведению $B \times D$ (D —

единичный диск), снабжённому почти комплексной структурой, которая локально по базе может быть определена формами типа $(1, 0)$:

$$d\zeta = \{d\zeta_j\}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \omega = dw + \mu d\bar{w} + \langle c, d\bar{\zeta} \rangle.$$

Здесь ζ_j — координаты в базе B , w — карта на слое, $c = \{c_j\}$ — гладкая (C^∞) вектор-функция, $\langle c, d\bar{\zeta} \rangle$ — скалярное произведение $c_1 d\bar{\zeta}_1 + \dots + c_{n-1} d\bar{\zeta}_{n-1}$, μ — гладкая функция, удовлетворяющая оценке $|\mu| \leq b < 1$. В вышеупомянутой статье из последнего неравенства был сделан вывод, что униформизирующее отображение (или, эквивалентно, метрика Пуанкаре) гладко зависит от точки p . Это заключение неверно. Униформизирующее отображение удовлетворяет уравнению Бельтрами с коэффициентом μ , и решение, гомеоморфно отображающее D на D , гладко зависит от ζ , только если для производных функции μ вдоль базы имеется оценка, равномерная на слоях (см. [1]). На самом деле, как показал Б. Деруан, метрика Пуанкаре может быть негладкой в окрестности гиперболической особой точки.

Тем не менее более слабое предположение, что существует отображение, гладко зависящее от слоя и биголоморфно отображающее каждый слой на некоторую область в \mathbb{C} , непрерывно зависящую от слоя, может быть верным. Для того чтобы получать результаты такого типа, требуется некоторый контроль над производными функции μ . Другие проблемы, связанные с этими вопросами, — это аналитическое продолжение отображения Пуанкаре, или проблема сохранения циклов. Можно представить отображение Пуанкаре как некоторый биголоморфизм трансверселей, и возникает вопрос о существовании и свойствах граничных значений таких голоморфизмов. Похоже, что для того чтобы получить какие-то результаты в этом направлении, требуются также оценки для коэффициентов форм, определяющих комплексную структуру на многообразии универсальных накрывающих.

В настоящей статье мы исследуем почти комплексную структуру на этом многообразии и даём оценки всех производных функций μ и c . Основным результатом — это следующая теорема.

Теорема 1. Пусть M — компактное комплексное многообразие и \mathcal{F} — аналитическое слоение с особенностями на M . Предположим, что на касательном расслоении $T_{\mathcal{F}}$ существует метрика отрицательной кривизны. Предположим также, что особое множество Σ состоит из изолированных точек, эти особые точки невырождены и векторное поле, локально определяющее \mathcal{F} в каждой особой точке, аналитически линеаризуемо, а линейная часть диагонализирована. Пусть \widehat{M} — многообразие универсальных накрывающих с базой B . Тогда комплексная структура на \widehat{M} биголоморфно эквивалентна почти комплексной структуре на произведении $B \times D$, локально по базе определённой формами

$$d\zeta = \{d\zeta_j\}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \omega = dw + \mu d\bar{w} + \langle c, d\bar{\zeta} \rangle.$$

Здесь μ и c — гладкие функция и вектор-функция соответственно на $B \times D$. Для функции μ выполняется оценка

$$|\mu| \leq b < 1, \quad (0.1)$$

Для любого мультииндекса $(k) = (k_w, k_{\bar{w}})$, $|k| = k_w + k_{\bar{w}}$, выполняется оценка

$$\frac{\partial^{|k|} \mu}{\partial^{k_w} w \partial^{k_{\bar{w}}} \bar{w}} \leq C(1 - |w|)^{-|k|}. \quad (0.2)$$

Для любого мультииндекса

$$(k) = (k_1, \dots, k_{n-1}, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{n-1}, k_w, k_{\bar{w}}),$$

$$|k| = k_1 + \dots + k_{n-1} + \bar{k}_1 + \dots + \bar{k}_{n-1} + k_w + k_{\bar{w}},$$

выполняются оценки

$$\frac{\partial^{|k|} \mu}{\partial^{k_1} \zeta_1 \dots \partial^{k_{n-1}} \zeta_{n-1} \partial^{\bar{k}_1} \bar{\zeta}_1 \dots \partial^{\bar{k}_{n-1}} \bar{\zeta}_{n-1} \partial^{k_w} w \partial^{k_{\bar{w}}} \bar{w}} \leq M(1 - |w|)^{-(A|k|^4 + 1)}, \quad (0.3)$$

$$\frac{\partial^{|k|} c}{\partial^{k_1} \zeta_1 \dots \partial^{k_{n-1}} \zeta_{n-1} \partial^{\bar{k}_1} \bar{\zeta}_1 \dots \partial^{\bar{k}_{n-1}} \bar{\zeta}_{n-1} \partial^{k_w} w \partial^{k_{\bar{w}}} \bar{w}} \leq M(1 - |w|)^{-A(|k|^4 + 1)}. \quad (0.4)$$

Оценки (0.1)–(0.4) равномерны на $B \times D$, константы C , M зависят только от (k) , A не зависит от (k) .

В условиях теоремы слои слоения являются гиперболическими (см. [12], достаточно, чтобы особые точки были невырожденными и на $T_{\mathcal{F}}$ имелась метрика отрицательной кривизны). Утверждение теоремы локально по базе, и в дальнейшем мы будем считать базу полидиском.

В доказательстве теоремы используются некоторые результаты статьи [13]. Так как главный результат, сформулированный в [13], некорректен, мы предпочитаем дать здесь независимое изложение в §§ 1 и 2. Главное отличие в § 1 в том, что мы рассматриваем здесь слоения с отрицательным касательным расслоением на компактных многообразиях, а не только на \mathbb{CP}^n . В § 2 мы даём оценки всех производных вдоль слоёв для коэффициента μ , а не только оценку его модуля. После этого, в §§ 3 и 4, мы доказываем оценки для производных коэффициентов форм, определяющих почти комплексную структуру, в направлениях, трансверсальных слоям.

§ 1. МЕТРИКИ НА СЛОЕНИЯХ

Пусть \mathcal{F} — аналитическое слоение на комплексном многообразии M . Пусть $T_{\mathcal{F}}$ — касательное расслоение для этого слоения и пусть $T_{\mathcal{F}}^*$ — двойственное расслоение. Для некоторых естественных классов слоений на $T_{\mathcal{F}}$ имеется метрика отрицательной кривизны. Такая метрика индуцирует метрику отрицательной кривизны на слоях слоения. Это верно, например, если $T_{\mathcal{F}}^*$ обилён, и в частности, для слоений на \mathbb{CP}^n . Чтобы объяснить, как определяется такая метрика, мы рассмотрим последний случай.

Пусть x_0, \dots, x_n — однородные координаты на \mathbb{CP}^n и

$$z_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad \dots, \quad z_n = \frac{x_n}{x_0}$$

— координаты в аффинной области $\{x_0 \neq 0\}$. Слоение класса \mathcal{B}_d на \mathbb{CP}^n — это слоение, которое в каждой аффинной карте определяется векторным полем степени не выше d , $d \geq 2$. В частности, в области $\{x_0 \neq 0\}$ оно определяется векторным полем

$$X = X_{(0)} + X_{(1)} + \dots + X_{(d-1)} + X_{((d-1)^*)} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right), \quad (1.1)$$

где $X_{(k)}$ — k -я однородная компонента поля X и $X_{((d-1)^*)}$ — однородный многочлен степени $d-1$. Эквивалентно, это слоение можно определить как радиальную проекцию слоения на \mathbb{C}^{n+1} , определённого однородным векторным полем степени $d-1$:

$$Y = H_0(x) \frac{\partial}{\partial x_0} + \dots + H_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (1.2)$$

В карте $z = x/x_0$ коэффициенты векторного поля X , задающего это слоение на \mathbb{C}^n , равны

$$P_i(z) = H_i(1, z) - z_i H_0(1, z).$$

В этом случае $T_{\mathcal{F}}^* = (d-1)H$, где H — дивизор гиперплоскости на \mathbb{CP}^n . Мы определим метрику отрицательной кривизны на слоях явным образом.

Далее мы обозначаем $\langle x, y \rangle$ скалярное произведение $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ или $x_0 y_0 + \dots + x_n y_n$ в зависимости от контекста. Пусть Σ — множество особых точек слоения. В случае общего положения Σ — дискретное множество точек. Введём на $\mathbb{CP}^n \setminus \Sigma$ следующую метрику (здесь x — однородные координаты):

$$g = F(x) \frac{|x|^2 \langle dx, d\bar{x} \rangle - \langle \bar{x}, dx \rangle \langle x, d\bar{x} \rangle}{|x|^2 \langle Y, \bar{Y} \rangle - \langle \bar{x}, Y \rangle \langle x, \bar{Y} \rangle}. \quad (1.3)$$

Здесь F — вещественная положительная функция на дополнении в \mathbb{C}^{n+1} к прообразу особого множества Σ . Эта функция не равна нулю нигде, кроме начала координат, и обладает следующим свойством:

$$F(ax) = |a|^{2(d-2)} F(x). \quad (1.4)$$

В карте z метрика g имеет вид

$$g = f(z) \frac{(1 + |z|^2) \langle dz, d\bar{z} \rangle - \langle \bar{z}, dz \rangle \langle z, d\bar{z} \rangle}{(1 + |z|^2) \langle X, \bar{X} \rangle - \langle \bar{z}, X \rangle \langle z, \bar{X} \rangle}. \quad (1.5)$$

Здесь $f(z) = F(1, z)$. Если мы введём форму

$$h = (1 + |z|^2) \langle dz, d\bar{z} \rangle - \langle \bar{z}, dz \rangle \langle z, d\bar{z} \rangle,$$

мы сможем записать метрику (1.5) в виде

$$g = f(z) \frac{h}{h(X)}. \quad (1.6)$$

Кривизна этой метрики, суженной на слой, равна

$$K_g(t) = -\frac{2}{f(t)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}} [\ln f(t)], \quad (1.7)$$

где t — локальная голоморфная координата на слое.

Мы накладываем следующее условие на функцию F :

а) для каждой аффинной карты U_j соответствующая функция

$$f_j(z) = F(z_1, \dots, 1, \dots, z_n), \quad z_k = \frac{x_k}{x_j},$$

такова, что функция $\ln f_j$ строго плюрисубгармонична.

В этом случае кривизна (1.7) отрицательна.

Пример. Положим при $d \geq 3$

$$F(x) = \sum_{j=0}^n |x_j|^2 \sum_{j=0}^n |x_j^{d-3}|^2. \quad (1.8)$$

Проверка условия а). В карте z соответствующая функция f имеет вид

$$f(z) = (1 + l_1(z))(1 + l_2(z)),$$

где

$$l_1(z) = z\bar{z}, \quad l_2(z) = \sum_{j=1}^n |z_j^{d-3}|^2.$$

Пусть L_φ — форма Леви функции φ . Тогда

$$\begin{aligned} L_{\ln f} &= f^{-2} (f L_f - \partial f \bar{\partial} f) = \\ &= f^{-2} \{ (1 + l_1)(1 + l_2) [(1 + l_2) L_{l_1} + 2 \operatorname{Re}(\partial l_1 \bar{\partial} l_2) + (1 + l_1) L_{l_2}] - \\ &\quad - |(1 + l_2) \partial l_1 + (1 + l_1) \partial l_2|^2 \} = \\ &= f^{-2} \{ (1 + l_1)(1 + l_2) [(1 + l_2) L_{l_1} + (1 + l_1) L_{l_2}] - |(1 + l_2) \partial l_1|^2 - |(1 + l_1) \partial l_2|^2 \}. \end{aligned}$$

Мы получаем с помощью неравенства Шварца:

$$(1 + l_1(z)) L_{l_1}(z)(\zeta) - |\partial l_1(z)(\zeta)|^2 = \zeta \bar{\zeta} + |z|^2 |\zeta|^2 - |(\bar{z} \zeta)|^2 \geq \zeta \bar{\zeta}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} (1 + l_2(z)) L_{l_2}(z)(\zeta) - |\partial l_2(z)(\zeta)|^2 &= \\ &= (d-3)^2 \left(\sum_{j=1}^n |z_j^{d-3} \zeta_j|^2 + \sum_{j=1}^n |z_j^{d-3}|^2 \sum_{j=1}^n |z_j^{d-4} \zeta_j|^2 - \sum_{j=1}^n |\bar{z}_j^{d-3} z_j^{d-4} \zeta_j|^2 \right) \geq \\ &\geq (d-3)^2 \sum_{j=1}^n |z_j^{d-3}|^2 \cdot |\zeta_j|^2, \end{aligned}$$

также по неравенству Шварца, так как последнее слагаемое — это скалярное произведение векторов $(\bar{z}_1^{d-3}, \dots, \bar{z}_n^{d-3})$ и $(z_1^{d-4} \zeta_1, \dots, z_n^{d-4} \zeta_n)$. \square

Теперь мы возвращаемся к общему случаю слоений с отрицательным касательным расслоением. Следующая теорема — это некоторое улучшение главного результата статьи [12]. Мы модифицируем метрику в окрестности особых точек Σ так, что кривизна становится отделённой от нуля. В следующей теореме, в дополнение к этому, метрика является гладкой, и кривизна равномерно ограничена.

Теорема 2. Пусть у нас имеется слоение \mathcal{F} на компактном комплексном многообразии M . Предположим, что на $T_{\mathcal{F}}$ имеется метрика отрицательной кривизны. Предположим, что все особые точки \mathcal{F} невырождены, что векторное поле X_p , определяющее слоение в окрестности особой точки p , аналитически линеаризуемо и что его линейная часть диагонализуема. Тогда существует C^∞ -гладкая метрика G на $M \setminus \Sigma$, такая что для любой особой точки p в некоторой её окрестности V_p она имеет вид

$$G = \exp(u)f(w)\frac{h}{h(X)}, \quad (1.9)$$

где h — некоторая эрмитова метрика на M , u — плюрисубгармоническая функция на V_p и функция f имеет вид

$$f(w) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\ln^2(|w_i|^2)}, \quad (1.10)$$

где w — карта, линеаризующая векторное поле X_p в точке p .

Эта метрика обладает свойствами:

- 1) существуют константы $C_0 < 0$, $C_1 > -\infty$ такие, что $C_1 < K_G < C_0 < 0$, где K_G — кривизна на слоях,
- 2) G полна на слоях.

Далее мы не пишем индекс p у U_p или V_p , когда рассматриваем окрестность особой точки p . Нам нужно определение ([12]).

Определение 1. Пусть U — окрестность точки p на некотором комплексном многообразии M , и пусть g — непрерывная эрмитова метрика на $U \setminus p$. Мы говорим, что метрика g полна в p , если любой непрерывный путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$, такой что $\gamma[0, 1) \subset U \setminus p$ и $\gamma(1) = p$, имеет бесконечную длину:

$$l_g(\gamma) = \int_{\gamma} g^{1/2} = \infty.$$

Отметим, что метрика G на $M \setminus \Sigma$ полна тогда и только тогда, когда она полна во всех точках Σ .

Рассмотрим локальную ситуацию. Пусть X — голоморфное векторное поле, задающее слоение на $B_r := \{w \in \mathbb{C}^n : |w| < r\}$, w — локальная голоморфная карта в окрестности точки p , $w(p) = 0$. Предположим, что $0 \in B_r$ является единственной особой точкой поля X в B_r , эта особая точка невырождена, поле X в нуле аналитически линеаризуемо и линейная часть диагонализуема.

Пусть a_1, \dots, a_n — собственные векторы этой линейной части. В дальнейшем мы предполагаем, что собственные векторы направлены вдоль координатных осей и что $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ (1 на k -й позиции) — собственный вектор с собственным значением λ_k , то есть $X_k = \lambda_k w_k + o(|w|)$. Пусть h — гладкая эрмитова метрика на B_r и u — плюригармоническая функция на B_r . Пусть t — голоморфная координата на слое, $w(t)$ — решение уравнения $dw/dt = X[w(t)]$. Кривизна слоёв для метрики (1.9) равна

$$K_G(w) = -\frac{2}{\exp(u)f(w)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}} [\ln f(w)]. \quad (1.11)$$

Кривизна отрицательна, если функция $\ln f$ строго плюрисубгармонична.

Лемма 1. *Предположим, что векторное поле X аналитически линеаризуемо и линейная часть диагонализирована в особой точке. Пусть w — диагонализующая карта. Пусть у нас имеется метрика вида (1.9), и пусть $f(w)$ — соответствующая функция из (1.9). Рассмотрим два случая.*

Случай 1:

$$f(w) = f_1(w) = \frac{1}{\ln^4(|w|^2)}. \quad (1.12)$$

В этом случае функция $\ln f_1$ строго плюрисубгармонична в проколотом шаре $0 < |w| < 1$ и соответствующая метрика имеет отрицательную кривизну.

Случай 2:

$$f(w) = f_2(w) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\ln^2(|w_i|^2)}. \quad (1.13)$$

Тогда функция $\ln f_2$ строго плюрисубгармонична для таких $w \neq 0$, для которых $|w_i| < 1$ для всех i , и кривизна слоёв в метрике μ равномерно отделена от нуля и от $-\infty$ в любой области вида $0 < |w| \leq r$, $0 < r < 1$. Метрика является полной в нуле.

Доказательство. Обозначим $v_i = |w_i|^2$, $v = |w|^2$. Для функции $f(v_1, \dots, v_n)$ значение формы Леви функции $\ln f$ на векторе Y равно

$$\begin{aligned} L_{\ln f}(w)(Y) = \frac{1}{f} \left(\sum_i f_{v_i} |Y_i|^2 + \sum_i f_{v_i^2} |\bar{w}_i Y_i|^2 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i \neq j} f_{v_i v_j} \operatorname{Re}[(\bar{w}_i w_j Y_i \bar{Y}_j)] - f^{-1} \left| \sum_i f_{v_i} \bar{w}_i Y_i \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Аналогично для функции $f(v)$ значение формы Леви равно

$$L_{\ln f}(w)(Y) = \frac{1}{f} (f_v |Y|^2 + f_{v^2} |\langle \bar{w}, Y \rangle|^2 - f^{-1} |f_v \langle \bar{w}, Y \rangle|^2). \quad (1.15)$$

Рассмотрим случай 1. Для функции (1.12) при $0 < |w| < 1$ выражение в скобках в равенстве (1.15) равно

$$\begin{aligned} -\frac{4}{\ln^5(|w|^2)} \frac{|Y|^2}{|w|^2} + \frac{4}{\ln^5(|w|^2)} \frac{|\langle \bar{w}, Y \rangle|^2}{|w|^4} + \frac{20}{\ln^6(|w|^2)} \frac{|\langle \bar{w}, Y \rangle|^2}{|w|^4} - \frac{16}{\ln^6(|w|^2)} \frac{|\langle \bar{w}, Y \rangle|^2}{|w|^4} = \\ = \frac{4}{\ln^5(|w|^2)} \frac{|w|^2 |Y|^2 - |\langle \bar{w}, Y \rangle|^2}{|w|^4} + \frac{4}{\ln^6(|w|^2)} \frac{|\langle \bar{w}, Y \rangle|^2}{|w|^4}. \end{aligned}$$

(Мы использовали неравенство $|w| < 1$ в последнем переходе.) Эта форма всегда положительна из-за неравенства Шварца $|w|^2|Y|^2 - |\langle \bar{w}, Y \rangle|^2 \geq 0$.

Рассмотрим теперь случай 2. Обозначим $x_i = 1/\ln(|w_i|^2)$. Вычисляя форму в скобках в равенстве (1.14) для функции (1.13), получаем

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{i=1}^n x_i^3 \frac{|Y_i|^2}{|w_i|^2} + 2 \sum_{i=1}^n x_i^3 \frac{|\bar{w}_i Y_i|^2}{|w_i|^4} + 6 \sum_{i=1}^n x_i^4 \frac{|\bar{w}_i Y_i|^2}{|w_i|^4} - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{(-1)} \left| \sum_{i=1}^n x_i^3 \frac{\bar{w}_i Y_i}{|w_i|^2} \right|^2 = \\ & = 6 \sum_{i=1}^n x_i^4 \frac{|Y_i|^2}{|w_i|^2} - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{(-1)} \left| \sum_{i=1}^n x_i^3 \frac{Y_i}{w_i} \right|^2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Неравенство Шварца, применённое к векторам (x_1, \dots, x_n) и $\left(\frac{x_1^2 Y_1}{w_1}, \dots, \frac{x_n^2 Y_n}{w_n} \right)$, даёт:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^4 \frac{|Y_i|^2}{|w_i|^2} \geq \left| \sum_{i=1}^n x_i^3 \frac{Y_i}{w_i} \right|^2.$$

Следовательно, выражение в скобках в (1.14) не меньше, чем

$$2 \sum_{i=1}^n x_i^4 \frac{|Y_i|^2}{|w_i|^2}.$$

Таким образом, функция (1.13) строго плюрисубгармонична при $|w| > 0$ и $|w_i| < 1$.

Оценим кривизну метрики (1.9) с $f = f_2$. Вычислим форму Леви на векторе $X = (X_1, \dots, X_n)$, где $X_i = \lambda_i w_i$. Принимая во внимание (1.16), мы получаем

$$-\frac{12}{\exp(u)} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4 |\lambda_i|^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2} \leq K_\mu(w) \leq -\frac{4}{\exp(u)} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4 |\lambda_i|^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2}.$$

Существование равномерной оценки кривизны получается из следующих очевидных неравенств:

$$\frac{\min |\lambda_i|^2}{2n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4 |\lambda_i|^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2} \leq \max |\lambda_i|^2.$$

Теперь докажем последнее утверждение леммы. Существует константа $C < 1$, такая что для каждого вектора V верно неравенство $C^{-1}|V|^2 < h_w(v) < C|v|^2$, где h_w — это метрика h в точке w . Как следствие, получаем

$$G_w(V) = \exp(u) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\ln^2(|w_i|^2)} \frac{h_w(V)}{h_w(X(w))} \geq -b \frac{|V|^2}{|w|^2 \ln^2 |w|}$$

для некоторого $b > 0$. Метрика $\frac{|dw|^2}{|w|^2 \ln^2 |w|}$ полна в нуле. □

Теперь мы зададим метрику на $M \setminus \Sigma$, такую что её ограничение на слои имеет отрицательную кривизну. После этого мы склеим эту глобально определённую метрику с локальными метриками (1.9), определёнными в окрестностях особых точек. В этой конструкции мы следуем работе [12] с некоторыми модификациями.

Пусть h — некоторая фиксированная C^∞ -гладкая эрмитова метрика на M . Пусть ν также C^∞ -гладкая метрика отрицательной кривизны на $T_{\mathcal{F}}$. Зафиксируем открытое покрытие U_j многообразия M и наборы векторных полей X_j и функций f_{ij} , $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, такие что:

- 1) X_j — голоморфное векторное поле на U_j , задающее слоение $\mathcal{F}|_{U_j}$,
- 2) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ и $X_j = f_{ij}X_i$ на $U_i \cap U_j$.

Расслоение $T_{\mathcal{F}}$ можно определить как фактор:

$$T_{\mathcal{F}} = \sqcup(U_j \times \mathbb{C}) / \simeq,$$

где \sqcup обозначает несвязное объединение и \simeq — отношение эквивалентности на $\sqcup(U_j \times \mathbb{C})$:

$$(p, v_i) \simeq (q, v_j) \iff (p, v_i) \in U_i \times \mathbb{C}, \quad (q, v_j) \in U_j \times \mathbb{C}, \\ p = q \quad \text{и} \quad v_i = f_{ij}(p)v_j. \quad (1.17)$$

Для каждого j определим $f_j: U_j \rightarrow (0, +\infty)$ как функцию $f_j(p) = \nu(p, 1_j)$, где 1_j обозначает сечение $T_{\mathcal{F}}$, которое в тривиализации $U_j \times \mathbb{C}$ равно $1_j(p) \equiv 1$. Из (1.17) следует, что при $p \in U_i \cap U_j$ точка $(p, 1) \in U_j \times \mathbb{C}$ эквивалентна $(p, f_{ij}(p)) \in U_i \times \mathbb{C}$. Это значит, что $1_j = f_{ij}1_i$ на $U_i \cap U_j$. Мы получаем

$$f_j(p) = \nu(p, 1_j(p)) = \nu(p, f_{ij}(p)1_i(p)) = |f_{ij}|^2 f_i(p) \Rightarrow f_j = |f_{ij}|^2 f_i \quad (1.18)$$

на $U_i \cap U_j$. Теперь рассмотрим эрмитову метрику на $U_j \setminus \Sigma$, определённую выражением

$$g_j = f_j \frac{h}{h(X_j)}. \quad (1.19)$$

Так как $X_j = f_{ij}X_i$ на $U_i \cap U_j$, мы получаем, используя (1.18):

$$g_j = |f_{ij}|^2 f_i \frac{h}{h(f_{ij}X_i)} = f_i \frac{h}{h(X_i)} = g_i$$

на $U_i \cap U_j \setminus \Sigma$. Отсюда следует, что можно склеить локальные эрмитовы метрики g_j и получить глобальную метрику g на $M \setminus \Sigma$, такую что $g|_{U_j \setminus \Sigma} = g_j$. Напомним теперь, что ν имеет отрицательную кривизну. Это значит, что $\ln f_j$ строго плюрисубгармоничен при всех j (см., например, [12]). Метрика (1.19) имеет форму (1.9) в каждой области U_j и, согласно (1.11), имеет отрицательную кривизну.

Теперь мы модифицируем метрику g в окрестности особой точки p . В окрестности U точки p мы выберем координатную систему w , в которой p соответствует точке $\{w = 0\}$. Пусть X — голоморфное векторное поле, задающее $\mathcal{F}|_U$, так что $g = f \frac{h}{h(X_j)}$ на U . Функция f является C^∞ -гладкой, и $\ln f$

строго плюрисубгармоничен. Таким образом, в координате w мы можем написать

$$\ln f(w) = v(w) + L(w) + R(w),$$

где $v(w) = \ln f(0) + p(w) + \bar{p}(w)$ и p — некоторый комплексный многочлен степени 2, L имеет положительную форму Леви и $R(w) = o(w^2)$. После, если нужно, линейной замены координаты, можно предполагать, что $L(w) = 2|w|^2$. Определим другую карту \tilde{w} , в которой поле X диагонально, и определим

$$\tilde{f}_c(w) = c \sum_{i=1}^n \frac{1}{\ln^2(|\tilde{w}_i|^2)}. \quad (1.20)$$

Константу c мы выберем позднее.

Нам нужно склеить метрику $\tilde{f}_c \frac{h}{h(X)}$ и глобальную метрику g . Пусть

$$l_\varepsilon(w) = \ln f(0) + \varepsilon + 2\operatorname{Re}[p(w)] + \frac{1}{2}L(w) = \ln f(0) + \varepsilon + 2\operatorname{Re}[p(w)] + |w|^2.$$

Для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдутся $0 < r_1 < r_2 < r_3 < 1$ такие, что

$$\ln f(w) > l_\varepsilon(w) \text{ при } r_2 < |w| < r_3 \text{ и } \ln f(w) < l_\varepsilon(w) \text{ при } |w| < r_1. \quad (*)$$

Можно выбрать эти r_1, r_2, r_3 произвольно малыми, если ε стремится к 0.

Доказательство. Так как $R(w) = o(|w|^2)$, существует $0 < r_3 < 1$, такое что $|R(w)| < |w|^2/2$ при $|w| \leq r_3$. Положим

$$\delta(w) = \ln f(w) - l_\varepsilon(w) = |w|^2 + R(w) - \varepsilon.$$

При $|w| < r_3$ получаем

$$\frac{|w|^2}{2} - \varepsilon \leq |w|^2 - |R(w)| - \varepsilon \leq \delta(w) \leq |w|^2 + |R(w)| - \varepsilon \leq \frac{3|w|^2}{2} - \varepsilon.$$

Если мы возьмём $r_2 = r_3/2$ и $\varepsilon < r_3^2/8$, то, при $r_2 < |w| < r_3$, мы получим, что

$$\delta(w) \geq \frac{|w|^2}{2} - \varepsilon \geq \frac{r_3^2}{8} - \varepsilon > 0.$$

Это значит, что $\ln f(w) > l_\varepsilon(w)$ при $r_2 < |w| < r_3$. С другой стороны, если $r_1 < (2\varepsilon/3)^{1/2} < r_2$, то, при $|w| < r_1$:

$$\delta(w) \leq \frac{3|w|^2}{2} - \varepsilon < \frac{3r_1^2}{2} - \varepsilon < 0$$

и, таким образом, $\ln f(w) < l_\varepsilon(w)$ всюду, где $|w| < r_1$. □

Определим $k(w)$ следующим образом:

$$k(w) = \begin{cases} \exp(l_\varepsilon(w)), & |w| < r_1, \\ \max\{\exp(l_\varepsilon(w)), f(w)\}, & r_1 \leq |w| \leq r_2, \\ f(w), & |w| > r_2. \end{cases}$$

Функция k непрерывна и $\ln k$ строго плюрисубгармоничен.

Теперь фиксируем $0 < r_0 < r_1$ и определим

$$\varphi(t) = (\ln t)^{-4}, \quad \varphi_{b,\alpha}(t) = b\varphi\left(\left(\frac{t}{r_0^{2(\alpha-1)/\alpha}}\right)^\alpha\right) = b\varphi\left(\frac{t^\alpha}{r_0^{2(\alpha-1)}}\right).$$

Мы можем выбрать b, δ и $0 < \alpha < 1$ так, что

$$\begin{aligned} \varphi_{b,\alpha}(r_0^2) &= e^{r_0^2}, \\ \varphi_{b,\alpha}(t) &\leq e^t, \quad \text{если } r_0^2 \leq t \leq r_0^2 + \delta, \quad \text{и} \\ \varphi_{b,\alpha}(t) &\geq e^t, \quad \text{если } r_0^2 - \delta \leq t \leq r_0^2. \end{aligned} \quad (**)$$

Доказательство. Пусть $b > 0$ таково, что $b\varphi(r_0^2) = e^{r_0^2}$. Заметим, что

$$\varphi_{b,\alpha}(r_0^2) = b\varphi\left(\left(\frac{r_0^2}{r_0^{2(\alpha-1)/\alpha}}\right)^\alpha\right) = b\varphi(r_0^2) = e^{r_0^2}.$$

С другой стороны,

$$\varphi'_{b,\alpha}(t) = \frac{b\alpha t^{\alpha-1}}{r_0^{2(\alpha-1)}} \varphi'\left(\frac{t^\alpha}{r_0^{2(\alpha-1)}}\right).$$

Следовательно,

$$\varphi'_{b,\alpha}(r_0^2) = b\alpha\varphi'(r_0^2) = b\alpha \frac{4}{r_0^2 |\ln^5(r_0^2)|} = b\alpha \frac{4}{r_0^2 |\ln(r_0^2)|} \varphi(r_0^2) = e^{r_0^2} \frac{4\alpha}{r_0^2 |\ln(r_0^2)|}.$$

Эта величина положительна, и если α достаточно мала, то

$$\frac{4\alpha}{r_0^2 |\ln(r_0^2)|} < 1.$$

Следовательно,

$$0 < \varphi'_{b,\alpha}(r_0^2) < e^{r_0^2} = \frac{de^t}{dt} \Big|_{t=r_0^2}.$$

Отсюда следует утверждение (**). □

Функция

$$\varphi_{b,\alpha}(|w|^2) = \frac{b}{16\alpha^4} \frac{1}{\ln^4\left(\frac{|w|}{r_0^{(\alpha-1)/\alpha}}\right)} \quad (1.21)$$

— это функция f_1 из леммы 1 с точностью до линейной замены переменных.

Следовательно, функция $\ln \varphi_{b,\alpha}$ строго плюрисубгармонична.

Определим m таким образом:

$$m(w) = \begin{cases} \exp(|w|^2), & r_0 \leq |w| \leq r_1, \\ \varphi_{b,\alpha}(|w|^2), & |w| \leq r_0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна, и

$$m(w) = \max\{\exp(|w|^2), \varphi_{b,\alpha}(|w|^2)\},$$

если $r_0^2 - \delta \leq |w|^2 \leq r_0^2 + \delta$ для некоторого значения $\delta > 0$. Таким образом, функция $\ln m = \max\{|w|^2, \ln \varphi_{b,\alpha}(|w|^2)\}$ также плюрисубгармонична.

Теперь возьмём некоторое $c > 0$ и определим

$$q(w) = \max\{\tilde{f}_c(w), m(w)\}$$

при $|w| < r_1$, где \tilde{f}_c определена выражением (1.20). Функция (1.21) стремится к нулю при $|w| \rightarrow 0$ быстрее, чем \tilde{f}_c . Следовательно, $q(w) = \tilde{f}_c(w)$ при $|w| < \delta_1$ для некоторого $\delta_1 > 0$. Если c достаточно мало, то, вдобавок, найдётся $\delta_2 > \delta_1$, такое что $q(w) = m(w)$, если только $\delta_1 < \delta_2 < |w| < r_1$. Константы δ_1, δ_2 можно считать произвольно малыми, если c достаточно мало. В частности, можно положить $\delta_2 < r_0$. Функция q непрерывна и функция $\ln q$ плюрисубгармонична.

Определим

$$n(w) = \begin{cases} k(w), & r_1 < |w| < r_3, \\ \exp(\varepsilon + v(w))q(w), & |w| \leq r_1. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна, потому что

$$k(w) = \exp(\varepsilon + v(w)) \exp(|w|^2) = \exp(\varepsilon + v(w))q(w)$$

при $|w| = r_1$. Также функция $\ln n(w) = \varepsilon + v(w) + \ln q(w)$ плюрисубгармонична, так как функция $\varepsilon + v(w)$ плюригармонична.

В некоторой окрестности точки p , содержащей шар B_{r_3} , определим метрику G :

$$G = n \frac{h}{h(X)} \text{ на } B_{r_3}, \quad G = g \text{ на } M \setminus B_{r_3}.$$

Эта метрика непрерывна, так как $n(w) = k(w) = f(w)$ при $|w| = r_2$.

Из леммы 1 следует, что такая метрика полна в окрестности нуля и её кривизна отрицательна и ограничена сверху и снизу некоторыми константами $c_1, c_2 < 0$. Заметим, что эта метрика является гладкой в некоторой окрестности нуля, фактически в проколоте шаре $0 < |w| < \delta_1$.

В шаре B_{r_3} функция \tilde{n} является плюрисубгармонической, по нашему построению, и непрерывной, но не обязательно гладкой. Она кусочно гладка и строго плюрисубгармонична везде, где она гладка. Мы применим следующий метод сглаживания. Пусть η — гладкая «шапочка», с носителем в единичном шаре и $\int \eta(\zeta) d\zeta = 1$. Зафиксируем некоторые $0 < \rho_1 < \delta_1 < r_3 < \rho_2$ и, при $\rho_1 < |w| < \rho_2$, определим сглаженную функцию:

$$\tilde{n}_\delta = \int \ln(n(w - \delta\zeta)) \eta(\zeta) d\zeta.$$

При любом w интеграл зависит только от значений функции $\ln(w')$ для $|w - w'| \leq \delta$. При достаточно малом δ функция $\tilde{n}_\delta(w)$ является C^2 -близкой к $\ln n(w)$. Мы можем гладко склеить \tilde{n}_δ и $\ln n$ внутри шара B_{ρ_2} так, что полученная функция будет совпадать с $\ln n$ при $|w| < \rho_1$ и при $|w| > \rho_2$. Мы получим функцию, которая будет гладкой и плюрисубгармонической. Мы аппроксимируем её строго плюрисубгармонической функцией \tilde{f} , совпадающей с $\ln n$ при $|w| < \rho_1$ и при $|w| > \rho_2$. Обозначим через Φ функцию $\exp \tilde{f}$.

Мы проделаем это построение во всех особых точках. Тем самым доказательство теоремы 1 окончено. \square

Построенная метрика в каждой области U_j имеет вид

$$G = \frac{\Phi h}{h(X)}.$$

Рассмотрим теперь ограничение нашей метрики на слой слоения. Предположим, что мы работаем в карте z на U_0 и что z_j — голоморфная координата на слоях в некоторой окрестности точки p , так что $X_j(z) \neq 0$ в этой окрестности. Мы можем представить слои как интегральные кривые системы

$$\frac{dz_k}{dz_j} = \frac{X_k(z)}{X_j(z)}, \quad k = 2, \dots, n.$$

Для метрики G , ограниченной на слой, мы получим выражение

$$G = \frac{\Phi(z)}{|X_j(z)|^2} dz_j d\bar{z}_j. \quad (1.22)$$

Коэффициент связности $\Gamma = \Gamma_{11}^1$ (в обычных обозначениях) — это

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial z_j} (\ln \Phi - \ln |X_j|^2) = \frac{\partial \Phi(X)}{\Phi} - \frac{\partial X_j(X)}{X_j^2}. \quad (1.23)$$

Здесь $\partial \Phi(X)$, $\partial X_j(X)$ — это значения форм $\partial \Phi$, ∂X_j на векторе X .

Кривизна равна

$$K = -2 \frac{|X_j|^2}{\Phi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}_j} = -\frac{2}{\Phi^3} (\Phi L_\Phi(X, \bar{X}) - |\partial \Phi(X)|^2), \quad (1.24)$$

где ΦL_Φ — форма Леви функции Φ . Кривизна инвариантна и не зависит от карты.

§ 2. Почти комплексная структура в геодезических координатах

Мы рассматриваем \widehat{M} — многообразие универсальных накрывающих слоёв с некоторой трансверсальной базой B . Предположим, что ζ — голоморфная карта на этой трансверсали и $w = v + iu$ — комплексная координата на слоях (эта координата не обязательно является голоморфной). Почти комплексную структуру на \widehat{M} можно определить при помощи $(1, 0)$ -форм:

$$d\zeta = \{d\zeta_j\}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (2.1)$$

$$\omega = dw + \mu d\bar{w} + \langle c, d\bar{\zeta} \rangle. \quad (2.2)$$

Пусть $t(u, v, \zeta)$ — локальная голоморфная координата на слоях. Тогда dt — голоморфная 1-форма:

$$dt = t_u du + t_v dv + \langle t_{\bar{\zeta}}, d\bar{\zeta} \rangle + \langle t_\zeta, d\zeta \rangle.$$

Чтобы свести это равенство к виду (2.2), нужно вычесть последний член и нормализовать коэффициент при dw . Мы получим

$$\mu = \frac{t_v + it_u}{t_v - it_u} = \frac{t_{\bar{w}}}{t_w}, \quad (2.3)$$

$$c = \frac{2t_{\bar{\zeta}}}{t_v - it_u} = \frac{t_{\bar{\zeta}}}{t_w}. \quad (2.4)$$

Легко видеть, что функции μ и c_j не зависят от выбора голоморфной координаты t .

Теперь мы рассмотрим слоение, удовлетворяющее теореме 1 с метрикой (1.9). По теореме Адамара — Картана мы имеем диффеоморфизм универсального накрытия слоя на \mathbb{C} при помощи экспоненциального отображения. Определим (u, v) как геодезические «полярные» координаты на слое: v — это длина геодезической с началом в нуле, то есть в точке пересечения слоя с трансверсалью B , и u — аргумент единичного вектора, касательного к геодезической в начале. Этот выбор координат согласован с обычной ориентацией: в этом случае сохраняющее ориентацию отображение $(v + iu) \mapsto (1 - e^{-v}) \exp(iu)$ переводит область $L^+ = \{0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < \infty\}$ в единичный круг. Мы получаем почти комплексную структуру на произведении $B \times L^+$.

Напомним теперь, что нашей задачей является доказательство теоремы 1 из введения. Как там уже было указано, её достаточно доказать локально по базе. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что B — шар, трансверсальный слоению, $D \subset \mathbb{C}$ — единичный круг с координатой w .

Оценка (0.1) означает, что наша почти комплексная структура «квазиконформна» на слоях. В этом параграфе мы докажем существование такой почти комплексной структуры и оценки (0.1), (0.2). В следующих параграфах мы докажем оценки (0.3), (0.4).

Сначала мы определим коэффициенты μ и c_j выражений (2.3), (2.4) в геодезических координатах. Можно предполагать, что база B трансверсальна к вектору $\partial/\partial z_1$. В тех точках, в которых z_1 является локальной голоморфной координатой на слоях, мы имеем уравнение для геодезических:

$$\frac{d^2 z_1}{dv^2} + \Gamma \left(\frac{dz_1}{dv} \right)^2 = 0, \quad (2.5)$$

$$z_1(0) = 0, \quad \frac{dz_1}{dv}(0) = e^{iu}. \quad (2.6)$$

Здесь коэффициент связности Γ относится к координате z_1 . В дальнейшем мы будем использовать обозначение

$$\nabla_{t_v} = \frac{d}{dv} + \Gamma \frac{dt}{dv},$$

где $t(v)$ — голоморфная координата «вдоль» геодезических и t_v — касательный вектор. Уравнение геодезических имеет вид

$$\frac{d^2 t}{dv^2} + \Gamma \left(\frac{dt}{dv} \right)^2 \equiv \nabla_{t_v} t_v = 0. \quad (2.7)$$

Здесь Γ относится к координате t . Нам понадобится также оператор $\nabla_{t_v}^2$. Принимая во внимание, что $t_{v^2} + \Gamma(t_v)^2 = 0$, мы получаем

$$\begin{aligned}\nabla_{t_v}^2 y &= \frac{d^2 y}{dv^2} + 2\Gamma t_v \frac{dy}{dv} + \frac{d\Gamma}{dv} t_v y + (\Gamma t_{v^2} + \Gamma^2(t_v)^2) y = \\ &= \frac{d^2 y}{dv^2} + 2\Gamma t_v \frac{dy}{dv} + (\Gamma_t t_v + \Gamma_{\bar{t}} \bar{t}_v) t_v y.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Рассмотрим теперь $z_{1,u}$ — производную координаты z_1 по начальному условию, или производную t_u в более общем случае. Мы получим «уравнение в вариациях», дифференцируя (2.5) по u . Это в точности уравнение Якоби для вариации геодезических:

$$\nabla_{t_v}^2 t_u + \Gamma_{\bar{t}} t_v (t_v \bar{t}_u - \bar{t}_v t_u) = 0. \quad (2.9)$$

Векторы t_v и t_u ортогональны в метрике G . Эта метрика конформна на слоях и, следовательно, $t_v \bar{t}_u + \bar{t}_v t_u = 0$. Это значит, что мы можем переписать (2.9) таким образом:

$$\nabla_{t_v}^2 t_u + \Gamma_{\bar{t}} t_v (t_v \bar{t}_u + \bar{t}_v t_u - 2\bar{t}_v t_u) = \nabla_{t_v}^2 t_u - 2\Gamma_{\bar{t}} |t_v|^2 t_u = 0. \quad (2.10)$$

Вектор t_v имеет единичную длину в нашей метрике. Если мы представим эту метрику в виде $G = g(t) dt d\bar{t}$, то, учитывая (1.24), мы можем написать:

$$2\Gamma_{\bar{t}} |t_v|^2 = \frac{2\Gamma_{\bar{t}}}{g} = -K,$$

где K — кривизна. Таким образом, мы можем переписать уравнение Якоби (2.10) в форме:

$$\nabla_{t_v}^2 t_u + K t_u = 0. \quad (2.11)$$

Представим t_u в виде

$$t_u = i\varphi t_v. \quad (2.12)$$

Так как t_u ортогонально t_v , получаем, что φ — вещественная скалярная функция. Позднее мы покажем, что $\varphi(v)$ положительна при $v > 0$. Уравнение (2.11) приводится к виду

$$\frac{d^2 \varphi}{dv^2} - k^2 \varphi = 0, \quad (2.13)$$

где $k = |K|^{1/2}$. Из условий (2.6) мы получаем начальные условия для $z_{1,u}$:

$$z_{1,u}(0) = 0, \quad \frac{dz_{1,u}}{dv(0)} = ie^{iu}.$$

Это значит, что начальные условия для φ имеют вид:

$$\varphi(0) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dv(0)} = 1. \quad (2.14)$$

Нам нужно оценить решение уравнения (2.13) с начальными условиями (2.14). Следующее предложение — это утверждение элементарной теории дифференциальных уравнений.

Предложение 1. Пусть в уравнении (2.13) функция $k(v)$ равномерно ограничена и равномерно отделена от нуля. Если $\varphi(v)$ — решение уравнения (2.13) с начальными условиями (2.14), то его можно представить в форме

$$\varphi(v) = e^{s(v)} - 1, \quad (2.15)$$

и для s выполняются оценки

$$0 < c_1 < \frac{ds}{dv} < c_2 < \infty \quad (2.16)$$

с некоторыми $c_1 < c_2$ при $v > 0$. Эти оценки зависят только от верхней и нижней границ для функции k .

Доказательство. Заметим, что $\varphi(v) > 0$ при $v > 0$. Действительно, множество $\{v > 0 \mid \varphi(v) > 0\}$ открыто и непусто, согласно (2.14), и, значит, включает некоторый интервал $[0, v_0)$. Из уравнения (2.13) следует, что $d^2\varphi/dv^2 > 0$ при $v < v_0$ (так как $d\varphi/dv(0) = 1$ согласно (2.14)). Следовательно, также и $d\varphi/dv > 0$ при $v < v_0$, функция φ возрастает и $\varphi(v_0) > 0$. Таким образом, множество $\{v > 0 \mid \varphi(v) > 0\}$ также и замкнуто. Теперь мы получаем из (2.13), что $d^2\varphi/dv^2 > 0$ и $d\varphi/dv > 0$ при $v > 0$. Следовательно, также и

$$\frac{d(\ln \varphi)}{dv} = \frac{\varphi^{-1}d\varphi}{dv} > 0.$$

Таким образом, мы можем представить решение $\varphi(v)$ в форме (2.15), и для s получаются следующие начальные условия:

$$s(0) = 0, \quad \frac{ds}{dv(0)} = \frac{d\varphi}{dv(0)} = 1. \quad (2.17)$$

Неравенство $d\varphi/dv > 0$ при $v > 0$ влечёт

$$\frac{ds(v)}{dv} > 0 \quad \text{при } v > 0.$$

Докажем теперь оценку (2.16). Обозначим $\psi = \frac{ds}{dv} - k$. Принимая во внимание начальные условия (2.17), мы получаем следующее уравнение для ψ :

$$\frac{d(k + \psi)}{dv} + \psi(k + \psi) + k\psi + k^2 \exp\left(-\int_0^v (k(t) + \psi(t)) dt\right) = 0. \quad (2.18)$$

Докажем правую оценку (2.16). Мы знаем, что $k < k_m$ для некоторого $k_m > 0$. Предположим, что $(k + \psi)(v_0) > \max\{1, k_m\}$. Тогда $\psi(v_0) > 0$, и, принимая во внимание второе начальное условие (2.17), мы видим, что производная $d(k + \psi)/dv$ должна быть положительной при некотором значении $v_1 \leq v_0$, таком что $\psi(v_1) > 0$. Все слагаемые, кроме первого, в (2.18) положительны в точке v_1 . Это значит, что первое слагаемое должно быть отрицательным — противоречие. Таким образом, правое неравенство (2.16) доказано для произвольного $c_2 > \max\{1, k_m\}$.

Теперь докажем левую оценку (2.16).

Утверждение 1. Пусть

$$a = \frac{1}{6(1+k_m)^2}, \quad b = \exp\left(-\frac{1}{12(1+k_m)^2}\right).$$

Тогда $k + \psi > 1/2$ на отрезке $[0, a]$ и

$$\exp\left(-\int_0^v (k + \psi)(t) dt\right) < b$$

для любого $v \geq a$.

Доказательство. Так как $k + \psi > 0$, принимая во внимание, что $k + \psi \leq \max\{1, k_m\}$, $k_m = \sup k$, мы получаем $|\psi| \leq 1 + k_m$, $|k + \psi| \leq 1 + k_m$. Следовательно, уравнение (2.18) даёт

$$\left|\frac{d(k + \psi)}{dv}\right| \leq 3(1 + k_m)^2.$$

Так как $(k + \psi)(0) = 1$, мы получаем, что $k + \psi > 1/2$ по крайней мере на отрезке $\left[0, \frac{1}{6(1+k_m)^2}\right]$. Следовательно, $\int_0^v (k + \psi(t)) dt$ вдоль этого отрезка больше, чем $\frac{1}{12(1+k_m)^2}$. Так как $(k + \psi)(v) > 0$ при $v > 0$, мы получаем утверждение 1. \square

Утверждение 2. Пусть a и b — такие, как выше, и $(1+b)/2 < \alpha < 1$. Предположим, что $v_0 > a$, $\psi(v_0) < -\alpha k(v_0)$. Тогда $d(k + \psi)/dv > 0$ при $v = v_0$.

Доказательство. Из неравенств $\psi < -\alpha k$, $k + \psi > 0$ следует, что $\alpha k < |\psi| < k$. Тем самым, согласно (2.18):

$$\frac{d(k + \psi)}{dv} = 2k|\psi| - \psi^2 - k^2 \exp\left(-\int_0^v (k + \psi(t)) dt\right) > 2\alpha k^2 - k^2(1+b) > 0. \quad \square$$

Теперь мы закончим доказательство предложения. Зафиксируем некоторое α , как в утверждении 2. Мы утверждаем, что левая оценка (2.16) выполняется для произвольного

$$c_1 < \min\left\{\frac{1}{2}, (1-\alpha) \inf k\right\} < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1-b) \inf k\right\}.$$

Действительно, пусть функция $k + \psi$ монотонна на каждом интервале (a, v_1) , (v_1, v_2) , \dots , (v_k, v_{k+1}) , \dots . Если $k + \psi$ возрастает на интервале (a, v_1) , то $k + \psi > 1/2$ на этом интервале по утверждению 1. Если $k + \psi$ убывает на некотором интервале (v_k, v_{k+1}) , то $k + \psi > (1-\alpha)k$ на этом интервале по утверждению 2. Следовательно, оценка $k + \psi > (1-\alpha) \inf k$ также выполняется на соседнем интервале (v_{k+1}, v_{k+2}) , где ψ возрастает. Число интервалов монотонности может быть бесконечным. В этом случае мы получим требуемую оценку по индукции. \square

Нам нужны также оценки производных функции s .

Предложение 2. Пусть $\varphi = e^s - 1$ — решение уравнения (2.13) с начальными условиями (2.14). Для любых k, l ($k \geq 0, l \geq 0$)

$$\left| \frac{\partial^{k+l} s}{\partial^k u \partial^l v} \right| < M e^{ks}, \quad (2.19)$$

где M зависит только от k, l .

Доказательство. Удобно ввести новую функцию \tilde{s} , такую что $e^{\tilde{s}} = e^s - 1$. Если мы докажем оценку, аналогичную (2.19) для \tilde{s} , мы докажем её также для s .

Действительно, предположим, что у нас есть оценки (2.19) для всех k, l , $k + l \leq m$, и аналогичные оценки для \tilde{s} . Пусть $k + l = m$. Покажем, что оценки (2.19) для $\tilde{s}_{u^k v^{l+1}}$ и $s_{u^k v^{l+1}}$ эквивалентны. Мы имеем:

$$e^{\tilde{s}} \left(\tilde{s}_{u^k v^{l+1}} + \sum_{(k_i, l_i, r_i)} \tilde{s}_{u^{k_1}, v^{l_1}}^{r_1} \dots \tilde{s}_{u^{k_s}, v^{l_s}}^{r_s} \right) = e^s \left(s_{u^k v^{l+1}} + \sum_{(k_i, l_i, r_i)} s_{u^{k_1}, v^{l_1}}^{r_1} \dots s_{u^{k_s}, v^{l_s}}^{r_s} \right),$$

где суммы берутся по некоторым наборам $((k_1, l_1, r_1), \dots, (k_s, l_s, r_s))$, таким что $k_i \leq k, l_i \leq l$ для всех k_i, l_i и $r_1 k_1 + \dots + r_s k_s = k, r_1 l_1 + \dots + r_s l_s = l + 1$. По индукции мы получаем

$$s_{u^k v^{l+1}} = e^{\tilde{s}-s} \tilde{s}_{u^k v^{l+1}} + e^{\tilde{s}-s} O(e^{ks}) + O(e^{ks}).$$

Так как $e^{\tilde{s}-s} = 1 - e^{-s}$, мы получаем эквивалентность оценок (2.19) для $\tilde{s}_{u^k v^{l+1}}$ и $s_{u^k v^{l+1}}$.

Аналогично

$$e^{\tilde{s}} \left(\tilde{s}_{u^{k+1} v^l} + \sum_{(k_i, l_i, r_i)} \tilde{s}_{u^{k_1}, v^{l_1}}^{r_1} \dots \tilde{s}_{u^{k_s}, v^{l_s}}^{r_s} \right) = e^s \left(s_{u^{k+1} v^l} + \sum_{(k_i, l_i, r_i)} s_{u^{k_1}, v^{l_1}}^{r_1} \dots s_{u^{k_s}, v^{l_s}}^{r_s} \right),$$

где суммы берутся по некоторым наборам $((k_1, l_1, r_1), \dots, (k_s, l_s, r_s))$, таким что $k_i \leq k, l_i \leq l$ для всех k_i, l_i и $r_1 k_1 + \dots + r_s k_s = k + 1, r_1 l_1 + \dots + r_s l_s = l$. После этого мы продолжаем, как выше.

Начиная доказательство оценок для \tilde{s} , мы рассмотрим сначала случай $k = 0$. Из (2.13) мы получаем уравнение для \tilde{s} :

$$\tilde{s}_{v^2} = -K - \tilde{s}_v^2. \quad (2.20)$$

Отсюда следует, что для $l \geq 2$

$$\tilde{s}_{v^l} = -K_{v^{l-2}} + P,$$

где P — многочлен от производных по v функции \tilde{s} порядка не выше $l - 1$. По индукции, достаточно доказать следующее

Утверждение 3. Для любого $l \geq 0$ производная K_{v^l} равномерно ограничена на $M \setminus \Sigma$.

Доказательство. Заметим сначала, что мы можем представить производную K_{v^l} как сумму слагаемых вида

$$\frac{\partial^{l_0 + \bar{l}_0} K}{\partial t^{l_0} \partial \bar{t}^{\bar{l}_0}} \frac{\partial^{l_1 + \bar{l}_1} \Gamma}{\partial t^{l_1} \partial \bar{t}^{\bar{l}_1}} \dots \frac{\partial^{l_p + \bar{l}_p} \Gamma}{\partial t^{l_p} \partial \bar{t}^{\bar{l}_p}} \frac{\partial^{m_1 + \bar{m}_1} \bar{\Gamma}}{\partial t^{m_1} \partial \bar{t}^{\bar{m}_1}} \dots \frac{\partial^{m_q + \bar{m}_q} \bar{\Gamma}}{\partial t^{m_q} \partial \bar{t}^{\bar{m}_q}} (t_v)^{l_v} (\bar{t}_v)^{\bar{l}_v} \quad (2.21)$$

для некоторых целых неотрицательных $p, q, l_0, \dots, l_p, m_1, \dots, m_q, \bar{l}_0, \dots, \bar{l}_p, \bar{m}_1, \dots, \bar{m}_q$, где индексы l_1, \dots, l_p необязательно все различны (то же самое верно для индексов m_i, \bar{l}_i и \bar{m}_i) и $l_0 + l_1 + \dots + l_p + m_1 + \dots + m_q + \bar{l}_0 + \bar{l}_1 + \dots + \bar{l}_p + \bar{m}_1 + \dots + \bar{m}_q + p + q = l_v + \bar{l}_v = l$.

Это легко показать по индукции, рассматривая производные выражения (2.21). Производная множителя $\frac{\partial^{l_0+\bar{l}_0} K}{\partial t^{l_0} \partial \bar{t}^{\bar{l}_0}}$ равна

$$\left(\frac{\partial^{l_0+\bar{l}_0+1} K}{\partial t^{l_0+1} \partial \bar{t}^{\bar{l}_0}} \right) t_v + \left(\frac{\partial^{l_0+\bar{l}_0+1} K}{\partial t^{l_0} \partial \bar{t}^{\bar{l}_0+1}} \right) \bar{t}_v.$$

Аналогично

$$\left(\frac{\partial^{l_i+\bar{l}_i} \Gamma}{\partial t^{l_i} \partial \bar{t}^{\bar{l}_i}} \right)_v = \left(\frac{\partial^{l_i+\bar{l}_i+1} \Gamma}{\partial t^{l_i+1} \partial \bar{t}^{\bar{l}_i}} \right) t_v + \left(\frac{\partial^{l_i+\bar{l}_i+1} \Gamma}{\partial t^{l_i} \partial \bar{t}^{\bar{l}_i+1}} \right) \bar{t}_v.$$

Наконец,

$$[(t_v)^r]_v = r(t_v)^{r-1} t_v = -r\Gamma(t_v)^{r+1} \quad \text{и} \quad [(\bar{t}_v)^r]_v = -r\bar{\Gamma}(\bar{t}_v)^{r+1}.$$

Мы получаем сумму слагаемых вида (2.21), где l заменено на $l+1$.

Очевидно, что величина $|K_{v^l}|$ равномерно ограничена на любом компактном подмножестве в $\mathbb{C}P^n \setminus \Sigma$, и нам нужно оценить её только в окрестностях особых точек. Пусть p — такая точка и V — её окрестность, такая что в ней существует линеаризующая карта w , то есть мы можем записать задающее слоение векторное поле X в виде

$$X_m = \lambda_m w_m,$$

где m нумерует компоненты векторного поля. Мы можем покрыть окрестность V конечным числом областей V_j , которые являются насыщениями некоторых областей на трансверсальных гиперплоскостях $w_j = \text{const}$ посредством слоёв.

В каждой такой области V_j после, если нужно, перенумерации компонент, мы можем написать:

$$w_m = \xi_{j,m} e^{i\lambda_m t_j}, \quad m \leq n-1, \quad w_n = C_j e^{i\lambda_n t_j}. \quad (2.22)$$

Здесь C_j — константа и $\xi_{j,m}$ — координата на трансверсали, индекс j нумерует области V_j . Введём в каждой такой области карту (ξ_j, t_j) , где ξ_j — карта на трансверсали, t_j — карта на слое из (2.22). Мы будем называть последнюю *логарифмической координатой* на слое. Рассмотрим одну из таких карт (ξ, t) . Далее мы будем опускать индекс j . Из (2.22) следует, что $w_m \rightarrow 0$, когда $\text{Im}(\lambda_m t) \rightarrow +\infty$. Таким образом, нам нужно оценить слагаемые вида (2.21) при больших t .

Метрика, ограниченная на слой, имеет вид (мы используем (1.9), (1.10) и (2.22)):

$$G = g(\xi, t) \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{(\ln |\xi_m| - \text{Im}(\lambda_m t))^2} + \frac{1}{(\ln |C| - \text{Im}(\lambda_n t))^2} \right\} dt d\bar{t}.$$

Здесь g — положительная ограниченная функция с ограниченными производными по w_i . В дальнейшем мы обозначаем

$$y_m = \frac{1}{\ln |\xi_m| - \operatorname{Im}(\lambda_m t)}, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad y_n = \frac{1}{\ln |C| - \operatorname{Im}(\lambda_n t)}.$$

Мы имеем

$$G = g(\xi, t) \sum_{m=1}^n y_m^2 dt d\bar{t} \equiv \Phi dt d\bar{t},$$

и, используя (1.23) и (1.24), мы получаем

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} (\ln \Phi) = \frac{\partial}{\partial t} (\ln g) + \frac{2}{\sum y_m^2} \sum \frac{\partial y_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\ln g) - \frac{i}{\sum y_m^2} \sum \lambda_m y_m^3, \quad (2.23)$$

$$K = -\frac{2}{\Phi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{t}} = -\frac{2}{g \sum y_m^2} \frac{\partial^2 (\ln g)}{\partial \bar{t} \partial t} - 2 \frac{6 \sum y_m^2 \sum |\lambda_m|^2 y_m^4 - 4 \left| \sum \lambda_m y_m^3 \right|^2}{g \left(\sum y_m^2 \right)^3}. \quad (2.24)$$

Заметим, что члены, включающие производные функции g , содержат множители, экспоненциально малые при $\operatorname{Im}(\lambda_m t) \rightarrow \infty$. Действительно, g и $\ln g$ — это гладкие функция от w с ограниченными производными. Каждая производная по t даёт множители вида, например,

$$\frac{\partial (\ln g)}{\partial w_m} \frac{dw_m}{dt} = O(e^{i\lambda_m t}).$$

Обозначим второе слагаемое в правой части (2.23) через Γ^1 и второе слагаемое в правой части (2.24), умноженное на g , — через K^1 . Пусть (q) — бииндекс (q_1, q_2) , $|q| = q_1 + q_2$, $f_{(q)} = \frac{\partial^{q_1+q_2} f}{\partial t^{q_1} \partial \bar{t}^{q_2}}$. Индукцией по $|q|$ можно увидеть, что

$$\Gamma_{(q)}^1 = \frac{P^{(3|q|+3)}(y)}{\left(\sum y_m^2\right)^{|q|+1}}, \quad K_{(q)}^1 = \frac{P^{(3|q|+6)}(y)}{\left(\sum y_m^2\right)^{|q|+3}}, \quad (2.25)$$

где $P^{(3|q|+3)}$ и $P^{(3|q|+6)}$ — однородные многочлены от y_m степеней не больше $3|q|+3$ и $3|q|+6$ соответственно. Действительно, если мы дифференцируем, например, первое уравнение по t , мы получим

$$\Gamma_{(q),t}^1 = \frac{1}{\left(\sum y_m^2\right)^{|q|+1}} \sum \left(P_{y_m}^{(3|q|+3)} - 2(|q|+1) \frac{P^{(3|q|+3)}}{\sum y_m^2} y_m \right) \lambda_m y_m^2.$$

Мы получаем (2.25) с $|q|+1$ вместо $|q|$. Случай с K аналогичен. Степени однородности по y правых частей в (2.24) равны соответственно

$$3|q|+3-2(|q|+1) = |q|+1 \quad \text{и} \quad 3|q|+6-2(|q|+3) = |q|.$$

Принимая во внимание, что производные первых слагаемых в (2.23) и (2.24) содержат экспоненциально убывающие множители, мы получаем

$$|\Gamma_{(q)}| \leq C \left(\sum y_m^2 \right)^{(|q|+1)/2}, \quad |K_{(q)}| \leq C \left(\sum y_m^2 \right)^{|q|/2}. \quad (2.26)$$

С другой стороны,

$$|t_\nu| = \Phi^{-1/2} \leq C \left(\sum y_m^2 \right)^{-1/2}.$$

Суммируя по всем степеням суммы $\sum y_m^2$ в (2.21), мы получаем наше утверждение. \square

Теперь рассмотрим случай $k \geq 1$. По индукции мы получаем уравнение в вариациях для \tilde{s}_{u^k, v^l} :

$$\frac{d^2 \tilde{s}_{u^k, v^l}}{dv^2} + 2\tilde{s}_v \frac{d\tilde{s}_{u^k, v^l}}{dv} = -K_{u^k, v^l} + P(\tilde{s}),$$

где $P(\tilde{s})$ — многочлен от производных функции \tilde{s} степени по u меньше, чем k . На самом деле, это сумма одночленов вида

$$a_p \tilde{s}_{u^{k_1}, v^{l_1}}^{r_1} \dots \tilde{s}_{u^{k_p}, v^{l_p}}^{r_p}, \quad (2.27)$$

где a_p — целое, $k_i \leq k-1$ для любого i , $r_1 k_1 + \dots + r_p k_p \leq k$. Функция \tilde{s} не определена при $v=0$, и мы можем взять как начальные условия при $v=1$ следующие:

$$\tilde{s}_{u^k, v^l}(1) = a, \quad \frac{d\tilde{s}_{u^k, v^l}}{dv}(1) = b.$$

Здесь a и b зависят от u и ζ , но являются равномерно ограниченными.

Обозначим $\theta = \frac{d\tilde{s}_{u^k, v^l}}{dv}$. Мы получаем уравнение

$$\frac{d\theta}{dv} + 2\tilde{s}_v \theta = -K_{u^k, v^l} + P(\tilde{s}) \quad (2.28)$$

с начальным условием $\theta(1) = b$. Решение этого уравнения есть

$$\theta(v) = e^{-2\tilde{s}(v)} \left(b - \int_1^v (K_{u^k, v^l} - P(\tilde{s}))(\tau) e^{2\tilde{s}(\tau)} d\tau \right), \quad (2.29)$$

и

$$\tilde{s}_{u^k, v^l}(v) = a + \int_1^v \theta(\tau) d\tau. \quad (2.30)$$

Теперь мы принимаем индуктивное предположение:

А) Оценка (2.19) выполняется при $k \leq d-1$.

Утверждение 4. В предположении А имеет место оценка $|K_{u^d, v^l}(v)| \leq C e^{ds(v)}$ равномерно на $M \setminus \Sigma$ для некоторой константы $C > 0$, зависящей от l и d .

Доказательство. Мы можем представить производную K_{u^k, v^l} аналогично (2.21) как сумму слагаемых вида

$$\frac{\partial^{l_0 + \bar{l}_0} K}{\partial t^{l_0} \partial \bar{t}^{\bar{l}_0}} \frac{\partial^{l_1 + \bar{l}_1} \Gamma}{\partial t^{l_1} \partial \bar{t}^{\bar{l}_1}} \dots \frac{\partial^{l_p + \bar{l}_p} \Gamma}{\partial t^{l_p} \partial \bar{t}^{\bar{l}_p}} \frac{\partial^{m_1 + \bar{m}_1} \bar{\Gamma}}{\partial t^{m_1} \partial \bar{t}^{\bar{m}_1}} \dots \frac{\partial^{m_q + \bar{m}_q} \bar{\Gamma}}{\partial t^{m_q} \partial \bar{t}^{\bar{m}_q}} (t_v)^{l_v} (\bar{t}_v)^{\bar{l}_v} \tilde{s}_{u^{k_0}} \dots \tilde{s}_{u^{k_r}} \tilde{s}_{vu^{k'_0}} \dots \tilde{s}_{vu^{k'_{r'}}} e^{\tilde{k}\tilde{s}}. \quad (2.31)$$

Здесь индексы — это некоторые целые неотрицательные числа, необязательно все различные (то есть могут быть идентичные множители), k_i и k'_i не больше, чем $d-1$, и $l_0 + l_1 + \dots + l_p + m_1 + \dots + m_q + \bar{l}_0 + \bar{l}_1 + \dots + \bar{l}_p + \bar{m}_1 + \dots + \bar{m}_q + p + q = l_v + \bar{l}_v, k_0 + \dots + k_r + k'_0 + k'_{r'} + \tilde{k} \leq d$.

Представление (2.31) доказывается по индукции, аналогично (2.21). При $d = 0$ эти выражения совпадают. Когда мы дифференцируем по u множитель $\partial^{l_0+\bar{l}_0} K / (\partial t^{l_0} \partial \bar{t}^{\bar{l}_0})$ или множитель $\partial^{l_1+\bar{l}_1} \Gamma / (\partial t^{l_1} \partial \bar{t}^{\bar{l}_1})$, возникает множитель $t_u = ie^{\bar{s}} t_v$ или множитель $\bar{t}_u = -ie^{\bar{s}} \bar{t}_v$, и аналогичное происходит с множителями, содержащими производные от $\bar{\Gamma}$. Производная множителя $(t_v)^{l_v}$ равна

$$l_v(t_v)^{l_v-1} t_{uv} = il_v(t_v)^{l_v-1} (e^{\bar{s}} t_v)_v = il_v(t_v)^{l_v-1} (\tilde{s}_v e^{\bar{s}} t_v - \Gamma e^{\bar{s}} (t_v)^2).$$

Производные множителей $\tilde{s}_{u^{k_i}}$ и $\tilde{s}_{vu^{k'_i}}$ равны $\tilde{s}_{u^{k_i+1}}$ и $\tilde{s}_{vu^{k'_i+1}}$ соответственно, и $(e^{\bar{s}})_u = \tilde{k} \tilde{s}_u e^{\bar{s}}$. Во всех случаях мы получаем члены вида (2.31), где в ограничениях на индексы d заменено на $d + 1$.

Утверждение 4 следует из представления (2.31) и индуктивного предположения А, так как произведение производных K , Γ , $\bar{\Gamma}$ и множителя $(t_v)^{l_v} (\bar{t}_v)^{\bar{l}_v}$ ограничено, как было показано, когда мы рассматривали случай $k = 0$ при доказательстве утверждения 3. \square

Теперь мы закончим доказательство предложения 2. Из (2.29), представления (2.27) многочлена P и утверждения 4 мы получаем

$$\theta(v) \leq M_0 e^{-2\bar{s}(v)} \int_0^v e^{(k+2)\bar{s}(\tau)} d\tau$$

для некоторого $M_0 < \infty$. Принимая во внимание оценку (2.16), мы получаем

$$\int_0^v e^{(k+2)\bar{s}(\tau)} d\tau \leq \frac{1}{(k+2) \inf s'_v} \int_0^v (k+2) s'_\tau(\tau) e^{(k+2)\bar{s}(\tau)} d\tau \leq \frac{1}{(k+2)c_1} (e^{(k+2)s(v)} - 1).$$

Таким образом, $\theta(v) < M e^{ks(v)}$ для некоторого M , и из уравнения (2.30) мы получаем требуемую оценку для \tilde{s} . \square

Теперь мы переходим к почти комплексной структуре на произведении $B \times D$.

Лемма 2. Рассмотрим почти комплексную структуру (2.1), (2.2), определённую на произведении $B \times L^+$ (B — база, L^+ — полуполоса $\{0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v\}$) и индуцированную комплексной структурой на универсальной накрывающей \widehat{M} . Существует гладкая замена переменных $(r, u, \zeta) \mapsto (v, u, \zeta)$, $0 \leq r < 1$, для которой выполнено следующее.

На произведении $B \times D$ (D — единичный диск) индуцированная почти комплексная структура локально по базе задаётся формами

$$\begin{aligned} d\zeta &= \{d\zeta_j\}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \omega &= d\omega_1 + \mu_1 d\bar{\omega}_1 + \langle c^1, d\bar{\zeta} \rangle. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Здесь $\omega_1 = r e^{iu}$, $r = 1 - e^{-s(u,v)}$ и μ_1, c^1 определены следующим образом (в аргументах мы опускаем зависимость от ζ):

Пусть μ и c — такие, как в (2.2), η — обратная функция от $s(v)$, то есть

$$v = \eta(s, u), \quad v \equiv g(r, u) = \eta(-\ln(1-r), u), \quad h(r, u) \equiv \eta_s(-\ln(1-r), u),$$

где η_s — производная от η по первому аргументу. Тогда

$$\mu_1(r, u) = e^{2iu} \frac{rh - r + i(1-r)g_u}{rh + r - i(1-r)g_u}, \quad (2.33)$$

$$c^1(r, u) = \frac{2re^{iu}}{r(1+\mu)g_r + 1 - \mu - i(1+\mu)g_u} (c + (1+\mu)g_{\bar{\zeta}}). \quad (2.34)$$

Здесь μ и c рассматриваются как функции от r, u : $\mu(g(r, u), u)$, $c(g(r, u), u)$. Для μ_1 выполняется оценка $|\mu_1| \leq b < 1$ на D , где b — функция точки базы, равномерно отделённая от 1 на компактных подмножествах.

Доказательство. Из (2.3), (2.12), (2.15) мы получаем

$$\mu = \frac{t_v + it_u}{t_v - it_u} = \frac{1 - \varphi}{1 + \varphi} = -1 + 2e^{-s}.$$

Используя обозначение $v = g(r, u, \zeta)$, можно представить форму (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \omega &= (1+\mu)(g_r dr + \langle g_{\zeta}, d\zeta \rangle + \langle g_{\bar{\zeta}}, d\bar{\zeta} \rangle) + ((1+\mu)g_u + i(1-\mu)) du + \\ &+ \langle c, d\bar{\zeta} \rangle = \frac{1}{2}((1+\mu)g_r + r^{-1}(1-\mu) - ir^{-1}(1+\mu)g_u)(dr + ir du) + \\ &+ \frac{1}{2}((1+\mu)g_r - r^{-1}(1-\mu) + ir^{-1}(1+\mu)g_u)(dr - ir du) + \\ &+ (1+\mu)\langle g_{\zeta}, d\zeta \rangle + \langle c + (1+\mu)g_{\bar{\zeta}}, d\bar{\zeta} \rangle. \end{aligned}$$

Если $w_1 = re^{iu}$, то $dw_1 = e^{iu}(dr + ir du)$, $d\bar{w}_1 = e^{-iu}(dr - ir du)$. Опуская член с $d\zeta$, мы видим, что форма ω , определяющая почти комплексную структуру в карте w_1 , будет заменена формой

$$\omega_1 = dw_1 + \mu_1 d\bar{w}_1 + \langle c^1, d\bar{\zeta} \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1 &= e^{2iu} \frac{r(1+\mu)g_r - (1-\mu) + i(1+\mu)g_u}{r(1+\mu)g_r + 1 - \mu - i(1+\mu)g_u} = e^{2iu} \frac{re^{-s}g_r - 1 + e^{-s} + ie^{-s}g_u}{re^{-s}g_r + 1 - e^{-s} - ie^{-s}g_u} = e^{2iu} \frac{rg_r + 1 - e^s + ig_u}{rg_r - 1 + e^s - ig_u}, \\ c^1 &= \frac{2re^{iu}}{r(1+\mu)g_r + 1 - \mu - i(1+\mu)g_u} (c + (1+\mu)g_{\bar{\zeta}}). \end{aligned}$$

В следующих вычислениях мы будем опускать зависимость от ζ . Из оценок (2.16) и начальных условий (2.17) следует, что существует обратная функция $v = \eta(s, u)$, $\eta(0, u) = 0$. Мы положим $s = -\ln(1-r)$, то есть

$$v = g(r, u) = \eta(-\ln(1-r), u).$$

Если мы обозначим η_s производную η по первому аргументу, мы получим следующую формулу для коэффициента μ_1 :

$$\mu_1 = e^{2iu} \frac{r\eta_s - r + i(1-r)\eta_u}{r\eta_s + r - i(1-r)\eta_u}. \quad (2.35)$$

Из предложения 1 следует, что функция η_s положительна и равномерно ограничена. Так как $\eta_u = -\eta_s s_u$ ($\eta_s s_u + \eta_u = d\eta/du = 0$), $1-r = e^{-s}$ и для s_u у нас есть оценка предложения 2 при $k=1$, мы получаем $\eta_u(1-r) \leq M$ для некоторого $M < \infty$, и эта оценка также равномерна.

Из (2.35) следует, что $|\mu_1| \leq 1$ и $|\mu_1| \leq c(\delta)$ для некоторого $c < 1$ вне любого круга $r \leq \delta$. Нам нужно только рассмотреть μ_1 при $r \rightarrow 0$. Из (2.17) мы получаем начальное условие для s_u :

$$s_u(0) = 0, \quad \frac{ds_u}{dv}(0) = 0. \quad (2.36)$$

Мы получаем

$$\eta_s(0) = \frac{1}{s_v(0)} = 1, \quad \eta_u(0) = -\eta_s(0)s_u(0) = 0.$$

Используя (2.36), мы получаем также

$$\frac{ds_u}{dr} = \frac{ds_u}{dv} g_r = \frac{ds_u}{dv} (1-r)^{-1} \eta_s.$$

Следовательно, $\frac{ds_u}{dr}(0) = 0$ и мы получаем из (2.35)

$$\mu_1 = \frac{o(r)}{2r + o(r)}.$$

Следовательно, $\mu_1 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, и мы доказали оценку для μ_1 .

Теперь, используя те же рассуждения, можно увидеть, что дробь в (2.34) ограничена в нуле и вектор-функция c^1 является всюду определённой и гладкой в $B \times D$. \square

Теперь мы докажем оценки (0.2).

Предложение 3. Оценки (0.2) выполняются для коэффициента Бельтрами (2.33) (далее мы обозначаем его μ).

Доказательство. Так как $w = re^{iu}$, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{e^{-iu}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{e^{iu}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial u} \right).$$

Это значит, что достаточно доказать оценку

$$\left| \frac{\partial^{j+k} \mu}{\partial^j r \partial^k u} \right| \leq \frac{C}{(1-r)^{j+k}}. \quad (2.37)$$

Предположим сначала, что $k=0$. Дифференцируя j раз по v равенство

$$g(r, u) = g(1 - e^{-s(v, u)}, u) = v, \quad (2.38)$$

получим

$$(-1)^j (s_v)^j e^{-js} g_{r^j} = P(g, s),$$

где P — многочлен от производных функций g и s , который мы можем представить как сумму слагаемых вида $g_{r^{i_1}} \dots g_{r^{i_p}} s_{v^{j_1}} \dots s_{v^{j_q}} e^{-Is}$, при этом производные от g берутся в точке $(1 - e^{-s}, u)$, $i_m \leq j-1$ для всех i_m , $I = i_1 + \dots + i_p$. По индукции и применяя предложение 2, мы получаем

$$|g_{r^j}| \leq C e^{js(v)} = C(1-r)^{-j}.$$

Теперь, дифференцируя равенство (2.38) j раз по v и k раз по u , получаем

$$(-1)^j (s_v)^j e^{-js} g_{r^j, u^k} = P(g, s), \quad (2.39)$$

где P — многочлен от производных функций g и s , который на этот раз мы можем представить как сумму слагаемых вида

$$g_{r^{i_1}, u^{k_1}} \dots g_{r^{i_p}, u^{k_p}} s_{v^{j_1}, u^{l_1}} \dots s_{v^{j_q}, u^{l_q}} e^{-Is},$$

где $i_m + k_m \leq j + k$ для всех $i_m, k_m, k_m \leq k - 1, I = i_1 + \dots + i_p$ и $k_1 + \dots + k_p + l_1 + \dots + l_q \leq k$. Используя индукцию и применяя предложение 2, получаем

$$|g_{r^j, u^k}| \leq C e^{(j+k)s(v)} = C(1-r)^{-(j+k)}$$

для некоторого $C > 0$. Также, дифференцируя равенство

$$1 = \eta_s(s(v, u), u) \cdot s_v(v, u) = h(r, u) s_v = h(1 - e^{-s(v, u)}, u) s_v,$$

после аналогичных рассуждений мы получим оценку

$$|h_{r^j, u^k}| \leq C e^{(j+k)s(v)} = C(1-r)^{-(j+k)}.$$

Из равенства (2.39) получается, что $r^j u^k$ -производная от $(1-r)g_u$ имеет порядок $(1-r)^{-(j+k)}$. Оценка (2.37) следует теперь из выражения (2.33) и полученных сейчас оценок (напомним, что знаменатель в (2.33) равномерно отделён от нуля). \square

§ 3. Производные в трансверсальных направлениях. Вычисления в локальных картах

Мы приступаем к доказательству оценок (0.3) и (0.4) теоремы 1. Доказательство похоже на доказательство предложения 2, но теперь ситуация более сложная.

Далее μ и c имеют то же значение, что и в (2.3), (2.4). Сначала мы будем рассматривать их как функции геодезических координат v, u , а затем перейдём к координатам r, u , как в лемме 2.

Нам нужно получить оценки этих функций по отношению к длине геодезической v . Для этого нам требуется оценить производные локально определённых функций t_v и t_u . В дальнейшем мы иногда будем опускать индексы у координат на трансверсали ζ_m или у координат на локальной трансверсали ξ_m и писать, например, t_ξ , имея в виду производную по одной из координат ξ_m .

Из (2.3), (2.4) следует, что

$$\mu = \frac{1 + \frac{it_u}{t_v}}{1 - \frac{it_u}{t_v}}, \quad c = \frac{\frac{2t_\zeta}{t_v}}{1 - \frac{it_u}{t_v}}. \quad (3.1)$$

Это значит, что нам нужно оценить $\varphi = t_u/t_v$, $\psi = t_{\bar{\xi}}/t_v$, $\psi^* = t_{\xi}/t_v$ и их производные. При этом оценки функции $\varphi = e^s - 1$ и её производных вдоль слоёв уже даны в предложениях 1 и 2.

При доказательстве мы сначала получим оценки в локальных голоморфных картах, используя уравнение (2.5). Также нам потребуются оценки преобразований, которым подвергаются локально определённые функции при замене карты. Так как μ инвариантно при голоморфных преобразованиях координат и s зависит только от карты ζ на трансверсальной базе, полученные результаты также не будут зависеть от использованных карт.

Пусть V_j , $j = 1, \dots, k$, — некоторые окрестности особых точек, в которых метрика имеет форму (1.10). Мы покроем остальное множество $M \setminus (\cup V_j)$ конечным числом открытых множеств U_k , такими что на каждом U_k существует карта (ξ_k, t_k) , локально голоморфно выпрямляющая слоение. С другой стороны, мы предполагаем, что в каждой области V_j имеется линеаризующая карта w , то есть мы можем записать векторное поле X , задающее слоение, в виде $X_m = \lambda_m w_m$. Здесь m нумерует компоненты векторного поля, и мы опустили индексы, нумерующие особые точки и карты. Как это было уже сделано при доказательстве предложения 2, мы можем покрыть каждую окрестность V_j конечным числом областей V_{jk} , которые являются насыщениями областей на трансверсальных гиперплоскостях $w_k = \text{const}$ слоями слоения. Так же как при доказательстве предложения 2, в этих областях мы будем использовать карты вида ξ_{jk} , t_j , где ξ_{jk} — координаты на трансверсали и t_j — логарифмическая координата на слоях. После, если нужно, перенумерации компонент, мы можем написать:

$$w_m = \xi_{jk,m} e^{i\lambda_m t_j}, \quad m \leq n, \quad w_n = C_{jk} e^{i\lambda_n t_j}. \quad (3.2)$$

Здесь C_{jk} — константы, индекс j нумерует особые точки, k — карты.

Пусть (ξ, t) — одна из описанных карт. В дальнейшем мы будем использовать обозначения $\psi = t_{\bar{\xi}}/t_v$ и $\psi^* = t_{\xi}/t_v$ для функций, включающих производные по локальным переменным, а когда мы будем рассматривать производные по «абсолютным» переменным ζ , мы будем писать ψ^a и ψ^{*a} . Функции t , φ , $\psi = t_{\bar{\xi}}/t_v$ и другие, когда рассматриваются в локальных картах, зависят от v , ξ и начальных значений $t_0 = t(v_0)$, $t_{v,0} = t_v(v_0)$. Эта зависимость от начальных значений заменяет зависимость от u при $v = 0$. Мы будем также рассматривать функции $\rho = t_{\bar{t}_0}/t_v$, $\rho^* = t_{t_0}/t_v$, $\rho' = t_{\bar{t}_{v,0}}/t_v$, $\rho^{*'} = t_{t_{v,0}}/t_v$. Эти функции также зависят от голоморфной карты. Мы будем использовать обозначение частных производных для производных этих функций по своим переменным и нижними индексами будем обозначать полные производные функций в точках на геодезических.

Пусть (k) — мультииндекс:

$$(k) = (k_1, \dots, k_{n-1}, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{n-1}, k_v, k_t, k_{tv}, \bar{k}_t, \bar{k}_{tv}),$$

$$|k| = k_1 + \dots + k_{n-1} + \bar{k}_1 + \dots + \bar{k}_{n-1} + k_v + k_t + k_{tv} + \bar{k}_t + \bar{k}_{tv}.$$

В дальнейшем мы будем обозначать

$$f_{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial^{k_1} \xi_1 \dots \partial^{k_{n-1}} \xi_{n-1} \partial^{\bar{k}_1} \bar{\xi}_1 \dots \partial^{\bar{k}_{n-1}} \bar{\xi}_{n-1} \partial^{k_v} v \partial^{k_t} t_0 \partial^{k_{tv}} t_{v,0} \partial^{\bar{k}_t} \bar{t}_0 \partial^{\bar{k}_{tv}} \bar{t}_{v,0}}.$$

Введём некоторые понятия, связанные с производными функций ψ и ψ^* . Их удобно рассматривать совместно с функциями ρ , ρ' , ρ^* , $\rho^{*'}.$ Мы будем использовать обозначение Ψ_j , $j = 1, \dots, n+1$, для любой функции ψ , ρ , ρ' и Ψ_j^* для любой функции ψ^* , ρ^* , $\rho^{*'}$. Иногда мы будем использовать эти обозначения без индексов и писать, например, $P(\Psi, \Psi^*)$, имея в виду функцию P , зависящую, возможно, от всех функций Ψ_j , Ψ_j^* и их производных. Также мы будем использовать обозначение $\hat{\Psi}$, когда будем иметь в виду любую функцию Ψ , Ψ^* , $\bar{\Psi}$, $\bar{\Psi}^*$. Мультииндексы производных функций $\hat{\Psi}$ далее мы пишем внизу в скобках.

Определение 2. Переменные ξ , t_0 , $t_{v,0}$ и их сопряжённые мы будем называть существенными. Для производной, соответствующей мультииндексу (k) , положим $|k|_e = |k| - k_v$. Мы будем называть существенным порядком производной число $|k|_{es} = |k| + |k|_e$. Существенный порядок члена, не содержащего функций $\hat{\Psi}$, будем считать равным -1 . Мультииндекс $(l) = (l_1, \dots, l_{tv})$ будем называть собственным подмультииндексом мультииндекса $(k) = (k_1, \dots, k_{tv})$, если $l_1 \leq k_1, \dots, l_{tv} \leq k_{tv}$ и не везде имеется равенство.

Определение 3. Одночлен, являющийся произведением функций Ψ_j , Ψ_j^* , $\bar{\Psi}_j$, $\bar{\Psi}_j^*$ и их производных с коэффициентом, зависящим от ξ , t и t_v , мы будем называть дифференциальным одночленом. Дифференциальным многочленом мы будем называть сумму дифференциальных одночленов. Для дифференциального одночлена

$$a \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{l=1}^{l_j} \Psi_{j,(k_{jl})}^{r_{jl}} \prod_{\bar{l}=1}^{\bar{l}_j} \bar{\Psi}_{j,(k_{j\bar{l}})}^{r_{j\bar{l}}} \prod_{l^*=1}^{l_j^*} \Psi_{j,(k_{jl^*})}^{*r_{jl^*}} \prod_{\bar{l}^*=1}^{\bar{l}_j^*} \bar{\Psi}_{j,(k_{j\bar{l}^*})}^{*\bar{r}_{j\bar{l}^*}}$$

мы определим

— дифференциальную степень:

$$\max_{j\bar{l}, j\bar{l}^*, j\bar{l}^*, j\bar{l}^*} (|k_{j\bar{l}}|, |k_{j\bar{l}}|, |k_{j\bar{l}^*}|, |k_{j\bar{l}^*}|),$$

— степень роста:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{l=1}^{l_j} r_{jl} (|k_{jl}|_e + 1) + \sum_{\bar{l}=1}^{\bar{l}_j} r_{j\bar{l}} (|k_{j\bar{l}}|_e + 1) + \sum_{l^*=1}^{l_j^*} r_{jl^*} (|k_{jl^*}|_e + 1) + \sum_{\bar{l}^*=1}^{\bar{l}_j^*} r_{j\bar{l}^*} (|k_{j\bar{l}^*}|_e + 1) \right).$$

В этих выражениях (k_{jl}) , $(k_{j\bar{l}})$, (k_{jl^*}) , $(k_{j\bar{l}^*})$ — мультииндексы, индексы l , \bar{l} , l^* , \bar{l}^* для каждого j нумеруют эти мультииндексы, r_{jl} , $r_{j\bar{l}}$, r_{jl^*} , $r_{j\bar{l}^*}$ — неотрицательные целые числа — показатели степеней. Дифференциальная степень свободного члена (не содержащего никакой функции φ или ψ , ψ^*) равна -1 по определению. Дифференциальная степень и степень роста дифференциального многочлена — это максимум соответствующих степеней входящих в него одночленов.

Предложение 4. *Предположим, что (ξ, t) — одна из карт, определённых в начале этого параграфа, то есть карта, локально выпрямляющая слое-ние, или логарифмическая карта в особой точке. Каждая пара функций $\Psi_{j,(k)}, \Psi_{j,(k)}^*$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{d^2 \Psi_{j,(k)}}{dv^2} - \frac{1}{2} K \Psi_{j,(k)} + \frac{1}{2} K \bar{\Psi}_{j,(k)}^* = P(\Psi, \Psi^*, \bar{\Psi}, \bar{\Psi}^*), \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2 \bar{\Psi}_{j,(k)}^*}{dv^2} - \frac{1}{2} K \bar{\Psi}_{j,(k)}^* + \frac{1}{2} K \Psi_{j,(k)} = P^*(\Psi, \Psi^*, \bar{\Psi}, \bar{\Psi}^*). \quad (3.3')$$

Здесь P, P^* — дифференциальные многочлены дифференциальной степени не выше $|k|$ и степени роста не выше $|k|_e + 1$. Существенный порядок входящих в них производных функций $\hat{\Psi}$ не выше $|k|_{es} - 1$. Коэффициенты P — это многочлены от t_v с коэффициентами, являющимися функциями от ξ, t , и эти многочлены ограничены.

Доказательство. Получим сначала уравнение для функции $\psi(v)$ (указания на остальные переменные мы опускаем для краткости). Пусть ξ — одна из переменных ξ_m . Дифференцируя уравнение (2.7) по переменной $\bar{\xi}$, мы получим

$$\frac{dt_{\bar{\xi}}}{dv^2} + 2\Gamma_t t_v \frac{dt_{\bar{\xi}}}{dv} + \Gamma_t(t_v)^2 t_{\bar{\xi}} + \Gamma_{\bar{t}}(t_v)^2 \bar{t}_{\bar{\xi}} + \Gamma_{\bar{\xi}}(t_v)^2 = 0.$$

С другой стороны, дифференцируя то же самое уравнение по переменной v , получим

$$t_{v^3} + 2\Gamma_t t_v t_{v^2} + \Gamma_t(t_v)^3 + \Gamma_{\bar{t}} \bar{t}_v(t_v)^2 = 0.$$

Так как

$$t_{\bar{\xi}} = \psi t_v, \quad \bar{t}_{\bar{\xi}} = \bar{\psi}^* \bar{t}_v,$$

из двух последних уравнений вытекает

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dv^2} t_v + 2 \frac{d\psi}{dv} t_{v^2} + \psi t_{v^3} + 2\Gamma_t t_v \left(\frac{d\psi}{dv} t_v + \psi t_{v^2} \right) + \Gamma_t(t_v)^3 \psi + \Gamma_{\bar{t}}(t_v)^2 \bar{t}_v \bar{\psi}^* + \Gamma_{\bar{\xi}}(t_v)^2 = \\ = \frac{d^2 \psi}{dv^2} t_v - \Gamma_{\bar{t}} \bar{t}_v(t_v)^2 \psi + \Gamma_{\bar{t}}(t_v)^2 \bar{t}_v \bar{\psi}^* + \Gamma_{\bar{\xi}}(t_v)^2 = 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\Gamma_{\bar{t}} \bar{t}_v t_v = -\frac{K}{2},$$

мы получаем

$$\frac{d^2 \psi}{dv^2} - \frac{1}{2} K \psi + \frac{1}{2} K \bar{\psi}^* = -\Gamma_{\bar{\xi}} t_v. \quad (3.4)$$

Аналогично дифференцируя уравнение $\bar{t}_{v^2} + \bar{\Gamma}(\bar{t}_v)^2 = 0$, сопряжённое к (2.7), мы получим

$$\frac{d^2 \bar{\psi}^*}{dv^2} - \frac{1}{2} K \bar{\psi}^* + \frac{1}{2} K \psi = -\bar{\Gamma}_{\bar{\xi}} t_v. \quad (3.4')$$

При выкладках мы учитываем, что $\bar{\Gamma}_t = \Gamma_{\bar{t}}$, так как последняя величина существенна (в силу того, что $\Gamma_{\bar{t}} \bar{t}_v t_v = -K/2$). Точно таким же образом мы

получаем уравнения

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} - \frac{1}{2}K\rho + \frac{1}{2}K\bar{\rho}^* = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2\bar{\rho}^*}{dv^2} - \frac{1}{2}K\bar{\rho}^* + \frac{1}{2}K\rho = 0, \quad (3.5')$$

и аналогично для ρ' также получаем однородные уравнения.

Для уравнений (3.4), (3.4') и (3.5), (3.5') дифференциальные степени правых частей равны -1 , а степени роста равны нулю. Также равен -1 существенный порядок производных в правой части. Чтобы получить уравнения для старших производных и соответствующие оценки, мы будем действовать индукцией по $|k|$. Рассмотрим случай, когда повышается порядок производной по одной из переменных ξ_m , например по ξ_1 . Положим

$$(k) = (k_1, \dots, k_{n-1}, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{n-1}, k_v, k_t, k_{tv}, \bar{k}_t, \bar{k}_{tv}), \quad (k') = (k_1 + 1, \dots, \bar{k}_{tv}).$$

Тогда

$$|k'| = |k| + 1, \quad |k'|_e = |k|_e + 1, \quad |k'|_{es} = |k|_{es} + 2.$$

Предположим, что у нас имеется система (3.3), (3.3') для $\Psi_{j,(k)}$, $\Psi_{j,(k)}^*$. Далее мы будем опускать индекс j и обозначать $\xi = \xi_1$, $\psi = t_{\xi_1}/t_v$, $\psi^* = t_{\xi_1}/t_v$. Дифференцируя (3.3) по ξ , мы получим

$$\frac{d^2\Psi_{(k')}}{dv^2} - \frac{1}{2}K\Psi_{(k')} + \frac{1}{2}K\bar{\Psi}_{(k')}^* = \frac{1}{2}K_\xi\Psi_{(k)} - \frac{1}{2}K_\xi\bar{\Psi}_{(k)}^* + P_\xi. \quad (3.6)$$

Далее,

$$K_\xi = \frac{\partial K}{\partial \xi} + \frac{\partial K}{\partial t}t_\xi + \frac{\partial K}{\partial \bar{t}}\bar{t}_\xi = \frac{\partial K}{\partial \xi} + \frac{\partial K}{\partial t}t_v\psi^* + \frac{\partial K}{\partial \bar{t}}\bar{t}_v\bar{\psi}. \quad (3.7)$$

Мы видим, что множитель K_ξ не повышает дифференциальную степень, а степень роста повышает на 1. Так как степень роста членов $\Psi_{(k)}$ и $\bar{\Psi}_{(k)}^*$ равна $|k|_e + 1$, мы получаем, что дифференциальная степень первого и второго членов в правой части (3.6) равна $|k| = |k'| - 1$, а степень роста равна $|k|_e + 2 = |k'|_e + 1$. Существенный порядок полученных производных равен 1 и $|k|_{es} = |k'|_{es} - 2$.

Рассмотрим теперь производные многочлена P . Мы знаем, что P — это сумма членов, каждый из которых является произведением множителей вида: a , $(t_v)^r$, $\Psi_{j_1,(k_1)}^{r_1}$, $\Psi_{j_2,(k_2)}^{r_2}$, $\bar{\Psi}_{j_3,(k_3)}^{r_3}$, $\bar{\Psi}_{j_4,(k_4)}^{r_4}$, где a — функция от ξ и t . Производные функции a дают множители ψ и $\bar{\psi}$, как в (3.7), то есть они не изменяют дифференциальную степень и добавляют 1 к степени роста. Также они не увеличивают существенный порядок производных. Дифференцируя множитель $(t_v)^r$, мы получаем

$$\begin{aligned} [(t_v)^r]_\xi &= r(t_v)^{r-1}(t_v)_\xi = r(t_v)^{r-1}\left(\frac{t_v\xi}{t_v}\right)t_v = \\ &= r(t_v)^{r-1}(\psi^*t_v + \psi^*t_{v^2}) = r(t_v)^{r-1}(\psi_v^*t_v - \psi^*\Gamma(t_v)^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь мы использовали уравнение геодезических (2.7). Мы видим, что степень роста повышаются на 1, а дифференциальная степень и максималь-

ный существенный порядок производной может повыситься на 1 только если $|k| = 0$, то есть если мы дифференцируем правую часть уравнений (3.4), (3.4'). У производных, входящих множителями в P , мультииндексы являются собственными подмультииндексами мультииндекса (k) , и их существенный порядок, по индуктивному предположению, не больше $|k|_{es} - 1$. Дифференцируя такой множитель, мы получим, например:

$$(\rho_{(l)}^{r_l})_{\xi} = r_l \rho_{(l)}^{r_l-1} \rho_{(l),\xi}.$$

Здесь все три показателя — дифференциальная степень, существенный порядок производной и степень роста — повышаются на 1.

Случаи дифференцирования по другим существенным переменным, в том числе по $t_0, t_{v,0}, \bar{t}_0, \bar{t}_{v,0}$, аналогичны. Рассмотрим, например, производную по переменной t_0 . Вместо (3.8) мы получим

$$[(t_v)^r]_{t_0} = r(t_v)^{r-1}(\rho_v^* t_v + \rho^* t_{v^2}) = r(t_v)^{r-1}(\rho_v^* t_v - \rho^* \Gamma(t_v)^2). \quad (3.8')$$

При дифференцировании по $t_{v,0}$, соответственно, появляется множитель $\rho^{*'}.$

Рассмотрим дифференцирование по v . Тогда, аналогично применявшимся выше обозначениям, $(k') = ((k), 1_v)$, $|k'|_{es} = |k|_{es} + 1$. При дифференцировании члена $\frac{1}{2}K\Psi_{(k)}$ в правой части, аналогично (3.6) и (3.7), появляются слагаемые вида

$$\frac{\partial K}{\partial t} t_v \Psi_{(k)}.$$

Дифференциальная степень получается равной $|k|$, степень роста равна $|k|_e + 1 = |k'|_e + 1$, существенный порядок производной равен $|k|_{es} = |k'|_{es} - 1$. Для множителя $(t_v)^r$ получим

$$[(t_v)^r]_v = r(t_v)^{r-1} t_{v^2} = -r\Gamma(t_v)^{r+1}.$$

Здесь не повысились ни дифференциальная степень, ни степень роста, ни существенный порядок. При дифференцировании остальных множителей в слагаемых многочлена P все эти три величины повышаются на 1.

У нас доказаны все утверждения предложения 4, кроме последнего. Докажем теперь его. Из уравнений (3.4), (3.4'), (3.5), (3.5') видно, что дифференциальные многочлены в правых частях получаются дифференцированием функций $K, \Gamma_{\xi} t_v$ и $\bar{\Gamma}_{\bar{\xi}} t_v$ по переменным $\xi, \bar{\xi}, v, t_0, \bar{t}_0, t_{v,0}, \bar{t}_{v,0}$. При этом (см. ниже утверждение 5) в коэффициентах возникают производные по $\xi, \bar{\xi}, t, \bar{t}$. Мы будем рассматривать мультииндексы вида

$$(l) = (l_1, \dots, l_{n-1}, \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_{n-1}, l_t, \bar{l}_t),$$

$$|l| = l_1 + \dots + l_{n-1} + \bar{l}_1 + \dots + \bar{l}_{n-1} + l_t + \bar{l}_t.$$

Мы будем писать:

$$K_{(l)} = \frac{\partial^{|l|} K}{\partial^{l_1} \xi_1 \dots \partial^{l_{n-1}} \xi_{n-1} \partial^{\bar{l}_1} \bar{\xi}_1 \dots \partial^{\bar{l}_{n-1}} \bar{\xi}_{n-1} \partial^{k_t} t \partial^{\bar{k}_t} \bar{t}},$$

$$\Gamma_{(l)} = \frac{\partial^{||l||} \Gamma}{\partial^{l_1} \xi_1 \dots \partial^{l_{n-1}} \xi_{n-1} \partial^{\bar{l}_1} \bar{\xi}_1 \dots \partial^{\bar{l}_{n-1}} \bar{\xi}_{n-1} \partial^{k_t} t \partial^{\bar{k}_t} \bar{t}}.$$

Мы будем рассматривать произведения вида

$$K_{(l_{1_1})}^{r_{1_1}} \dots K_{(l_{j_1})}^{r_{j_1}} \Gamma_{(l_{1_2})}^{r_{1_2}} \dots \Gamma_{(l_{j_2})}^{r_{j_2}} \bar{\Gamma}_{(l_{1_3})}^{r_{1_3}} \dots \bar{\Gamma}_{(l_{j_3})}^{r_{j_3}}.$$

Здесь (l_{k_s}) , $s \in \{1, 2, 3\}$, — мультииндексы, r_{j_s} — неотрицательные целые числа. Для такого произведения мы определим *полную степень* как

$$\sum_{k_1} r_{k_1} |l_{k_1}| + \sum_{s=2}^3 \sum_{k_s} r_{k_s} (|l_{k_s}| + 1).$$

Утверждение 5. Коэффициенты многочленов P , P^* в (3.3), (3.3') являются суммами слагаемых вида

$$(t_v)^{r_t} (\bar{t}_v)^{\bar{r}_t} [K_{(l_{1_1})}^{r_{1_1}} \dots K_{(l_{j_1})}^{r_{j_1}} \Gamma_{(l_{1_2})}^{r_{1_2}} \dots \Gamma_{(l_{j_2})}^{r_{j_2}} \bar{\Gamma}_{(l_{1_3})}^{r_{1_3}} \dots \bar{\Gamma}_{(l_{j_3})}^{r_{j_3}}], \quad (3.9)$$

где $r_t + \bar{r}_t$ не больше полной степени произведения в квадратных скобках.

Доказательство. Мы будем действовать индукцией по $|k|$, то есть по степени производных в (3.3) (3.3'). Рассмотрим, например, дифференцирование многочлена P по переменной $\xi = \xi_1$. Достаточно показать, что если одночлен (3.9) удовлетворяет нашему утверждению, то после его дифференцирования коэффициенты полученного дифференциального многочлена удовлетворяют тому же утверждению. Мы вычислили производную $[(t_v)^{r_t}]_{\xi}$ в (3.8). Производная такого множителя даёт два слагаемых, в первом слагаемом t_v входит в коэффициент дифференциального многочлена в той же степени r_t , и остающееся произведение имеет прежнюю полную степень, а во втором слагаемом обе эти степени повышаются на 1. Аналогично разбирается случай $[(\bar{t}_v)^{\bar{r}_t}]_{\xi}$. С другой стороны, полная производная множителя $K_{(l_{j_1})}^{r_{j_1}}$ по переменной ξ равна (аналогично (3.7))

$$r_{j_1} K_{(l_{j_1})}^{r_{j_1}-1} \left(\frac{\partial K_{(l_{j_1})}}{\partial \xi} + \frac{\partial K_{(l_{j_1})}}{\partial t} t_v \psi^* + \frac{\partial K_{(l_{j_1})}}{\partial \bar{t}} \bar{t}_v \bar{\psi} \right).$$

Первый член в квадратных скобках повышает полную степень на 1 и не повышает степеней r_t и \bar{r}_t . Второй и третий члены повышают на 1 обе степени — полную степень и степени r_t или \bar{r}_t соответственно.

Рассмотрим производную по t_0 . Производная множителя $(t_v)^{r_t}$ была вычислена в (3.8'), а полная производная множителя $K_{(l_{j_1})}^{r_{j_1}}$ равна

$$r_{j_1} K_{(l_{j_1})}^{r_{j_1}-1} \left(\frac{\partial K_{(l_{j_1})}}{\partial t} t_v \rho^* + \frac{\partial K_{(l_{j_1})}}{\partial \bar{t}} \bar{t}_v \bar{\rho} \right).$$

Случаи других множителей и производных по переменным $\bar{\xi}$ или $t_{0,v}$, \bar{t}_0 , $\bar{t}_{0,v}$ полностью аналогичны. Наконец, рассматривая производные по v и используя уравнение геодезических, мы получаем

$$[(t_v)^{r_t}]_v = r_t (t_v)^{r_t-1} t_{v^2} = -r_t (t_v)^{r_t+1} \psi^* \Gamma.$$

Здесь обе степени — степень r_t и полная степень остающегося произведения — повышаются на 1. Другие множители также повышают обе степени на 1, например:

$$[K_{(l_j)}^{r_{j_1}}]_v = r_{j_1} K_{(l_j)}^{r_{j_1}-1} \left(\frac{\partial K_{(l_j)}}{\partial t} t_v + \frac{\partial K_{(l_j)}}{\partial \bar{t}} \bar{t}_v \right). \quad \square$$

Теперь мы закончим доказательство последнего утверждения предложения. Если в замыкании рассматриваемой карты нет особых точек, то утверждение очевидно. Предположим, что (ξ, t) — логарифмическая карта (3.2). Из (3.2) следует, что $w_m \rightarrow 0$, когда $\text{Im}(\lambda_m t) \rightarrow \infty$. Так что нам нужно оценить коэффициенты многочлена P при больших t .

Напомним обозначения из доказательства предложения 2. Метрика, ограниченная на слой, имеет форму

$$G = g(\xi, t) \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{(\ln |\xi_m| - \text{Im}(\lambda_m t))^2} + \frac{1}{(\ln |C| - \text{Im}(\lambda_n t))^2} \right) dt d\bar{t}.$$

Здесь g — ограниченная положительная функция с ограниченными производными по w_m . Далее мы обозначаем:

$$y_m = \frac{1}{\ln |\xi_m| - \text{Im}(\lambda_m t)}, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad y_n = \frac{1}{\ln |C| - \text{Im}(\lambda_n t)}.$$

Мы имеем (см. (2.23), (2.24):

$$G = \Phi(\xi, t) dt d\bar{t} = g(\xi, t) \sum_{m=1}^n y_m^2, \quad \Gamma = \frac{\partial}{\partial t} (\ln g) - \frac{i}{\sum y_m^2} \sum \lambda_m y_m^3, \quad (3.10)$$

$$K = -\frac{2}{g \sum y_m^2} \frac{\partial^2 (\ln g)}{\partial \bar{t} \partial t} - 2 \frac{6 \sum y_m^2 \sum |\lambda_m|^2 y_m^2 - 4 \left| \sum \lambda_m y_m^3 \right|^2}{g \left(\sum y_m^2 \right)^3}. \quad (3.11)$$

Так же как и в предложении 2, члены, включающие производные функции g , содержат множители, экспоненциально малые при $\text{Im}(\lambda_m t) \rightarrow \infty$. Действительно, $\ln g$ — это гладкая функция w с ограниченными производными. Каждая производная по t даёт множители вида

$$\frac{\partial (\ln g)}{\partial w_m} \frac{dw_m}{dt} = O(e^{i\lambda_m t}).$$

Обозначим второе слагаемое в правой части (3.10) через Γ^1 и второе слагаемое в правой части (3.11), умноженное на g , — через K^1 . Индукцией по $|l|$ мы можем увидеть, что

$$\Gamma_{(l)}^1 = \frac{P^{(3|l|+3)}(y)}{(\sum y_m^2)^{|l|+1}}, \quad K_{(l)}^1 = \frac{P^{(3|l|+6)}(y)}{(\sum y_m^2)^{|l|+3}},$$

где $P^{(3|l|+3)}$ и $P^{(3|l|+6)}$ — однородные многочлены от y_m степеней $3|l|+3$ и $3|l|+6$ соответственно. Действительно, если мы дифференцируем, например,

первое уравнение по ξ_m , мы получим

$$\Gamma_{(l),\xi_m}^1 = - \left(\frac{P_{y_m}^{(3|l|+3)}}{(\sum y_i^2)^{|l|+1}} - 2(|l|+1) \frac{P^{(3|l|+3)}(y)}{(\sum y_m^2)^{|l|+2}} y_m \right) \frac{y_m^2}{2\xi_m}.$$

Для производной по t мы получаем

$$\Gamma_{(l),t}^1 = - \frac{i}{(2\sum y_m^2)^{|l|+1}} \sum \left(P_{y_m}^{(3|l|+3)} - 2(|l|+1) \frac{P^{(3|l|+3)}}{\sum y_m^2} y_m \right) \lambda_m y_m^2.$$

В обоих случаях мы получаем требуемое утверждение, в котором $|l|$ заменено на $|l|+1$. Случай K аналогичен. Принимая во внимание, что производные первых слагаемых в (3.10) и (3.11) экспоненциально убывают, мы получим:

$$|\Gamma_{(l)}| \leq C \left(\sum y_m^2 \right)^{(|l|+1)/2}, \quad |K_{(l)}| \leq C \left(\sum y_m^2 \right)^{|l|/2}. \quad (3.12)$$

С другой стороны,

$$|t_v| = \Phi^{-1/2} \leq C \left(\sum y_m^2 \right)^{-1/2}.$$

Используя (3.12) и суммируя по всем степеням, с которыми $\sum y_m^2$ входит в (3.9), мы получим наше предложение. \square

В следующем утверждении мы из всех переменных сохраняем в обозначениях только длину геодезической v .

Предложение 5. Пусть θ — некоторое решение уравнения (2.13). Решение системы (3.3), (3.3') с начальными условиями

$$\Psi_{j,(k)}(v_0) = a, \quad \frac{d\Psi_{j,(k)}}{dv}(v_0) = b, \quad (3.13)$$

$$\bar{\Psi}_{j,(k)}^*(v_0) = a^*, \quad \frac{d\bar{\Psi}_{j,(k)}^*}{dv}(v_0) = b^* \quad (3.13')$$

имеет вид:

$$\Psi_{j,(k)} = \frac{1}{2}(\Psi^+ + \Psi^-), \quad \bar{\Psi}_{j,(k)}^* = \frac{1}{2}(\Psi^+ - \Psi^-),$$

где

$$\begin{aligned} \Psi^+(v) = & \theta \left(\frac{a+a^*}{\theta(v_0)} + [(b+b^*)\theta(v_0) - (a+a^*)\theta_v(v_0)] \int_{v_0}^v \theta^{-2}(t) dt \right) + \\ & + \theta \int_{v_0}^v \theta^{-2}(t) \int_{v_0}^t \theta(\tau)(P+P^*)(\tau) d\tau dt, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\Psi^-(v) = a - a^* + (b - b^*)(v - v_0) + \int_{v_0}^v \int_{v_0}^t (P - P^*)(\tau) d\tau dt. \quad (3.15)$$

Доказательство получается простым вычислением. Из (3.3), (3.3') следует, что $\Psi^+ = \Psi_{j,(k)} + \bar{\Psi}_{j,(k)}^*$ и $\Psi^- = \Psi_{j,(k)} - \bar{\Psi}_{j,(k)}^*$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2\Psi^+}{dv^2} + K\Psi^+ = P + P^*, \quad \frac{d^2\Psi^-}{dv^2} = P - P^*.$$

В первом уравнении мы делаем замену переменной $\Psi^+ = \theta \hat{\Psi}$ и получаем уравнение для $\hat{\Psi}$:

$$\frac{d^2\hat{\Psi}}{dv^2} + 2\theta^{-1}\frac{d\theta}{dv}\frac{d\hat{\Psi}}{dv} = \theta^{-1}(P + P^*).$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\Psi}_v(v) = \left((b + b^*)\theta(v_0) - (a + a^*)\theta_v(v_0) + \int_{v_0}^v \theta(\tau)(P + P^*)(\tau) d\tau \right) \theta^{-2}(v).$$

После интегрирования мы получаем (3.14) и (3.15). \square

Теперь рассмотрим преобразование от карты $(\xi_1^1, \dots, \xi_1^{n-1}, t_1)$ к карте $(\xi_2^1, \dots, \xi_2^{n-1}, t_2)$. Заметим, что геодезическая может оставить область V_{jk} , примыкающую к особой точке, только через пересечение слоя с границей. Это пересечение лежит в объединении некоторых областей V_j , не примыкающих к особой точке. Так что нам не нужно рассматривать переход от карты в области V_{jk} к другой карте такого вида, и мы будем предполагать, что все пересечения областей определения карт равномерно отделены от особых точек.

Как и ранее, мы будем обозначать через $\hat{\Psi}$ некоторую функцию Ψ_j или Ψ_j^* . Мы будем обозначать через $\hat{\Psi}^1$ ($\hat{\Psi}^2$) функцию $\hat{\Psi}$ в карте (ξ^1, t^1) (соответственно, (ξ^2, t^2)), аналогично будем поступать и с другими функциями. Мы будем рассматривать координату t на геодезической как функцию от v , ξ и начальных значений $t_0 = t(v_0)$, $t_{v,0} = t_v(v_0)$.

Предложение 6. В приведённых выше обозначениях функция $\Psi_{(k)}^2$ имеет вид

$$\hat{\Psi}_{(k)}^2 = (L + P)(\Psi^1, \Psi^{*1}, \bar{\Psi}^1, \bar{\Psi}^{*1}). \quad (3.16)$$

Здесь L — линейная функция производных функций $\Psi^1, \Psi^{*1}, \bar{\Psi}^1, \bar{\Psi}^{*1}$ порядка $|k|$ и степени роста $|k|_e + 1$ (то есть с такими мультииндексами (l) , что $|l| = |k|$ и $|l|_e = |k|_e$), P — дифференциальный многочлен дифференциальной степени не выше $|k|$ и степени роста не выше $|k|_e + 1$. Существенный порядок входящих в него производных не выше $|k|_{es} - 1$. Коэффициенты многочленов L и P ограничены на пересечении областей определения карт ξ_1, t_1 и ξ_2, t_2 . Коэффициенты линейной формы L к тому же удовлетворяют оценке

$$|a_{(l)}| \leq C^{|k|_e}. \quad (3.17)$$

Здесь $a_{(l)}$ — коэффициент при производной с мультииндексом (l) . Число членов в этой линейной форме не больше $(n + 1)^{|k|_e}$.

Прежде чем приступить к доказательству этого предложения, заметим, что преобразования координат удобно рассматривать для локальных карт, а не для функций $\widehat{\Psi}$. Поэтому нам нужно сначала описать связь между производными этих функций и производными локальной координаты на геодезической. Мы будем иметь дело с многочленами от производных функций t или t^1, t^2 , с коэффициентами, которые могут быть функциями от t, ξ , но не содержать производных от t . Мы будем называть их t -дифференциальными многочленами. В этом случае нам потребуется некоторая модификация понятий определения 3.

Определение 4. Для t -дифференциального одночлена

$$at_{(k_1)}^{r_1} \dots t_{(k_j)}^{r_j} \bar{t}_{(k_{\bar{1}})}^{r_{\bar{1}}} \dots \bar{t}_{(k_{\bar{j}})}^{r_{\bar{j}}}$$

мы определим

- дифференциальную t -степень: $\max_{l, \bar{l}} \{|k_l|, |k_{\bar{l}}|\}$;
- полную t -степень: $\sum_l r_l |k_l| + \sum_{\bar{l}} r_{\bar{l}} |k_{\bar{l}}|$;
- t -степень роста: $\sum_l r_l |k_l|_e + \sum_{\bar{l}} r_{\bar{l}} |k_{\bar{l}}|_e$.

Дифференциальная степень свободного члена и степень роста (не содержащего функции t или её производных) равны -1 по определению.

Следующие два утверждения описывают переход от функций $\widehat{\Psi}$ к t и обратно.

Утверждение 6. Пусть ξ, t — некоторая карта и $t_{(k)}$ — производная, где (k) — мультииндекс, как обычно. Можно представить $t_{(k)}$ в виде

$$t_{(k)} = P(\Psi, \Psi^*, \bar{\Psi}, \bar{\Psi}^*).$$

Здесь P — дифференциальный многочлен, коэффициенты которого ограничены в любой области, отделённой от особых точек. Если $(k) = \{k_v\}$, то P — многочлен от t_v с ограниченными коэффициентами. Если $(k) \neq \{k_v\}$, то P имеет вид

$$P = t_v \widehat{\Psi}_{(k')} + P_1, \quad (3.18)$$

где $\widehat{\Psi}$ — одна из функций $\Psi, \Psi^*, \bar{\Psi}, \bar{\Psi}^*$ и $|k'| = |k| - 1$, $|k'|_e = |k|_e - 1$. Дифференциальная степень P_1 не выше $|k| - 1$ и степень роста не выше $|k|_e - 1$. Существенный порядок производных, входящих в P_1 не выше $|k|_{es} - 3$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $(k) = \{k_v\}$. Тогда

$$t_{v^k} = t_{v^2, v^{k-2}} = -[\Gamma(t_v)^2]_{v^{k-2}} = -\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} t_v + \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{t}} \bar{t}_v\right) [(t_v)^2]_{v^{k-3}} - \Gamma[(t_v)^2]_{v^{k-2}}.$$

По индукции получаем, что можно представить $t_{(k)}$ как многочлен от t_v с ограниченными коэффициентами.

Пусть теперь $(k) \neq \{k_v\}$. Имеем для индексов минимальной длины:

$$t_{\bar{\xi}_1} = t_v \psi_1.$$

Аналогичные выражения имеем для других производных первого порядка по существенным переменным. В левой части существенный порядок про-

изводной равен 2, в правой — дифференциальная степень и существенный порядок производной равны нулю и степень роста равна единице.

Теперь будем действовать индукцией по $|k|$. Пусть выполнено следующее: $\partial^{(k)} = \partial^{(k')} \partial / \partial \bar{\xi}_1$, $|k'| = |k| - 1$, то есть $(k') = (k_1, \dots)$, $(k) = (k_1 + 1, \dots)$. Пусть

$$t_{(k')} = t_v \widehat{\Psi}_{(k'')} + P_1,$$

где $|k''| = |k'| - 1$, $|k''|_e = |k'|_e - 1$, дифференциальная степень P_1 не выше $|k'| - 2$, степень роста не выше $|k'|_e - 1$ и существенный порядок входящих производных не выше $|k'|_e - 3$.

Тогда

$$t_{(k)} = t_v \widehat{\Psi}_{(k''), \xi_1} + t_{v, \xi_1} \widehat{\Psi}_{(k'')} + (P_1)_{\xi_1}.$$

Дальше рассуждения аналогичны проведённым при доказательстве предложения 4. Так,

$$t_{v, \xi_1} \widehat{\Psi}_{(k'')} = (\psi_1^* t_v)_v \widehat{\Psi}_{(k'')} = [t_v \psi_{1,v}^* - \Gamma(t_v)^2 \psi_1^*] \widehat{\Psi}_{(k'')}.$$

Дифференциальная степень правой части равна $\max\{1, |k''|\} \leq |k| - 1$, степень роста равна $|k''|_e + 1 \leq |k|_e - 1$, и существенный порядок производных не выше $\max\{1, |k''|_{es}\} \leq |k|_{es} - 3$. Дифференцирование возможных слагаемых многочлена P_1 было по существу уже рассмотрено при доказательстве предложения 4. Случаи, когда повышается степень по другим существенным переменным, аналогичны. Рассмотрим случай $\partial^{(k)} = \partial^{(k')} \partial / \partial v$. Тогда

$$t_{(k)} = t_v \widehat{\Psi}_{(k''), v} - \Gamma(t_v)^2 \widehat{\Psi}_{(k'')} + (P_1)_v.$$

У члена $\Gamma(t_v)^2 \widehat{\Psi}_{(k'')}$ дифференциальная степень равна $|k''| \leq |k| - 2$, степень роста равна $|k''|_e = |k'|_e - 1 = |k|_e - 1$ и существенный порядок производной равен $|k''|_{es} \leq |k|_{es} - 3$. При дифференцировании многочлена P_1 может повыситься на 1 только дифференциальная степень и существенный порядок производных. \square

Утверждение 7. *Имеется представление*

$$\widehat{\Psi}_{(k)} = \frac{t_{(k')}}{t_v} + \frac{1}{(t_v)^{|k|+1}} P, \quad (3.19)$$

где (k') — мультииндекс, $|k'| = |k| + 1$, $|k'|_e = |k|_e + 1$, P — t -дифференциальный многочлен, имеющий t -дифференциальную степень $|k| + 1$, t -степень роста $|k|_e + 1$, существенный порядок входящих производных не выше $|k|_{es} + 1$.

Доказательство. Проводим индукцию по $|k|$. При $|k| = 0$ для $\widehat{\Psi} = \psi_1$, например, $\psi_1 = t_{\bar{\xi}_1} / t_v$. Теперь получаем утверждение по индукции, дифференцируя равенство (3.19) по существенным переменным и по v . \square

Доказательство предложения 6. Достаточно доказать следующее утверждение:

Функция $t_{(k)}^2$ может быть представлена в форме $(L + P)(t^1)$, где L — линейная функция от производных t^1 максимальной степени, равной $|k|$, и t^1 -степени роста, равной $|k|_e + 1$, а $P(t^1)$ — t^1 -дифференциальный многочлен дифференциальной t^1 -степени не выше $|k| - 1$ и t^1 -степени роста не выше $|k|_e + 1$.

Многочлен P имеет коэффициенты, ограниченные в рассматриваемых областях. Коэффициенты линейной формы L являются функциями точки u и t_v^1 в соответствующих точках. По модулю эти коэффициенты не превышают $C^{|k|_e}$ для некоторого C , и число членов формы L не превышает $(n+1)^{|k|_e}$.

Действительно, тогда из утверждений 6 и 7 с учётом аддитивности в произведениях t -степени роста и степени роста следует, что дифференциальная степень и степень роста в правой части (3.16) удовлетворяют требованиям предложения. Существенный порядок производных, входящих в P , не выше $|k|_{es} - 1$. С учётом утверждений 6 и 7 получается, что в предложении 6 соответствующий порядок не выше $|k|_{es} - 1$.

Так как замена карты отображает слой в слой, это преобразование от (ξ^2, t^2) к (ξ^1, t^1) должно иметь вид:

$$\xi^1 = h(\xi^2), \quad t^1 = f(t^2, \xi^2),$$

где h — голоморфное отображение и f — голоморфная функция. Так же, как и раньше, мы будем обозначать частными производными производные этих функций по своим переменным и нижними индексами — полные производные функций в точках на геодезических. Рассмотрим производную по переменным $v, t_0^2, t_{v,0}^2, \xi^2, \bar{t}_0^2, \bar{t}_{v,0}^2, \xi^2$ с мультииндексом (k) уравнения

$$f(t^2(v, t_0^2, t_{v,0}^2, \xi^2), \xi^2) = t^1\left(v, f(t_0^2, \xi^2), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t_0^2, \xi^2)t_{v,0}^2, h(\xi^2)\right).$$

Заметим сначала, что

$$t_v^2(v, t_0^2, t_{v,0}^2, \xi^2) = \left(\frac{\partial f}{\partial t^2}\right)^{-1} t_v^1\left(v, f(t_0^2, \xi^2), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t_0^2, \xi^2)t_{v,0}^2, h(\xi^2)\right).$$

Теперь предположим, что $k_v = 0$, то есть $|k| = |k|_e$. Для производной $t_{(k)}^2$ мы получим

$$\frac{\partial f}{\partial t^2} t_{(k)}^2 + P_1(t^2) = \sum_{|l|=|k|_e} a_{(l)} t_{(l)}^1 + P_2(t^1). \quad (3.20)$$

Здесь P_1 — t^2 -дифференциальный многочлен, такой что его полная t^2 -степень равна $|k|$, а дифференциальная t^2 -степень не больше $|k| - 1$. Аналогично P_2 — это t^1 -дифференциальный многочлен, такой что его полная t^1 -степень равна $|k|$, а дифференциальная t^2 -степень не больше $|k| - 1$. Коэффициенты $a_{(l)}$ являются произведениями $|k|_e$ сомножителей вида

$$\frac{\partial h_i}{\partial \xi_j^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_j^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2 \partial \xi_j^2} t_v^2, \quad \frac{\partial^2 f}{(\partial t^2)^2} t_v^2$$

и их сопряжённых, взятых в точке (t_0^2, ξ^2) . Все эти сомножители равномерно ограничены в рассматриваемых областях, отделённых от особых точек (напомним, что $|t_v|$ равен длине единичного касательного вектора в нашей метрике G и зависит от точки на геодезической, а не от значения v). Таким образом, эти коэффициенты по модулю не превосходят $C^{|k|_e}$ для некоторого C . При каждом дифференцировании по одной из существенных переменных

число членов в форме L умножается не больше чем на число переменных функции f плюс 1, то есть на $n + 1$. Значит, их число не больше $(n + 1)^{|k|_e}$.

Теперь, переходя к случаю произвольного (k) , нетрудно увидеть, что дифференцирование по v не изменяет коэффициентов формы L и t^1 - (соответственно t^2 -) степеней роста многочленов P_1 и P_2 . Это значит, что эти степени роста не превышают $|k|_e + 1$. Коэффициенты многочленов P_1 и P_2 являются многочленами от частных производных функций h_j, f , которые ограничены в рассматриваемых областях. Переходя в многочлене P_1 к карте (ξ^1, t^1) и учитывая (3.20), мы, по индукции, снова получаем многочлен t^1 -степени роста не выше $|k|_e + 1$. \square

§ 4. Доказательство оценок (0.3), (0.4)

Дадим сначала некоторые общие пояснения. У нас имеется исходное глобальное трансверсальное сечение и локальное трансверсальное сечение в карте в окрестности данной точки многообразия универсальных накрывающих. Нам нужно оценить производные по локальному сечению карты и сравнить их с производными по базе. Этот переход оценивается производными отображения последования (голономии) от базы к трансверсальному сечению карты. А эта производная оценивается производными композиции трансверсальных функций перехода. Каждая функция перехода между трансверсальными сечениями в соседних картах имеет ограниченные производные. Геодезический путь от базы к рассматриваемому сечению покрывается цепочкой карт. Производные функций перехода от базы к рассматриваемой карте допускает оценку, экспоненциально зависящую от числа карт в цепочке — по существу от длины геодезической. С другой стороны, производные по локальному сечению карты сами имеют оценку, экспоненциальную по числу карт в цепочке, так как такую оценку имеют их начальные значения в отмеченной точке карты. Получается суперэкспоненциальная оценка по длине геодезической, которая при переходе к карте (u, r) леммы 2 даёт оценки (0.3), (0.4).

Приступая к подробному изложению, заметим, во-первых, что существует некоторое значение $\delta > 0$, такое что для любой неособой точки p найдётся некоторая область U_j или V_{jk} , такая что p принадлежит этой области и расстояние в метрике G от точки p до границы ∂U_j (∂V_{jk} соответственно) больше δ . Это верно, в частности, для любой точки, принадлежащей пересечению некоторых областей U_j и U_i или U_j и V_{jk} .

Теперь мы рассмотрим некоторую геодезическую γ с началом в точке p_0 с координатами $(0, u_0, \zeta_0)$ в базе. Пусть p — некоторая точка на этой геодезической с координатами (v, u_0, ζ_0) . Для краткости мы будем говорить об отрезке $[0, v]$, не упоминая остальные координаты. Кривая γ проходит через некоторую последовательность областей $U_j, \dots, V_{jk}, \dots$. Разобьём отрезок $[0, v]$ на некоторое конечное число отрезков $[0, v_1], \dots, [v_N, v]$ так, что

каждый отрезок $[u_j, u_{j+1}]$ лежит в некоторой области U_l или V_{ik} , и координате u_j соответствует отмеченная точка p_j на геодезической, находящаяся в пересечении двух таких областей, а именно, имеющих номера j и $j+1$. Далее мы будем обозначать через V_j область, имеющую j -й номер в нашей последовательности. Выбор областей V_j и отмеченных точек p_j неоднозначен, и сейчас мы его уточним. Пусть у нас выбраны области вплоть до V_j и отмеченные точки вплоть до p_{j-1} . Пусть p' — первая точка пересечения геодезической γ с границей ∂V_j . Здесь имеется в виду порядок точек на γ , следующих после p_{j-1} . Согласно предшествующему замечанию, мы можем выбрать область V_{j+1} так, что расстояние от точки p' до границы ∂V_{j+1} будет больше δ . Выберем после этого точку p_j так, чтобы она лежала достаточно близко к точке p' , — так, что расстояние от неё до границы ∂V_{j+1} будет больше, например, $\delta/2$.

При таком выборе областей V_j и отмеченных точек существует некоторое $d > 0$, такое что $u_j - u_{j-1} \geq d$ и, следовательно,

$$N \leq \frac{\nu}{d}. \quad (4.1)$$

Легко видеть, что эта оценка зависит только от покрытия, но не от геодезической.

Теперь зафиксируем некоторый мультииндекс (k) и рассмотрим последовательность $\widehat{\Psi}_{(k)}^j$, каждая функция определена в области V_{j+1} , производные берутся по переменным ξ^j , $t_0^j = t^j(u_j)$, $t_{v,0}^j = t_v^j(u_j)$. Мы принимаем, что $\xi^0 = \zeta$, $t_0^0 = 0$, $t_{v,0}^0 = e^{iu}$.

В следующем предложении оцениваются производные по трансверсальным переменным и по начальным условиям в локальной карте.

Предложение 7. В вышеприведённых обозначениях выполняются оценки:

$$|\widehat{\Psi}_{(k)}^j(v)| \leq M_{(k)} \exp\{b|k|_{es}(|k|_e + 1)s(v)\}, \quad (4.2)$$

где $M_{(k)}$ зависят только от (k) , b не зависит от (k) . Для функций ρ и ρ' в области V_j выполняется оценка

$$|\rho(v)| \leq A \exp\{s(v) - s(u_j)\}, \quad |\rho'(v)| \leq A \exp\{s(v) - s(u_j)\}, \quad (4.3)$$

и аналогичные оценки выполняются для ρ^* , ρ^{*f} , ρ'_v , ρ_v^{*f} .

Доказательство. Мы будем рассматривать только случай функций $\Psi_{(k)}^j$. Остальные случаи аналогичны. Достаточно получить оценки для функций $\Psi_{(k)}^{j,+} = \Psi_{(k)}^j + \bar{\Psi}_{(k)}^{*j}$ и $\Psi_{(k)}^{j,-} = \Psi_{(k)}^j - \bar{\Psi}_{(k)}^{*j}$ (см. предложение 5). Согласно предложению 6

$$\Psi_{(k)}^{j+1,\pm} = L_j^\pm + p_j^\pm,$$

где L_j^\pm — линейная форма от производных функций Ψ^j , Ψ^{*j} (и их сопряжённых) степени $|k|$ и существенного порядка $|k|_{es}$ и многочлен p_j^\pm содержит только производные существенного порядка меньше $|k|_{es}$, причём степень роста этого многочлена не выше $|k|_e + 1$. В частности, $\Psi_{(k)}^{j,\pm}(u_j) = L_j^\pm|_{u_j} + p_j^\pm|_{u_j}$.

Здесь мы обозначаем зависимость функций L_j^\pm и p_j^\pm от точки нижним индексом, в отличие от их зависимости от производных функций $\widehat{\Psi}^{*j}$, относительно которых они являются многочленами. Заметим, что только коэффициенты многочленов L_j^\pm и p_j^\pm зависят от номера j , но не вид этих многочленов. Аналогично $\Psi_{(k),v}^{j,\pm}(v_j) = L_j^{\prime\pm}|_{v_j} + p_j^{\prime\pm}|_{v_j}$ с некоторыми $L_j^{\prime\pm}$, $p_j^{\prime\pm}$. Обозначим через $\{\widehat{\Psi}_{|k|}^j\}$ набор функций $\{\Psi_{(l_i)}^{j,+}, \Psi_{(l_s)}^{j,-}, \overline{\Psi}_{(l_i)}^{j,+}, \overline{\Psi}_{(l_s)}^{j,-}\}$ для всех мультииндексов l_i, l_s, l_i, l_s степени $|k|$. Обозначим через $\{\widehat{\Psi}_{|k|,v}^j\}$ аналогичный набор $\{\Psi_{(l_i),v}^{j,+}, \dots\}$. Введём также обозначения: $\{\alpha^j\} = \{\widehat{\Psi}_{|k|}^j(u_j)\}$, $\{\beta^j\} = \{\widehat{\Psi}_{|k|,v}^j(u_j)\}$.

Напомним теперь, что существует решение θ уравнения (2.13), которое при $v > 0$ имеет вид

$$\theta(v) = \eta(v)e^{s(v)}, \quad \theta_v(v) = \eta'(v)e^{s(v)}, \quad (4.4)$$

где s — это функция из (2.19) и функции η, η' равномерно ограничены на любой области $v \geq c > 0$.

Согласно предложению 5, функции $\Psi_{(k)}^{j+}, \Psi_{(k),v}^{j+}, \Psi_{(k)}^{j-}, \Psi_{(k),v}^{j-}$, определённые в области V_{j+1} , имеют вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{(k)}^{j+1,+}(v) = & \theta(v) \left[\frac{L_j^+(\{\alpha^j\}) + p_j^+|_{v_j}}{\theta(v_j)} + \right. \\ & + \left[(L_j^+(\{\beta^j\}) + p_j^+|_{v_j})\theta(v_j) - (L_j^+(\{\alpha^j\}) + p_j^+|_{v_j})\theta_v(v_j) \right] \int_{v_j}^v \theta^{-2}(t) dt \Big] + \\ & + \theta(v) \int_{v_j}^v \theta^{-2}(t) \int_{v_j}^t \theta(\tau) P^+(\tau) d\tau dt, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{(k),v}^{j+1,+}(v) = & \theta_v(v) \frac{L_j^+(\{\alpha^j\}) + p_j^+|_{v_j}}{\theta(v_j)} + \\ & + \left[(L_j^+(\{\beta^j\}) + p_j^+|_{v_j})\theta(v_j) - (L_j^+(\{\alpha^j\}) + p_j^+|_{v_j})\theta_v(v_j) \right] \times \\ & \times \left[\theta_v(v) \int_{v_j}^v \theta^{-2}(t) dt + \theta^{-1}(v) \right] + \\ & + \theta_v(v) \int_{v_j}^v \theta^{-2}(t) \int_{v_j}^t \theta(\tau) P^+(\tau) d\tau dt + \theta^{-1}(v) \int_{v_j}^v \theta(\tau) P^+(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\Psi_{(k)}^{j+1,-}(v) = L_j^-(\{\alpha^j\}) + p_j^-|_{v_j} + (L_j^-(\{\beta^j\}) + p_j^-|_{v_j})(v - v_j) + \int_{v_j}^v \int_{v_j}^t P^-(\tau) d\tau dt, \quad (4.7)$$

$$\Psi_{(k),v}^{j+1,-}(v) = (L_j'^-(\{\beta^j\}) + p_j'^-|_{v_j}) + \int_{v_j}^v P^-(\tau) d\tau. \quad (4.8)$$

Здесь P^+ , P^- — дифференциальные многочлены степени роста не выше $|k|_e + 1$, содержащие только производные существенного порядка меньше $|k|_{es}$, и θ — решение уравнения (2.13) вида (4.4). Мы не пишем аналогичные уравнения для других функций $\widehat{\Psi}_{(k)}$.

Из (4.4) следуют оценки:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\theta(v)}{\theta(v_j)} \right| &\leq A \exp\{s(v) - s(v_j)\}, \quad \left| \theta(v) \theta(v_j) \int_{v_j}^v \theta^{-2}(t) dt \right| \leq A \exp\{s(v) - s(v_j)\}, \\ \left| \theta(v) \theta_v(v_j) \int_{v_j}^v \theta^{-2}(t) dt \right| &\leq A \exp\{s(v) - s(v_j)\}, \quad \left| \frac{\theta_v(v)}{\theta(v_j)} \right| \leq A \exp\{s(v) - s(v_j)\}, \\ \left| \frac{\theta(v_j)}{\theta(v)} \right| &\leq A \exp\{s(v_j) - s(v)\}, \quad \left| \frac{\theta_v(v_j)}{\theta(v)} \right| \leq A \exp\{s(v_j) - s(v)\}, \\ \left| \theta(v_j) \theta_v(v) \int_{v_j}^v \theta^{-2}(t) dt \right| &\leq A \exp\{s(v) - s(v_j)\}, \\ \left| \theta_v(v_j) \theta_v(v) \int_{v_j}^v \theta^{-2}(t) dt \right| &\leq A \exp\{s(v) - s(v_j)\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

для некоторого $A > 0$. Имеется также очевидная оценка

$$v - v_j \leq A \exp\{s(v) - s(v_j)\}. \quad (4.10)$$

Пусть теперь C — константа из предложения 6, $C' = 4(n+1)C$. Учитывая (4.1) и то, что $s(v)$ имеет производную, равномерно ограниченную снизу, получаем

$$(4(n+1)CA)^j \leq (C'A)^j \leq \exp \left\{ \frac{(\ln C' + \ln A)v_j}{d} \right\} \leq \exp\{bs(v_j)\} \quad (4.11)$$

для некоторого $b > 0$.

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \|\widehat{\Psi}_{|k|}^j(v)\| &= \max_{(l_i), (l_s), (l_{\bar{i}}), (l_{\bar{s}})} \left\{ |\Psi_{(l_i)}^{j,+}(v)|, \dots, |\bar{\Psi}_{(l_{\bar{s}})}^{j,-}(v)| \right\}, \\ \|\widehat{\Psi}_{|k|,v}^j(v)\| &= \max_{(l_i), \dots, (l_{\bar{s}})} \left\{ |\Psi_{(l_i),v}^{j,+}(v)|, \dots, |\bar{\Psi}_{(l_{\bar{s}}),v}^{j,-}(v)| \right\}. \end{aligned}$$

Переходя к доказательству предложения, предположим, что для всех мультииндексов (l) , таких что $|l| \leq |k|$, $|l|_{es} \leq |k|_{es} - 1$, для всех i выполняются

оценки

$$|\widehat{\Psi}_{(l)}^i(v)| \leq M_{(l)} \exp \{b(|l|_{es}(|l|_e + 1)s(v)\}, \quad (4.12)$$

где константы $M_{(l)}$ не зависят от i . Покажем, что тогда

$$\begin{aligned} |P^\pm(v)| &\leq m_{(k)} \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v)\}, \\ |p_j^\pm|_{v_j} &\leq m_{(k)} \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v_j)\}, \\ |p_j^\pm|_{v_j} &\leq m_{(k)} \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v_j)\} \end{aligned}$$

с некоторой константой $m_{(k)}$, не зависящей от j . Действительно, коэффициенты многочленов P^\pm равномерно ограничены некоторой константой (предложение 4), а коэффициенты многочленов p^\pm , p'^\pm равномерно ограничены в области, отделённой от особых точек (предложение 6). Также число членов этих многочленов ограничено некоторой константой. Пусть у нас есть член, в который сомножителями входят производные с мультииндексами $(l_1), \dots, (l_s)$. Тогда $|l_p|_{es} \leq |k|_{es} - 1$ для всех (l_p) , $p \leq s$, и этот член оценивается как

$$ae^{b(|k|_{es}-1)\sum(|l_p|_e+1)s(v)} \leq \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v)\}.$$

Таким образом, мы получаем оценки:

$$\begin{aligned} \theta(v) \int_{v_j}^v \theta^{-2}(t) \int_{v_j}^t \theta(\tau) P^+(\tau) d\tau dt &\leq Bm_{(k)} \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v)\}, \\ \theta_v(v) \int_{v_j}^v \theta^{-2}(t) \int_{v_j}^t \theta(\tau) P^+(\tau) d\tau dt &\leq Bm_{(k)} \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v)\}, \\ \theta^{-1}(v) \int_{v_j}^v \theta(\tau) P^+(\tau) d\tau &\leq Bm_{(k)} \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v)\}, \quad (4.13) \\ \int_{v_j}^v \int_{v_j}^t P^-(\tau) d\tau dt &\leq Bm_{(k)} \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v)\}, \\ \int_{v_j}^v P^-(\tau) d\tau &\leq Bm_{(k)} \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v)\} \end{aligned}$$

с некоторой константой B , не зависящей от j и (k) . Таким образом, принимая во внимание оценки (4.8), (4.10) и (4.13), мы получаем из уравнений (4.5)–(4.8):

$$|\Psi_{(k)}^j(v)| \leq (n+1)^{|k|_e} C^{|k|_e} A \left(\|\widehat{\Psi}_{|k|}^{j-1}(v_j)\| + \|\widehat{\Psi}_{|k|,v}^{j-1}(v_j)\| \right) \exp \{s(v) - s(v_j)\} +$$

$$+ M_{(k)} \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v)\}, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_{(k),v}^j(v)| &\leq (n+1)^{|k|_e} C^{|k|_e} A \left(\|\widehat{\Psi}_{|k|}^{j-1}(v_j)\| + \|\widehat{\Psi}_{|k|,v}^{j-1}(v_j)\| \right) \exp\{s(v) - s(v_j)\} + \\ &+ M_{(k)} \exp \{b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1)s(v)\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь константа $M_{(k)}$ зависит только от (k) .

Заметим, что за исключением функции φ , рассмотренной во втором разделе, все функции $\widehat{\Psi}_{(k)}^0$ имеют нулевые начальные значения. Тем самым, учитывая оценку (4.11), индукцией по j получаем из (4.14), (4.15):

$$\begin{aligned} \|\widehat{\Psi}_{(k)}^j(v)\| &\leq (4(n+1)^{|k|_e} C^{|k|_e} A)^j M_{(k)} \exp \{[b(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1) + 1]s(v)\} \leq \\ &\leq M_{(k)} \exp \{b[(|k|_{es} - 1)(|k|_e + 1) + k_e + 1]s(v)\} = \\ &= M_{(k)} \exp \{b|k|_{es}(|k|_e + 1)s(v)\}. \end{aligned}$$

Для $|\Psi_{(k),v}^j|$ получаем такую же оценку. Тем самым мы доказали оценку (4.2).

Чтобы доказать оценку (4.3), заметим, что ρ , ρ^* удовлетворяют однородной системе (3.5), (3.5'). Аналогичной системе удовлетворяют ρ' , $\rho^{*'}.$ Обозначим через $\|R(v)\|$ величину $\max\{\rho(v), \rho^*(v), \rho_v(v), \rho_v^*(v)\}$. С помощью (3.14), (3.15) мы получаем в V_j

$$\|R(v)\| \leq M \|R(v_j)\| \exp\{s(v) - s(v_j)\}$$

для некоторого M . Аналогичную оценку имеем для ρ' . Но начальные значения ρ , ρ^* , ρ_v , ρ_v^* в v_j равномерно ограничены. Действительно, так как $t(v_j) = t_0$, получаем, что

$$\begin{aligned} \rho(v_j) &= \frac{t_{\bar{t}_0}(v_j)}{t_v(v_j)} = 0, \quad \rho^*(v_j) = \frac{1}{t_v(v_j)}, \\ \rho_v(v_j) &= \frac{(t_v)_{\bar{t}_0}(v_j)}{t_v(v_j)} - t_{\bar{t}_0}(v_j) \left(\frac{t_v^2}{(t_v)^2} \right)(v_j) = \frac{(t_v)_{\bar{t}_0}(v_j)}{t_v(v_j)}, \\ \rho_v^*(v_j) &= \frac{(t_v)_{t_0}(v_j)}{t_v(v_j)} - \left(\frac{t_v^2}{(t_v)^2} \right)(v_j) = \frac{(t_v)_{t_0}(v_j)}{t_v(v_j)} - \Gamma(v_j). \end{aligned}$$

Напомним, что t_v — это вектор, единичный в нашей метрике и касательный к геодезической, и все эти величины являются функциями точки в V_j , определёнными вектором t_v и точкой t_0 . Эти функции равномерно ограничены в любой области, отделённой от особых точек. Также равномерно ограничены начальные значения ρ' , ρ^{*} , ρ'_v , ρ_v^{*} . Действительно, с точностью до второго порядка по $v - v_j$ имеем $t = t_0 + t_{v,0}(v - v_j)$. Поэтому

$$\rho'(v_j) = \rho^{*'}(v_j) = \rho'_v(v_j) = 0, \quad \rho_v^{*'}(v_j) = \frac{1}{t_v(v_j)}.$$

Очевидно, что аналогичные рассуждения проходят и для v -производных этих функций. \square

Теперь мы оценим производные по «абсолютным» переменным $\widehat{\zeta} = (\zeta, u)$. Мы будем снабжать эти функции и соответствующие мультииндексы индексом a , например, мы будем обозначать ψ_i^a функцию $t_{\bar{\zeta}_i}/t_v$ и $\psi_{i,(k^a)}^a$ производную

$$\psi_{i,(k^a)}^a = \frac{\partial^{|k|} \psi_i^a}{\partial^{k_1} \zeta_1 \dots \partial^{k_{n-1}} \zeta_{n-1} \partial^{\bar{k}_1} \bar{\zeta}_1 \dots \partial^{\bar{k}_{n-1}} \bar{\zeta}_{n-1} \partial^{k_v} v \partial^{k_u} u}. \quad (4.16)$$

Мы будем обозначать через $\{\Psi_i^a\}$, $i = 1, \dots, n$, набор функций: $\psi_1^a, \dots, \psi_{n-1}^a$, φ (напомним, что φ — функция, определённая уравнениями (2.13), (2.14)) и $\{\Psi_i^{*a}\}$ — набор $\psi_1^{*a}, \dots, \psi_{n-1}^{*a}$, а также $\widehat{\Psi}^a$ — произвольную функцию из этого набора. Мы не будем вводить новых определений и для производной вида (4.16) будем полагать $|k^a|_e = |k^a| - k_v$ и $|k^a|_{es} = |k^a| + |k^a|_e$, аналогично случаю производных по локальным координатам. Так же как обычно, мы будем рассматривать дифференциальные многочлены, — когда нужно будет отличать их от локального случая, мы будем называть их a -дифференциальными многочленами. Для них определена дифференциальная a -степень и a -степень роста.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{\zeta}_i} &= \psi_{i,u} - \varphi \frac{t_{v\bar{\zeta}_i}}{t_v} + \psi_i \frac{t_{uv}}{t_v} = \\ &= \psi_{i,u} - \varphi \left(\psi_{i,v} + \psi_i \frac{t_{v^2}}{t_v} \right) + \psi_i \left(\varphi_v + \varphi \frac{t_{v^2}}{t_v} \right) = \psi_{i,u} - \varphi \psi_{i,v} + \psi_i \varphi_v \end{aligned}$$

и аналогично для φ_{ζ_i} . Таким образом, оценки для производных функции φ в трансверсальных направлениях сводятся к оценкам производных для ψ и ψ^* , и мы их не будем отдельно рассматривать.

Предложение 8. *Функции Ψ_i^a удовлетворяют оценке*

$$|\Psi_{i,(k^a)}^a(v)| \leq M_{(k)} \exp \{ B |k^a|^2 (|k^a|_e + 1) s(v) \}, \quad (4.17)$$

где $M_{(k)}$ зависят только от (k) , B не зависит от (k) .

Доказательство. Подобно доказательству предложения 7, нам нужно оценить одновременно производные функций ψ_i^a , ψ_i^{*a} , $\psi_{i,v}^a$ и $\psi_{i,v}^{*a}$. Мы используем терминологию предложения 7, когда имеем дело с локальными картами. Мы также будем обозначать $t_0^j = t^j(v_j)$, $t_{v_0}^j = t_v^j(v_j)$. Будем полагать, что $t^j = f(\xi^{j-1}, t^{j-1})$. Нам понадобится рассматривать произведения вида

$$b(v_j) M^{a,j-1}(v_j) M^j(v),$$

где $M^{a,j-1}$ — a -дифференциальный одночлен от функций $\widehat{\Psi}^{a,j-1}$, а M^j — дифференциальный одночлен от функций $\widehat{\Psi}^j$. Сумму таких членов мы будем называть смешанным дифференциальным многочленом. Для него мы будем определять по отдельности a -порядок производных или степень роста как a -дифференциального многочлена и j -порядок производных или степень роста как дифференциального многочлена от $\widehat{\Psi}^j$. Докажем следующее утверждение:

Предложение 9. Пусть (k^a) — мультииндекс. Производная $\widehat{\Psi}_{(k^a)}^{aj}$ может быть представлена в виде

$$\widehat{\Psi}_{(k^a)}^{aj}(v) = L(\Psi_{(k^a)}^{a,j-1}(v_j), \Psi_{(k^a)}^{*a,j-1}(v_j), \dots) + P^{j-1,j}(v, v_j), \quad (4.18)$$

где L — линейная функция от $\widehat{\Psi}_{(k^a)}^{a,j-1}(v_j)$, $\widehat{\Psi}_{v,(k^a)}^{a,j-1}(v_j)$ и их сопряжённых, с коэффициентами, оцениваемыми как $A \exp\{s(v) - s(v_j)\}$, A не зависит от (k) , j , а $P^{j-1,j}$ — смешанный дифференциальный многочлен, имеющий дифференциальную a -степень не выше $|k^a|$, a -степень роста не выше $|k^a|_e + 1$, a -существенный порядок входящих производных не выше $|k^a|_{es} - 1$. Для дифференциальной j -степени и j -степени роста выполняются те же оценки, существенный j -порядок производных не выше $|k^a|_{es}$. Коэффициенты этого многочлена по модулю не больше $A^{|j|k^a|}$ для некоторого $A > 0$, не зависящего от j и (k^a) .

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $|k| = 0$. В области V_j имеем:

$$\begin{aligned} \psi_1^{aj} &= \frac{t_{\bar{\zeta}_1}^j}{t_v^j} = \\ &= \frac{1}{t_v^j} \left(\sum_{i=1}^{n-1} t_{\bar{\zeta}_i}^j \frac{\partial \bar{\xi}_i^j}{\partial \bar{\zeta}_1} (v_j) + t_{t_0}^j t_{\bar{\zeta}_1}^j (v_j) + t_{\bar{t}_0}^j \bar{t}_{\bar{\zeta}_1}^j (v_j) + t_{t_{v_0}}^j t_{v,\bar{\zeta}_1}^j (v_j) + t_{\bar{t}_{v_0}}^j \bar{t}_{v,\bar{\zeta}_1}^j (v_j) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^j \frac{\partial \bar{\xi}_i^j}{\partial \bar{\zeta}_1} (v_j) + \rho^{*j} t_{\bar{\zeta}_1}^j (v_j) + \rho^j \bar{t}_{\bar{\zeta}_1}^j (v_j) + \rho^{*j} t_{v,\bar{\zeta}_1}^j (v_j) + \rho'^j \bar{t}_{v,\bar{\zeta}_1}^j (v_j), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\psi_{1,v}^{aj} = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{i,v}^j \frac{\partial \bar{\xi}_i^j}{\partial \bar{\zeta}_1} (v_j) + \rho_v^{*j} t_{\bar{\zeta}_1}^j (v_j) + \rho_v^j \bar{t}_{\bar{\zeta}_1}^j (v_j) + \rho_v^{*j} t_{v,\bar{\zeta}_1}^j (v_j) + \rho_v'^j \bar{t}_{v,\bar{\zeta}_1}^j (v_j). \quad (4.20)$$

Мы не будем писать аналогичные выражения для $\psi_1^{*,aj}$ и $\psi_{1,v}^{*,aj}$.

Теперь, $t^j = f^j(\xi^{j-1}, t^{j-1})$ в $V_j \cap V_{j-1}$. Вспоминая, что

$$t_{\bar{\zeta}_1}^{j-1} = \psi_1^{a,j-1} t_v^{j-1}, \quad \bar{t}_{\bar{\zeta}_1}^{j-1} = \bar{\psi}_1^{*a,j-1} \bar{t}_v^{j-1}, \quad t_{v,\bar{\zeta}_1}^{j-1} = \psi_{1,v}^{a,j-1} t_v^{j-1} - \psi_1^{a,j-1} \Gamma t_v^{j-1}$$

и

$$\bar{t}_{v,\bar{\zeta}_1}^{j-1} = \bar{\psi}_{1,v}^{*a,j-1} \bar{t}_v^{j-1} - \bar{\psi}_1^{*a,j-1} \Gamma \bar{t}_v^{j-1},$$

мы получаем, что величины $t_{\bar{\zeta}_1}^j(v_j)$, $\bar{t}_{\bar{\zeta}_1}^j(v_j)$, ..., т. е. коэффициенты при ρ^{*j} , ρ^j , ... в (4.19), (4.20), будут суммами членов вида

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial t^{j-1}} \widehat{\Psi}_1^{a,j-1} t_v^{j-1} \right) (v_j), \quad \left(\frac{\partial f^j}{\partial t^{j-1}} \widehat{\Psi}_1^{a,j-1} \Gamma t_v^{j-1} \right) (v_j), \quad (4.21)$$

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial t^{j-1}} \widehat{\Psi}_{1,v}^{a,j-1} t_v^{j-1} \right) (v_j), \quad \left(\frac{\partial^2 f^j}{\partial (t^{j-1})^2} \widehat{\Psi}_1^{a,j-1} (t_v^{j-1})^2 \right) (v_j), \quad (4.22)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \bar{f}^j}{\partial \bar{\xi}_i^{j-1}} \frac{\partial \bar{\xi}_i^{j-1}}{\partial \bar{\zeta}_1} \right) (v_j), \quad \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \bar{f}^j}{\partial \bar{\xi}_i^{j-1} \partial \bar{t}^{j-1}} \frac{\partial \bar{\xi}_i^{j-1}}{\partial \bar{\zeta}_1} \bar{t}_v^{j-1} \right) (v_j) \quad (4.23)$$

и их сопряжённых.

Таким образом, можно написать:

$$\begin{aligned} \psi_1^{aj} = & a_1 \psi_1^{a,j-1}(v_j) + a_2 \bar{\psi}_1^{*a,j-1}(v_j) + a_3 \psi_{1,v}^{a,j-1}(v_j) + \\ & + a_4 \bar{\psi}_{1,v}^{*a,j-1}(v_j) + P_0^{*(j-1),j} := L + P_0^{*(j-1),j}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где функции a_i линейны по $\rho^j(v)$, $\rho^{*j}(v)$, $\rho'^j(v)$, $\rho^{*j}(v)$ с коэффициентами, являющимися суммами членов вида

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial t^{j-1}} t_v^{j-1} \right) (v_j), \quad \left(\frac{\partial f^j}{\partial t^{j-1}} \Gamma t_v^{j-1} \right) (v_j), \quad \left(\frac{\partial^2 \bar{f}^j}{\partial (\bar{t}^{j-1})^2} (\bar{t}_v^{j-1})^2 \right) (v_j)$$

и их сопряжённых. С другой стороны, $P_0^{*(j-1),j}$ представляется в виде суммы слагаемого

$$\sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^j(v) \frac{\partial \bar{\xi}_i^j}{\partial \bar{\xi}_1}(v_j)$$

(это первый член в правой части (4.19)) и членов, линейных по $\rho^j(v)$, $\rho^{*j}(v)$, $\rho'^j(v)$, $\rho^{*j}(v)$ с коэффициентами, являющимися суммами членов вида

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \bar{f}^j}{\partial \bar{\xi}_i^{j-1}} \frac{\partial \bar{\xi}_i^{j-1}}{\partial \bar{\xi}_1} \right) (v_j), \quad \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \bar{f}^j}{\partial \bar{\xi}_i^{j-1} \partial \bar{t}^{j-1}} \frac{\partial \bar{\xi}_i^{j-1}}{\partial \bar{\xi}_1} \bar{t}_v^{j-1} \right) (v_j)$$

и их сопряжённых.

Аналогичные представления получаются для $\psi_{1,v}^{aj}$. Коэффициенты (4.24) равномерно ограничены в областях, отделённых от особых точек, а для множителей $\rho^j(v)$, $\rho^{*j}(v)$, $\rho'^j(v)$, $\rho^{*j}(v)$ выполняется оценка (4.3). Таким образом, для формы L выполняется оценка предложения 9. Далее, мы видим, что P_0 имеет дифференциальную a -степень и существенный a -порядок производных, равные -1 , и a -степень роста, равную нулю. Его дифференциальная j -степень и существенный j -порядок производных равны нулю и j -степень роста равна 1. Матрица $(\partial \xi^j / \partial \zeta)$ является произведением матриц $(\partial \xi^j / \partial \xi^{j-1}) \circ \dots \circ (\partial \xi^1 / \partial \zeta)$. Во всех пересечениях областей определения наших карт нормы этих матриц равномерно ограничены некоторой константой A . То есть коэффициенты многочлена P_0 оцениваются как A^j . В то же время форма L имеет дифференциальные степени и существенные порядки производных (и j , и a) и обе степени роста, равные 1.

Рассмотрим теперь старшие производные. Для функции $h(\xi^s, t^s)$ будем обозначать через $\partial_{(l)} h$ частную производную по переменным (ξ^s, t^s) с мультииндексом (l) . Через $\partial_{(a)} h$ будем обозначать частную производную по «абсолютным» переменным с мультииндексом (l^a) . Покажем, что в слагаемых многочлена $P^{j-1,j}$ встречаются только множители вида: $\widehat{\Psi}_{(l)}^j(v)$, $t_v^{j-1}(v_j)$, $\partial_{(l)} \xi^j(v_j)$, $\partial_{(l)} f^j(v_j)$, $\partial_{(l)} \Gamma(v_j)$, $\partial_{(a)} \xi^j(v_j)$, $\partial_{(a)} \xi^{j-1}(v_j)$, $\widehat{\Psi}_{(l^a)}^{a,j-1}(v_j)$ и им сопряжённые. Мы видели, что это верно для производных нулевого порядка. Покажем, что при дифференцировании появляются множители того же вида, и попутно оценим их.

Пусть $\widehat{\Psi}_{(k^a)}^j = \widehat{\Psi}_{(k^a), \zeta_1}^j$ (случай дифференцирования по другим существенным переменным аналогичен). При этом $|k^a| = |k'^a| + 1$, $|k^a|_e = |k'^a|_e + 1$, $|k^a|_{es} = |k'^a|_{es} + 2$.

Рассмотрим дифференцирование различных сомножителей, появляющихся в правой части. Заметим, во-первых, что множители $\widehat{\Psi}_{(k^a)}^{a, j-1}(v_j)$ появляются только при дифференцировании множителей $\widehat{\Psi}_{(k^a)}^{a, j-1}(v_j)$ в форме L и входят в получающуюся форму с теми же коэффициентами. Таким образом, снова для формы L имеет место оценка предложения 9. Рассмотрим дифференцирование других членов. Мы имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_{(l), \zeta_1}^j(v) = & \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{\Psi}_{(l), \xi_i^j}^j(v) \frac{\partial \xi_i^j}{\partial \zeta_1}(v_j) + \widehat{\Psi}_{(l), t_{0,v}^j}^j(v) t_{\zeta_1}^j(v_j) + \\ & + \widehat{\Psi}_{(l), \bar{t}_{0,v}^j}^j(v) \bar{t}_{\zeta_1}^j(v_j) + \widehat{\Psi}_{(l), t_{v, \zeta_1}^j}^j(v) t_{v, \zeta_1}^j(v_j) + \widehat{\Psi}_{(l), \bar{t}_{v, \zeta_1}^j}^j(v) \bar{t}_{v, \zeta_1}^j(v_j). \end{aligned}$$

Теперь, так как $t_{\zeta_1}^j(v_j)$, $\bar{t}_{\zeta_1}^j(v_j)$, ... являются суммами членов вида (4.21)–(4.23), получаем, что дифференциальная j -степень и j -степень роста увеличиваются на 1, существенный j -порядок производных возрастает на 2, дифференциальная a -степень и существенный a -порядок производных не увеличиваются, a -степень роста увеличивается на 1. Появляющиеся множители

$$\frac{\partial f^j}{\partial t^{j-1}}, \quad \frac{\partial f^j}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 f^j}{\partial (t^{j-1})^2}, \quad \frac{\partial^2 f^j}{\partial \xi \partial t^{j-1}}, \quad \Gamma, \quad t_v^{j-1}$$

и их сопряжённые все вычисляются в точке v_j и равномерно ограничены.

Множители вида $\frac{\partial \xi_i^j}{\partial \zeta_1(v_j)}$ и $\frac{\partial \xi_i^{j-1}}{\partial \zeta_1(v_j)}$ оцениваются как A^j . Далее,

$$t_{v, \zeta_1}^{j-1}(v_j) = \psi_{1,v}^{*a, j-1} t_v^{j-1}(v_j) - \psi_1^{*a, j-1} \Gamma t_v^{j-1}(v_j).$$

Здесь j -степени и существенный j -порядок производных не изменяются, дифференциальная a -степень и существенный a -порядок повышаются на 1, a -степень роста также повышается на 1. Теперь

$$[\partial_{(l)} \xi^j(v_j)]_{\zeta_1} = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{(l), \xi_i^{j-1}} \xi^j \frac{\partial \xi_i^{j-1}}{\partial \zeta_1}.$$

Здесь степени роста и порядки производных не изменяются, а появляющийся коэффициент оценивается как MA^{j-1} с некоторым M , не зависящим от j . Также

$$\begin{aligned} [\partial_{(l)} f^j(v_j)]_{\zeta_1} &= \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{(l), \xi_i^{j-1}} f^j \frac{\partial \xi_i^{j-1}}{\partial \zeta_1}(v_j) + \partial_{(l), t^{j-1}} f^j t_{\zeta_1}^{j-1}(v_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{(l), \xi_i^{j-1}} f^j \frac{\partial \xi_i^{j-1}}{\partial \zeta_1}(v_j) + \partial_{(l), t^{j-1}} f^j \psi_1^{*a, j-1} t_v^{j-1}. \end{aligned}$$

Здесь дифференциальная j -степень, j -степень роста и существенный j -порядок производных не возрастают, дифференциальная a -степень и суще-

ственный a -порядок производных не увеличиваются, a -степень роста увеличивается на 1. Коэффициент $\frac{\partial \xi_i^{j-1}}{\partial \zeta_1}(u_j)$ по модулю не больше MA^{j-1} с M , не зависящим от j . Аналогично рассматривается производная множителя $\partial_{(l^a)} \xi^j(u_j)$. Далее, производные множителей $\partial_{(l^a)} \xi^j(u_j)$ и $\partial_{(l^a)} \xi^{j-1}(u_j)$ равны просто $\partial_{(l^a), \zeta_1} \xi^j(u_j)$ и $\partial_{(l^a), \zeta_1} \xi^{j-1}(u_j)$. Здесь степени роста и порядки производных не изменяются. Производная члена $\widehat{\Psi}_{(l^a)}^{a, j-1}(u_j)$ равна $\widehat{\Psi}_{(l^a), \zeta_1}^{a, j-1}(u_j)$. Здесь повышаются на 1 дифференциальная a -степень и a -степень роста, а существенный a -порядок производных повышается на 2. Осталось показать, что $|\partial_{(l^a)} \xi^j(u_j)| \leq MA^{|l^a|j}$ для некоторых M, A , не зависящих от j . Напомним, что нетривиален только случай, когда в мультииндекс (l^a) входят только производные по ζ_i , так как ξ^j являются голоморфными функциями этих переменных. Мы имеем

$$\partial_{(l^a), \zeta_1} \xi^j(u_j) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial(\partial_{(l^a)} \xi^j)}{\partial \xi_i^{j-1}} \frac{\partial \xi_i^{j-1}}{\partial \zeta_1}(u_j).$$

Отсюда

$$\partial_{(l^a)} \xi^j(u_j) = \sum_{|s|=|l^a|} \partial_{(s)} \xi^j(u_j) \sum_i \frac{\partial \xi_{i_1}^{j-1}}{\partial \zeta_i} \dots \sum_i \frac{\partial \xi_{i_{|s|}}^{j-1}}{\partial \zeta_{i_{|s|}}}(u_j),$$

где $i_1, \dots, i_{|s|}$ — индексы, входящие в (s) . Все частные производные до порядка $|k^a|$ функций $\xi^j(\xi_1^{j-1} \dots \xi_{n-1}^{j-1})$ в точках u_j равномерно ограничены. Отсюда следует требуемая оценка.

Случай дифференцирования по u аналогичен и даёт такие же оценки. Он даже проще, потому что здесь не возникает новых множителей типа $\partial \xi / \partial \zeta$. Также не сложен случай дифференцирования по v — он аналогичен рассматривавшимся в § 3. При этом не меняются степени роста, дифференциальные и существенные степени могут повышаться на 1. \square

Теперь вернёмся к доказательству предложения 8. Обозначим

$$\|\widehat{\Psi}_{(k^a)}^{aj}(v)\| = \max \left\{ |\psi_{(k^a)}^{aj}(v)|, |\psi_{(k^a)}^{*aj}(v)|, \dots, |\bar{\psi}_{(k^a), v}^{*aj}(v)| \right\}.$$

Для формы L в предложении 9 имеется оценка

$$|L(\{\widehat{\Psi}_{(k^a)}^{aj}(v)\})| \leq A \exp\{s(v) - s(u_j)\} \|\widehat{\Psi}_{(k^a)}^{a, j-1}(u_j)\|. \quad (4.25)$$

Пусть $a > 0$ таково, что $(2A)^j \leq e^{as(v)}$ (см. (4.1)). Будем теперь рассматривать $P^{j-1, j}$ как a -дифференциальный многочлен с коэффициентами, зависящими от производных по локальным переменным. Предложение 9, предложение 7 и неравенство (4.1) дают для этих коэффициентов оценку

$$m_{(k^a)} \exp \{ [b|k^a|_{es}(|k^a|_e + 1) + c|k^a|] s(v) \},$$

где $m_{(k^a)}$ не зависит от j , b и c не зависят от j и (k) . Увеличивая b , если нужно, можно считать, что

$$b|k^a|_{es}(|k^a|_e + 1) + c|k^a| + a + 1 \leq 2b|k^a|_{es}(|k^a|_e + 1). \quad (4.26)$$

Выберем $B \geq 2b$. Предположим, что для всех мультииндексов (l^a) , таких что $|l^a| \leq |k^a|$, $|l^a|_{es} \leq |k^a|_{es} - 1$, имеет место оценка:

$$\|\widehat{\Psi}_{(l^a)}^{aj}(v)\| \leq M_{(l^a)} \exp\{B|l^a|_{es}^2(|l^a|_e + 1)\}. \quad (4.27)$$

Покажем, что аналогичная оценка с тем же B выполняется для $\|\widehat{\Psi}_{(k^a)}^{aj}(v)\|$. Действительно, во-первых, можно написать:

$$\begin{aligned} & |P^{j-1,j}(v, v_j)| \leq \\ & \leq M_{(k^a)} \exp\{[b|k^a|_{es}(|k^a|_e + 1) + c|k^a|]s(v)\} \exp\{B(|k^a|_{es} - 1)^2(|k^a|_e + 1)s(v_j)\}. \end{aligned}$$

Индукцией по j с учётом (4.25), выбора a и (4.26), получаем

$$\begin{aligned} \|\widehat{\Psi}_{(k^a)}^{aj}(v)\| & \leq M_{(k^a)} (2A)^j e^{s(v)} \times \\ & \times \exp\{[b|k^a|_{es}(|k^a|_e + 1) + c|k^a| + B(|k^a|_{es} - 1)^2(|k^a|_e + 1)]s(v)\} \leq \\ & \leq M_{(k^a)} \exp\{(|k^a|_e + 1)[B(|k^a|_{es} - 1)^2 + 2b|k^a|_{es}]s(v)\} \leq \\ & \leq M_{(k^a)} \exp\{(k^a|_e + 1)[B|k^a|_{es}^2 + (2b - B)|k^a|_{es}]s(v)\} \leq \\ & \leq M_{(k^a)} \exp\{B(k^a|_e + 1)|k^a|_{es}^2 s(v)\}. \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали оценку (4.27) для (k^a) . Увеличивая B в четыре раза, получим оценку (4.17). \square

Переход к координатам u, r . Теперь, чтобы окончить доказательство теоремы 1, мы должны оценить производные правых частей выражений (2.33), (2.34). Рассуждения аналогичны доказательству предложения 3. Мы будем рассматривать мультииндексы вида $(k) = ((k'), r^j)$, где (k') не содержит производных по r . Индекс a , означающий дифференцирование по абсолютным переменным, мы опускаем. Нам нужно показать, что для производных с такими мультииндексами выполняются оценки (0.3).

Рассмотрим производные коэффициента μ_1 . Учитывая, что $\varphi = e^s - 1$, мы можем написать:

$$s_{(k)} = e^{-s} \varphi_{(k)} + P(\varphi, s), \quad (4.28)$$

где P — сумма членов вида $e^{-ps} \varphi_{(l_1)} \dots \varphi_{(l_p)}$, где $p \leq |k|$, $|l_i| \leq |k| - 1$ для всех (l_i) и $|l_1| + \dots + |l_p| \leq |k|$. Дифференцируя равенство

$$g(r, u, \zeta) = g(1 - e^{-s(u, u, \zeta)}, u, \zeta) = v$$

по u и ζ в соответствии с мультииндексом (k') и j раз по v , получим:

$$(-1)^j (s_v)^j e^{-js} g_{(k'), r^j} = P(g, s), \quad (4.29)$$

где P — многочлен от производных функций g и s , который мы можем представить как сумму слагаемых вида:

$$g_{(k_1), r^{i_1}} \dots g_{(k_p), r^{i_p}} s_{(l_1), v^{j_1}} \dots s_{(l_q), v^{j_q}} e^{-Is}, \quad (4.30)$$

где производные от g берутся в точке $(1 - e^{-s}, u, \zeta)$,

$$i_m + |k_m| \leq |k|, \quad |k_m| \leq |k'| - 1$$

для всех $i_m, (k_m)$,

$$I = i_1 + \dots + i_p, \quad |k_1| + \dots + |k_p| + |i_1| + \dots + |i_p| \leq |k|$$

и

$$|k_1| + \dots + |k_p| + |l_1| + \dots + |l_q| \leq |k'|.$$

Пусть $A > B$, где B — константа из правой части неравенства (4.17). Покажем по индукции, что

$$|g_{(k'), r^j}| \leq M_{(k)} \exp \{ [A|k|^2(|k'| + 1)^2 + j]s \}$$

с некоторой $M_{(k)}$, зависящей от (k) . Действительно, из (4.29), (4.30) с учётом (4.28) и предложения 8, получаем

$$\begin{aligned} |g_{(k'), r^j}| e^{-js} &\leq M_{(k)} \exp \{ A|k|^2 |k'|^2 s \} \exp \{ B|k|^2 (|k'| + 1)s \} \leq \\ &\leq M_{(k)} \exp \{ A|k|^2 (|k'| + 1)^2 s \}. \end{aligned}$$

То есть

$$|g_{(k'), r^j}| \leq M_{(k)} (1 - r)^{A|k|^2(|k'| + 1)^2 + j}.$$

Аналогично дифференцируя равенство

$$h(1 - e^{-s(v, u, \zeta)}, u, \zeta) s_v = 1,$$

получим оценку

$$|h_{(k'), r^j}| \leq M_{(k)} (1 - r)^{A|k|^2(|k'| + 1)^2 + j}.$$

Теперь оценка (0.3) следует из выражения (2.33), с учётом того, что знаменатель равномерно отделён от нуля.

Докажем оценку (0.4). Вспомним, что $\mu = t_{\bar{w}}/t_w = -1 + 2e^{-s}$, следовательно, знаменатель дроби в (2.34) равен

$$2e^{-s} r g_r + 2 - 2e^{-s} - 2ie^{-s} g_u.$$

Так как $g_r > 0$, этот знаменатель равномерно отделён от нуля. Напомним, что $c = t_{\bar{\zeta}}/t_w = \psi/(1 - i\varphi)$. Теперь оценка (0.4) следует из доказанных оценок для g , c и μ . □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Альфорс Л. Лекции о квазиконформных отображениях. М.: Мир, 1969.
- [2] Ahlfors L., Bers L. Riemann's mapping theorem for variable metrics // Ann. Math. 1960. Vol. 72, № 2. P. 385–404.
- [3] Brunella M. Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1997. Vol. 30, № 5. P. 569–594.
- [4] Brunella M. Plurisubharmonic variation of the leafwise Poincaré metric // Internat. J. Math. 2003. Vol. 14, № 2. P. 139–151.
- [5] Brunella M. On the plurisubharmonicity of the leafwise Poincaré metric on projective manifolds // J. Math. Kyoto Univ. 2005. Vol. 45. P. 381–390.

- [6] Brunella M. Uniformisation of foliations by curves // Holomorphic dynamical systems. P. 105–163. Lecture Notes in Math. 1998. Springer, Berlin, 2010.
- [7] Глуцук А. А. Гиперболичность листов общего одномерного голоморфного слоения на неособом проективном алгебраическом многообразии // Тр. МИАН. 1997. Т. 213. С. 90–111.
- [8] Glutsyuk A. A. On simultaneous uniformization and local nonuniformizability // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2002. Vol. 334, № 6. P. 489–494.
- [9] Ильяшенко Ю. С. Слоения на аналитические кривые // Матем. сб. 1972. Т. 88. С. 558–577.
- [10] Ilyashenko Yu. S. Covering manifolds for analytic families of leaves of foliations by analytic curves // Topol. Meth. Nonlinear Anal. 1998. Vol. 11. P. 361–373.
- [11] Ilyashenko Yu. S., Shcherbakov A. A. Remarks on the paper: Coverings manifolds for analytic families of leaves of foliations by analytic curves // Topol. Meth. Nonlinear Anal. 2004. Vol. 23. P. 377–381.
- [12] Lins-Neto A. Uniformization and the Poincaré metric on the leaves of a foliation by curves // Bol. Soc. Bras. Mat., N. S. 2000. Vol. 31, № 3. P. 351–366.
- [13] Shcherbakov A. A. Metrics and smooth uniformisation of leaves of holomorphic foliations // Mosc. Math. J. 2011. Vol. 11, № 1. P. 157–178.

Арсений Алексеевич ЩЕРБАКОВ
Москва, Институт физической химии
и электрохимии им. А. Н. Фрумкина РАН
E-mail: shcher@elchem.ac.ru

Представлено в редакцию 10.04.2013/28.03.2014

Finite cyclicity of some center graphics through a nilpotent point inside quadratic systems

R. Roussarie, C. Rousseau

In this paper we introduce new methods to prove the finite cyclicity of some graphics through a triple nilpotent point of saddle or elliptic type surrounding a center. After applying a blow-up of the family, yielding a singular 3-dimensional foliation, this amounts to proving the finite cyclicity of a family of limit periodic sets of the foliation. The boundary limit periodic sets of these families were the most challenging, but the new methods are quite general for treating such graphics. We apply these techniques to prove the finite cyclicity of the graphic (I_{14}^1) , which is part of the program started in 1994 by Dumortier, Roussarie and Rousseau (and called DRR program) to show that there exists a uniform upper bound for the number of limit cycles of a planar quadratic vector field. We also prove the finite cyclicity of the boundary limit periodic sets in all graphics but one through a triple nilpotent point at infinity of saddle, elliptic or degenerate type (with a line of zeros) and surrounding a center, namely the graphics (I_{6b}^1) , (H_{13}^3) , and (DI_{2b}) .

References: 8 entries. *UDK:* 517.927.7. *MSC2010:* 34C07, 37G15. *Keywords:* Hilbert's 16th problem, finite cyclicity, graphic through a nilpotent point, center graphic, quadratic vector fields.

CONTENTS

1. Introduction	205
2. Preliminaries	208
3. Applications to quadratic systems	215
4. Appendix I. Hyperbolic fixed points	227
5. Appendix II. Counting the number of roots	236
6. Appendix III	243
References	247

1. INTRODUCTION

This paper is part of a long term program to prove the finiteness part of Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields, sometimes written $H(2) < \infty$, namely the existence of a uniform bound for the number of limit cycles of quadratic vector fields. The DRR program (see paper [2]) reduces this problem to proving that 121 graphics (limit periodic sets) have finite cyclicity inside quadratic vector fields, and the long term program is to prove the finite cyclicity of all these graphics.

This program has been an opportunity to develop new more sophisticated methods for analyzing the finiteness of the number of limit cycles bifurcating from graphics in generic families of C^∞ vector fields, in analytic families of vector fields, and in finite-parameter families of polynomial vector fields. In this paper, we fo-

This research was supported by NSERC in Canada.

cus on some graphics in the latter case: graphics through a nilpotent point and surrounding a center inside quadratic systems. The general method is to use the Bautin trick, namely transforming a proof of finite cyclicity of a generic graphic into a proof of finite cyclicity of a graphic surrounding a center. This is possible in quadratic systems since the center conditions are well known: indeed all graphics through a nilpotent point and surrounding a center occur in the stratum of reversible systems. The systems of this stratum are symmetric with respect to an axis, and are also Darboux integrable with an invariant line and an invariant conic. In practice, the Bautin trick consists in dividing a displacement map V in a center ideal, i. e. in writing it as a finite sum of “generalized monomials” times non vanishing functions of the form

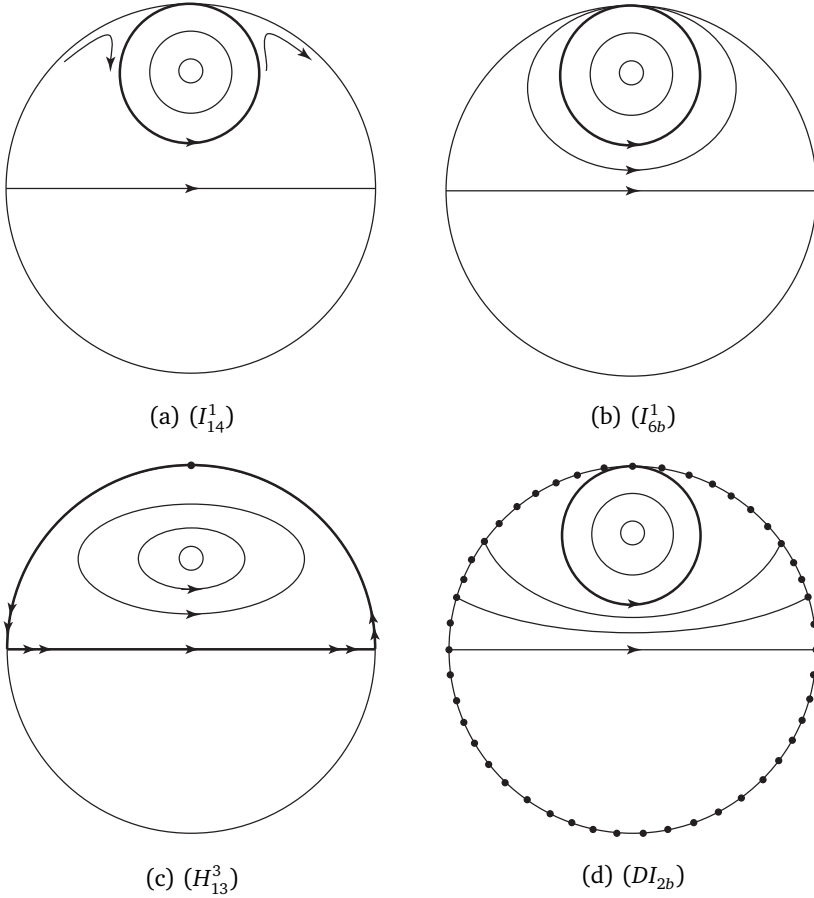
$$V(z) = \sum_{i=1}^n a_i m_i (1 + h_i(z)), \quad (1.1)$$

where each a_i belongs to the center ideal in parameter space, m_i is a generalized monomial in z and $h_i(z) = o(1)$ behaves well under derivation.

To compute the displacement map, we write it as a difference of compositions of regular transitions and Dulac maps near the singular points. The Dulac maps are calculated in C^k normalizing coordinates for a family unfolding the vector field. In this paper, we develop some general additional methods, which allow to prove the finite cyclicity of the graphic (I_{14}^1) (Figure 1(a)). In particular, for the unfolding of this graphic, it is very helpful to be able to claim that all regular transitions are the identity in the center case. This is possible if we exploit the fact that the centers occur when the system is symmetric, and if we choose cleverly the sections on which the different transition maps are defined. Also, in the center case, the Dulac maps have a simple form since the system is Darboux integrable.

The methods can be summarized as follows.

- We highlight that the change to C^k normalizing coordinates in the neighborhood of the singular points on the blow-up locus can be done by an operator. This allows preserving the symmetry in the center case when changing to normalizing coordinates.
- We introduce a uniform way of calculating the two types of Dulac maps when entering the blow-up through a much shorter proof than the one given in [9].
- Although each Dulac map is not C^k , we can divide in the center ideal its difference to the corresponding Dulac map in the integrable case.
- The method of the blow-up of the family allows reducing the proof of finite cyclicity of the graphic to the proof that a certain number of limit periodic sets have finite cyclicity. These limit periodic sets are defined in the blown-up space. The ones obtained in blowing up a nilpotent saddle are shown in Table 2. For all of them but one (the boundary limit periodic set), we can reduce the displacement map to a 1-dimensional map, the number of zeros of which can be bounded by the Bautin trick and a derivation-division algorithm on a map

FIG. 1. THE GRAPHICS (I_{14}^1) , (I_{6b}^1) , (H_{13}^3) AND (DI_{2b})

of type (1.1). The boundary limit periodic set is more challenging, since we need to work with a 2-dimensional displacement map, the zeros of which we must study along the leaves of an invariant foliation coming from the blow-up. We introduce a generalized derivation operator, which allows performing a derivation-division algorithm on functions of the type

$$V(r, \rho) = \sum_{i=1}^n a_i m_i (1 + h_i(r, \rho)), \quad (1.2)$$

where h_i are \mathcal{C}^k -functions on monomials and m_i are generalized monomials in r, ρ (see definitions in Appendix II). During this process, we have to take into account that $r\rho = \text{Cst}$.

We have a partial result for every graphic, but one (namely (H_{14}^3)), through a triple point at infinity:

Theorem 1.1. *Let us consider the graphics (I_{14}^1) , (I_{6b}^1) , (H_{13}^3) and (DI_{2b}) through a triple point at infinity (see Figure 1). Then for any of them, the boundary periodic limit set obtained in the blowing up has a finite cyclicity.*

Theorem 1.1 is not sufficient to prove that the given graphic has a finite cyclicity inside the family of quadratic vector fields. The reason is that, beside the boundary limit periodic set, other limit periodic sets (see for instance Table 2 for (I_{14}^1)) are obtained in the blowing up and, as explained above, we have to prove that each of them has also a finite cyclicity. We present here a complete result for the first graphic:

Theorem 1.2. *The graphic (I_{14}^1) has a finite cyclicity inside the family of quadratic vector fields.*

As for the finite cyclicity of the other graphics (I_{6b}^1) , (H_{13}^3) and (DI_{2b}) , we intend to address the problem in the next future. The finite cyclicity of (H_{13}^3) should be straightforward with arguments identical to those used for (I_{14}^1) . It will be done simultaneously with the corresponding generic graphic (H_{12}^3) . Some of the limit periodic sets to be studied for (I_{6b}^1) will involve four Dulac maps of second type. For these limit periodic sets, it is not possible to reduce the study of the cyclicity to a single equation. Hence, new methods will need to be adapted to treat the center case, when the periodic solutions correspond to a system of two equations in the four variables r_1, ρ_1, r_2, ρ_2 , with $r_1\rho_1 = v_1$ and $r_2\rho_2 = v_2$. As for the graphic (DI_{2b}) , some of the limit periodic sets to be studied involve four Dulac maps of second type, two of them through the semi-hyperbolic points P_1 and P_2 on the blown-up sphere.

The techniques developed in this paper can be adapted for studying the boundary limit periodic sets of graphics of the DRR program through a nilpotent finite singular point. The only new difficulty in that case is to show that the three parameters of the leading terms in the displacement map do indeed generate the center ideal. We also hope to adapt them to study the boundary graphic of the hemicycle (H_{14}^3) : there, the additional difficulty is the two semi-hyperbolic points along the equator.

Proofs of Theorems 1.1 and 1.2 are given in Section 3 and Appendix II, where the detailed computations of cyclicity are found in Theorems 5.8, 5.12 and 5.13. Theorem 4.1 in Appendix I, gives a statement about normal form for 3-dimensional hyperbolic saddle points in a way adapted to this paper. Theorem 4.5 of the same appendix gives a new proof for Dulac transitions near these saddle points, shorter than the one given in [9]. Precise properties for the specific unfoldings deduced from the quadratic family are proved in Appendix III. These properties of some parameter functions are needed to obtain the results of finite cyclicity.

2. PRELIMINARIES

2.1. Normal form for the unfolding of a nilpotent triple point of saddle or elliptic type. We consider graphics through one singular point, which is a triple nilpotent point of saddle or elliptic type. A germ of vector field in the neighbor-

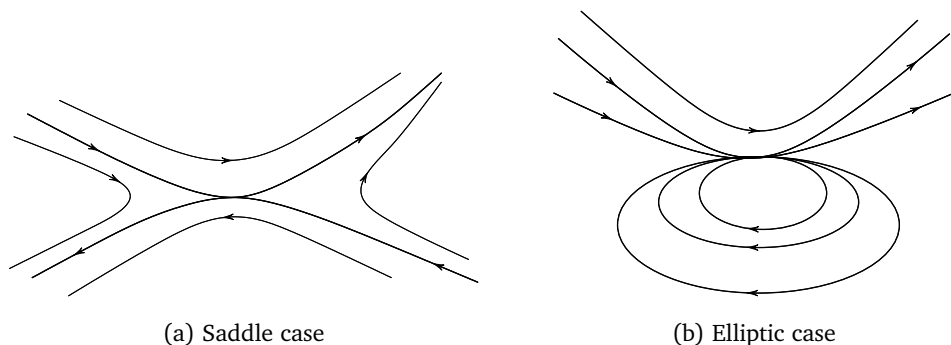


FIG. 2. THE DIFFERENT TOPOLOGICAL TYPES

hood of such a point has the form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \pm x^3 + bxy + \eta x^2 y + yO(x^3) + O(y^2).\end{aligned}\tag{2.1}$$

The saddle case corresponds to the plus sign, and the elliptic case to the minus sign with $|b| \geq 2\sqrt{2}$. In the elliptic case, we limit ourselves here to the case $|b| > 2\sqrt{2}$, which corresponds geometrically to a nilpotent point with hyperbolic points on the divisor of the quasi-homogeneous blow-up.

The unfolding of such points has been studied by Dumortier, Roussarie and Sotomayor, [4], including a normal form for the unfolding of the family. A different normal form has been used in [9] for studying the finite cyclicity of generic graphics through such singular points, when we limit ourselves to $|b| > 2\sqrt{2}$ in the elliptic case. This normal form is particularly suitable for applications in quadratic vector fields, where there is always an invariant line through a nilpotent point of multiplicity 3.

A germ of C^∞ vector field in the neighborhood of a nilpotent point of multiplicity 3 of saddle or elliptic type can be brought by an analytic change of coordinates to the form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + ax^2, \\ \dot{y} &= y(x + \eta x^2 + o(x^2) + O(y)).\end{aligned}\tag{2.2}$$

This requires an additional change of variable and scaling compared to what has been done in [9]. The point is a nilpotent saddle when $a < 0$ and a nilpotent elliptic point when $a > 0$ (see Figure 2). The case $|b| = 2\sqrt{2}$ corresponds to $a = 1/2$.

For $a \neq 1/2$, a generic unfolding depending on a multi-parameter $\lambda = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu)$ has the form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + a(\lambda)x^2 + \mu_2, \\ \dot{y} &= \mu_1 + \mu_3 y + x^4 h_1(x, \varepsilon) + y(x + \eta x^2 + x^3 h_2(x, \lambda)) + y^2 Q(x, y, \lambda),\end{aligned}\tag{2.3}$$

where $h_1(x, \lambda) = O(|\lambda|)$. Moreover, h_1, h_2, Q are C^∞ functions, and Q can be chosen of arbitrarily high order in λ .

2.2. Finite cyclicity of a graphic.

Definition 2.1. A graphic Γ of a vector field X_0 , i. e. a union of trajectories and singular points, has *finite cyclicity* inside a family X_λ if there exists $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$ such that any vector field X_λ with $|\lambda| < \delta$ has at most N periodic solutions at a Hausdorff distance less than ε from Γ . If a graphic has a finite cyclicity, its *cyclicity* is the minimum of such numbers N .

This means that when studying the finite cyclicity of a graphic Γ , we need to find a uniform bound for the number of periodic solutions that can appear from it, for all values of the multi-parameter in a small neighborhood W of the origin. Typically we need to find a uniform bound for the number of fixed points of the Poincaré return map or, equivalently, for the number of zeros of some displacement map between two transversal sections to the graphic. With graphics containing a nilpotent singular point there is no way to make a uniform treatment for all $\lambda \in W$, and we typically cover W by a finite number of sectors, on each of which we give a uniform bound. The method for doing this is the *blow-up of the family*, which was first introduced in [7], and next applied to slow-fast systems in [1].

2.3. Blow-up of the family. We take the neighborhood of the origin in parameter-space of the form $\mathbb{S}^2 \times [0, \nu_0) \times U$, where U is a neighborhood of 0 in μ -space and we make the change of parameters

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\nu^3 \bar{\mu}_1, \nu^2 \bar{\mu}_2, \nu \bar{\mu}_3), \quad (2.4)$$

where $\bar{M} = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) \in \mathbb{S}^2$ and $\nu \in [0, \nu_0)$.

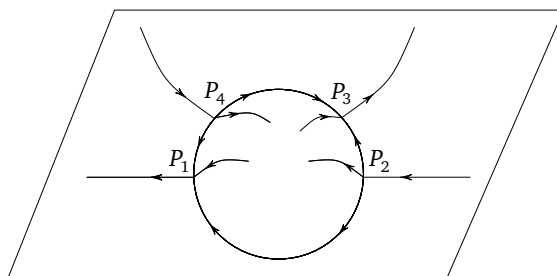
Note that \mathbb{S}^2 is compact. Hence, to give an argument of finite cyclicity for the graphic Γ , it suffices to find a neighborhood of each $\bar{M} = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) \in \mathbb{S}^2$ inside \mathbb{S}^2 , a corresponding $\nu_0 > 0$ and a corresponding U on which we can give a bound for the number of limit cycles. In our study, we will consider special values a_0 of a . It is important to note that $a(\lambda)$ depends on λ , and hence that $a - a_0$ is in some sense a parameter in itself.

The way to handle this program is to do a *blow-up of the family*. For this, we introduce the weighted blow-up of the singular point $(0, 0, 0)$ of the three-dimensional family of vector fields, obtained by adding the equation $\dot{\nu} = 0$ to (2.3). The blow-up transformation is given by

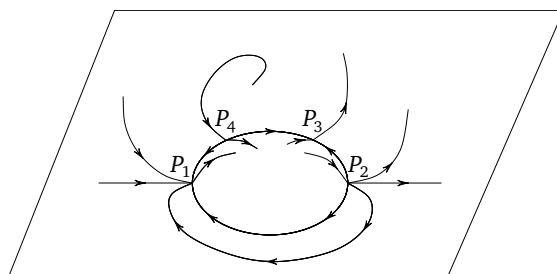
$$(x, y, \nu) = (r\bar{x}, r^2\bar{y}, r\rho), \quad (2.5)$$

with $r > 0$ and $(\bar{x}, \bar{y}, \rho) \in \mathbb{S}^2$. After dividing by r the transformed vector field, we get a family of C^∞ vector fields \bar{X}_A , depending on the parameters $A = (a - a_0, \bar{M}, \mu)$. The foliation $\{\nu = r\rho = \text{Cst}\}$ is invariant under the flow. The leaves $\{r\rho = \nu\}$, with $\nu > 0$, are regular two-dimensional manifolds, while the critical locus $\{r\rho = 0\}$ is stratified and contains the two strata (see Figure 3):

- $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+$ is the blow-up of X_0 (for $\lambda = 0$);
- $D_{\bar{\mu}} = \{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \rho^2 = 1 \mid \rho \geq 0\}$ for any $\bar{\mu} \in \mathbb{S}^2$.



(a) The saddle case



(b) The elliptic case

FIG. 3. THE STRATIFIED SET $\{r\rho=0\}$ IN THE BLOW-UP

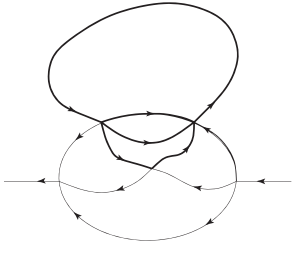
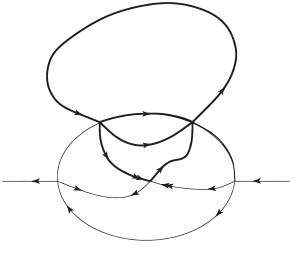
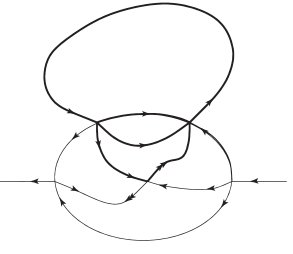
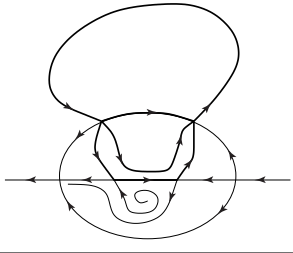
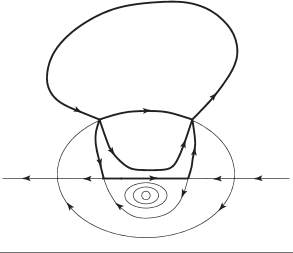
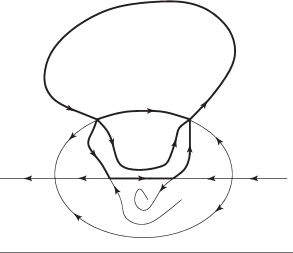
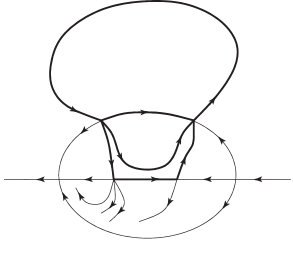
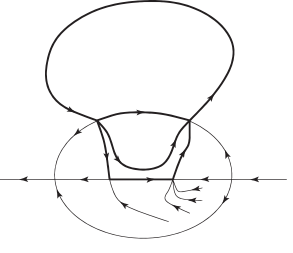
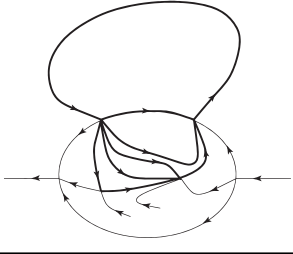
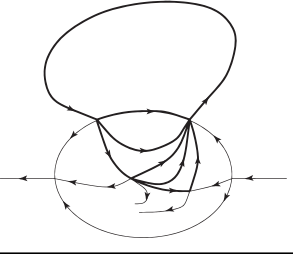
2.4. Limit periodic sets in the blown-up family. The vector field \bar{X}_A has singular points on $r=\rho=0$. For $a \neq 1/2$, there will be four distinct singular points (occurring in two pairs) corresponding to $\bar{y}=0$ (for P_1 and P_2) and $\bar{y}=(1-2a)/2$ (for P_3 and P_4): see Figure 3. Their eigenvalues appear in Table 1.

TABLE 1. THE EIGENVALUES AT P_i ($i=1, 2, 3, 4$)

	r	ρ	y
P_1	$-a$	a	$-(1-2a)$
P_2	a	$-a$	$(1-2a)$
P_3	$1/2$	$-1/2$	$-(1-2a)$
P_4	$-1/2$	$1/2$	$(1-2a)$

We will study the finite cyclicity of a graphic Γ joining a pair of opposite points P_i and P_{i+1} in \bar{X} , with $i=1$ or $i=3$. We consider a particular value $A_0=(a_0, \bar{M}_0, \mu_0)$. Here is the strategy for finding an upper bound for the number of limit cycles that appear for A in a neighborhood of A_0 . We determine the phase portrait of the family rescaling (2.6) on $D_{\bar{\mu}}$: this allows determining *limit periodic sets* $\bar{\Gamma}$, which are formed by the union of Γ with a finite number of trajectories and singular points on $D_{\bar{\mu}}$ joining P_i and P_{i+1} , so that their orientation be compatible with that

TABLE 2. CONVEX LIMIT PERIODIC SETS OF HH-TYPE
FOR A GRAPHIC WITH A NILPOTENT SADDLE

		
Sxhh1	Sxhh2	Sxhh3
		
Sxhh4	Sxhh5	Sxhh6
		
Sxhh7		Sxhh8
		
Sxhh9		Sxhh10

of Γ . The limit periodic sets to be studied appear in Table 2 for the saddle case. They come from studying the phase portrait of the *family rescaling*

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{y} + a\bar{x}^2 + \bar{\mu}_2, \\ \dot{\bar{y}} &= \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_3\bar{y} + \bar{x}\bar{y},\end{aligned}\tag{2.6}$$

obtained by putting $\rho = 1$ and $r = 0$. It then suffices to show that each limit periodic set has finite cyclicity, i. e. to show the existence of an upper bound for the number of periodic solutions of \bar{X}_A for A in a small neighborhood of A_0 .

2.5. Proving the finite cyclicity of a limit periodic set. Typically, the kind of argument we will use for proving the finite cyclicity of a limit periodic set is the following: we look for the zeroes of a displacement map between two sections. The sections are 2-dimensional but, because of the invariant foliation, the problem can be reduced to a 1-dimensional problem and the conclusion follows by, either an iteration of Rolle's theorem, or its generalization, namely a derivation-division argument. The technique can be adapted to non generic graphics occurring inside integrable systems: the proof in the generic case is transformed into a proof for the corresponding graphic, using some adequate division of the coefficients of the displacement map in the ideal of conditions for integrability.

To compute the displacement map, we decompose the related transition maps between sections into compositions of Dulac maps in the neighborhood of the singular points and regular C^k transitions elsewhere.

2.6. Dulac maps. The Dulac maps are the transition maps in the neighborhood of a singular point on $r = \rho = 0$. They are computed when the system is in C^k normal form. The normalizing theorem is Theorem 4.1 of Appendix I. There, it is proved that the normal form is obtained by a normalizing operator \mathcal{N} , a crucial property for this paper. The theorem establishes the existence of a parameter-depending local change of coordinates of class \mathcal{C}^k bringing the blow-up of (2.3) in the neighborhood of one of the points P_i into the normal form \bar{X}_A^N (up to $t \mapsto -t$) written in normal form coordinates (\bar{Y}, r, ρ) (provided that the eigenvalue in r has a sign opposite to the two other eigenvalues). Using Table 1, we take $\sigma = 2(1 - 2a)$ near $\sigma_0 = 2(1 - 2a_0)$ for P_3 and P_4 when $a_0 < 1/2$, and $\sigma = (2a - 1)/a$ near $\sigma_0 = (2a_0 - 1)/a_0$ for P_1 and P_2 when $a > 1/2$. The normal form \bar{X}_A^N is given by

(1) If $\sigma_0 \notin \mathbb{Q}$:

$$\bar{X}_A^N: \begin{cases} \dot{r} = r, \\ \dot{\rho} = -\rho, \\ \dot{\bar{Y}} = -(\sigma + \varphi_A(v))\bar{Y}. \end{cases} \quad (2.7)$$

(2) If $\sigma_0 = p/q \in \mathbb{Q}$, with $(p, q) = 1$ when $q \neq 1$:

$$\bar{X}_A^N: \begin{cases} \dot{r} = r, \\ \dot{\rho} = -\rho, \\ \dot{\bar{Y}} = -(\sigma + \varphi_A(v))\bar{Y} + \Phi_A(v, r^p \bar{Y}^q)\bar{Y} + \rho^p \eta_A(v), \end{cases} \quad (2.8)$$

with $\eta_A \equiv 0$ when $\sigma_0 \notin \mathbb{N}$ ($q \neq 1$).

The functions $\varphi_A, \Phi_A, \eta_A$ are polynomials of degree $\leq K(k)$ increasing with k , with smooth coefficients in A and $\Phi_A(\nu, 0) \equiv 0$.

We introduce the “compensator” function $\omega(\xi, \alpha)$, also denoted $\omega_\alpha(\xi)$, defined by

$$\omega(\xi, \alpha) = \omega_\alpha(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi^{-\alpha} - 1}{\alpha}, & \alpha \neq 0, \\ -\ln \xi, & \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

We propose in Appendix I a new computation of the Dulac maps previously studied in [9]. There are two types of Dulac transitions. The first type of transition map goes from a section $\{r=r_0\}$ to a section $\{\rho=\rho_0\}$, or the other way around. This type of transition typically behaves as an affine map, which is a very strong contraction or dilatation. The study of the number of zeroes of a displacement involving only Dulac maps of the first type is reduced to the study of the number of zeroes of a 1-dimensional map.

The second type of Dulac map is concerned with a transition map from a section $\{\bar{Y}=Y_0\}$ to, either a section $\{r=r_0\}$, or a section $\{\rho=\rho_0\}$. We take $\nu_0=r_0\rho_0$.

2.6.1. First type of Dulac map.

Theorem 2.2. *We consider the Dulac map from the section $\{\rho=\rho_0\}$ to the section $\{r=r_0\}$, both parametrized by (\bar{Y}, ν) . Let $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\sigma, \nu) = \sigma + \varphi_A(\nu)$ and $\alpha = \alpha(\sigma, \nu) = \bar{\sigma}(\sigma, \nu) - \sigma_0$. The \bar{Y} -component of the transition map D_A has the following expression:*

(1) If $\sigma_0 \notin \mathbb{Q}$:

$$D_A(\bar{Y}, \nu) = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{\bar{\sigma}} \bar{Y}. \quad (2.10)$$

(2) If $\sigma_0 = p/q \in \mathbb{Q}$ with $(p, q) = 1$ when $\sigma_0 \notin \mathbb{N}$:

$$D_A(\bar{Y}, \nu) = \eta_A(\nu) \rho_0^p \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{\bar{\sigma}} \omega\left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha\right) + \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{\bar{\sigma}} (\bar{Y} + \phi_A(\bar{Y}, \nu)), \quad (2.11)$$

with η_A as in (2.8). In particular, $\eta_A \equiv 0$ when $\sigma_0 \notin \mathbb{N}$.

The function family ϕ_A in (2.11) is of order

$$O\left(\nu^{p+q\alpha} \omega^{q+1}\left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha\right) |\ln \nu|\right)$$

and for any integer $l \geq 2$, is of class \mathcal{C}^{l-2} in

$$\left(\bar{Y}, \nu^{1/l}, \nu^{1/l} \omega\left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha\right), \nu, \mu, \sigma\right).$$

2.6.2. Second type of Dulac map.

Theorem 2.3. *We consider the Dulac map from the section $\{\bar{Y}=Y_0\}$, parametrized by (r, ρ) to a section $\{r=r_0\}$ parameterized by (\bar{Y}, ν) . It has the form $(r, \rho) \mapsto (D_A(r, \rho), \nu)$, with its \bar{Y} -component, $(D_A(r, \rho))$, given by:*

(1) If $\sigma_0 \notin \mathbb{Q}$:

$$D_A(r, \rho) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\bar{\sigma}} Y_0. \quad (2.12)$$

(2) If $\sigma_0 = p/q \in \mathbb{Q}$ with $(p, q) = 1$ when $\sigma_0 \notin \mathbb{N}$:

$$D_A(r, \rho) = \eta_A(v) \rho^p \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\bar{\sigma}} \omega \left(\frac{r}{r_0}, \alpha \right) + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\bar{\sigma}} (Y_0 + \phi_A(r, \rho)), \quad (2.13)$$

with η_A as in (2.8) ($\eta_A \equiv 0$ when $\sigma_0 \notin \mathbb{N}$).

The function family ϕ_A in (2.13) is of order

$$O \left(r^{p+q\alpha} \omega^{q+1} \left(\frac{r}{r_0}, \alpha \right) |\ln r| \right)$$

and, for any integer $l \geq 2$, is of class \mathcal{C}^{l-2} in

$$\left(r^{1/l}, r^{1/l} \omega \left(\frac{r}{r_0}, \alpha \right), \rho, \mu, \sigma \right).$$

3. APPLICATIONS TO QUADRATIC SYSTEMS

3.1. Quadratic systems with a nilpotent singular point at infinity.

Theorem 3.1. *A quadratic system with a triple singularity point of saddle or elliptic type at infinity and a finite singular point of center type can be brought to the form*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + B_0 x^2, \\ \dot{y} = x + xy, \end{cases} \quad (3.1)$$

with $B_0 > 0$. For $B_0 \neq 1$, the full 5-parameter unfolding inside quadratic systems is given with $B = B_0 + \mu_0$ inside the family

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + Bx^2 + \mu_2 y^2 + (\mu_4 + B\mu_5)x, \\ \dot{y} = x + xy + \mu_3 y^2 + (1 - 2B)\mu_5 y. \end{cases} \quad (3.2)$$

For $B_0 = 1$, the full 5-parameter unfolding inside quadratic systems is rather given with $B = 1 + \mu_0$ inside the family

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + (1 + \mu_0)x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_5 x, \\ \dot{y} = x + (\mu_4 + \mu_5)x^2 + xy + \mu_3 y^2. \end{cases} \quad (3.3)$$

The parameter μ_2 (resp. μ_3) corresponds to a nonzero multiple of the parameter μ_2 (resp. μ_3) in the blow-up of the family at the singular point. There is no parameter μ_1 in this family since the connection along the equator is fixed.

Moreover for (3.1) we have:

(1) $B_0 > 1$ for a nilpotent saddle; $B_0 = 3/2$ corresponds to $a = -1/2$ in (2.2) ($b = 0$ in (2.1)).

(2) $B_0 < 1$ for an elliptic point; the elliptic point is of larger codimension, type 1 (the singular points in the blow-up coalesce by pairs) if $B_0 = 1/2$ (corresponding to $a = 1/2$ in (2.2), i. e., $b = 2\sqrt{2}$ in (2.1)).

(3) The system (3.2) has an invariant line $y = -1$ if $\mu_3 - (1 - 2B)\mu_5 = 0$.

(4) If $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$, the system (3.2) has an invariant parabola

$$y = \frac{2B-1}{2} x^2 + (2B-1)\mu_5 x - \frac{1}{2B} + (2B-1)\mu_5^2. \quad (3.4)$$

The parabola

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

is invariant for system (3.3) when $\mu_0 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$.

(5) The integrability condition is $\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$, for which we have the following graphics with return map

- $B > 1$: (I_{14}^1) ,
- $1/2 < B < 1$: (I_{6b}^1) ,
- $0 < B < 1/2$: (H_{13}^3) ,
- $B = 0$: (H_{14}^3) ,
- $B = 1$: (DI_{2b}) .

(6) The value of “ a ” in the corresponding normal form (2.3) is $a = 1 - B$, and the parameters μ_2 and μ_3 correspond to μ_2 and μ_3 up to a nonzero constant.

Proof. We can suppose that the nilpotent singular point at infinity is located on the y -axis, the other singular point at infinity on the x -axis, and the focus or center at the origin. Then the system can be brought to the form

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta_{10}x + \delta_{01}y + \delta_{20}x^2 + \delta_{11}xy, \\ \dot{y} = \gamma_{10}x + \gamma_{01}y + \gamma_{11}xy + \gamma_{02}y^2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Localizing the system (3.5) at the singular point at infinity on y -axis by $v = x/y$, $w = 1/y$, we have

$$\begin{cases} \dot{v} = (\delta_{11} - \gamma_{02})v - \delta_{01}w + (\delta_{20} - \gamma_{11})v^2 + (\delta_{10} - \gamma_{01})vw - \gamma_{10}v^2w, \\ \dot{w} = w(-\gamma_{02} - \gamma_{01}w - \gamma_{11}v - \gamma_{10}vw). \end{cases} \quad (3.6)$$

For the singular point $(0, 0)$ of system (3.6) to be nilpotent, we should have $\delta_{11} = \gamma_{02} = 0$. The point is triple if $\gamma_{11} \neq 0$.

We want the finite singular point to be a center, which corresponds in this case to the system being reversible with respect to a line. Because of our choice of singular points at infinity this line can only be the y -axis. Then $\delta_{10} = \gamma_{01} = 0$.

By a rescaling and still using the original coordinates (x, y) , we obtain the system (3.1).

The change of coordinates $W = -w + (B_0 - 1)v^2$ brings the system (3.6) into the equivalent form

$$\begin{cases} \dot{V} = W, \\ \dot{W} = (B_0 - 1)V^3 + (2B_0 - 3)VW + o(V^3) + o(VW). \end{cases} \quad (3.7)$$

The classification of the nilpotent singularity at infinity follows.

A general unfolding preserving the singular point at the origin (which is simple) is of the form (after scaling of x , y , and t)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + Bx^2 + m_{10}x + m_{11}xy + m_{02}y^2, \\ \dot{y} = x + xy + n_{01}y + n_{20}x^2 + n_{02}y^2, \end{cases} \quad (3.8)$$

with B close to B_0 . We use a change of variable $(X, Y) = (x + \zeta_1 y, \zeta_2 x + y)$ for small ζ_1, ζ_2 . The terms in XY in the expression of \dot{X} and the term in X^2 in the expression of \dot{Y} vanish precisely when

$$\begin{cases} (2B-1)\zeta_1 - m_{11}(1 + \zeta_1\zeta_2) + 2\zeta_2 m_{02} + 2\zeta_1 n_{02}(\zeta_1 + \zeta_2) - \zeta_1^2 \zeta_2 = 0, \\ (B-1)\zeta_2 + (1 + \zeta_2^2)n_{02} - \zeta_2^2 n_{11} + \zeta_2^3 m_{02} = 0, \end{cases}$$

which can be solved for (ζ_1, ζ_2) by the implicit function theorem except for $B_0 = 1$. When $B_0 = 1$, we replace the second equation by the vanishing of the term in Y in the expression of \dot{Y} , namely

$$\zeta_1 + \zeta_2 - n_{01} + m_{10}\zeta_1\zeta_2 = 0.$$

Again, we get a system that can be solved for (ζ_1, ζ_2) by the implicit function theorem. \square

3.2. Finite cyclicity of the boundary limit periodic sets of (I_{14}^1) , (I_{6b}) and (DI_{2b}) .

Notation 3.2. In the whole paper, $*$ denotes a nonzero constant, which may depend on some parameters.

Theorem 3.3. *The boundary limit periodic sets of (I_{14}^1) , (I_{6b}) and (DI_{2b}) (see Figures 1 (a), (b) and (d) and 4) have finite cyclicity.*

Proof. The finite cyclicity of the boundary limit periodic set is studied inside the family (3.2) when $B_0 \neq 1$, and we will discuss later the adjustment when $B_0 = 1$.

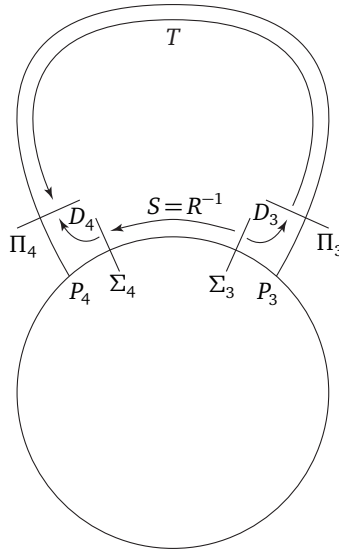


FIG. 4. THE BOUNDARY GRAPHIC THROUGH P_3 AND P_4 AND THE FOUR SECTIONS Σ_i AND Π_i , $i = 3, 4$, IN THE NORMALIZING COORDINATES

Choice of parameters. We take as parameters

$$M = (\bar{\mu}_3, \mu_4, \mu_5, \bar{\mu}_2, B_0 - 1) = (M_C, \bar{\mu}_2, B_0 - 1), \quad (3.9)$$

with $(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) \in \mathbb{S}_1$ and $(B_0 - 1, \mu_4, \mu_5)$ in a small ball. The parameters

$$M_C = (\bar{\mu}_3, \mu_4, \mu_5) \quad (3.10)$$

unfold the integrable situation. We let I_C be the ideal of germs of C^k -functions of the parameters generated by $\{\bar{\mu}_3, \mu_4, \mu_5\}$.

Notation 3.4. (1) The symbol $O_P(M_C)$ refers to a function in the parameter M belonging to the ideal I_C .

(2) The symbol $O_G(M_C)$ refers to a function of (X, M) which belongs to the ideal generated by I_C inside the space of functions of (X, M) . Depending on the limit periodic set, we could have $X = \bar{x}_3$, where \bar{x}_3 is the normalizing coordinate near P_3 , or $X = (r, \rho)$.

The displacement map. It is better to consider the chart $\bar{y} = 1$ in the blow-up. We take C^k normalizing charts in the neighborhood of P_3 and P_4 . As discussed above, these C^k normalizing charts can be chosen symmetric one to the other under the center conditions. The normalizing coordinates are (r, ρ, \bar{x}_i) near P_i . We consider sections $\Sigma_i = \{\bar{x}_i = X_0\}$ and $\Pi_i = \{r = r_0\}$ in the normalizing charts. The sections Σ_i are parameterized by (r, ρ) , and the sections Π_i by (\bar{x}_i, ν) .

Let $V = D_4 \circ S - T \circ D_3$ be the displacement map from Σ_3 to Π_4 : T and D_3 follow the flow forward, while S and D_4 follow the flow backwards.

Let us first give the proof when $\sigma_i(0) \notin \mathbb{Q}$. The Dulac maps are defined from sections $\Sigma_i = \{\bar{x}_i = X_0\}$ to sections $\Pi_i = \{r = r_0\}$, with X_0 and r_0 fixed. Then the Dulac maps D_i have the form

$$D_i(r, \rho) = (C_i(M)r^{\bar{\sigma}_i}, r\rho). \quad (3.11)$$

We can choose X_0 and r_0 so that $C_i(0) = 1$, i. e. $X_0 r_0^{-\sigma_0} = 1$, and $C_3(M) = C_4(M)$ under the center conditions.

The map T has the form

$$T(\bar{x}_3, \nu) = (H(\bar{x}_3, \nu), \nu). \quad (3.12)$$

Because of the symmetry of the sections, then $H \equiv id$ under the center conditions.

The planes $r = 0$ and $\rho = 0$ are invariant under the map S , which hence has the form

$$S(r, \rho) = (rF(r, \rho), \rho F^{-1}(r, \rho)), \quad (3.13)$$

with F of class C^k , since $\nu = r\rho$ is invariant. Moreover, it is known from [9] that $F(0, 0) = 1$ when the sections Σ_i are symmetric.

The displacement map then has the form

$$\Delta(r, \rho) = (C_4(M)r^{\bar{\sigma}_4}F^{\bar{\sigma}_4}(r, \rho) - H(C_3(M)r^{\bar{\sigma}_3}), \nu). \quad (3.14)$$

Let $V(r, \rho)$ be the first component of Δ . Then periodic solutions correspond to zeroes of V .

We now need to compute F and H .

Computation of H . The map H is C^k in (\bar{x}_3, ν) . It has the form

$$H(\bar{x}_3, \nu) = \bar{x}_3 + \varepsilon_0(M) + \varepsilon_1(M)\bar{x}_3 + O(\bar{x}_3^2)O_G(M_C), \quad (3.15)$$

with $\varepsilon_0(M) = O_P(M_C)$, $\varepsilon_1(M) = O_P(M_C)$.

For $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$, the system (3.2) has the invariant parabola (3.4). The term $\mu_4 x$ in \dot{x} is without contact, which yields that

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(M) &= * \mu_4(1 + O(M)) + O(\mu_3) + O(\mu_5)O(M) = \\ &= * \mu_4(1 + O(M)) + O(\bar{\mu}_3 \nu) + O(\mu_5)O(M), \end{aligned} \quad (3.16)$$

where $*$ denotes a nonzero constant. Lemma 6.1 in Appendix II shows that the same is true for (3.3). Let us again take $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. The divergence is then $(2B+1)x + (1-B)\mu_5$. Proposition 6.2 in the Appendix II shows that

$$\varepsilon_1(M) = * \mu_5(1 + O(M)) + O(\bar{\mu}_3 \nu) + O(\mu_4). \quad (3.17)$$

The center ideal. The equations (3.16) and (3.17) imply that we can take $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \bar{\mu}_3\}$ as generators of the center ideal I_C .

Computation of F . The function F has the form:

$$F(r, \rho) = 1 + * \bar{\mu}_3 \rho(1 + O(\rho)) + O(r)O_G(M_C). \quad (3.18)$$

Indeed, it is proved in Lemma 6.3 in the Appendix that the second derivative of $\rho F(0, \rho)$ is a nonzero multiple of $\bar{\mu}_3$. Moreover, the blown-up vector field is integrable on $r=0$ for $\bar{\mu}_3=0$.

Writing the displacement as a finite sum of terms. We need grouping all terms of the displacement map into a finite sum of the form (1.2). We will see that three terms are sufficient and show that

$$\begin{aligned} V(r, \rho) &= -\varepsilon_0(M)(1 + h_0(r, \rho)) - \\ &\quad - C_3(M)\varepsilon_1(M)r^{\bar{\sigma}_3}(1 + h_1(r, \rho)) + * \bar{\mu}_3 r^{\bar{\sigma}_3} \rho(1 + h_2(r, \rho)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

We now explain how to group the different terms.

Notation 3.5. The symbol $O(r^\delta)$ used in the sequel, is for an unspecified $\delta > 0$, which may vary from one formula to the other.

Let us first consider the terms coming from $H \circ D_3$. Remember that H is the identity when we have a center. Moreover, the map H really takes place in the initial (x, y) -plane, where the center ideal is generated by $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_3\}$. Hence, the higher order terms of $H \circ D_3$ are of the form

$$r^{2\bar{\sigma}_3}(\varepsilon_0(M)k_0(r, \rho) + \varepsilon_1(M)k_1(r, \rho) + \mu_3 k_2(r, \rho)).$$

The first two terms contribute to $h_0(r, \rho)$ and $h_1(r, \rho)$, as contributions of order $O(r^\delta)$. As for the third term, we use the fact that $\mu_3 = r\rho\bar{\mu}_3$. Hence, it contributes to $h_2(r, \rho)$, also as a term of order $O(r^\delta)$. The term $C_3(M)r^{\bar{\sigma}_3}$ will be later grouped with the corresponding term $C_4(M)r^{\bar{\sigma}_4}$ coming from $D_4 \circ S$.

Let us now consider the other terms coming from

$$D_4 \circ S(r, \rho) = C_4(M)r^{\bar{\sigma}_4}F(r, \rho)^{\bar{\sigma}_4}.$$

Again we use that F is the identity when there is a center, i. e. all its terms are divisible in the ideal I_C . One of them is the term $*\bar{\mu}_3 r^{\bar{\sigma}_4} \rho$ coming from the term $*\bar{\mu}_3 \rho$ of F . As mentioned above, all higher order terms $r^{\bar{\sigma}_4} o(\rho)$ have coefficients divisible by $\bar{\mu}_3$. Also, all terms in $r^{\bar{\sigma}_4} \rho O(r)$ can be distributed in h_0, h_1 and h_2 , as terms of order $O(r^\delta)$. Hence, we only need to consider the pure terms in $o(r^{\bar{\sigma}_4})$. It suffices to show that all such terms can be divided in $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. This comes from the fact that the computation of the pure terms in r can be done in the plane $\rho = 0$, and that the system restricted to this plane does not contain any term in $\bar{\mu}_3$. Since

$$\bar{\sigma}_4 - \bar{\sigma}_3 = \nu O_P(M_C) f(\nu) = r \rho O_P(M_C) f(\nu), \quad (3.20)$$

with f of class C^k , we can replace everywhere $\bar{\sigma}_4$ by $\bar{\sigma}_3$, up to terms of order $O(r^\delta)$, distributed in h_0, h_1 and h_2 .

We are left with the terms $C_3(M)r^{\bar{\sigma}_3} - C_4(M)r^{\bar{\sigma}_4}$. We write this as

$$\begin{aligned} C_3(M)r^{\bar{\sigma}_3} - C_4(M)r^{\bar{\sigma}_4} &= (C_3(M) - C_4(M))r^{\bar{\sigma}_3} + C_4(M)(r^{\bar{\sigma}_3} - r^{\bar{\sigma}_4}) = \\ &= (C_3(M) - C_4(M))r^{\bar{\sigma}_3} + C_4(M)(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4)r^{\bar{\sigma}_3} \omega(r, \bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4). \end{aligned} \quad (3.21)$$

The difference $C_3(M) - C_4(M)$ is $X_0 r_0^{-\bar{\sigma}_3} (1 - r_0^{\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4})$. Using (3.20), the two terms can be decomposed in sums of terms contributing to h_0, h_1, h_2 , as terms of order $O(r^\delta)$.

Finite cyclicity in the case σ_0 irrational. The displacement map V in (3.19) is a special case of a universal family

$$a_0(1 + h_0(r, \rho)) + a_1 r^{\bar{\sigma}_3}(1 + h_1(r, \rho)) + a_2 r^{\bar{\sigma}_3} \rho(1 + h_2(r, \rho)), \quad (3.22)$$

with h_0, h_1 of order $O(r^\delta)$ and h_2 is of order $O(\rho) + O(r^\delta)$. Using that these three functions are of order $o(1)$, we show in Theorem 5.8 below that this family has at most two small zeros along any curve $r\rho = \text{Cst}$ for $r, \rho < \delta$ for some small δ . This implies that, either V has at most two small zeros, or V is identically zero, in which case we have a center.

Adjustment of the proof when $\sigma_0 = p/q$ with $q > 1$. The adjustments are minimal. Indeed, the formula of the Dulac map is more complicated:

$$D_i(r, \rho) = (r^{\bar{\sigma}}(C_i(M) + \phi(r, \rho)), r\rho), \quad (3.23)$$

with $\phi(r, \rho)$ as in Theorem 2.3. Hence, $\phi(r, \rho)$ produces in V new terms of order $O(r^\delta)$, distributed in h_0, h_1, h_2 .

Adjustement of the proof when $\sigma_0 = p$. Here the first component of $D_i(r, \rho)$ has an additional term of the form

$$\kappa_i(r, \rho) = \eta_i(\nu) \rho^p r^{\bar{\sigma}_i} \omega\left(\frac{r}{r_0}, \bar{\sigma}_i - p\right).$$

All higher order terms can be distributed in h_0, h_1, h_2 and we need only consider the term

$$\tilde{E} = \kappa_4 \circ S - (1 + \varepsilon_1(M))\kappa_3 = (\kappa_4 \circ S - \kappa_4) + E$$

with

$$E = \kappa_4(r, \rho) - (1 + \varepsilon_1(M))\kappa_3(r, \rho).$$

(1) We consider first the term $\kappa_4 \circ S - \kappa_4$. Let $\beta = \bar{\sigma}_4 - p$. We have that

$$\kappa_4(rF) - \kappa_4(r) = \eta_4 \nu^p r^\beta \underbrace{\left[F^\beta \omega_\beta \left(\frac{Fr}{r_0} \right) - \omega_\beta \left(\frac{r}{r_0} \right) \right]}_{G(r, \rho)}.$$

Let us consider $G(r, \rho)$:

$$G(r, \rho) = F^\beta \left(\omega_\beta \left(\frac{Fr}{r_0} \right) - \omega_\beta \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) + (F^\beta - 1) \omega_\beta \left(\frac{r}{r_0} \right).$$

Since

$$\omega_\beta \left(\frac{Fr}{r_0} \right) - \omega_\beta \left(\frac{r}{r_0} \right) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\beta} \frac{F^{-\beta} - 1}{\beta},$$

we obtain that

$$G(r, \rho) = -\frac{F^\beta - 1}{\beta} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\beta} + (F^\beta - 1) \omega_\beta \left(\frac{r}{r_0} \right) = \frac{F^\beta - 1}{\beta} \left(-\left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\beta} + \beta \omega_\beta \left(\frac{r}{r_0} \right) \right),$$

i. e. $G(r, \rho) = -\frac{F^\beta - 1}{\beta}$, and then $\kappa_4(rF) - \kappa_4(r) = -\eta_4 \nu^p r^\beta \frac{F^\beta - 1}{\beta}$.

As $F = 1 + *\bar{\mu}_3 \rho (1 + \rho \bar{g}(\rho)) + rO_G(M_C)$, we have that

$$\frac{F^\beta - 1}{\beta} = *\bar{\mu}_3 \rho (1 + \rho \bar{g}(\rho)) + rO_G(M_C),$$

and then that

$$\kappa_4(rF) - \kappa_4(r) = -\eta_4 \nu^p r^\beta (*\bar{\mu}_3 \rho (1 + \rho \bar{g}(\rho)) + rO_G(M_C)).$$

The term $rO_G(M_C)$ gives contributions of order $O(r^\delta)$ in h_0, h_1, h_2 . Next, the term $*\bar{\mu}_3 \rho (1 + \rho \bar{g}(\rho))$ gives the contribution $-*\eta_4 \nu^{p-1} \rho (1 + \rho \bar{g}(\rho))$ in h_2 . If $p \geq 2$, this term is also of order $O(r\rho)$, and it is of order $O(\rho)$ if $p = 1$.

(2) We consider now:

$$E = \rho^p \left[\left(\eta_4(\nu) - \eta_3(\nu)(1 + \varepsilon_1(M)) \right) r^{\bar{\sigma}_3} \omega \left(\frac{r}{r_0}, \bar{\sigma}_3 - p \right) + \right. \\ \left. + \eta_4(\nu)(r^{\bar{\sigma}_4} - r^{\bar{\sigma}_3}) \omega \left(\frac{r}{r_0}, \bar{\sigma}_3 - p \right) + \eta_4(\nu) r^{\bar{\sigma}_4} \left(\omega \left(\frac{r}{r_0}, \bar{\sigma}_3 - p \right) - \omega \left(\frac{r}{r_0}, \bar{\sigma}_4 - p \right) \right) \right].$$

The second term in the bracket is of the form

$$\eta_4(\nu)(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4) r^{\bar{\sigma}_3} \omega \left(\frac{r}{r_0}, \bar{\sigma}_3 - p \right).$$

Using (3.20), this term can be distributed in h_0, h_1, h_2 , as terms of order $O(r^\delta)$. A similar argument holds for the third term. Indeed, we introduce a compensator

$$\Omega(\xi, \alpha, \beta) = \Omega_{\alpha, \beta}(\xi) = \begin{cases} \frac{\omega(\xi, \alpha) - \omega(\xi, \beta)}{\alpha - \beta}, & \alpha \neq \beta, \\ \frac{1}{2}(\ln \xi)^2, & \alpha = \beta, \end{cases} \quad (3.24)$$

allowing to rewrite this term as

$$\eta_4(\nu) r^{\bar{\sigma}_4} (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4) \Omega\left(\frac{r}{r_0}, \bar{\sigma}_3 - p, \bar{\sigma}_4 - p\right).$$

Again, using (3.20), this term can be distributed in h_0, h_1, h_2 , as terms of order $O(r^\delta)$.

This allows writing the displacement map as a sum of four terms

$$\begin{aligned} V(r, \rho) = & -\varepsilon_0(M)(1 + h_0(r, \rho)) - C_3(M)\varepsilon_1(M)r^{\bar{\sigma}_3}(1 + h_1(r, \rho)) + \\ & + * \bar{\mu}_3 r^{\bar{\sigma}_3} \rho(1 + h_2(r, \rho)) + K(M)r^{\bar{\sigma}_3} \rho^p \omega\left(\frac{r}{r_0}, \bar{\sigma}_3 - p\right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

with h_0, h_1 of order $O(r^\delta)$. Moreover,

$$K(M) = \eta_4(\nu) - \eta_3(\nu)(1 - \varepsilon_1(M)) = O_p(M_C).$$

For $p \geq 2$, we conclude that the cyclicity is at most 3 by Theorem 5.12.

For $p = 1$, we will prove in Theorem 5.13 that the cyclicity is at most 2. To this end, we will use that $\eta_4(0) = -\eta_3(0) = \bar{\mu}_3$ and then that $K(M) = * \bar{\mu}_3 + O(\nu) O_p(M_C)$, in order to rewrite V as:

$$\begin{aligned} V(r, \rho) = & -\varepsilon_0(M)(1 + h_0(r, \rho)) - C_3(M)\varepsilon_1(M)r^{\bar{\sigma}_3}(1 + h_1(r, \rho)) + \\ & + * \bar{\mu}_3 r^{\bar{\sigma}_3} \rho(1 + h_2(r, \rho)) + * \bar{\mu}_3 r^{\bar{\sigma}_3} \rho \omega\left(\frac{r}{r_0}, \bar{\sigma}_3 - p\right)(1 + h_3(r, \rho)), \end{aligned} \quad (3.26)$$

with h_0, h_1 and h_3 of order $O(r^\delta)$. □

3.3. Finite cyclicity of the boundary limit periodic sets of (H_{13}^3) .

Theorem 3.6. *The boundary limit periodic set of (H_{13}^3) (see Figures 1(c) and 5) has finite cyclicity.*

Proof. The proof is very similar to that of Theorem 3.3. The graphic occurs in the family (3.1) for $B < 1/2$, which corresponds to $1/2 < a < 1$, but we prefer to use the following equivalent unfolding inside quadratic systems (only parameters' names are changed so that they play similar role as in Theorem 3.3)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + Bx^2 + \mu_2 y^2 + \mu_5 x, \\ \dot{y} = x + xy + \mu_3 y^2 + \mu_4 y. \end{cases} \quad (3.27)$$

The point P_4 (resp. P_3) is replaced by P_1 (resp. P_2). The quantity σ_i is now given by $\sigma_i = (2a - 1)/a$. The main difference with Theorem 3.3 is that the transition from Π_2 to Π_1 is replaced by the composition $T_r^{-1} \circ D_r^{-1} \circ T \circ D_\ell \circ T_\ell$. The transitions T_ℓ and T_r are along the equator of the Poincaré sphere and hence preserve the connection (no translation terms). The saddle points P_ℓ and P_r have inverse

The Dulac maps D_1 and D_2 . They are given in Theorem 2.2. Since the connection along the equator is fixed, then the coefficient η_i vanishes identically when $\sigma_0 \in \mathbb{N}$.

Hence, the displacement map $V(r, \rho)$ has the form

$$V(r, \rho) = \tilde{\varepsilon}_0(1 + h_0(r, \rho)) + * \tilde{\varepsilon}_1 r^{\bar{\sigma}_2 + \tau_\ell}(1 + h_1(r, \rho)) - * \bar{\mu}_3 r^{\bar{\sigma}_2 + \tau_\ell} \rho(1 + h_2(r, \rho)). \quad (3.32)$$

This equation contains no resonant monomials since

$$\bar{\sigma}_2 + \tau_\ell = \frac{1 - B - B^2}{B(1 - B)} \neq 1$$

as soon as $B \neq \frac{1}{2}$. We conclude that the cyclicity is at most two by Theorem 5.8. \square

3.4. Finite cyclicity of (I_{14}^1) . We now prove Theorem 1.2, i. e. that the graphic (I_{14}^1) has finite cyclicity inside quadratic systems (see Figure 1(a)).

Proof of Theorem 1.2. Such a graphic occurs for system (3.1) when $B_0 > 1$, and its deformation in quadratic systems is given in (3.2). As usual, we should normally consider all limit periodic sets of Table 2. It was shown in [9] that a graphic through a nilpotent saddle point has finite cyclicity inside any C^∞ -unfolding under the generic conditions that the return map P along the graphic has a derivative different from one and that the nilpotent saddle point has codimension 3. But the only limit periodic sets of Table 2 for which we use the genericity hypotheses are the boundary limit periodic sets which have been treated in Theorem 3.3, and the intermediate and lower limit periodic sets of Sxhh1 and Sxhh5.

For these limit periodic sets, we only have Dulac maps of the first type as in Theorem 2.2. Hence, we can work with a 1-dimensional displacement map, which we take as $V: \Sigma_3 \rightarrow \Pi_4$, $V = D_4 \circ S - T \circ D_3$ (see figure 6). As before the sections Σ_i and Π_i are parameterized by the normalizing coordinate \bar{x}_i near P_i , which are chosen so that S and T are the identity in the center case.

The technique is to write V in the form of a finite sum

$$V(\bar{x}_3, \mu) = \tilde{\varepsilon}_0 + \nu^{\bar{\sigma}} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i h_i(\bar{x}_3, \mu) \right), \quad (3.33)$$

for some $\bar{\sigma} > 0$. The parameters are the same as in (3.9) and (3.10). We write little details since they are very similar to [8].

The intermediate graphics. For these graphics, the map $V(\bar{x}_3, \mu)$ is C^k in \bar{x}_3 . Under the condition $\mu_2 = \mu_3 = 0$ for a nilpotent saddle, (3.2) has an invariant parabola for $\mu_4 = 0$, which is the only possible connection at a nilpotent saddle. Hence, T has a constant term of the form $*\mu_4 + O(\mu_3) + \mu_5 O(M)$. The constant term of the transition S has the form $O(\bar{\mu}_3)$ since $\bar{\mu}_2$ respects the symmetry, and hence does not contribute to the breaking of the connection.

When $\sigma_0 \notin \mathbb{N}$, this yields that the constant term $\tilde{\varepsilon}_0$ in the displacement map has the form $\tilde{\varepsilon}_0 = *\mu_4 + O(\nu)O(\bar{\mu}_3) + \mu_5 O(M)$.

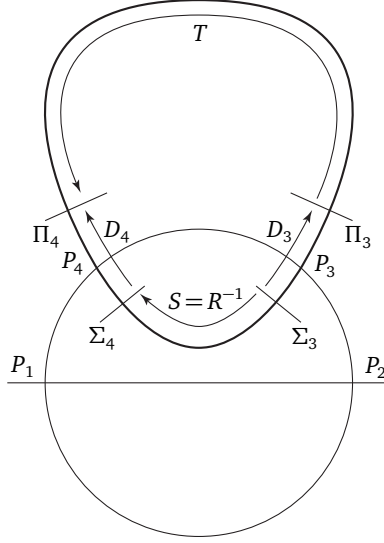


FIG. 6. INTERMEDIATE AND LOWER LIMIT PERIODIC SETS OF SXHH1 AND SXHH5: THE FOUR SECTIONS Σ_i AND Π_i , $i = 3, 4$, IN THE NORMALIZING COORDINATES NEAR P_3 AND P_4

When $\sigma_0 = p \in \mathbb{N}$, there are additional terms

$$\begin{aligned} \eta_3 \rho_0^p \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{\bar{\sigma}_3} \omega \left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha_3 \right) - \eta_4 \rho_0^p \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{\bar{\sigma}_4} \omega \left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha_4 \right) = \\ = (\eta_3 - \eta_4) \rho_0^p \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{\bar{\sigma}_3} \omega \left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha_3 \right) + \\ + \eta_4 (\alpha_3 - \alpha_4) \rho_0^p \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{\bar{\sigma}_3} \omega \left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha_3 - \alpha_4 \right) \omega \left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha_3 \right) + \\ + \eta_4 (\alpha_3 - \alpha_4) \rho_0^p \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{\bar{\sigma}_4} \Omega \left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha_3, \alpha_4 \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

In this expression $\eta_3 - \eta_4 = O_P(M_C)$ and $\alpha_3 - \alpha_4 = O_P(M_C)O(\nu)$. Hence, in all cases we have

$$\tilde{\varepsilon}_0 = * \mu_4 + O(\nu)O(\bar{\mu}_3) + \mu_5 O(M) + O(\nu)O_P(M_C). \quad (3.35)$$

The linear term has the form $\nu^{\bar{\sigma}_3} T'(0) - \nu^{\bar{\sigma}_4} S'(0)$. Moreover, $S'(0)|_{\rho=0} \equiv 1$ precisely when $\bar{\mu}_3 = 0$. Also, Lemma 6.2 shows that $T'(0) - 1 = * \mu_5 + O(\mu_4) + O(\mu_3)$. Considering that $\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4 = O(\nu)$, then

$$\nu^{\bar{\sigma}_4} = \nu^{\bar{\sigma}_3} (1 + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4) \omega(\nu, \bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4)) = \nu^{\bar{\sigma}_3} (1 + O(\nu)).$$

This yields

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \nu^{\bar{\sigma}_3} (* \mu_5 + O(\mu_4) + O(\nu)O(\bar{\mu}_3)). \quad (3.36)$$

Now, because of the funneling effect, any nonlinearity on the side of T has a high coefficient in ν which damps it. Hence, the only significant nonlinearities are on the side of S . We are sure that S is nonlinear when $\bar{\mu}_3 \neq 0$. This comes from

the fact that the graphic belongs to a family of graphics. In the case of Sxhh1, this family ends in a lower graphic with a saddle point and its hyperbolicity ratio τ is different from 1 precisely when $\bar{\mu}_3 \neq 0$, yielding that $S(\bar{x}_3) = C_0 + C_1 \bar{x}_3^\tau + o(\bar{x}_3^\tau)$, with $C_1 \neq 0$, for graphics near the saddle point, and hence that S is nonlinear on the whole section Σ_3 . Then, for any graphic occurring for a value $\bar{x}_{3,0}$, there exists n such that $S^{(n)}(\bar{x}_3) = c_{n,3} \bar{\mu}_3 \neq 0$. Hence, $V^{(n)}(\bar{x}_{3,0}) = \nu^{\bar{\sigma}_4} [c_{n,3} \bar{\mu}_3 + O(\nu) O_P(M_C)] = \tilde{\epsilon}_n$. Moreover, for all graphics except a few isolated ones we have that $n = 2$. The same argument can be applied for Sxhh5 since the connection is fixed between the two saddles and the product of their hyperbolicity ratios is different from 1 precisely when $\mu_3 \neq 0$. Hence, we have written V under the form (3.33) with $h_i(\bar{x}_3) = \bar{x}_3^i (1 + O(\bar{x}_3))$. We conclude to finite cyclicity by means of Theorem 5.8.

The lower graphic of Sxhh1. The study is very similar and divided in two cases. When $\bar{\mu}_3 \neq 0$, it was already shown in [9] that the lower graphic of Sxhh1 has finite cyclicity. This comes from the fact that the hyperbolicity ratio τ at the saddle point is non equal to 1 precisely when $\bar{\mu}_3 \neq 0$, in which case we conclude to finite cyclicity because of the nonlinearity of S . Hence, the difficult case is the neighborhood of $\bar{\mu}_3 = 0$ since, for this value, $\tau_0 = 1$. In that case we reparameterize the section Σ_3 by means of $\tilde{x}_3 = \bar{x}_3 - c_0(M)$, so that $\tilde{x}_3 = 0$ corresponds to the unstable manifold of the saddle point on the blow-up sphere. Then, as before, we write V as a sum of terms:

$$V(\tilde{x}_3, M) = \tilde{\epsilon}_0 h_0(\tilde{x}_3, M) + \bar{\mu}_3 \tilde{x}_3 \omega(\tilde{x}_3, \tau - 1) h_3(\tilde{x}_3, M) + \tilde{\epsilon}_1 \tilde{x}_3 h_1(\tilde{x}_3, M), \quad (3.37)$$

with $h_i(0, 0) \neq 0$. We conclude to finite cyclicity by means of Theorem 5.8.

The lower graphic of Sxhh5. Such a graphic occurs for $\bar{\mu}_2 > 0$. Because the connection is fixed between the two saddles, the map S can easily be computed and has the form $c_0 + c_1 \bar{x}_3^\tau + o(\bar{x}_3^\tau)$, where

$$\tau = 1 - \frac{2\bar{\mu}_3}{\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_2}{a}} + \bar{\mu}_3}$$

is the product of the two hyperbolicity ratios. Again, we reparameterize the section Σ_3 by means of $\tilde{x}_3 = \bar{x}_3 - c_0(M)$, so that $\tilde{x}_3 = 0$ corresponds to the unstable manifold of the right saddle point on the blow-up sphere. This allows writing the map V in the form

$$\begin{cases} V(\tilde{x}_3) = \sum_{i=0}^{\max(\lfloor \tau \rfloor, 1)} \tilde{\epsilon}_i \tilde{x}_3^i h_i(\tilde{x}_3, M) + \bar{\mu}_3 \tilde{x}_3^\tau h_\tau(\tilde{x}_3, M), & \tau_0 \notin \mathbb{N}, \\ V(\tilde{x}_3) = \sum_{i=0}^{\tau_0} \tilde{\epsilon}_i \tilde{x}_3^i h_i(\tilde{x}_3, M) + \bar{\mu}_3 \tilde{x}_3^{\tau_0} \omega(\tilde{x}_3, \tau - \tau_0) h_\tau(\tilde{x}_3, M), & \tau_0 \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

with $h_i(0, 0) \neq 0$. We conclude to finite cyclicity by means of Theorem 5.8. \square

4. APPENDIX I. HYPERBOLIC FIXED POINTS

We will consider germs of smooth family of 3-dimensional vector fields $X_{\mu,\sigma}$ at $(0) \in \mathbb{R}^3$, with coordinates (u, v, y) , which are quasi-linear of the form

$$X_{\mu,\sigma} : \begin{cases} \dot{u} = u, \\ \dot{v} = -v, \\ \dot{y} = -\sigma y + F_\mu(u, v, y), \end{cases} \quad (4.1)$$

where σ is a parameter in a neighborhood of $\sigma_0 \in \mathbb{R}^+$, and μ is a parameter in a neighborhood of μ_0 in some Euclidean space. Moreover, $F_\mu = O(|(u, v, y)|^2)$ at the origin, for any value of the parameter (μ, σ) . The system has the first integral: $v = uv$.

4.1. Normal form. It is possible to find local normal form coordinates for $X_{\mu,\sigma}$ by a coordinate change preserving the coordinates u and v . More precisely, we have the following normal form result:

Theorem 4.1. *There exists a normalizing operator \mathcal{N} defined on each pair $(X_{\mu,\sigma}, k)$, where $X_{\mu,\sigma}$ is a family as above and $k \in \mathbb{N}^*$, such that,*

$$\mathcal{N}(X_{\mu,\sigma}, k) = (\delta_k, K(k), \varepsilon_k, \eta_k, G_{\mu,\sigma}),$$

where

$$(u, v, y) \rightarrow (u, v, Y = G_{\mu,\sigma}(u, v, y)),$$

is a parameter-dependent change of coordinates of class C^k defined for $|\sigma - \sigma_0| \leq \delta$, $|\mu - \mu_0| < \varepsilon_k$, and $|(u, v, y)| < \eta_k$, such that $dG_{\mu,\sigma}(0, 0, 0) = \text{Id}$, which brings $X_{\mu,\sigma}$ to the following polynomial normal form of degree $K(k)$:

(1) If $\sigma_0 \notin \mathbb{Q}$:

$$X_{\mu,\sigma}^N : \begin{cases} \dot{u} = u, \\ \dot{v} = -v, \\ \dot{Y} = -(\sigma + \varphi_{\mu,\sigma}(v))Y. \end{cases} \quad (4.2)$$

(2) If $\sigma_0 = p/q \in \mathbb{Q}$, with $(p, q) = 1$ when $q \neq 1$:

$$X_{\mu,\sigma}^N : \begin{cases} \dot{u} = u, \\ \dot{v} = -v, \\ \dot{Y} = -(\sigma + \varphi_{\mu,\sigma}(v))Y + \Phi_{\mu,\sigma}(v, u^p Y^q)Y + v^p \eta_{\mu,\sigma}(v), \end{cases} \quad (4.3)$$

with $\eta_{\mu,\sigma} \equiv 0$ when $\sigma_0 \notin \mathbb{N}$ ($q \neq 1$).

The functions $\varphi_{\mu,\sigma}, \Phi_{\mu,\sigma}, \eta_{\mu,\sigma}$ are polynomials of degree $\leq K(k)$, with C^∞ coefficients in (μ, σ) and $\Phi_{\mu,\sigma}(v, 0) \equiv 0$.

Proof. The proof is standard in the literature, and we only recall the main steps.

The degree $K(k)$ can be determined algorithmically if one knows the eigenvalues $\{1, -1, -\sigma_0\}$.

The number δ_k is chosen sufficiently small so as not to introduce any new resonant terms of degree $\leq K(k)$ for some $\sigma \in [\sigma_0 - \delta_k, \sigma_0 + \delta_k]$.

The first step is to bring the system to normal form up to degree $K(k)$

$$X_{\mu, \sigma}^p : \begin{cases} \dot{u} = u, \\ \dot{v} = -v, \\ \dot{z} = P(\sigma, \mu, u, v, z) + R(\sigma, \mu, u, v, z), \end{cases} \quad (4.4)$$

where $P(\sigma, \mu, u, v, z)$ is a polynomial in u, v, z of degree $K(k)$ containing only resonant terms, and $R(\sigma, \mu, u, v, z) = o(|(u, v, z)|^{K(k)})$. This can be done by means of a polynomial change of coordinate

$$y = z + \sum_{\substack{i+j+\ell=2 \\ i-j+\sigma_0(\ell-1) \neq 0}}^{K(k)} a_{ij\ell} r^i \rho^j z^\ell.$$

Because this change of coordinate is tangent to the identity and contains no resonant monomial, then it is uniquely determined.

The second step is to kill the remainder R in (4.4). For this purpose, we decompose R as $R = R_1 + R_2$, with $R_1 = O(u^{\lfloor K(k)/2 \rfloor})$ and $R_2 = O(|(v, z)|^{\lfloor K(k)/2 \rfloor})$. Each part is killed by the homotopy method. The details are exactly the same as in [5]. Again, this step is algorithmic. \square

4.2. Properties of compensators. This section is devoted to properties of different functions useful for the expression of the results, and in particular the so-called compensators $\omega_\alpha(\xi)$ and $\Omega_{\alpha, \beta}(\xi)$ defined in (2.9) and (3.24).

First, we introduce the analytic function

$$\kappa(\eta) = \begin{cases} \frac{e^\eta - 1}{\eta}, & \eta \neq 0, \\ 1, & \eta = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

The following Lemma gives some useful properties of κ :

Lemma 4.2. *The function κ is an entire analytic real function satisfying*

$$\frac{d\kappa}{d\eta}(\eta) < \kappa(\eta) < e^\eta$$

for $\eta > 0$. Moreover, $\kappa(\eta) > 0$, $\frac{d\kappa}{d\eta}(\eta) > 0$, and $\frac{d^2\kappa}{d\eta^2}(\eta) > 0$, for all $\eta \in \mathbb{R}$.

Proof. Since

$$\kappa(\eta) = \frac{1}{\eta} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\eta^n}{n!} - 1 \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\eta^n}{(n+1)!},$$

all the desired inequalities for $\eta \geq 0$ immediately follow from term-by-term comparing of power series with positive coefficients.

Next, as

$$\frac{d\kappa}{d\eta}(\eta) = \frac{(\eta-1)e^\eta + 1}{\eta^2},$$

any eventual root $\eta < 0$ of $\frac{d\kappa}{d\eta}(\eta) = 0$ should verify $1 - \eta = e^{-\eta}$. However, denoting $\delta = -\eta > 0$, one immediately notices that for all such δ the strict inequality $e^\delta > 1 + \delta$ holds.

Finally,

$$\frac{d^2\kappa}{d\eta^2}(\eta) = \frac{(\eta^2 - 2\eta + 2)e^\eta - 2}{\eta^3},$$

and hence any eventual root $\eta < 0$ of $\frac{d^2\kappa}{d\eta^2}(\eta) = 0$ should verify $1 - \eta + \frac{1}{2}\eta^2 = e^{-\eta}$. Though again, for any $\delta = -\eta > 0$ one notices from comparing of the power series that $e^\delta > 1 + \delta + \frac{1}{2}\delta^2$. \square

The following lemma gives the relation of ω defined in (2.9) with κ , and interesting properties which can be easily deduced using this relation:

Lemma 4.3. *We have that $\omega(\xi, \alpha) = -\kappa(-\alpha \ln \xi) \ln \xi$. The compensator ω verifies the following estimates*

- (1) $\omega(\xi, \alpha) \leq -\ln \xi$ if $\alpha \leq 0$ and $\omega(\xi, \alpha) \leq -\xi^{-\alpha} \ln \xi$ if $\alpha \geq 0$, and then

$$\omega(\xi, \alpha) = O(\xi^{-|\alpha|} |\ln \xi|); \quad (4.6)$$

- (2)

$$\omega(\xi, \alpha) \rightarrow +\infty \quad \text{when } (\xi, \alpha) \rightarrow (0, 0). \quad (4.7)$$

Proof. Using properties of κ given in Lemma 4.2, it follows that:

- (1) If $\alpha \geq 0$, i. e. $-\alpha \ln \xi \geq 0$, then $\omega(\xi, \alpha) = -\kappa(-\alpha \ln \xi) \ln \xi$ is less than

$$-e^{-\alpha \ln \xi} \ln \xi = -\xi^{-\alpha} \ln \xi.$$

- (2) If $\alpha \leq 0$, i. e. $-\alpha \ln \xi \leq 0$, then $\omega(\xi, \alpha) = -\kappa(-\alpha \ln \xi) \ln \xi \leq -\ln \xi$ (indeed, κ is increasing, $\kappa(0) = 1$, yielding $\kappa(\eta) \leq 1$ when $\eta \leq 0$).

The estimate (4.6) follows from these two inequalities. In order to prove (4.7), we take any $K > 0$.

- (1) If $-\alpha \ln \xi \geq -K$, we have that $\kappa(-\alpha \ln \xi) \geq \kappa(-K)$, as κ is increasing, and then $\omega(\xi, \alpha) \geq -\kappa(-K) \ln \xi$.

- (2) If $-\alpha \ln \xi \leq -K$ (in particular $\alpha \leq 0$), we have that

$$\omega(\xi, \alpha) = \frac{1 - e^{-\alpha \ln \xi}}{|\alpha|} \geq \frac{1 - e^{-K}}{|\alpha|},$$

from which (4.7) follows. \square

In parallel with the compensator Ω introduced in (3.24), we introduce the symmetric function

$$\mathcal{K}(\eta, \delta) = \begin{cases} \frac{\kappa(\eta) - \kappa(\delta)}{\eta - \delta}, & \eta \neq \delta, \\ \frac{d\kappa}{d\eta}(\eta), & \eta = \delta. \end{cases} \quad (4.8)$$

This yields

$$\Omega(\xi, \alpha, \beta) = \mathcal{K}(-\alpha \ln \xi, -\beta \ln \xi) \ln^2 \xi.$$

The useful properties of $\Omega(\xi, \alpha, \beta)$ are given by the following lemma:

Lemma 4.4. $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) = O(\xi^{-\gamma} \ln^2 \xi)$, where $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, and $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) \rightarrow +\infty$, when $(\xi, \alpha, \beta) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Proof. To prove the two claims, we just have to use the Mean Value Theorem for the function \mathcal{K} : there exists $\theta \in [\eta, \delta]$, such that $\mathcal{K}(\eta, \delta) = \frac{d\kappa}{d\eta}(\theta)$.

Let us begin by the first claim. Let us start with the case $\alpha \geq \beta$. Then

$$\mathcal{K}(-\alpha \ln \xi, -\beta \ln \xi) = \frac{d\kappa}{d\eta}(\theta),$$

for some $\theta \in [-\beta \ln \xi, -\alpha \ln \xi]$. As $\frac{d\kappa}{d\eta}(\eta)$ is an increasing function (see Lemma 4.2), we have that

$$\mathcal{K}(-\alpha \ln \xi, -\beta \ln \xi) \leq \frac{d\kappa}{d\eta}(-\alpha \ln \xi).$$

If $\alpha \leq 0$, we use that

$$\frac{d\kappa}{d\eta}(-\alpha \ln \xi) \leq \frac{d\kappa}{d\eta}(0) = \frac{1}{2}$$

to obtain that $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) \leq \frac{1}{2} \ln^2 \xi$. If $\alpha \geq 0$, again using Lemma 4.2, we have that

$$\frac{d\kappa}{d\eta}(-\alpha \ln \xi) \leq e^{-\alpha \ln \xi} = \xi^{-\alpha},$$

and then that: $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) \leq \xi^{-\alpha} \ln^2 \xi$. We can summarize the two possibilities by writing that $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) \leq \xi^{-|\alpha|} \ln^2 \xi$, as soon as $\alpha \geq \beta$ and ξ and $|\alpha|$ sufficiently small. Using the symmetry of $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi)$ we can permute α and β in the above argument to obtain finally that $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) = O(\xi^{-\gamma} \ln^2 \xi)$, where $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

We now prove the second claim. By symmetry on α and β it suffices to prove the claim for $\alpha \geq \beta$. As above, we can write that $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) = \frac{d\kappa}{d\eta}(\theta) \ln^2 \xi$, for some $\theta \in [-\beta \ln \xi, -\alpha \ln \xi]$. Now, we want to bound $\Omega_{\alpha,\beta}$ from below. Since $d\kappa/d\eta$ is increasing, $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) \geq \frac{d\kappa}{d\eta}(-\beta \ln \xi) \ln^2 \xi$. If $\beta \geq 0$, we just use that

$$\frac{d\kappa}{d\eta}(-\beta \ln \xi) \geq \frac{d\kappa}{d\eta}(0) = \frac{1}{2},$$

to obtain that $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) \geq \frac{1}{2} \ln^2 \xi$. If $\beta \leq 0$, we have to compute

$$\frac{d\kappa}{d\eta}(-\beta \ln \xi) = \frac{d\kappa}{d\eta}(|\beta| \ln \xi) = \frac{d\kappa}{d\eta}(\ln \xi^{|\beta|}).$$

As

$$\frac{d\kappa}{d\eta}(\eta) = \frac{(\eta-1)e^\eta + 1}{\eta^2},$$

we have that

$$\frac{d\kappa}{d\eta}(-\beta \ln \xi) = \frac{(|\beta| \ln \xi - 1)\xi^{|\beta|} + 1}{|\beta|^2 \ln^2 \xi}$$

and then:

$$\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) \geq \frac{(|\beta| \ln \xi - 1) \xi^{|\beta|} + 1}{|\beta|^2},$$

yielding that $\Omega_{\alpha,\beta}(\xi) \rightarrow +\infty$. This yields the conclusion. \square

4.3. Transition along the trajectories. We want to study transition maps for (4.1), in the region $Q = \{(u, v, Y) : u \geq 0, v \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ near the origin. More precisely, let W be a neighborhood of the origin in \mathbb{R}^3 , and $\Pi \subset \{u = u_0\}$, for $u_0 > 0$, be a section. The neighborhood W can be chosen sufficiently small so that the trajectory starting at any point in $W \cap \{u > 0\}$ reaches Π for a finite positive time (in particular, $W \cap \Pi = \emptyset$). We consider the transition $T_{\mu,\sigma}$ from the points in $W \cap \{u > 0\}$ to the section Π .

We will compute $T_{\mu,\sigma}$, in the \mathcal{C}^k -coordinates given by Theorem 4.1. In this system of coordinates the family is the smooth family of polynomial vector fields $X_{\mu,\sigma}^N$ (this means polynomial in (u, v, y) with smooth coefficients in (μ, σ)).

We take $\Pi = \{u_0\} \times [0, v_0] \times [-Y_0, Y_0]$ for some $Y_0 > 0$, $v_0 > 0$. On Π , we replace the coordinate v by $v = u_0 v$, with $v \in [0, v_0 = u_0 v_0]$. Then, we can write $T_{\mu,\sigma}(u, v, Y) = (\tilde{Y}_{\mu,\sigma}(u, v, Y), v = uv)$.

The expression of the Y -component $\tilde{Y}_{\mu,\sigma}$ is given by the following Theorem:

Theorem 4.5. Let $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\sigma, v) = \sigma + \varphi_{\mu,\sigma}(v)$ and $\alpha = \alpha(\sigma, v) = \bar{\sigma}(\sigma, v) - \sigma_0$, where $\varphi_{\mu,\sigma}$ is the polynomial family introduced in Theorem 4.1. The Y -component of the transition map $T_{\mu,\sigma}$ has the following expression on $W \cap \{u > 0\}$:

(1) If $\sigma_0 \notin \mathbb{Q}$:

$$\tilde{Y}_{\mu,\sigma}(u, v, Y) = \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\bar{\sigma}} Y. \quad (4.9)$$

(2) If $\sigma_0 = p/q \in \mathbb{Q}$ with $(p, q) = 1$, when $\sigma_0 \notin \mathbb{N}$:

$$\tilde{Y}_{\mu,\sigma}(u, v, Y) = \eta_{\mu,\sigma}(v) v^p \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\bar{\sigma}} \omega\left(\frac{u}{u_0}, \alpha\right) + \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\bar{\sigma}} (Y + \phi_{\mu,\sigma}(Y, u, v)), \quad (4.10)$$

where $\eta_{\mu,\sigma}$ is the same as in (4.3) (in particular, $\eta_{\mu,\sigma} \equiv 0$ when $\sigma_0 \notin \mathbb{N}$).

The function family $\phi_{\mu,\sigma}$ in (4.10) is of order

$$O\left(u^{p+q\alpha} \omega^{q+1}\left(\frac{u}{u_0}, \alpha\right) |\ln u|\right)$$

and, for any integer $l \geq 2$, is of class \mathcal{C}^{l-2} in

$$\left(Y, u^{1/l}, u^{1/l} \omega\left(\frac{u}{u_0}, \alpha\right), v, \mu, \sigma\right).$$

Proof. The time to go from a point $(u, v, Y) \in W \cap \{u > 0\}$ to the section Π along the flow of $X_{\mu,\sigma}^N$ is equal to $-\ln(u/u_0)$. Expression (4.9) follows trivially from the integration of the third line of the system (4.2).

Then, from now on, we will assume that $\sigma_0 \in \mathbb{Q}$ and we will study the integration of the system (4.3). The trajectory through the point (u, v, Y) is equal

to $(ue^t, ve^{-t}, Y(t))$ where $Y(t)$ is solution of the 1-dimensional non-autonomous differential equation:

$$\dot{Y}(t) = -\bar{\sigma}Y(t) + \Phi_{\mu,\sigma}(\nu, u^p e^{pt} Y(t)^q) Y(t) + e^{-pt} v^p \eta_{\mu,\sigma}(\nu), \quad (4.11)$$

with initial condition $Y(0) = Y$.

In order to eliminate the linear term in (4.11) we look for $Y(t)$ in the form $Y(t) = e^{-\bar{\sigma}t} Z(t)$. As $\dot{Y}(t) = e^{-\bar{\sigma}t} \dot{Z}(t) - \bar{\sigma}Y(t)$, and letting $\bar{\sigma} = p/q + \alpha$, we obtain the following differential equation for $Z(t)$:

$$\dot{Z} = \Phi_{\mu,\sigma}(\nu, e^{-q\alpha t} u^p Z^q) Z + e^{\alpha t} v^p \eta_{\mu,\sigma}(\nu), \quad (4.12)$$

with initial condition $Z(0) = Y$. Note that the term in $\eta_{\mu,\sigma}$ is only present when $q = 1$.

The 1-dimensional non-autonomous differential equation (4.12) is smooth in $(t, Z, \sigma, \nu, u, v, \mu)$ and can be integrated for any time $t \in [0, -\ln(u/u_0)]$. If $Z(t)$ is the solution of (4.12) with initial condition $Z(0) = Y$, we will have that

$$\tilde{Y}_{\mu,\sigma}(u, v, Y) = \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\bar{\sigma}} Z\left(-\ln \frac{u}{u_0}\right). \quad (4.13)$$

The above expression has to be studied for $u > 0$ (we extend \tilde{Y} along $\{u = 0\}$ by $\tilde{Y}_{\mu,\sigma}(0, v, Y) = 0$). We first study the integration of (4.12).

To begin, it is easy to get rid of the term $e^{\alpha t} v^p \eta_{\mu,\sigma}(\nu)$ in (4.12). Let us consider the analytic function

$$\Theta(t, \alpha) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}, & \alpha \neq 0, \\ t, & \alpha = 0. \end{cases}$$

which verifies $\dot{\Theta} = e^{\alpha t}$. We have $\Theta(t, \alpha) = t\kappa(\alpha t)$ and then $\omega(\xi, \alpha) = \Theta(-\ln \xi, \alpha)$.

Putting $Z(t) = v^p \eta_{\mu,\sigma}(\nu) \Theta(t, \alpha) + \bar{Z}(t)$, we see that $\bar{Z}(t)$ is the solution of the differential equation

$$\dot{\bar{Z}} = \Phi_{\mu,\sigma}(\nu, u^p e^{-q\alpha t} (v^p \eta_{\mu,\sigma}(\nu) \Theta(t, \alpha) + \bar{Z})^q) (v^p \eta_{\mu,\sigma}(\nu) \Theta(t, \alpha) + \bar{Z}), \quad (4.14)$$

with initial condition $\bar{Z}(0) = Y$.

As $\Phi_{\mu,\sigma}(\nu, 0) \equiv 0$, we can write $\Phi_{\mu,\sigma}(\nu, \xi) = \xi H_{\mu,\sigma}(\nu, \xi)$, where $H_{\mu,\sigma}$ is a smooth function. Now, let us notice that $e^{\alpha t} = \dot{\Theta} = 1 + \alpha \Theta$. Moreover the map $t \rightarrow \Theta(t, \alpha)$ is invertible (for any α). Then, we can change the time t by the time Θ in the differential equation (4.14). We obtain the new equation

$$\frac{d\bar{Z}}{d\Theta} = u^p \bar{H}(\Theta, \bar{Z}, u, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma) \quad (4.15)$$

with

$$\bar{H} = (1 + \alpha \Theta)^{-(1+q)} (v^p \eta \Theta + \bar{Z})^{q+1} H_{\mu,\sigma}(\nu, u^p (1 + \alpha \Theta)^{-q} (v^p \eta \Theta + \bar{Z})^q), \quad (4.16)$$

where $\eta = \eta_{\mu,\sigma}(\nu)$. Let $\Psi(\Theta, Y, u, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma)$ be the solution of (4.15), with the "time" Θ . Up to now, Θ is seen as an independent variable; in particular it is inde-

pendent from α . For $t = -\ln(u/u_0)$, then $\Theta = \omega_\alpha(u/u_0)$, yielding

$$Z\left(-\ln \frac{u}{u_0}\right) = \Psi\left(\omega\left(\frac{u}{u_0}, \alpha\right), Y, u, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma\right) + v^p \eta_{\mu, \sigma}(\nu) \omega\left(\frac{u}{u_0}, \alpha\right), \quad (4.17)$$

and then, the computation of $\tilde{Y}_{\mu, \sigma}(u, v, Y)$ reduces to the computation of

$$\Psi\left(\omega\left(\frac{u}{u_0}, \alpha\right), Y, u, v, \mu, \sigma\right).$$

One difficulty in the study of

$$\Psi\left(\omega\left(\frac{u}{u_0}, \alpha\right), Y, u, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma\right)$$

is that $\omega(u/u_0, \alpha) \rightarrow +\infty$ if $u \rightarrow 0$. To overcome this difficulty we will exploit the fact that the right hand side of (4.15) is divisible by u^p .

We first study the differential equation (4.15). We put $u = U^l$ and change the time Θ by the time $\tau = U\Theta$ (and not just by $u\Theta$, as it could seem more natural). The equation (4.15) is replaced by the following equation

$$\frac{d\bar{Z}}{d\tau} = U^{p-1} \bar{H}\left(\frac{\tau}{U}, \bar{Z}, U^p, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma\right), \quad (4.18)$$

where \bar{H} is given by (4.16). Let \bar{G} be the right hand side of (4.18). It is smooth for $U > 0$, but since it is function of $\alpha \frac{\tau}{U}$, it is not well-defined in a whole neighborhood of the point $\{(\tau, \bar{Z}, U, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \mu_0, \sigma_0)\}$. Fortunately, we only need to integrate (4.18) in a closed domain \mathcal{D} :

Definition of \mathcal{D} . The domain \mathcal{D} is defined in the space $(\tau, U, \bar{Z}, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma)$ defined by

(1) $U \in [0, U_1]$, $|\alpha| \leq \alpha_0$ and $\tau \in [0, U\omega(U^l/u_0, \alpha)]$, where $U_1, \alpha_0 > 0$ are chosen arbitrarily small (the time $\tau = U\omega(U^l/u_0, \alpha)$ corresponds to the time $t = -\ln(u/u_0) = -l \ln(U/u_0)$),

(2) $(\bar{Z}, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma) \in \mathbb{A}$, an arbitrarily small closed neighborhood of the value $(0, 0, 0, 0, \mu_0, \sigma_0)$.

We want to prove that \bar{G} is of class \mathcal{C}^{l-2} on \mathcal{D} . We will first prove a technical lemma about the partial derivatives of the function \bar{G} . Let us denote by $\partial_m \bar{G}$ any partial derivative of \bar{G} corresponding to a multi-index $m = (m_1, \dots, m_s)$ associated to the variables $\tau, U, \bar{Z}, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma$ and the coordinates of μ . The degree of m is $|m| = m_1 + \dots + m_s$. We will note by δ , a strictly positive number, which can be made arbitrarily small by appropriately choosing U_1 and \mathbb{A} . We have the following:

Lemma 4.6. *Let be $\sigma_0 = p/q$ as above. Let m be any multi-index such that $|m| \leq l-2$. Then, for any $\delta > 0$, there exists a domain \mathcal{D} as above, such that on the restriction to the domain \mathcal{D} we have that*

$$\partial_m \bar{G} = O(U^{p-l-|m|-1-\delta}). \quad (4.19)$$

Proof. Recall that $\bar{G} = U^p \bar{H}$, where \bar{H} is given by (4.16) and Θ is replaced by τ/U . The proof is straightforward, but rather tedious, and we just give the main

steps. First, let us notice that on $\overline{\mathcal{D}}$ we have that, for any $s \in \mathbb{Z}$:

$$\left(1 + \alpha \frac{\tau}{U}\right)^s = (1 + \alpha \Theta)^s = e^{sat} = O(U^{-|s|\alpha}). \quad (4.20)$$

Also, using Lemma 4.3, we have that:

$$\frac{\tau}{U} = \Theta = \kappa(\alpha t) t \leq e^{|\alpha|t} t \leq lU^{-|l\alpha|} |\ln U|.$$

These estimations imply that $\left(1 + \alpha \frac{\tau}{U}\right)^{-(q+1)}$ and τ/U have an order $O(U^{-\delta})$. As \bar{H} is bounded on $\overline{\mathcal{D}}$, we have that $\bar{G} = O(U^{pl-1-\delta})$. This is the expected result for $m=0$.

Next, we use the expression of the partial derivatives of \bar{G} , in terms of the functions Θ , $(1 + \alpha \Theta)^{-q}$ or $(1 + \alpha \Theta)^{-(q+1)}$ and the partial derivatives of $H_{\mu,\sigma}$, evaluated on $\overline{\mathcal{D}}$ (these partial derivatives are bounded on $\overline{\mathcal{D}}$). We have for instance that:

$$\frac{\partial}{\partial U} (1 + \alpha \Theta)^{-q} = -ql\alpha \frac{1}{U} (1 + \alpha \Theta)^{-q} = O(U^{-1-\delta}).$$

As $(1 + \alpha \Theta)^{-q} = O(U^{-\delta})$, we remark that the order in U has decreased by one unit (modulo an order in δ).

It is easy to see that this observation can be generalized for any partial derivative: the previous order in U decreases by one unity for each first order partial derivation (modulo an order in δ).

Then, starting with $\bar{G} = O(U^{pl-1-\delta})$ for $m=0$, the estimation (4.18) for any multi-index m follows directly by recurrence from this fall of order (let us notice that, in a symbolic way, we have: “ $\delta + \delta = \delta$ ”). \square

End of the proof of Theorem 4.5. Lemma 4.6 says that each partial derivative $\partial_m \bar{G}$ can be extended continuously on $\tau = U = 0$ by giving it the value zero at these points. Then, as the function \bar{G} is smooth on $\overline{\mathcal{D}} \setminus \{\tau = U = 0\}$, the restriction of \bar{G} to $\overline{\mathcal{D}}$ is a function of differentiability class \mathcal{C}^{l-2} , on the whole domain $\overline{\mathcal{D}}$, including the points on $\{\tau = U = 0\}$, when we give to each partial derivative of \bar{G} or order less than $l-2$ the value 0 at these points. Let \mathbb{B} be a closed neighborhood of $(0, 0, 0)$ in the (τ, α, U) -plane, containing the closed set

$$\{(\tau, \alpha, U) \mid \tau \in [0, -lU \ln(U/U_0)], |\alpha| \leq \alpha_0, U \in [0, U_1]\}$$

that we have introduced above in the definition of $\overline{\mathcal{D}}$. The closed domain $\overline{\mathcal{D}}$ is contained in the neighborhood $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Using the Whitney Theorem for the extension of differentiable functions (see [6] for instance), we can find a \mathcal{C}^{l-2} -function \tilde{G} on a $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ such that $\tilde{G}|_{\overline{\mathcal{D}}} \equiv \bar{G}$ (here, this extension can also be easily constructed by hand, in an elementary way).

For times $\tau \in [0, -lU \ln(U/U_0)]$ the flow $\Psi(\tau, \bar{Z}, U, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma)$ of the differential equation (4.15): $d\bar{Z}/d\tau = \bar{G}$ coincides with the flow $\tilde{\Psi}(\tau, \bar{Z}, U, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma)$ of the differential equation $d\bar{Z}/d\tau = \tilde{G}$. This equation is of differentiability class \mathcal{C}^{l-2} on $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, as well as its flow $\tilde{\Psi}$.

In particular, we have that

$$\bar{Z}\left(-\ln \frac{u}{u_0}\right) = \tilde{\Psi}\left(U\omega\left(\frac{U^l}{u_0}, \alpha\right), Y, U, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma\right), \quad (4.21)$$

is a \mathcal{C}^{l-2} -function of $(Y, U, U\omega(U^l/u_0, \alpha), v, \nu, \alpha, \mu, \sigma)$, i. e. is a \mathcal{C}^{l-2} -function in the variables $(Y, u^{1/l}, u^{1/l}\omega(u/u_0, \alpha), v, \nu, \alpha, \mu, \sigma)$, a function which is defined on a neighborhood of the point $(0, 0, 0, 0, 0, \mu_0, \sigma_0)$. We can replace α (outside ω) by its expression in (σ, ν) and ν by uv to obtain finally that $\bar{Z}(-\ln(u/u_0))$ is a \mathcal{C}^{l-2} -function of $(Y, u^{1/l}, u^{1/l}\omega(u/u_0, \alpha), v, \mu, \sigma)$. As $\bar{Z}(0) = Y$, we can write

$$\bar{Z}\left(-\ln \frac{u}{u_0}\right) = Y + \phi_{\mu, \sigma}(Y, u, v), \quad (4.22)$$

where

$$\phi_{\mu, \sigma} = \tilde{\Psi}\left(U\omega\left(\frac{U^l}{u_0}, \alpha\right), Y, U, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma\right) - Y \quad (4.23)$$

is a \mathcal{C}^{l-2} -function of $(Y, u^{1/l}, u^{1/l}\omega(u/u_0, \alpha), v, \mu, \sigma)$. Finally, collecting the different terms in (4.13), (4.17), (4.22) and (4.23), we obtain the expression (4.10) in Theorem 4.5, for the transition function $\tilde{Y}_{\mu, \sigma}(u, v, Y)$.

We can estimate $\phi_{\mu, \sigma}$ from the differential equation (4.14) for $\bar{Z}(t)$. Denoting the right hand side of (4.14) by $G(t, \bar{Z}, u, v, \nu, \alpha, \sigma, \mu)$ we have that $G = O(u^p e^{-q\alpha t} \Theta^{q+1})$ on the domain \mathcal{D} defined above. As $t \leq -\ln(u/u_0)$ on \mathcal{D} , then $\Theta(t, \alpha) \leq \omega(u/u_0, \alpha)$, yielding $G = O(u^{p+q\alpha} \omega^{q+1}(u/u_0, \alpha))$. From this estimate of the order of G , it follows that

$$\phi_{\mu, \sigma} = \bar{Z}\left(-\ln \frac{u}{u_0}\right) - Y = O(u^{p+q\alpha} \omega^{q+1}\left(\frac{u}{u_0}, \alpha\right) |\ln u|),$$

which is the estimation in the statement of Theorem 4.5. \square

4.4. Transitions between sections. Theorem 4.5 gives the expression of the transition $T_{\mu, \sigma} = (v, \tilde{Y}_{\mu, \sigma})$, starting from any point (u, v, Y) in the domain $W \cap \{u > 0\}$ and landing on a section $\Pi \subset \{u = u_0\}$, for some $u_0 > 0$ (we can extend trivially $T_{\mu, \sigma}$ to the whole neighborhood W by taking $\tilde{Y}_{\mu, \sigma}(u, v, 0) = 0$). We apply this to get Theorems 2.2 and 2.3 after changing $(u, v) \mapsto (r, \rho)$.

Discussion of Theorems 2.2 and 2.3. A previous version of Theorems 2.2 and 2.3 was given in Theorems 4.10 and 4.14 of [9]. It is interesting to compare their proofs and formulations with the proofs and formulations in the present paper.

(1) The proof in the present version is unified: Theorem 4.5 gives a formula for a global transition from any point in a 3-dimensional neighborhood W , formula which is easy to restrict on the two different types of section Σ . Next, the proof of Theorem 4.5, even if it is based on the same normal form, is much shorter than the proofs of Theorems 4.10 and 4.14 given in [9]. The reason seems to be that in [9] the transition function \tilde{Y} and its partial derivatives are directly estimated by a variational method. In the present paper, we have replaced the 1-dimensional non-autonomous differential system: $\bar{Z} = \bar{G}$, which is not defined in a neighborhood of the point $\{(\tau, \bar{Z}, U, v, \nu, \alpha, \mu, \sigma) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \mu_0, \sigma_0)\}$,

by a differential equation: $\dot{\tilde{Z}} = \tilde{G}$, differentiable on a neighborhood of this point. As a consequence, we obtain almost without computation that the function $\phi_{\mu,\sigma}$ is differentiable (in terms of fractional power and a compensator of some variable). In fact, the heavy computations made in [9] are replaced by an implicit use of the Cauchy Theorem for differential equations.

(2) We can compare the statements in [9] and in the present paper. We restrict the comparison to the only non-trivial case: $\sigma_0 \in \mathbb{Q}$. The transition function called here $\tilde{Y}_{\mu,\sigma}$ is given by the formula (4.11) of Theorem 4.10 of [9]. We can observe that it is quite similar to the above formula (4.20), up to the changes of notations. The same remarks are valid for the transition of type II which is treated in Theorem 4.14 in [9]. The only important difference is in the form and properties of the function $\phi_{\mu,\sigma}$, which is called ϕ or θ in [9]. We will comment on this in the next items.

(3) The function $\phi_{\mu,\sigma}$ in Theorem 2.2 is of order

$$O\left(\nu^{p+q\alpha}\omega^{q+1}\left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha\right)|\ln \nu|\right).$$

This order has to be compared with the order given for the function ϕ in Theorem 4.10 of [9] which is exactly the same order for $\alpha < 0$, but equal to

$$O\left(\nu^p\omega^{q+1}\left(\frac{\nu}{\nu_0}, \alpha\right)|\ln \nu|\right)$$

for $\alpha > 0$. This minor difference is probably due to the difference in the method of proof. It is less easy to compare the order of $\phi_{\mu,\sigma}$ in Theorem 2.3 with the order of θ in Theorem 4.14 of [9].

(4) In Theorem 4.10 of [9], ϕ is a \mathcal{C}^∞ -function of $\omega(\nu/\nu_0, \alpha)$ and other variables. Since $\omega \rightarrow +\infty$ for $\nu \rightarrow 0$, this means that the domain of ϕ has to be unbounded. This implies that it is not possible to deduce directly the order of the partial derivatives of ϕ . This order is obtained by using variational methods and heavy computations. On the contrary, the formulation given in Theorems 2.2 and 2.3, permits a direct deduction of the order of any partial derivative of $\phi_{\mu,\sigma}$. Let us show this on an example for a transition map of type I. Considering any $l \in \mathbb{N}$ and observing that $\phi_{\mu,\sigma}$ is of order $O(\nu^{p-\delta})$, we can write $\phi_{\mu,\sigma} = \nu^{p-1/l}\bar{\phi}_{\mu,\sigma}$, where $\bar{\phi}_{\mu,\sigma}$ is a \mathcal{C}^{l-p-3} -function in $(Y, \nu^{1/l}, \nu^{1/l}\omega(\nu/\nu_0, \alpha), \mu, \sigma)$.

As a consequence any partial derivative of $\phi_{\mu,\sigma}$ in terms of Y, μ, σ , of degree less than $l-p-3$, is of order $O(\nu^{p-1/l})$. Taking into account that we can take l arbitrarily large, this order is very similar to the order obtained in Theorem 4.10 of [9].

5. APPENDIX II. COUNTING THE NUMBER OF ROOTS

5.1. Differentiable functions on monomials. We come back to the notations of Section 3: r, ρ are variables defined in a compact neighborhood \mathbb{A} of $(0, 0)$ in the first quadrant $Q = \{r \geq 0, \rho \geq 0\}$. We will always choose \mathbb{A} to be a rectangle

$[0, r_1] \times [0, \rho_1]$, in order to have connected curves $l_v = \{(r, \rho) \in \mathbb{A} \mid r\rho = v\}$. In the following definitions we will use also compensators ω_γ and $\Omega_{\gamma, \delta}$, depending on other parameters γ, δ . We will often use the shortened notation $\omega_\gamma, \Omega_{\gamma, \delta}$ for $\omega_\gamma(r/r_0), \Omega_{\gamma, \delta}(r/r_0)$. Moreover, changing r to r/r_0 , we can of course suppose that $r_0 = 1$.

We consider a multi-parameter λ in a compact neighborhood \mathbb{B} of a value λ_0 in some Euclidean space \mathcal{E} . The neighborhood \mathbb{B} will be chosen sufficiently small to have the desired properties.

We also consider functions which are differentiable on real powers of r, ρ and compensators in r . We give a precise definition of this notion.

Definition 5.1. (1) A *primary monomial* (*monomial in short*), is an expression $M = r^a, \rho^b, r^a \omega_\gamma(r)^c, r^a \Omega_{\gamma_1, \gamma_2}(r)^d$ or $\omega_\gamma(r)^{-e}$ where a, b, c, d, e and $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ are smooth functions of λ . Moreover a, b, e are strictly positive and $\gamma(\lambda_0) = \gamma_1(\lambda_0) = \gamma_2(\lambda_0) = 0$ (we can have $\gamma = \alpha$ or β and $(\gamma_1, \gamma_2) = (\alpha, \beta)$). For instance, $r^{2/3}, \rho^{1/5}, \omega_\alpha^{-1}, r\Omega_{\alpha, \beta}$ are primary monomials but not r^α or ω_α^a .

A monomial M defines a λ -family of functions $M(r, \rho, \lambda)$ on $Q = \{r \geq 0, \rho \geq 0\}$, M is smooth for $r > 0$ and, by Lemmas 4.3 and 4.4, it can be extended continuously along $\{r = 0\}$; we have that $M(0, 0, \lambda_0) = 0$ (i.e. $M = o(1)$, in terms of some distance of (r, ρ, λ) to $(0, 0, \lambda_0)$).

(2) We say that a function $f(r, \rho, \lambda)$ on $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ is a \mathcal{C}^k -function on the monomials M_1, \dots, M_l if there exists a \mathcal{C}^k -function $\tilde{f}(\xi_1, \dots, \xi_l, \lambda)$ defined on $\tilde{\mathbb{A}} \times \mathbb{B}$, where $\tilde{\mathbb{A}}$ is a neighborhood of $0 \in \mathbb{R}^l$ such that $f(r, \rho, \lambda) = \tilde{f}(M_1, \dots, M_l, \lambda)$. If the number of monomials and their type is not specified, we just say that f is a \mathcal{C}^k -function on monomials.

Clearly, the space of \mathcal{C}^k -functions on monomials, defined on $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ is a ring. The classical theorems of differential calculus (Taylor formula, division theorem and so on) can be extended to these functions by applying them to the function \tilde{f} . Since the differentiability class k is finite, there will be falls of differentiability class in these operations: Lemma 5.3 is one example. For this reason, we will consider functions f with the property to be \mathcal{C}^k -functions on monomials, for any $k \in \mathbb{N}$ (but with a choice of monomials and a size of the neighborhood $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ that may depend on k). The functions $\psi_{\mu, \sigma}(Y, u, v), \psi_{\mu, \sigma}(Y, v)$ and $\psi_{\mu, \sigma}(u, v)$ introduced in the statements of Theorems 4.5 are, 2.2, and 2.3 are examples of \mathcal{C}^k -functions on monomials for any k , which use only the single compensator ω_α . The functions h_i entering in the expression of the displacement map V in Section 3 are using other compensators ω_γ , and also $\Omega_{\alpha, \beta}$.

5.2. Procedure of division-derivation for functions with 2 variables.

Notation 5.2. In this section, $h(r, \rho, \lambda) = o(1)$ will mean that $h(0, 0, \lambda_0) = 0$.

We want to bound the number of roots of an equation $\{V(r, \rho, \lambda) = 0\}$ along the curves $l_v = \{r\rho = v \mid (r, \rho) \in \mathbb{A}\}$, for $v > 0$ and a neighborhood $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ sufficiently small. The function V is expressed using \mathcal{C}^k -functions on monomials. To obtain this bound, we will apply Rolle's Theorem, and to this end we will use recurrently

the Lie-derivative $L_{\mathcal{X}}$ of V by the vector field

$$\mathcal{X} = r \frac{\partial}{\partial r} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (5.1)$$

Hence, we need some properties of $L_{\mathcal{X}}$ acting on \mathcal{C}^k -functions on monomials. It is easy to see that:

$$\begin{cases} L_{\mathcal{X}} r^a = ar^a, \\ L_{\mathcal{X}} \rho^b = -b\rho^b, \\ L_{\mathcal{X}} \omega_{\gamma} = -(1 + \gamma \omega_{\gamma}), \\ L_{\mathcal{X}} \Omega_{\gamma_1, \gamma_2} = -(\omega_{\gamma_1} + \gamma_2 \Omega_{\gamma_1, \gamma_2}). \end{cases} \quad (5.2)$$

From this, it follows that

Lemma 5.3. *If f is a \mathcal{C}^k -function on monomials, then $L_{\mathcal{X}} f$ is a \mathcal{C}^{k-1} -function on monomials and $L_{\mathcal{X}} f = o(1)$.*

Proof. If M is any monomial, $L_{\mathcal{X}} M$ is a linear combination of monomials. Then,

$$L_{\mathcal{X}} f = \sum_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_i} L_{\mathcal{X}} M_i,$$

is a \mathcal{C}^{k-1} -function on monomials and, since each monomial is $o(1)$, this function $L_{\mathcal{X}} f$ is also $o(1)$. \square

For the procedure of division-derivation we will need more general monomials than the admissible ones:

Definition 5.4. (1) A *general monomial* is an expression

$$M = r^a \rho^b \prod_i \omega_i^{c_i} \prod_j \Omega_j^{d_j}$$

where i and j belong to finite sets of indices. The coefficients a, b, c_i, d_j , as well as the internal parameters of the compensators ω_i, Ω_j , are smooth functions of λ (without any restriction on sign). Let $a(\lambda_0) = a^0, b(\lambda_0) = b^0$.

(2) A general monomial is *resonant* if $a^0 = b^0$ (in this case the “polynomial” part $r^{a^0} \rho^{b^0}$ of M reduces to the first integral v^{a^0}). Seen as a function of (r, ρ, λ) , such a monomial is in general not defined for $r=0$ and $\rho=0$.

Remark 5.5. An interesting property is that if M is a general monomial, then M^{-1} is also a general monomial.

Notation 5.6. For convenience, if $\omega_i = \omega(r, \gamma_i)$ we will use the contracting expressions:

$$\omega = (\omega_i)_i, \quad \gamma = (\gamma_i)_i, \quad c = (c_i)_i, \quad \prod_i \omega_i^{c_i} = \omega^c, \quad \sum_i \gamma_i c_i = \gamma c.$$

A first easy result, which will be the principal tool in the proof of Theorem 5.8 below, is the following:

Lemma 5.7. *We consider an expression $f = M(1 + h)$ where $M = r^a \rho^b \omega^c$ is a general non-resonant monomial without Ω -factor and h is a \mathcal{C}^k -function on*

monomials, of order $o(1)$. Then, on a sufficiently small neighborhood \mathbb{B} , we can write:

$$L_{\mathcal{X}}f = (a - b + \gamma c)M(1 + g), \quad (5.3)$$

with g , a \mathcal{C}^{k-1} -function on monomials, of order $o(1)$.

Proof. We have that $L_{\mathcal{X}}f = L_{\mathcal{X}}M(1 + h) + ML_{\mathcal{X}}h$. Using the formula of derivation for ω , we obtain that $L_{\mathcal{X}}M = (a - b + \gamma c + c\omega^{-1})M$. As M is non-resonant, we have that $a^0 - b^0 \neq 0$ and, if \mathbb{B} is a sufficiently small neighborhood of λ_0 , we will also have that $a - b + \gamma c \neq 0$ on \mathbb{B} . Then, we obtain that:

$$L_{\mathcal{X}}f = (a - b + \gamma c) \left(1 + \frac{c\omega^{-1}}{a - b + \gamma c} \right) M(1 + h) + ML_{\mathcal{X}}h.$$

We can write this expression as $L_{\mathcal{X}}f = (a - b + \gamma c)M(1 + g)$, with

$$g = h + \frac{c\omega^{-1}(1 + h) + L_{\mathcal{X}}h}{a - b + \gamma c}.$$

It follows from Lemmas 5.3 and 5.7 that g is a \mathcal{C}^{k-1} -function on monomials, of order $o(1)$. \square

We want to use the algorithm of division-derivation in order to prove the following result:

Theorem 5.8. *Let $V(r, \rho, \lambda)$ be a function on $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \cap \{r > 0, \rho > 0\}$, of the form*

$$V(r, \rho, \lambda) = \sum_{i=1}^l A_i(\lambda) M_i(1 + g_i(r, \rho, \lambda)), \quad (5.4)$$

where:

- (1) the leading monomials $M_i = r^{a_i} \rho^{b_i} \omega^{c_i}$ are general monomials, without Ω -factor ($\omega = (\omega_j)_j$, $c_i = (c_i^j)_j$ with $j \in J$, a finite set);
- (2) the functions g_i are \mathcal{C}^k -functions on monomials ($k \geq l$), and of order $o(1)$;
- (3) the functions $A_i(\lambda)$ are continuous;
- (4) the monomials $M_j M_i^{-1}$ for $i \neq j$ are non-resonant, i. e.

$$a_j^0 - a_i^0 - b_j^0 + b_i^0 \neq 0 \quad \text{for } i \neq j. \quad (5.5)$$

Then, if $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ is chosen sufficiently small,

- i) either the function V has at most $l - 1$ isolated roots counted with their multiplicity, on each curve $l_v = \{r\rho = v\} \subset \mathbb{A}$;
- ii) or V is identically zero.

Proof. We suppose that V is defined for $\lambda \in \mathbb{B}$ (some neighborhood of λ_0) and we define the following closed subsets:

$$\mathbb{B}_i = \{\lambda \in \mathbb{B} \mid A_i(\lambda) \geq A_j(\lambda) \ \forall j = 1, \dots, l\}.$$

Of course we have $\mathbb{B} = \cup_i \mathbb{B}_i$, and it is sufficient to prove the result for any \mathbb{B}_i (and \mathbb{B} sufficiently small). Then let us pick any $i = 1, \dots, l$. By reordering the indices, we can suppose that we have picked $i = l$.

The algorithm of division-derivation consists in the production of a sequence of functions: $V_0 = V, V_1, \dots, V_{l-1}$, such that each V_j is a summation similar to V but only on $l-j$ terms, and is defined on a smaller neighborhood $\mathbb{A}^j \times \mathbb{B}^j$ of $(0, 0, \lambda_0)$.

To define V_1 , we first divide V by $M_1(1 + g_1)$ (*a division step*). This is made on a neighborhood $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{B}^1 \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$ chosen such that $1 + g_1(r, \rho, \lambda) \neq 0$ for all $(r, \rho, \lambda) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{B}^1$. On this neighborhood we consider the function:

$$\frac{V}{M_1(1 + g_1)} = A_1 + \sum_{i=2}^k A_i M_i M_1^{-1} (1 + \tilde{g}_i),$$

where the function \tilde{g}_i , defined by

$$1 + \tilde{g}_i = \frac{1 + g_i}{1 + g_1},$$

is \mathcal{C}^k on monomials and of order $o(1)$.

Next we apply the operator $L_{\mathcal{X}}$ (*a derivation step*). Since the monomials $M_i M_1^{-1}$ are non resonant for $i \neq 1$, we can apply Lemma 5.7 to obtain the following function V_1 on $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{B}^1$:

$$V_1 = L_{\mathcal{X}} \left[\frac{V}{M_1(1 + g_1)} \right] = \sum_{i=2}^l (a_i - a_1 - b_i + b_1) A_i M_i M_1^{-1} (1 + g_i^1(y, z)),$$

with the function g_i^1 , \mathcal{C}^k on monomials and of order $o(1)$. The effect of the derivation is to kill the first term A_1 , thus reducing by one the number of terms in the summation. Except from this fact, the terms of the summation are completely similar to the ones in V , but with the functions A_i replaced by $(a_i - a_1 - b_i + b_1) A_i$, and the monomials M_i replaced by the monomials $M_i M_1^{-1}$.

For the recurrence step of order $j+1 = 1, \dots, k-1$, we assume that we have a function:

$$V_j = \sum_{i=j+1}^l \left(\prod_{m=1}^j (a_i - b_i - a_m + b_m) \right) A_i(\lambda) M_i M_j^{-1} (1 + g_i^j),$$

defined on some neighborhood $\mathbb{A}^j \times \mathbb{B}^j$ with functions g_i^j , \mathcal{C}^{k-j} on monomials and of order $o(1)$. As in the first step from V to V_1 , we divide V_j by $M_{j+1} M_j^{-1} (1 + g_{j+1}^j)$, which is possible on some neighborhood $\mathbb{A}^{j+1} \times \mathbb{B}^{j+1} \subset \mathbb{A}^j \times \mathbb{B}^j$, and next apply the differential operator $L_{\mathcal{X}}$ to produce a function

$$V_{j+1} = \sum_{i=j+2}^l \left(\prod_{m=1}^{j+1} (a_i - b_i - a_m + b_m) \right) A_i(\lambda) M_i M_{j+1}^{-1} (1 + g_i^{j+1}),$$

where the g_i^{j+1} are \mathcal{C}^{k-j-1} on monomials and of order $o(1)$.

Performing the $l-1$ steps of the recurrence, we end up with a function

$$V_{l-1} = (a_l - b_l - a_1 + b_1) \dots (a_l - b_l - a_{l-1} + b_{l-1}) A_l(\lambda) M_l M_{l-1}^{-1} (1 + g_l^l),$$

where g_l^l is \mathcal{C}^{k-l} on monomials and of order $o(1)$.

As $g_l^l = o(1)$, and at least \mathcal{C}^0 on monomials, we can choose a last neighborhood $\mathbb{A}^l \times \mathbb{B}^l \subset \mathbb{A}^{l-1} \times \mathbb{B}^{l-1}$, such that the function $1 + g_l^l$ is nowhere zero on it. We restrict now $\lambda \in W_l = \mathbb{B}^l \cap \mathbb{B}_l$. On this set we have the following alternative: $A_l(\lambda) \neq 0$ or $A_1(\lambda) = \dots = A_l(\lambda) = 0$. In the last case, the function V is identical to 0 and has no isolated roots.

Then we just have to look at values λ where $A_l(\lambda) \neq 0$. For such a value of λ , the function V_{l-1} itself is nowhere zero on $\mathbb{A}^l \times W$. Consider now any curve l_v in \mathbb{A}^l . Recall that the derivation $L_{\mathcal{X}}$ of a function G corresponds to the derivation of G along the flow of \mathcal{X} and that l_v is an orbit of this vector field. Then, as V_{l-1} is equal to the derivation of V_{l-2} , up to a non-zero function, Rolle's Theorem applied to V_{l-2} , implies that the restriction of this function to l_v , has at most one root (let us notice that l_v is connected!). The same argument based on Rolle's Theorem can be applied by recurrence to obtain for each $j \leq l$, that the function V_{l-j} has at most $j-1$ roots, counted with their multiplicity. Finally, the function V has at most $l-1$ roots counted with their multiplicity on $l_v \cap \mathbb{A}^l$, for $\lambda \in W_l$.

We obtain the result by considering in the same way the different subsets \mathbb{B}_i . \square

Remark 5.9. (1) Even if V is a summation on admissible monomials, it is clear that, in general, the division step may produce general monomials. This is the reason why we begin with general monomials in (5.4).

(2) Using the first integral $r\rho = v$, we can rewrite the leading monomial M_i in the form $M_i = v^{b_i} r^{a_i - b_i} \omega^{c_i}$. We call $\bar{M}_i = r^{a_i - b_i} \omega^{c_i}$ a reduced monomial. The sum (5.4) may be written in reduced form, with $p_i = a_i - b_i$:

$$V(r, \rho, \lambda) = \sum_{i=1}^l v^{b_i} A_i(\lambda) r^{p_i} \omega^{c_i} (1 + g_i(r, \rho, \lambda)). \quad (5.6)$$

(3) The non-resonance condition (5.5) in Theorem 5.8 is equivalent to the condition that the $p_i(\lambda_0) = p_i^0$ in (5.6) are two by two distinct. Up to a change of indices and a reordering, we can suppose in this case that $p_1^0 < p_2^0 \dots < p_l^0$. Let us note that some of p_i^0 may be negative, and also that one of them may be equal to zero.

5.3. The results of finite cyclicity for the boundary limit periodic set. We now want to apply Theorem 5.8 to the displacement function V in the text. We write $\bar{\sigma}_3 = \sigma_0 + \alpha$. After putting this function in the reduced form (5.5), we have the following.

(1) In the case $\sigma_0 \notin \mathbb{N}$, the function V is given in (3.19) and we have the sequence of monomials: $\{1, r^{\sigma_0 + \alpha}, r^{\sigma_0 - 1 + \alpha}\}$. This allows applying Theorem 5.8, yielding that the boundary limit periodic set is at most 2.

(2) In the case $\sigma_0 = p \in \mathbb{N}$, the function V is given in (3.25) or (3.26), and the sequence of monomials is: $\{1, r^{p + \alpha}, r^{p - 1 + \alpha}, r^\alpha \omega_\alpha\}$. We have two resonant leading monomials when $p \neq 1$, and even 3 when $p = 1$. Theorem 5.8 does not apply in none of these cases.

Hence, we give a direct proof for $\sigma_0 \in \mathbb{N}$, using exactly the same procedure of derivation-division as in Theorem 5.8, but based on a more refined estimation than the formula (5.3) used to prove Theorem 5.8. Recall that the parameter was called M in this context. It will not be sufficient to consider the leading reduced monomials for $M = M_0$, and we will have to look more precisely at the form of certain remainders.

We need the following result:

Lemma 5.10.

$$L_{\mathcal{X}}[r^\alpha \omega_\alpha (1 + O(r^\delta))] = -r^\alpha (1 + O(r^\delta)). \quad (5.7)$$

Proof. We have that

$$L_{\mathcal{X}}[r^\alpha \omega_\alpha (1 + O(r^\delta))] = L_{\mathcal{X}}[r^\alpha \omega_\alpha] (1 + O(r^\delta)) + r^\alpha \omega_\alpha O(r^\delta).$$

Now, $L_{\mathcal{X}}[r^\alpha \omega_\alpha] = \alpha r^\alpha \omega_\alpha - r^\alpha r^{-\alpha}$. As $r^{-\alpha} = 1 + \alpha \omega_\alpha$, we have that $L_{\mathcal{X}}[r^\alpha \omega_\alpha] = -r^\alpha$. Since $r^\alpha \omega_\alpha O(r^\delta)$ is of order $O(r^\delta)$ (for a smaller δ), we obtain (5.7) by grouping the terms. \square

Remark 5.11. The formula (5.7) is wrong in general if we replace the remainder by the more general remainder $o(1)$. Let us consider for instance the expression $f = r^\alpha \omega_\alpha (1 + \rho)$. We have that

$$L_{\mathcal{X}} f = -r^\alpha (1 + \rho) - r^\alpha \omega_\alpha \rho = -r^\alpha (1 + \rho + \omega_\alpha \rho).$$

The term $\omega_\alpha \rho$ is not of order $o(1)$.

Let \mathbb{A}, \mathbb{B} be neighborhoods defined as above. First we have the following result when $\sigma_0 \neq 1$:

Theorem 5.12. *Consider the case $\sigma_0 = p \in \mathbb{N}$, with $p \neq 1$. Then the cyclicity of the boundary limit periodic set is at most 3, namely for sufficiently small neighborhoods \mathbb{A} and \mathbb{B} , the equation $V(r, \rho, M) = 0$ has at most 3 roots, counted with their multiplicities, on each curve $l_\nu \subset \mathbb{A}$.*

Proof. Recall that the displacement map V is given by

$$V(r, \rho) = * \varepsilon_0 (1 + h_0) + * \varepsilon_1 r^{p+\alpha} (1 + h_1) + * \bar{\mu}_3 \nu r^{p-1+\alpha} (1 + h_2) + * K(M) \nu^p r^\alpha \omega_\alpha. \quad (5.8)$$

The sequence of leading monomials in (5.8) does not verify the condition of non-resonance. To overcome this difficulty, we will use that there is no remainder in the last term, and that h_0 is of order $O(r^\delta)$. For h_1 and h_2 , it will be sufficient to know that they are $o(1)$.

As in the proof of Theorem 5.8, we define the partition $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 \cup \mathbb{B}_3 \cup \mathbb{B}_4$ in terms of the coefficients in (5.8). At each step we will have to restrict the size of \mathbb{B} . We will not recall it.

As the three last leading monomials in (5.8) are $o(1)$, the cyclicity is trivially 0 when $M \in \mathbb{B}_1$. We suppose now that $M \in \mathbb{B}_2 \cup \mathbb{B}_3 \cup \mathbb{B}_4$. Using (5.7), we obtain:

$$L_{\mathcal{X}} \frac{V}{1 + h_0} = * \varepsilon_1 r^{p+\alpha} (1 + g_1) + * \bar{\mu}_3 \nu r^{p-1+\alpha} (1 + g_2) + * K(M) \nu^p r^\alpha.$$

Now, the sequence of leading monomials $\{r^{p+\alpha}, r^{p-1+\alpha}, r^\alpha\}$ verifies the condition of non-resonance and we can apply Theorem 5.8 to $L_{\mathcal{X}}V/(1+h_0)$. Then, this function has at most 2 roots, and the function V itself has at most 3 roots, when $M \in \mathbb{B}_2 \cup \mathbb{B}_3 \cup \mathbb{B}_4$. \square

Finally, we have

Theorem 5.13. *Consider the case $\sigma_0=1$. Then the cyclicity of the boundary limit periodic set is at most 2.*

Proof. We can start with the formula (5.8) which is valid for any $p \in \mathbb{N}$. Moreover, for $p=1$ we have that

$$K(M) = \eta_4(\nu) - \eta_3(\nu)(1 + \varepsilon_1) = *\bar{\mu}_3 + O(\nu)O_P(M_C).$$

This is a direct consequence of the fact that the linear part of the system at the points P_3 and P_4 is given, up to a constant, by $\dot{r}=r$, $\dot{\rho}=-\rho$, $\dot{y}=-\sigma(\bar{y} + \bar{\mu}_3\rho)$. Then, we can split the last term in (5.8) as the sum $*\bar{\mu}_3\nu r^\alpha\omega_\alpha + \nu r^\alpha\omega_\alpha O(\nu)O_P(M_C)$. The second term gives contributions of order $O(r^\delta)$ in h_0 , h_1 and h_2 , and produces a remainder h_3 of order $O(r^\delta)$ for the last leading monomial $r^\alpha\omega_\alpha$.

Then, for $p=1$, the displacement map V takes the form:

$$V(r, \rho) = *\varepsilon_0(1+h_0) + *\varepsilon_1 r^{1+\alpha}(1+h_1) + *\bar{\mu}_3 \nu r^\alpha(1+h_2) + *\bar{\mu}_3 \nu r^\alpha\omega_\alpha(1+h_3). \quad (5.9)$$

The sequence of leading monomials in (5.9) does not verify the condition of non-resonance. To overcome this difficulty, we will use that h_0 and h_3 are of order $O(r^\delta)$. It will be sufficient to know that h_1 and h_2 are $o(1)$.

As in the proof of Theorem 5.12, the cyclicity is 0 if $|\varepsilon_0| \geq \max\{|\varepsilon_1|, |\bar{\mu}_3|\}$.

Otherwise, let us consider $L_{\mathcal{X}}V/(1+h_0)$. Using (5.7), we have that

$$L_{\mathcal{X}} \frac{V}{1+h_0} = *\varepsilon_1 r^{1+\alpha}(1+g_1) + *\bar{\mu}_3 \nu [\alpha r^\alpha(1+h_2) + r^\alpha L_{\mathcal{X}}h_2] + *\bar{\mu}_3 \nu r^\alpha(1+g_3),$$

with g_3 of order $O(r^\delta)$. Grouping the different terms, we obtain

$$L_{\mathcal{X}} \frac{V}{1+h_0} = r^{1+\alpha} [* \varepsilon_1(1+g_1) + *\bar{\mu}_3 \rho(1+*\alpha+g_4)],$$

where $g_4 = *ah_2 + L_{\mathcal{X}}h_2 + g_3$ is of order $o(1)$. Now, the sequence of leading monomials $\{1, \rho\}$ verifies the condition of non-resonance and we can apply Theorem 5.8 to $r^{-1-\alpha}L_{\mathcal{X}}V/(1+h_0)$. This function has at most 1 root, yielding that V itself has at most 2 roots, if $|\varepsilon_0| \leq \max\{|\varepsilon_1|, |\bar{\mu}_3|\}$. \square

6. APPENDIX III

Lemma 6.1. *The parameter function ε_0 in the expression of the displacement map V has the form (3.16) for system (3.3).*

Proof. Since the system has an invariant parabola for $\mu_0=\mu_2=\mu_3=\mu_4=0$, it suffices to make the calculation for $\mu_0=\mu_2=\mu_3=\mu_5=0$. The system is integrable

when $\mu_4 = 0$, with integrating factor $(1+y)^3$. Hence, it suffices to show that the following Melnikov integral is a nonzero multiple of μ_4 . Indeed,

$$\int_{y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}^{\infty} \mu_4 \frac{x^2}{(1+y)^3} dx = \int_{-\infty}^{\infty} 8\mu_4 \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = *\mu_4. \quad \square$$

Lemma 6.2. *The parameter function ε_1 in the expression of the displacement map V has the form (3.17) for both systems (3.2) and (3.3).*

Proof. It has been proved in [3] (see for instance Theorem 3.5) that it suffices to show that $\int \operatorname{div} dt = *\mu_5$ along the invariant parabola when all parameters but μ_5 vanish. Two different calculations are needed for the cases (3.2) and (3.3). In the first case, the invariant parabola is given by (3.4). Then,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{div} dt &= \lim_{X_0 \rightarrow \infty} \int_{-X_0}^{X_0} \frac{(2B+1)x + (1-B)\mu_5}{-y + Bx^2 + B\mu_5 x} dx = \\ &= \lim_{X_0 \rightarrow \infty} \left[(2B+1) \ln \frac{1+B(X_0+(B-1)\mu_5)^2 + o(\mu_5)}{1+B(X_0-(B-1)\mu_5)^2 + o(\mu_5)} + \right. \\ &\quad \left. + 2B^{3/2}(B-1)\mu_5 \left(\arctan(\sqrt{B}(X_0 + O(\mu_5))) - \arctan(\sqrt{B}(-X_0 + O(\mu_5))) \right) \right] = \\ &= 2B^{3/2}(B-1)\pi\mu_5 + o(\mu_5). \end{aligned}$$

The second case of (3.3) is easier since the invariant parabola $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ is independent of μ_5 . Then

$$\int_{y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}^{\infty} \operatorname{div} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2\mu_5 \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi\mu_5. \quad \square$$

Lemma 6.3. *The second derivative of the map $S = \rho F(0, \rho)$, where F is defined in (3.18), is a nonzero multiple of $\bar{\mu}_3$.*

Proof. We first localize the system (3.2) at the nilpotent point at infinity using the coordinates $(v, w) = (-x/y, 1/y)$: after multiplication by w , this yields

$$\begin{aligned} \dot{v} &= w + (1-B)v^2 - \mu_2 - \mu_3 v + vw((3B-1)\mu_5 + \mu_4) + v^2 w, \\ \dot{w} &= vw - \mu_3 w - (1-2B)\mu_5 w^2 + vw^2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

A similar localization can be done for (3.3). We now consider the blow-up $(v, w) = (r\bar{x}, r^2)$ for $w > 0$, and we consider the restriction of the blow-up system to the (ρ, \bar{x}) -plane for $r = 0$ (after multiplication by 2),

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\rho(\bar{x} - \bar{\mu}_3 \rho) = P(\rho, \bar{x}), \\ \dot{\bar{x}} &= 2 + (1-2B)\bar{x}^2 - 2\bar{\mu}_2 \rho^2 - \bar{\mu}_3 \bar{x} \rho = Q(\rho, \bar{x}). \end{aligned}$$

Note that this system is the same for (3.2) and (3.3). The singular points occur at $\bar{x} = \pm\beta$ with $\beta = \sqrt{2/(2B-1)}$. We localize at P_3 using $x_3 = \beta - \bar{x}$ and at P_4 using $x_4 = \beta + \bar{x}$. Hence, the system at P_4 is obtained from that at P_3 through $(x_3, \beta) \mapsto (-x_4, -\beta)$. The map is between two sections $\{\bar{x}_i = X_0\}$ in the normal form coordinates \bar{x}_i near P_i and we take X_0 small. The section $\{\bar{x}_4 = X_0\}$ (resp. $\{\bar{x}_3 = X_0\}$) has equation $\bar{x} = f_4(\rho) = -x_0 + O(\rho)$ (resp. $\bar{x} = f_3(\rho) = x_0 + O(\rho)$). A formula for the second derivative was given in [9] (Proposition 5.2), namely

$$S''(0) = S'(0) \left[2 \left(f'_4(0) S'(0) \left(\frac{P'_\rho}{Q} \right) (0, f_4(0)) - f'_3(0) \left(\frac{P'_\rho}{Q} \right) (0, f_3(0)) \right) + \right. \\ \left. + \int_{f_3(0)}^{f_4(0)} \left(\frac{P''_{\rho\rho}}{Q} (0, \bar{x}) - 2 \frac{P'_\rho Q'_\rho}{Q^2} (0, \bar{x}) \right) \exp \left(\int_{f_3(0)}^{\bar{x}} \left(\frac{P'_\rho}{Q} \right) (0, x) dx \right) d\bar{x} \right]. \quad (6.2)$$

Here, $S'(0) = 1$. We call the three terms in the bracket $2I_1$, $2I_2$ and I_3 . Let us first consider I_3 .

$$I_3 = 4\bar{\mu}_3 (2 + (1-2B)x_0^2)^{\frac{1}{2(1-2B)}} \int_{x_0}^{-x_0} (1-B\bar{x}^2) (2 + (1-2B)\bar{x}^2)^{\frac{8B-5}{2(1-2B)}} d\bar{x}. \quad (6.3)$$

There are two different cases for $f'_j(0)$ depending whether $B_0 = \frac{3}{4}$ or not.

The case $B_0 = \frac{3}{4}$. In this case, the singular point has equal eigenvalues and a Jordan normal form for nonzero $\bar{\mu}_3$. Hence, the change of coordinate to normal form is tangent to the identity and $f'_3(0), f'_4(0) = O(\bar{\mu}_3)O(X_0)$. Also the integral part of I_3 in (6.3) is equal to

$$-2 \left(\frac{3}{2} x_0 - \ln \frac{2+x_0}{2-x_0} \right) \neq 0.$$

The result follows in that case.

The case $B_0 \neq \frac{3}{4}$. In this case, the change of coordinates to normal form is given by

$$\bar{x} = \beta - \left(\bar{x}_3 - \frac{\bar{\mu}_3}{3-4B} \rho \right) + O(|(\rho, \bar{x}_3)|^2)$$

for P_3 (resp. $\bar{x} = -\beta + \left(\bar{x}_4 + \frac{\bar{\mu}_3}{3-4B} \rho \right) + O(|(\rho, \bar{x}_4)|^2)$ for P_4), yielding

$$f'_i(0) = \frac{\bar{\mu}_3}{3-4B} (1 + O(X_0)); \quad 2I_1 + 2I_2 = \bar{\mu}_3 \frac{4}{3-4B} \frac{x_0}{2 + (1-2B)x_0^2}.$$

As for the integral part in I_3 , it is given by

$$\frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{5-8B}{2(2B-1)}} x_0 \left[-3 {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{5-8B}{2(1-2B)}; \frac{3}{2}; \frac{2B-1}{2} x_0^2 \right) + \right. \\ \left. + B x_0^2 {}_2F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{5-8B}{2(1-2B)}; \frac{5}{2}; \frac{2B-1}{2} x_0^2 \right) \right], \quad (6.4)$$

where ${}_2F_1(a, b; c; z)$ is the Gauss hypergeometric function defined by

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!},$$

with $(a)_0=1$, $(a)_n=a(a+1)\dots(a+n-1)$. The function ${}_2F_1(a, b; c; z)$ is analytic in the whole plane, except for a singularity at $z=1$. Moreover, ${}_2F_1(a, b; c; 0)=1$ and

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z) + \\ &+ (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \end{aligned} \quad (6.5)$$

for $z \in (-1, 1)$. This yields that near $z=1$

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b}. \quad (6.6)$$

In the two hypergeometric functions appearing in (6.4), the exponent of $(1-z)$ in (6.6) is

$$c-a-b = \frac{4B-3}{2(1-2B)} \begin{cases} < 0, & B > \frac{3}{4}, \\ > 0, & B < \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Hence, the first (resp. second) term in (6.6) is dominant when $B < \frac{3}{4}$ (resp. $B > \frac{3}{4}$).

We treat the two cases.

The case $B < \frac{3}{4}$. For $\frac{2B-1}{2}x_0^2$ close to 1, the bracket part of (6.4) is close to

$$\begin{aligned} -3 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4B-3}{2(1-2B)}\right)}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{B-1}{1-2B}\right)} + Bx_0^2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4B-3}{2(1-2B)}\right)}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{B-1}{1-2B}+1\right)} = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4B-3}{2(1-2B)}\right)}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{B-1}{1-2B}\right)} \left(-3 + \frac{3(1-2B)}{2(B-1)} Bx_0^2\right), \end{aligned}$$

since $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. We let $x_0^2 = \frac{2}{2B-1} - \delta$, with $\delta > 0$ small. Using that

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

the integral part of I_3 in (6.3) is close to

$$\begin{cases} -\frac{3\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{4B-3}{2(1-2B)}\right)}{\Gamma\left(\frac{B-1}{1-2B}\right)} \frac{2B-1}{2(B-1)} (2-B\delta), & B_0 \neq 1, \\ \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{4B-3}{2(1-2B)}\right)}{\Gamma\left(\frac{-B}{1-2B}\right)} Bx_0^2 + O(B-B_0), & B_0 = 1. \end{cases}$$

The coefficient is nonzero for $\delta > 0$ as soon as $B_0 \neq 1$ (resp. $B_0 = 1$) and $\frac{B-1}{1-2B}$ (resp. $-\frac{B}{1-2B}$) is not a negative integer, which is the case for $B > 1/2$. This shows that I_3 grows as $(2 + (1-2B)x_0^2)^{\frac{1}{2(1-2B)}}$, while $2(I_1 + I_2)$ grows as $(2 + (1-2B)x_0^2)^{-1}$. Hence, I_3 is dominant when $B < 3/4$, and $2(I_1 + I_2) + I_3 = *\bar{\mu}_3 \neq 0$ when $B < 3/4$.

The case $B > \frac{3}{4}$. For $\frac{2B-1}{2}x_0^2$ close to 1, the bracket part of (6.4) has two parts J'_3 and J''_3 :

$$\begin{aligned} J'_3 &= -\frac{3\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{4B-3}{2(1-2B)}\right)}{\Gamma\left(\frac{B-1}{1-2B}\right)} \frac{2B-1}{2(B-1)} (2 + O(\delta)), \\ J''_3 &= \left(1 - \frac{2B-1}{2}x_0^2\right)^{\frac{4B-3}{2(1-2B)}} \times \\ &\quad \times \left(-3 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-4B}{2(1-2B)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5-8B}{2(1-2B)}\right)} + Bx_0^2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-4B}{2(1-2B)}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5-8B}{2(1-2B)}\right)} + O(\delta) \right) = \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2B-1}{2}x_0^2\right)^{\frac{4B-3}{2(1-2B)}} \frac{\Gamma\left(\frac{3-4B}{2(1-2B)}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-8B}{2(1-2B)}\right)} (Bx_0^2 - 1 + O(\delta)) - \\ &\quad - \frac{3}{3-4B} \left(1 - \frac{2B-1}{2}x_0^2\right)^{\frac{4B-3}{2(1-2B)}} (1 + O(\delta)). \end{aligned}$$

This yields the corresponding parts I'_3 and I''_3 for I_3 , considering that $\delta = 2 + (1-2B)x_0^2$:

$$\begin{cases} I'_3 = *\bar{\mu}_3 J'_3 \delta^{\frac{1}{2(1-2B)}}, \\ I''_3 = -\bar{\mu}_3 \frac{4x_0}{3-4B} \delta^{-1} + O(1). \end{cases}$$

Considering that

$$\frac{1}{2(1-2B)} \in (-1, 0).$$

Then $2(I_1 + I_2) + I_3 = *\bar{\mu}_3 \delta^{\frac{1}{2(1-2B)}} (1 + O(\delta)) \neq 0$. □

REFERENCES

- [1] Dumortier F., Roussarie R. Canard cycles and centre manifolds // *Memoirs of AMS*. 1996. Vol. 121, N° 577. P. 1–100.
- [2] Dumortier F., Roussarie R., Rousseau C. Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields // *J. Diff. Equat.* 1994. Vol. 110, N° 1. P. 86–133.
- [3] Dumortier F., El Morsalani M., Rousseau C. Hilbert's 16th problem for quadratic systems and cyclicity of elementary graphics // *Nonlinearity*. 1996. Vol. 9, N° 5. P. 1209–1261.
- [4] Dumortier F., Roussarie R., Sotomayor S. Generic 3-parameter families of planar vector fields, unfolding of saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear parts // *Bifurcations of planar vector fields*. Berlin: Springer-Verlag, 1991. (Lecture Notes in Math.; Vol. 1480).

- [5] *Ilyashenko Y., Yakovenko S.* Finitely-smooth normal forms of local families of diffeomorphisms and vector fields // Russian Math. Surv. 1991. Vol. 46. P. 1–43.
- [6] *Malgrange B.* Ideals of differentiable functions. London: Oxford University Press, 1967. (Tata Institute of Fundamental Research Studies in Math.; № 3).
- [7] *Roussarie R.* Desingularization of unfoldings of cuspidal loops // Geometry and analysis in nonlinear dynamics. Harlow: Longman Sci. and Tech., 1992. (Pitman Res. Notes Math. Series; Vol. 222). P. 41–55.
- [8] *Roussarie R., Rousseau C.* Finite cyclicity of nilpotent graphics of pp-type surrounding a center // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2008. Vol. 15, № 5. P. 889–920.
- [9] *Zhu H., Rousseau C.* Finite cyclicity of graphics with a nilpotent singularity of saddle or elliptic type // J. Diff. Equat. 2002. Vol. 178. P. 325–436.

ROBERT ROUSSARIE
Université de Bourgogne
E-mail: Robert.Roussarie@u-bourgogne.fr

Received 15.12.2014

CHRISTIANE ROUSSEAU
Université de Montréal
E-mail: rousseac@dms.umontreal.cs

Ramified covers and tame isomonodromic solutions on curves

K. Diarra, F. Loray

In this paper, we investigate the possibility of constructing isomonodromic deformations by ramified covers. We give new examples and prove a classification result.

References: 27 entries. *UDK:* 517.925.7. *MSC2010:* 34M55, 34M56, 34M03. *Keywords:* Ordinary differential equations, isomonodromic deformations, Hurwitz spaces.

*To Yulij Ilyashenko
for his 70th birthday*

INTRODUCTION

Let X be a complete curve of genus g over \mathbb{C} and D be a reduced divisor on X : $D = [x_1] + \dots + [x_n]$ is equivalent to the data of n distinct points on X . Set $N := 3g - 3 + n$; if $N > 0$, which we will assume along the paper, then N is the dimension of the deformation space $M_{g,n}$ of the pair (X, D) .

Let (E, ∇) be a rank 2 logarithmic connection over X with polar divisor D . In other words, $E \rightarrow X$ is a rank 2 holomorphic vector bundle and $\nabla : E \rightarrow E \otimes \Omega_X^1(D)$ a linear meromorphic connection having simple poles at the points of D . By considering the analytic continuation of a local basis of ∇ -horizontal sections of E , we inherit a monodromy representation

$$\rho_{\nabla} : \pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

(which is well-defined up to conjugacy in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$).

Given a deformation $t \mapsto (X_t, D_t)$ of the complex structure, there is a unique deformation $t \mapsto (X_t, D_t, E_t, \nabla_t)$ up to bundle isomorphism such that the monodromy is constant. For t varying in the Teichmüller space $T_{g,n}$, we get the universal isomonodromic deformation (see [9]). Considering the moduli space $\mathcal{M}_{g,n}$ of quadruples (X, D, E, ∇) , isomonodromic deformations define the leaves of a N -dimensional foliation transversal to the natural projection

$$\mathcal{M}_{g,n} \rightarrow M_{g,n}; \quad (X, D, E, \nabla) \mapsto (X, D).$$

The corresponding differential equation is explicitly described in [13] (via local analytic coordinates on $M_{g,n}$) and is known to be polynomial with respect to the algebraic structure of $\mathcal{M}_{g,n}$ (it is the non-linear Gauss — Manin connection

constructed in [25, Section 8]). In the case $g = 0$, we get the Garnier system (see [23]), and for $n = 4$, the Painlevé VI equation. Solutions (or leaves) are generically transcendental and it is expected that the transcendence increase with N (see [8, Introduction] for instance). However, there are some tame solutions.

Algebraic solutions of Painlevé VI equation were recently classified in [2, 14]. Some algebraic solutions are constructed in [5] for the Garnier case; see the discussion in the introduction of [6] for higher genus case.

Some solutions, called “classical”, reduce to solutions of linear differential equations. They are classified in the Painlevé case in [27]. In the Garnier case, such solutions arise by considering deformations of reducible connections (see [21, 24]): they can be expressed in terms of Lauricella hypergeometric functions.

There are also “tame solutions” coming from simpler isomonodromy equations (e. g. with lower n or g). In [21], it is proved that, one way of reducing n (when $g = 0$) is to consider those deformations having scalar local monodromy around some pole. There is another way of reduction, by using ramified covers, and this is what we want to investigate in this note.

1. KNOWN CONSTRUCTIONS VIA RAMIFIED COVERS

Ramified covers of curves have already been used to construct algebraic solutions of the Painlevé VI equation (see [1, 7]) and Garnier systems (see [5]). But they have also been used to understand relations between transcendental solutions.

1.1. The most classical case is the **quadratic transformation** of the Painlevé VI equation (see [12, 19, 22, 26]). We consider a deformation $t \mapsto (E_t, \nabla_t)$ of a rank 2 connection on \mathbb{P}^1 with simple poles at $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, t, \infty)$. At a pole x_i , we consider *eigenvalues* θ_i^1, θ_i^2 of the residual matrix and call *exponent* the difference $\theta_i := \theta_i^1 - \theta_i^2$ (defined up to a sign). To be concrete, if all $\theta_i^1 + \theta_i^2 = 0$ and the connection is irreducible, then E_t is the trivial bundle except for a discrete set of parameters (see [3]) and the connection is just defined by a two-by-two system. If moreover exponents satisfy $\theta_0 = \theta_\infty = 1/2$ then after lifting the connection on the two-fold cover

$$\mathbb{P}_{\tilde{x}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_x^1; \quad \tilde{x} \mapsto \tilde{x}^2$$

we get a connection $(\tilde{E}_t^0, \tilde{\nabla}_t^0)$ having 6 simple poles at

$$\tilde{x} = 0, \pm 1, \pm \sqrt{t} \text{ and } \infty$$

(see Figure 1).

Those two poles at ramification points $\tilde{x} = 0, \infty$ have now integral exponents and therefore scalar local monodromy $-I$. These singular points are “apparent”, i. e. can be erased by a combination of

- a rational gauge (i. e. birational bundle) transformation,
- the twist by a rank 1 connection.

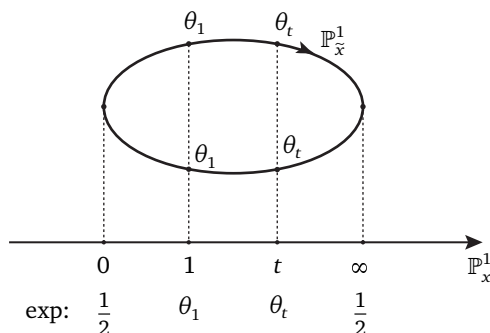


FIG. 1. QUADRATIC TRANSFORMATION'S COVER

This can be done taking into account the deformation, and we get a new deformation $t \mapsto (\tilde{E}_t, \tilde{\nabla}_t)$ of a rank 2 connection with 4 simple poles $\tilde{x} = \pm 1$ and $\pm\sqrt{t}$ on the Riemann sphere $\mathbb{P}_{\tilde{x}}^1$. This new deformation is clearly isomonodromic if the initial deformation was. Taking into account the exponents, we get a *rational two-fold cover*

$$\text{Quad}: \mathcal{M}_{0,4}\left(\frac{1}{2}, \theta_1, \theta_t, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{2:1} \mathcal{M}_{0,4}(\theta_1, \theta_1, \theta_t, \theta_t)$$

between moduli spaces that conjugates isomonodromic foliations. The map Quad is called quadratic transformation of the Painlevé VI equation.

1.2. When exponents satisfy $\theta_0 = \theta_1 = \theta_\infty = 1/2$, we can iterate twice the map (after conveniently permuting the poles) and we get the **quartic transformation**

$$\text{Quad} \circ \text{Quad}: \mathcal{M}_{0,4}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta_t, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{4:1} \mathcal{M}_{0,4}(\theta_t, \theta_t, \theta_t, \theta_t).$$

Finally, if we consider the Picard parameters $\theta_0 = \theta_1 = \theta_t = \theta_\infty = 1/2$ for Painlevé VI equation, we can iterate arbitrary many times the quadratic transformation. There is also a cubic transformation in this case (see [22]).

1.3. For Picard parameters

$$(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

of Painlevé VI equation, one can modify the construction above as follows. Consider now the elliptic two-fold cover ramifying over the 4 poles of (E_t, ∇_t)

$$\phi_t: X_t = \{y^2 = x(x-1)(x-t)\} \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}_x^1; \quad (x, y) \mapsto x$$

and lift-up the connection on the elliptic curve. After birational gauge transformation, we get a holomorphic connection $(\tilde{E}_t, \tilde{\nabla}_t)$ that generically split as the direct sum of two holomorphic connections of rank 1. This means that, for these parameters, Painlevé VI solutions actually parametrize isomonodromic deformations of rank 1 connections over a family of elliptic curves. This allow to solve this very

special element of Painlevé VI family (originally found by Picard) by means of elliptic functions (see [11, 15, 20]). By the way, we get a *birational map*

$$\mathcal{M}_{0,4}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{1,0}$$

that commutes with isomonodromic flow.

1.4. This map has been extended to **Lamé parameters** in [16, 17] as a birational transformation

$$\text{Lamé: } \mathcal{M}_{0,4}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta_\infty\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{1,1}(2\theta_\infty - 1)$$

also commuting with isomonodromic flow (see Figure 2).

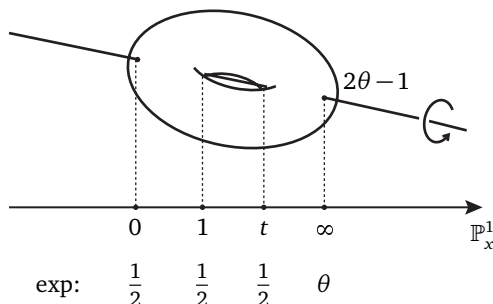


FIG. 2. LAMÉ'S COVER

1.5. In [10], a 2-fold ramified cover commuting with isomonodromic flow

$$\mathcal{M}_{0,6}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{2:1} \mathcal{M}_{2,0}$$

has been constructed by lifting connections on the hyperelliptic cover

$$\phi_{r,s,t}: X_{r,s,t} = \{y^2 = x(x-1)(x-r)(x-s)(x-t)\} \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}_x^1, \quad (x, y) \mapsto x$$

(see Figure 3).

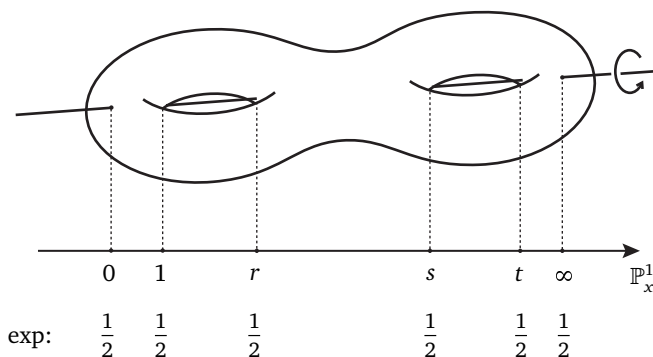


FIG. 3. GENUS 2 COVER

1.6. However, for higher genus $g > 2$ hyperelliptic curve, the similar map

$$\mathcal{M}_{0,2g+2}\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathcal{M}_{g,0}$$

has small image: not only the deformation upstairs is reduced to the hyperelliptic locus (having codimension $g - 2$), but even for a fixed hyperelliptic curve, the image has codimension $2(g - 1)$ in the moduli space of connections.

2. RESULTS

In this note, we classify all “interesting” maps that can be constructed between moduli spaces like above, using ramified covers of curves. Let us explain.

Let (X, D^∇, E, ∇) be a logarithmic rank 2 connections and $\phi: \tilde{X} \rightarrow X$ be a ramified cover. Let D^ϕ denotes the set of critical points of ϕ while D^∇ denotes the set of poles of ∇ ; they will be not disjoint in many cases. Consider now the universal deformation $t \mapsto (X_t, D_t)$ of the marked curve (X, D) where D is the union of D^ϕ and D^∇ . There is a unique local deformation $t \mapsto (X_t, D_t, E_t, \nabla_t, \phi_t)$ where $t \mapsto (X_t, D_t^\nabla, E_t, \nabla_t)$ is isomonodromic, and $t \mapsto (X_t, D_t^\phi, \nabla_t)$ is topologically trivial (we just deform the critical locus D_t^ϕ). Fibers of the map $t \mapsto (X_t, D_t^\nabla)$ are algebraic deformations, so-called Hurwitz families.

The main remark is that the lift to \tilde{X}_t of the connection:

$$t \mapsto (\tilde{E}_t, \tilde{\nabla}_t) := \phi_t^*(E_t, \nabla_t)$$

is isomonodromic along the deformation. By applying rational gauge transformation and twisting with a rank 1 isomonodromic deformation, we may assume that $(\tilde{E}_t, \tilde{\nabla}_t)$ is an isomonodromic deformation of logarithmic \mathfrak{sl}_2 -connexion, free of apparent singular points. In fact, this is possible whenever ∇_t has an essential singular point, i. e. with monodromy. Let \tilde{D}_t be the (reduced) polar divisor of $\tilde{\nabla}_t$ after deleting apparent singular points. Last but not least, assume that

- the connection (E_t, ∇_t) , or equivalently $(\tilde{E}_t, \tilde{\nabla}_t)$, has Zariski dense monodromy,
- the deformation $t \mapsto (\tilde{X}_t, \tilde{D}_t, \tilde{E}_t, \tilde{\nabla}_t)$ induces a locally universal deformation $t \mapsto (\tilde{X}_t, \tilde{D}_t)$ of the marked curve.

These are the so-called “interesting” conditions. The second item means that we get a complete isomonodromic deformation after the construction. We thus get a complete parametrization of a leaf of the isomonodromic foliation. All examples listed in Section 1 are examples of such constructions. It is easy to construct many examples where all conditions but the last one are satisfied. However, the last condition, saying that we get the complete deformation, is so hard to realize that we are able, in Section 3, to classify all examples. This is our main result in this note. Besides the known examples, we have the following three new cases.

2.1. Let $s \mapsto X_s = \{y^2 = x(x-1)(x-s)\}$ the Legendre family of elliptic curves and let $t \mapsto (E_t, \nabla_t)$ an isomonodromic deformation of a rank 2 connection with

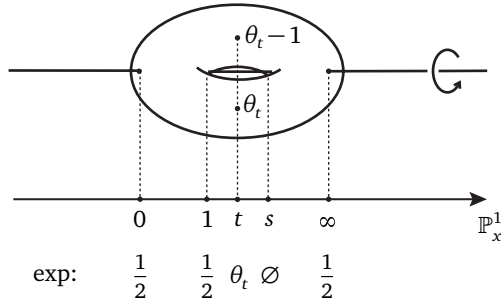


FIG. 4. RULED DEFORMATIONS VIA UNCOMPLETE ELLIPTIC COVER

poles located at $x = 0, 1, t, \infty$. More rigorously, we should say $\tilde{t} \mapsto (E_{\tilde{t}}, \nabla_{\tilde{t}})$ where \tilde{t} belongs to the Teichmüller space, given by the universal cover $T \rightarrow \mathbb{P}_x^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ in this case, and t denotes the projection of \tilde{t} on $\mathbb{P}_x^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Now, assume that exponents of ∇_t take the form

$$(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta, \frac{1}{2}\right).$$

Therefore, after lifting on the elliptic curve, we get a connection with 3 apparent singular points and two copies of the singular point at $x = t$. By gauge transformation, we finally get a connection $(\tilde{E}_{s,t}, \tilde{\nabla}_{s,t})$ with only two simple poles, but to get a \mathfrak{sl}_2 -connection we need to shift one of the two exponents (see Figure 4). We finally get a rational map

$$\mathbb{P}_s^1 \times \mathcal{M}_{0,4}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathcal{M}_{1,2}(\theta, \theta - 1).$$

Each isomonodromic deformation thus obtained is parametrized by a combination of a Painlevé VI solution (variable t) and a rational function (variable s). We get a 2-parameter space of such tame isomonodromic deformations; they form a codimension 2 subset in $\mathcal{M}_{1,2}(\theta, \theta - 1)$, the image of the map above, which is saturated by the isomonodromic foliation. The leaves belonging to this set are ruled surfaces parametrized by a Painlevé transcendent. One should recover the Lamé case of Section 1 by restricting the isomonodromic foliation to the locus $s = t$. We postpone the careful study of this picture to another paper.

2.2. Consider now the family of genus 2 curves given by

$$(s, t) \mapsto X_{s,t} = \{y^2 = x(x-1)(x-s)(x-t_1)(x-t_2)\}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2,$$

together with the hyperelliptic cover (see Figure 5)

$$\phi_{s,t}: X_{s,t} \rightarrow \mathbb{P}_x^1; \quad (x, y) \mapsto x.$$

Let $t \mapsto (E_t, \nabla_t)$ be an isomonodromic deformation of a rank 2 connection on \mathbb{P}_x^1 with poles located at five among the six critical values, namely $x = 0, 1, t_1, t_2, \infty$. Assume that all exponents of ∇_t take the form $\theta_0 = \theta_1 = \theta_{t_1} = \theta_{t_2} = \theta_\infty = 1/2$.

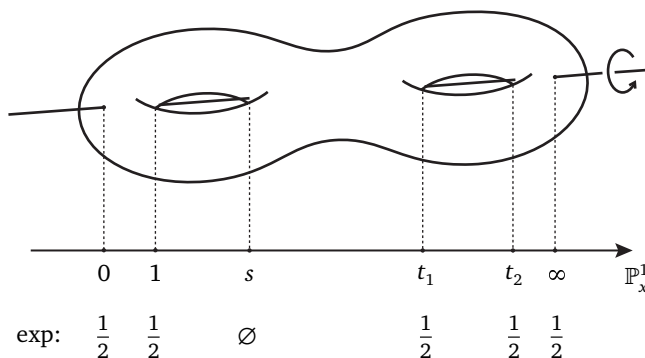


FIG. 5. RULED DEFORMATIONS VIA UNCOMPLETE HYPERELLIPTIC COVER

After lifting the connection to the curve $X_{s,t}$, deleting apparent singular points by gauge transformation, we get a \mathfrak{sl}_2 -connection on $X_{s,t}$ with a single apparent singular point located at $x = \infty$. This provides a rational map

$$\mathbb{P}^1_s \times \mathcal{M}_{0,5}\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(1)$$

conjugating isomonodromic foliations. Here, the only singular point is apparent and it is not possible to delete it. We can just choose to place it at $x = \infty$; it is irrelevant for the deformation. Again, isomonodromic deformations obtained by this way are parametrized by rank 2 Garnier solutions ((t_1, t_2) variables) combined with a rational function of s . Again, the corresponding leaves of the isomonodromic foliation are uniruled and form a codimension 2 set.

2.3. Finally, consider the Legendre family $t_1 \mapsto X_{t_1} = \{y^2 = x(x-1)(x-t_1)\}$ of elliptic curves and let $t = (t_1, t_2) \mapsto (E_t, \nabla_t)$ an isomonodromic deformation of a rank 2 connection with poles located at $x = 0, 1, t_1, t_2, \infty$. Assume that exponents of ∇_t take the form

$$(\theta_0, \theta_1, \theta_{t_1}, \theta_{t_2}, \theta_\infty) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta, \frac{1}{2}\right).$$

After lifting and applying gauge transformation, we get a \mathfrak{sl}_2 -connection on the elliptic curve X_{t_1} with two simple poles over $x = t_2$ having same exponent θ . This gives us a rational map

$$\Phi_\theta : \mathcal{M}_{0,5}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathcal{M}_{1,2}(\theta, \theta)$$

conjugating isomonodromic foliations (see Figure 6). We study this map from the topological (i. e. monodromy) point of view in Section 4 and deduce

Theorem 2.1. *The map Φ_θ is dominant and generically two-to-one.*

In other word, almost all rank 2 logarithmic connections with two poles on an elliptic curve is a pull-back of a rank 2 logarithmic connection on \mathbb{P}^1 ; in particular, such connections are invariant (up to gauge equivalence) under the hyperelliptic involution permuting the two poles. This construction can be thought as inter-

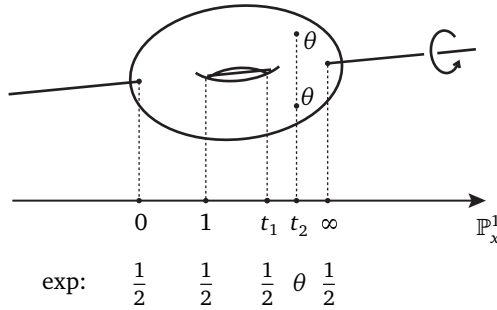


FIG. 6. THE TWO PUNCTURED TORUS

mediate between the genus two case and the Lamé case of Section 1. This is a reminiscence of the hyperelliptic nature of the twice-punctured torus.

2.4. Classification. We prove in Section 3 the following

Theorem 2.2. *Let $t \mapsto (X_t, D_t, E_t, \nabla_t)$ be an isomonodromic deformation of logarithmic \mathfrak{sl}_2 -connections. Let $\phi_t: \tilde{X}_t \rightarrow X_t$ a family of ramified covers. Assume that the pull-back deformation $t \mapsto (\tilde{X}_t, \tilde{D}_t, \tilde{E}_t, \tilde{\nabla}_t)$ after deleting apparent singular points is locally universal, i. e. the corresponding map $t \mapsto (\tilde{X}_t, \tilde{D}_t)$ is locally surjective. In particular, the deformation has dimension $\geq 3 \cdot \text{genus}(\tilde{X}_t) - 3 + \deg(\tilde{D}_t)$. Then we are in one of the following cases.*

- *The monodromy of ∇_t (or equivalently $\tilde{\nabla}_t$) is finite, reducible or dihedral.*
- *The deformation $t \mapsto (X_t, D_t, E_t, \nabla_t)$ is actually trivial, and we get an algebraic isomonodromic deformation by deforming ϕ_t . Up to gauge transformation, we are in the list of Doran [7] or Diarra [5]. In particular, $(X_t, D_t, E_t, \nabla_t)$ is a rigid hypergeometric system ($X_t = \mathbb{P}^1$, $\deg(D_t) = 3$) and $\deg(\phi_t) \leq 18$.*
- *The deformation $t \mapsto (X_t, D_t, E_t, \nabla_t)$ is non trivial, $X_t = \mathbb{P}^1$, $\deg(\phi_t) = 2$ or 4, and we are in one of the constructions described in sections 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 2.1, 2.2 and 2.3.*

2.5. Complement. In the last section, we complete the picture of Section 2.3 when $\theta = 1/2$ by constructing a rational map

$$\Psi: \mathcal{M}_{1,2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathcal{M}_{2,0}$$

that conjugates isomonodromic foliations. In order to explain, consider the “bi-elliptic cover”

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_{t_1, t_2} & \xrightarrow{\pi_2} & X_{t_2} \\ \pi_1 \downarrow & \searrow \phi & \downarrow \phi_2 \\ X_{t_1} & \xrightarrow{\phi_1} & \mathbb{P}_x^1 \end{array}$$

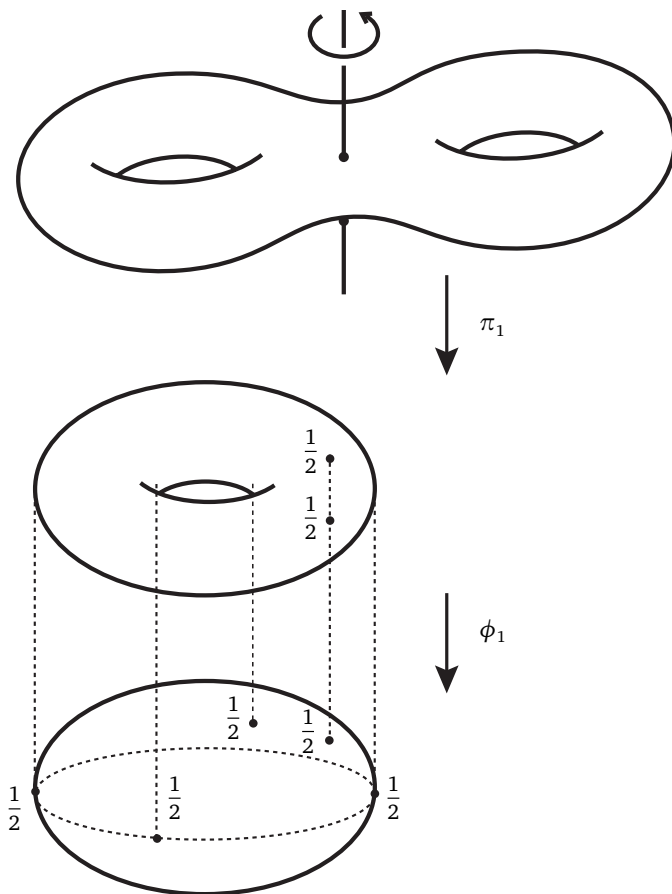


FIG. 7. BI-ELLIPTIC COVER

where $\phi_i: X_i \rightarrow \mathbb{P}_x^1$ is the elliptic two-fold cover branching over $x=0, 1, t_i, \infty$, for $i=1, 2$, and the remaining part of the diagram is the fiber product of ϕ_1 and ϕ_2 . In particular, \tilde{X}_{t_1, t_2} has genus 2 and each $\pi_i: \tilde{X}_{t_1, t_2} \rightarrow X_i$ is a two-fold cover branching over the two points $\phi_i^{-1}(t_j)$ (where $\{i, j\} = \{1, 2\}$). By the way, $\phi: \tilde{X}_{t_1, t_2} \rightarrow \mathbb{P}_x^1$ is a 4-fold cover ramifying over all five points $x=0, 1, t_1, t_2, \infty$.

The map Φ_θ of Section 2.3 comes from the elliptic covering π_1 , while the map Ψ above, from ϕ_1 in the bi-elliptic diagram. In Theorem 5.2, we characterize the image of Ψ and

$$\Psi \circ \Phi_{\frac{1}{2}}: \mathcal{M}_{0,5}\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathcal{M}_{2,0}$$

in terms of the monodromy representation. Mind that, contrary to the previous constructions, we do not get complete isomonodromic deformations (of holomorphic \mathfrak{sl}_2 -connections on genus 2 curves) but isomonodromic deformations over the codimension 1 bi-elliptic locus in the moduli space $M_{2,0}$.

This last construction was inspired by [18], where isomonodromic deformations of dihedral logarithmic \mathfrak{sl}_2 -connections are constructed in $\mathcal{M}_{1,2}(1/2, 1/2)$ as direct image of rank 1 holomorphic connections on the bi-elliptic cover X_{t_1, t_2} .

3. CLASSIFICATION OF COVERS

Here, we follow ideas of [5, 6], replacing connections by their underlying orbifold structure à la Poincaré.

Let $\phi: \tilde{X} \rightarrow X$ be a ramified cover where X is a genus g hyperbolic orbifold with n singularities of order $2 \leq \nu_1 \leq \dots \leq \nu_n \leq \infty$ (i.e. having angle $\alpha_i = 2\pi/\nu_i$). Pulling-back by ϕ , we get a **branched** orbifold structure on \tilde{X} : orbifold points have angle $\tilde{\alpha} = 2\pi k/\nu$ where k is the branching order of ϕ (i.e. $\phi \sim z^k$) and

- $\nu = \nu_i$ over i^{th} orbifold point of X ,
- $\nu = 1$ over a regular point.

Denote by \tilde{g} the genus of \tilde{X} , and by b the number of branching points on \tilde{X} .

The volume of X with respect to the orbifold metric is given by

$$\text{aire}(X) = 2\pi(2g-2) + \sum_{i=1}^n n(2\pi - \alpha_i);$$

we get the analogous formula for \tilde{X} with respect to the pull-back metric (even if α_i need not be $< 2\pi$) and $\text{aire}(\tilde{X}) = d \cdot \text{aire}(X)$ where $d = \deg(\phi)$. This yields (after division by 2π)

$$d \cdot \left(2g - 2 + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{\nu_i} \right) \right) \leq 2\tilde{g} - 2 + \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \left(1 - \frac{k_j}{\nu_{i(j)}} \right) - b. \quad (1)$$

If branching points are simple (with branching order 2) then we get an equality.

We want to classify cases for which, by deforming simultaneously X and ϕ , we get the local universal deformation of \tilde{X} . The dimension of the deformation space of X is given by $3g - 3 + n \geq 0$ (positivity follows from hyperbolicity). For \tilde{X} , since we are more involved in the differential equation than in the orbifold structure, we do not take into account the branching points in the deformation, and dimension is given by $3\tilde{g} - 3 + \tilde{n}$. The dimension of deformation of the ramified cover ϕ is given by the number of “free” critical values (outside orbifold points) and thus bounded by b . We thus want

$$3g - 3 + n + b \geq 3\tilde{g} - 3 + \tilde{n}. \quad (2)$$

On the other hand, it is reasonable to ask

$$0 < 3g - 3 + n \leq 3\tilde{g} - 3 + \tilde{n} \quad (3)$$

first because equality $3g - 3 + n = 0$ corresponds (in the hyperbolic case) to hypergeometric $(g, n) = (0, 3)$ that was treated in [5, 6]; right inequality just tells us that we are looking for reductions of isomonodromic equations. Throughout the paper, we will also ask $d \geq 2$ not to deal with trivial covers.

Let us first roughly reduce (1) combined with (2). In view of this, let us denote by $\nu = \nu_n$ the maximum orbifold order (that might be infinite). Then

$$\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) \geq \frac{n-1}{2} + \left(1 - \frac{1}{\nu}\right).$$

By the same way, we have

$$\sum_{j=1}^{\tilde{n}} \left(1 - \frac{k_j}{\nu_{i(j)}}\right) \leq \tilde{n} \left(1 - \frac{1}{\nu}\right).$$

We thus get

$$(2d-3)g + \frac{d-2}{2}n + \tilde{g} + \frac{\tilde{n}}{\nu} \leq d \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\nu}\right) - 2. \quad (4)$$

In fact, we have implicitly assumed $n \neq 0$. In the case $n = 0$, we automatically get $\tilde{n} = 0$ and inequality becomes $(2d-3)g + \tilde{g} \leq 2d-2$; however, we must have $2 \leq g \leq \tilde{g}$ (hyperbolicity and growth of genus by ramified covers) that gives us $(2d-2)g \leq 2d-2$, contradiction.

3.1. First bounds. From the classical Riemann — Hurwitz formula, we necessarily get $\tilde{g} \geq g$. After (4), we thus get

$$(2d-2)g \leq d \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\nu}\right) - 2 \leq 2d-2.$$

Therefore, we promptly deduce $g \leq 1$. But when $g = 1$, the rough inequality (4) must be an equality, yielding $g = \tilde{g} = 1$ and thus (still following Riemann — Hurwitz formula) $n = \tilde{n} = 0$ and $b = 0$. This case is however non hyperbolic. *We can therefore assume $g = 0$ from now on.* In particular, $n \geq 4$ from (3), and in case $n = 4$, hyperbolicity implies $\nu \geq 3$.

We can also assume that either $\nu \leq d$, or $\nu = \infty$. Indeed, as soon as $\nu > d$, all points of the fiber $\phi^{-1}(p_n)$ are orbifold; we can therefore modify the orbifold structure of X , replacing ν by ∞ , without modifying the numbers n and \tilde{n} of orbifold points, and thus without changing dimensions involved in our problem.

Assume $\nu = \infty$. Then (4) gives

$$\frac{d-2}{2}n + \tilde{g} \leq \frac{3d}{2} - 2$$

and thus

$$d \leq 2 \frac{n-2-\tilde{g}}{n-3} \leq 2 \frac{n-2}{n-3}.$$

Since $d \geq 2$, we promptly deduce $\tilde{g} \leq 1$, and more precisely, we are in one of the following cases:

- $d = 2$, $\tilde{g} \leq 1$ and n arbitrary,
- $d = 3$, $\tilde{g} = 0$ and $n = 4$ or 5 ,
- $d = 4$, $\tilde{g} = 0$ and $n = 4$.

In particular, we get $d \leq 4$ in this case.

Assume $\nu = 2$; in this case, $n \geq 5$ because of hyperbolicity. Then (4) gives

$$d\left(\frac{n}{2} - 2\right) \leq n - 2 - \tilde{g} - \frac{\tilde{n}}{2} \leq n - 2 - \tilde{g} - \frac{\tilde{n}}{3} \leq \frac{2n}{3} - 2$$

where right inequality follows from (3) $3\tilde{g} + \tilde{n} \geq n$. This gives us

$$d \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{n-3}{n-4} < 3$$

(because $n \geq 5$) and therefore $d = 2$. Taking into account (4), we get

$$\tilde{g} + \frac{\tilde{n}}{2} \leq 2.$$

This gives us the following possibilities:

- $\tilde{g} = 2$ and $\tilde{n} = 0$,
- $\tilde{g} = 1$ and $\tilde{n} \leq 2$,
- $\tilde{g} = 0$ and $\tilde{n} \leq 4$.

Assume finally $3 \leq \nu \leq d$. Then (4) yields

$$d\left(\frac{n}{2} - 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}\right) \leq n - 2 - \tilde{g} - \frac{\tilde{n}}{\nu} \leq n - 2 - \frac{n}{\nu} - \frac{\nu-3}{\nu}\tilde{g}$$

where right inequality again follows from (3) $3\tilde{g} + \tilde{n} \geq n$. We deduce

$$d \leq 2 \frac{(n-2)\nu - n}{(n-3)\nu - 2}.$$

For each $n > 4$, right-hand-side is an increasing function of ν with asymptotic

$$2 \frac{n-2}{n-3} \leq 3$$

when $\nu \rightarrow \infty$. Since $\nu < \infty$ here, we get $d < 3$ and thus $d = 2$; by the way, $\nu \leq d \leq 2$ and this case is empty. For $n = 4$, right-hand-side is 4 whatever is the value of ν . Taking into account (4) for $n = 4$ and $d = 3, 4$, we get

- $\tilde{g} = 1$, $\tilde{n} = 1$ (and $\nu = 3$),
- $\tilde{g} = 0$ and $\tilde{n} = 4$.

3.2. Degree $d = 2$. Here, ϕ branches over $2\tilde{g} + 2$ points; recall that $\tilde{g} \leq 2$. At any orbifold point p_i , except when $\nu_i = 2$ and ϕ branches over p_i , we can assume $\nu_i = \infty$. In other words, we have say

- n_1 points with $\nu_i = 2$ over which ϕ branches,
- $n_2 = n - n_1$ points with $\nu_i = \infty$ (over which ϕ needs not branching).

In the case $\nu = 2$, i. e. $n = n_1$ and $n_2 = 0$, we have already seen that $\tilde{g} \leq 2$, and thus $n \leq 2g + 2 \leq 6$. By hyperbolicity, we must have $n \geq 5$ and we get only two possibilities: X is an orbifold with 5 or 6 conical points $\nu_i = 2$ and $\phi: \tilde{X} \rightarrow X$ is a genus $\tilde{g} = 2$ branching over all conical points. **We get examples of sections 1.5 and 2.2 respectively.**

Let us now assume $n_2 \neq 0$ and thus $\nu = \infty$. Coming back to (1) more carefully, together with (2), we get

$$n_1 + 2n_2 + \tilde{g} \leq 2 + n$$

but since $n = n_1 + n_2$, we finally get

$$n_2 + \tilde{g} \leq 2.$$

Using hyperbolicity assumption (and $n \geq 3$), we find the following solutions:

- $\tilde{g} = 1$, $n_2 = 1$ and $3 \leq n_1 \leq 4$,
- $\tilde{g} = 0$, $n_2 = 2$ and $n_1 = 2$.

In the first case, we decompose

- $n_1 = 4$, ϕ branches precisely over these 4 points and $\tilde{n} = 2$,
- $n_1 = 3$, ϕ branches over these 3 points and one free, and $\tilde{n} = 2$,
- $n_1 = 3$, ϕ branches over 4 orbifold points and $\tilde{n} = 1$.

We respectively get examples of sections 2.3, 2.1 and 1.4. In the second case, ϕ branches over the two orbifold points of order 2 and $\tilde{n} = 4$ and we get example of Section 1.1.

3.3. Degree $d = 3$. We can assume orbifold points of 3 types:

- $\nu_i = 2$ and ϕ branches at the order 2 over this point; therefore, the preimage consists in one regular point (critical for ϕ) and a copy of the orbifold point.
- $\nu_i = 3$ and ϕ branches at order 3 over this point; therefore, the preimage consists in one regular point (critical for ϕ).
- $\nu_i = \infty$ and ϕ is arbitrary over this point; the preimage consists in 1, 2 or 3 copies of this point.

Denote by n_2 , n_3 and n_∞ the number of these points respectively, $n_2 + n_3 + n_\infty = n$. A combination of (1) together with (2) yields (with above notations)

$$\tilde{g} + n + n_\infty = \tilde{g} + n_2 + n_3 + 2n_\infty \leq 4$$

This gives us $n = 4$ and $\tilde{g} = n_\infty = 0$. But in this case, the only orbifold points up-stairs have order 2 and there are at most 4 such points. This contradict hyperbolicity assumption.

3.4. Degree $d = 4$. We can assume orbifold orders of 4 types:

- $\nu_i = 2$ and ϕ branches at least once with order 2 over this point; then the preimage consists of one regular point (critical for ϕ) and either a second one, or two copies of the orbifold point.
- $\nu_i = 3$ and ϕ branches with order 3 over this point; then the preimage consist consists in one regular point (critical for ϕ) and a copy of the orbifold point.
- $\nu_i = 4$ and ϕ branches with order 4 over this point; then the preimage consist consists in one regular point (critical for ϕ).
- $\nu_i = \infty$ and ϕ is arbitrary over this point; therefore, the preimage consists in 1, 2, 3 or 4 copies of this point.

Denote by n_2 , n_3 , n_4 and n_∞ the number of these points respectively,

$$n_2 + n_3 + n_4 + n_\infty = n.$$

A combination of (1) together with (2) yields (with above notations)

$$\tilde{g} + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 3n_\infty + \frac{\tilde{n}_2}{2} \leq 6$$

(here, \tilde{n}_2 is the number of orbifold points of \tilde{X} over the n_2 points of order 2). By hyperbolicity, we get $n \geq 4$ and, when $n = 4$, at least one of the orbifold points is not of minimal order 2, yielding $n + n_2 + n_3 + n_4 \geq 5$.

Assume first $n_\infty \neq 0$; then, inequalities allow the only possibility $n = 4$ with $(n_2, n_3, n_4, n_\infty) = (3, 0, 0, 1)$, $\tilde{g} = 0$ and $\tilde{n}_2 = 0$. We get the quartic transformation for Painlevé VI (see Section 1.2).

Let us now assume $n_\infty = 0$. Recall that we want $3\tilde{g} - 3 + \tilde{n} = 3\tilde{g} - 3 + \tilde{n}_2 + n_3 \geq 1$ if $n = 4$ and ≥ 2 if $n \geq 5$. From these inequalities, the only possibility is $n = 4$ with $(n_2, n_3, n_4, n_\infty) = (3, 1, 0, 0)$, $\tilde{g} = 1$ and $\tilde{n}_2 = 0$. The covering ϕ branches only over the 4 orbifold points, is totally ramified at the order 2 over the 3 points of order 2 and has a single order 3 branching point over the point of orbifold order 3. Its monodromy, taking values into the symmetric group Σ_4 , is generated by 3 double-transpositions $(ij)(kl)$, $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, whose composition has order 3. However, in Σ_4 , double-transpositions form a group (together with the identity) and cannot generate an order 3 element: such a cover does not exist.

4. FROM THE FIVE-PUNCTURED SPHERE TO THE TWICE-PUNCTURED TORUS

Fix distinct points $0, 1, t, \lambda, \infty \in \mathbb{P}^1$, and consider the elliptic cover

$$\phi: X_\lambda := \{y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \rightarrow \mathbb{P}_x^1, \quad (x, y) \mapsto x;$$

denote by $\{t_1, t_2\} := \phi^{-1}(t)$ the preimage of the fifth point (mind that we change notations). The orbifold fundamental group of $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, t, \lambda, \infty\}$ is defined by

$$\Gamma := \langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_t, \gamma_\lambda, \gamma_\infty \mid \gamma_0\gamma_1\gamma_t\gamma_\lambda\gamma_\infty = \gamma_0^2 = \gamma_1^2 = \gamma_\lambda^2 = \gamma_\infty^2 = 1 \rangle.$$

On the other hand, the fundamental group of the twice punctured torus $X_\lambda \setminus \{t_1, t_2\}$ is given by

$$\tilde{\Gamma} := \langle \alpha, \beta, \delta_1, \delta_2 \mid \alpha\beta = \delta_1\beta\alpha\delta_2 \rangle.$$

The elliptic cover induces a natural monomorphism $\phi_*: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ identifying $\tilde{\Gamma}$ with an index two subgroup of Γ : the subgroup generated by γ_t and words of even length in letters $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\lambda, \gamma_\infty$. In fact, a careful study of the topological cover yields

Lemma 4.1. *The morphism ϕ_* is defined by*

$$\begin{cases} \phi_*(\alpha) = \tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_t \cdot \tilde{\gamma}_\lambda, \\ \phi_*(\beta) = \tilde{\gamma}_\lambda \cdot \tilde{\gamma}_\infty, \\ \phi_*(\delta_1) = \tilde{\gamma}_t, \\ \phi_*(\delta_2) = \tilde{\gamma}_\infty \cdot \gamma_t \cdot \gamma_\infty^{-1}. \end{cases}$$

One easily check the compatibility between relations defining Γ and $\tilde{\Gamma}$.

Proof. If $p \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, t, \lambda, \infty\}$ denotes the base point used to compute the fundamental group on the sphere, denote by \tilde{p} and \tilde{p}' the two lifts on the elliptic curve. For $i = 0, 1, \lambda, \infty$, the loop γ_i lifts as paths (half loops)

- $\tilde{\gamma}_i$ from \tilde{p} to \tilde{p}' ,
- $\tilde{\gamma}'_i$ from \tilde{p}' to \tilde{p} .

On the other hand, the loop γ_t lifts as loops

- $\tilde{\gamma}_t$ based at \tilde{p} ,
- $\tilde{\gamma}'_t$ based at \tilde{p}' .

Then, carefully drawing the picture, we get

$$\begin{cases} \alpha = \tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}'_t \cdot \tilde{\gamma}'_\lambda, \\ \beta = \tilde{\gamma}_\lambda \cdot \tilde{\gamma}'_\infty, \\ \delta_1 = \tilde{\gamma}_t, \\ \delta_2 = \tilde{\gamma}_\infty \cdot \gamma'_t \cdot \gamma_\infty^{-1}. \end{cases}$$

We check that these loops indeed satisfy $\alpha\beta = \delta_1\beta\alpha\delta_2$ by using relations

$$\tilde{\gamma}_i \cdot \tilde{\gamma}'_i = 1 \quad \text{for } i = 0, 1, \lambda, \infty$$

and those which lift as $\gamma_0 \circ \gamma_1 \circ \gamma_t \circ \gamma_\lambda \circ \gamma_\infty = 1$ namely

$$\tilde{\gamma}_0 \circ \tilde{\gamma}'_1 \circ \tilde{\gamma}_t \circ \tilde{\gamma}_\lambda \circ \tilde{\gamma}'_\infty = 1 \quad \text{and} \quad \tilde{\gamma}'_0 \circ \tilde{\gamma}_1 \circ \tilde{\gamma}'_t \circ \tilde{\gamma}'_\lambda \circ \tilde{\gamma}_\infty = 1.$$

We get the result by projection on \mathbb{P}_X^1 . □

Lemma 4.2. *The unique elliptic involution of X_{t_1} that permutes t_1 and t_2 acts as follows on the fundamental group:*

$$\alpha \leftrightarrow \alpha^{-1}, \quad \beta \leftrightarrow \beta^{-1}, \quad \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2.$$

We note that the relation $\alpha\beta = \delta_1\beta\alpha\delta_2$ is indeed invariant by the involution.

Proof. We have to take care that the base point \tilde{p} is not fixed. In fact, the involution permutes \tilde{p} and \tilde{p}' and acts on γ_i lifts as follows

$$\tilde{\gamma}_i \leftrightarrow \tilde{\gamma}'_i \quad \text{for } i = 0, 1, t, \lambda, \infty.$$

In particular, if we denote

$$\begin{cases} \alpha' = \tilde{\gamma}'_1 \cdot \tilde{\gamma}_t \cdot \tilde{\gamma}_\lambda, \\ \beta' = \tilde{\gamma}'_\lambda \cdot \tilde{\gamma}_\infty \end{cases}$$

then involution acts on these loops as

$$\alpha \leftrightarrow \alpha' \quad \text{and} \quad \beta \leftrightarrow \beta'.$$

We bring back these new loops to the base point \tilde{p} by conjugating (for instance) with $\tilde{\gamma}_\infty$, which gives us

$$\alpha \leftrightarrow \tilde{\gamma}_\infty \cdot \alpha' \cdot \tilde{\gamma}_\infty^{-1}, \quad \beta \leftrightarrow \tilde{\gamma}_\infty \cdot \beta' \cdot \tilde{\gamma}_\infty^{-1}, \quad \tilde{\gamma}_t \leftrightarrow \tilde{\gamma}_\infty \cdot \tilde{\gamma}'_t \cdot \tilde{\gamma}_\infty^{-1}.$$

We thus get $\delta_1 \leftrightarrow \delta_2$ and, by a direct computation, using relations between $\tilde{\gamma}_i$ and $\tilde{\gamma}'_i$, we check that $\alpha \leftrightarrow \alpha^{-1}$ and $\beta \leftrightarrow \beta^{-1}$. □

In order to prove Theorem 2.1, it is enough to prove that the map Φ_θ is dominant, generically two-to-one. By the Riemann — Hilbert correspondance, it is equivalent to work with the corresponding spaces of monodromy representations. Let us denote by \mathcal{R}_θ the space of monodromy representations for $\mathcal{M}_{0,5}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta, \frac{1}{2})$:

$$\mathcal{R}_\theta := \left\{ (M_0, M_1, M_t, M_\lambda, M_\infty) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^5; \begin{array}{l} M_0 M_1 M_t M_\lambda M_\infty = I \\ \mathrm{tr}(M_i) = 0 \quad \text{for } i = 0, 1, \lambda, \infty \\ \mathrm{tr}(M_t) = 2 \cos(\pi\theta) \end{array} \right\} / \sim,$$

where the equivalence relation \sim is the diagonal adjoint action by $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ on quintuples. Recall that, in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, we have

$$\mathrm{tr}(M) = 0 \iff M^2 = -I$$

and the corresponding $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ -representations are actually representations

$$\Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

On the other hand, consider the space $\tilde{\mathcal{R}}_\theta$ of monodromy representations for the space $\mathcal{M}_{1,2}(\theta, \theta)$

$$\tilde{\mathcal{R}}_\theta := \left\{ (A, B, D_1, D_2) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^4; \begin{array}{l} AB = D_1 B A D_2 \\ \mathrm{tr}(D_1) = \mathrm{tr}(D_2) = 2 \cos(\pi\theta) \end{array} \right\} / \sim.$$

The natural map $\phi_1^*: \mathcal{R}_\theta \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}_\theta$ induced by ϕ_1 is described by

Corollary 4.3. *We have $\phi_1^*(M_0, M_1, M_t, M_\lambda, M_\infty) = (A, B, D_1, D_2)$ with*

$$\begin{cases} A = M_1 M_t M_\lambda, \\ B = M_\lambda M_\infty, \\ D_1 = M_t, \\ D_2 = M_\infty M_t M_\infty^{-1}. \end{cases}$$

Proof. From Lemma 4.1, we know that $AB = \pm D_1 B A D_2$; we just have to check that we have the right sign, and thus a representation

$$\pi_1(X_\lambda \setminus \{t_1, t_2\}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

and we must have $\mathrm{tr}(D_1) = \mathrm{tr}(D_2) = 2 \cos(\pi\theta)$ ($= \mathrm{tr}(M_t)$). □

We now want to prove that the map $\phi_1^*: \mathcal{R}_\theta \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}_\theta$ just defined is generically one-to-one. This follows from the

Theorem 4.4. *Let $A, B, D_1, D_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ such that*

$$AB = D_1 B A D_2 \quad \text{and} \quad D_1, D_2 \neq \pm I.$$

Assume moreover that the subgroup $\langle A, B \rangle$ generated by A and B is irreducible, i. e. without common eigendirection. Then there is a matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, unique up to a sign, such that

$$MAM^{-1} = A^{-1}, \quad MBM^{-1} = B^{-1} \quad \text{and} \quad MD_1M^{-1} = D_2.$$

Moreover, $M^2 = -I$ and $(A, B, D_1, D_2) = \phi_1^*(M_0, M_1, M_t, M_\lambda, M_\infty)$ for

$$\begin{cases} M_0 = -AM, \\ M_1 = ABD_2^{-1}M, \\ M_t = D_1, \\ M_\lambda = -BM, \\ M_\infty = M. \end{cases}$$

First recall well-known results concerning $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Lemma 4.5. *Two matrices $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ generate a reducible group if, and only if, $\mathrm{tr}[A, B] = 2$ where $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ is the commutator.*

Proof. If A and B have a common eigenvector, then we can assume $\langle A, B \rangle$ is triangular and the commutator will be a unipotent matrix, thus having trace 2. Conversely, assume that A and B have no common eigenvector. Therefore, an eigenvector v for AB will not be eigenvector for A or for B . If $ABv = \gamma v$, then in the base $(v, -\gamma Bv)$, matrices take the form

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1/\gamma \\ -\gamma & b \end{pmatrix},$$

where $a = \mathrm{tr}(A)$ and $b = \mathrm{tr}(B)$. We check that

$$[A, B] = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + \gamma^2 - abc & \gamma^{-2}(a - b\gamma) \\ a - b\gamma^{-1} & \gamma^{-2} \end{pmatrix}$$

and thus

$$\mathrm{tr}([A, B]) = a^2 + b^2 + c^2 - abc - 2, \quad c = \gamma + \gamma^{-1} = \mathrm{tr}(AB).$$

Finally, these matrices A and B have a common eigenvector if, and only if,

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc - 2 = 2. \quad \square$$

Lemma 4.6. *Let $A, B, A', B' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ and assume $\mathrm{tr}[A, B] \neq 2$. There exists $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ such that $MAM^{-1} = A'$ and $MBM^{-1} = B'$ if, and only if, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A')$, $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B')$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A'B')$.*

Proof. This is a consequence of formulae from the preceding proof. \square

Corollary 4.7. *If $\mathrm{tr}[A, B] \neq 2$, then there exists $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, unique up to a sign, such that $MAM^{-1} = A^{-1}$ and $MBM^{-1} = B^{-1}$. Moreover, $M^2 = -I$.*

Proof. It suffices to notice that $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{-1})$ and $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ for all matrices $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. We deduce, under our assumptions, that

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{-1}), \quad \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B^{-1}), \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A^{-1}B^{-1}).$$

Therefore, there exists an M satisfying the first part of the statement. But M^2 has to commute to A and B . Thus M^2 must fix all eigendirections of all elements of the group $\langle A, B \rangle$. There are at least three distinct such directions and M^2 is projective-ly the identity: $M^2 = \pm I$. But $M = \pm I$ is impossible since $MAM^{-1} = A^{-1} \neq A$ ($A \neq \pm I$

otherwise $\langle A, B \rangle$ would be reducible). Thus $M^2 \neq I$ and $M^2 = -I$. If matrices A and B are given in the normal form like in the proof above, then M is given by

$$M = \pm \begin{pmatrix} \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} & \frac{a - b\gamma}{2\gamma} \\ \frac{a\gamma - b}{2} & -\frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

□

Proof of Theorem 4.4. We want now to prove that the unique (up to a sign) matrix M satisfying MAM^{-1} and MBM^{-1} also satisfy $MD_1M^{-1} = D_2$ and thus $MD_2M^{-1} = D_1$ ($M^2 = -I$). From relation $AB = D_1BAD_2$, this is equivalent to

$$AB = D_1BAMD_1M^{-1} \Leftrightarrow (BAMD_1)^2 = -I \Leftrightarrow \text{tr}(BAMD_1) = 0.$$

Rewrite the relation $AB = D_1BAD_2$ into the form

$$[A, B] = D_1BAD_2A^{-1}B^{-1} = D_1D'_2 \quad \text{with } D'_2 = (BA)D_2(BA)^{-1}.$$

Note that

$$(BAM)^2 = BAM BAM = BAB^{-1}A^{-1}M^2 = -BAB^{-1}A^{-1} = -[A, B]^{-1}$$

and therefore $(BAM)^2D_1 = -(D'_2)^{-1}$ and $\text{tr}((BAM)^2D_1) + \text{tr}(D_1) = 0$. Now, recall that in $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ we have universal relations

$$\text{tr}(M_1M_2) + \text{tr}(M_1M_2^{-1}) = \text{tr}(M_1) \cdot \text{tr}(M_2).$$

Applying this to $M_1 = BAM$ and $M_2 = BAMD_1$, we get

$$0 = \text{tr}((BAM)^2D_1) + \text{tr}(D_1) = \text{tr}(BAMD_1) \cdot \text{tr}(BAM).$$

But, $\text{tr}(BAM) \neq 0$ otherwise $(BAM)^2 = -[A, B]^{-1} = -I$, i. e. $[A, B] = I$, that would contradict irreducibility. Thus $\text{tr}(BAMD_1) = 0$, what we wanted to prove. Finally, we easily check that matrices M_i given by the statement are indeed inverting preceding formulae of Lemma 4.3 by using relation $AB = D_1BAD_2$ and properties of M . □

5. BIELLIPTIC COVERS

Let us now assume $\theta = 0$ and rewrite

$$\tilde{\mathcal{H}}_{1/2} := \left\{ (A, B, C_1, C_2) \in \text{SL}_2(\mathbb{C})^4; \quad \begin{array}{l} [A, B] = C_1C_2 \\ \text{tr}(C_1) = \text{tr}(C_2) = 0 \end{array} \right\} / \sim$$

where we have modified generators of the fundamental group for convenience:

$$C_1 = D_1 \quad \text{and} \quad C_2 = (BA)^{-1}D_2(BA).$$

This is the monodromy space of those connections on the elliptic curve X_λ having logarithmic poles with exponent $1/2$ at t_1 and t_2 . Let us now consider the 2-fold ramified cover $\pi: \tilde{X}_{t,\lambda} \rightarrow X_\lambda$ ramifying over t_1 and t_2 and let us study the

associated map

$$\pi^*: \mathcal{M}_{1,2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathcal{M}_{2,0}$$

on the monodromy side of the Riemann — Hilbert correspondence. Denote by

$$\mathcal{R}' := \{(A_1, B_1, A_1, B_2) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^4; [A_1, B_1][A_2, B_2] = I\} / \sim$$

the space of monodromy representations associated to $\mathcal{M}_{2,0}$. Then we get a map $\pi^*: \tilde{\mathcal{R}}_{1/2} \rightarrow \mathcal{R}'$ which is given by (see also [18]).

Lemma 5.1. *We have $\pi^*(A, B, C_1, C_2) = (A_1, B_1, A_1, B_2)$ with*

$$\begin{cases} A_1 = A, \\ B_1 = B, \\ A_2 = C_1^{-1}AC_1, \\ B_2 = C_1^{-1}BC_1. \end{cases}$$

Conversely, we can characterize the image of π^* as follows

Theorem 5.2. *Let $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ such that*

$$[A_1, B_1][A_2, B_2] = I.$$

Assume that there exists a matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ such that

$$MA_1M^{-1} = A_2, \quad MB_1M^{-1} = B_2, \quad M^2 = -I.$$

Then $(A_1, B_1, A_2, B_2) = \pi^(A, B, C_1, C_2)$ for*

$$\begin{cases} A = A_1, \\ B = B_1, \\ C_1 = M, \\ C_2 = M^{-1}[A_1, B_1]. \end{cases}$$

If moreover $\mathrm{tr}[A_1, B_1] \neq 2$ then (A_1, B_1, A_2, B_2) is in the image of $\pi \circ \phi$, i. e. comes from a representation of the 5-punctured sphere.

Remark 5.3. From Lemma 4.6, we see that existence of M is almost equivalent to $\mathrm{tr}(A_1) = \mathrm{tr}(A_2) =: a$ and $\mathrm{tr}(B_1) = \mathrm{tr}(B_2) =: b$. To apply the Lemma, we just need to prove that the two traces $c_i := A_i B_i$ coincide for $i = 1, 2$. But the relation $[A_1, B_1][A_2, B_2] = I$ implies that the two commutators are inverse to each other, and thus share the same trace. By the commutator trace formula in the proof of Lemma 4.5, we get $(c_1 - c_2)(c_1 + c_2 - ab) = 0$. The image of π^* has codimension 2 in \mathcal{R}' . We also see that generic fibers of π^* consist in 2 points.

Remark 5.4. If we fix A_1 and B_1 generic, we obtain:

- (1) the set $\{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}); M^2 = -I \text{ and } M \text{ conjugates } [A_1, B_1] \text{ to its inverse}\}$ has dimension 1,
- (2) the set $\{A_1, B_1, M^{-1}.A_1.M, M^{-1}.B_1.M\}$ has also dimension 1 up to conjugacy.

Thus we can freely choose (A_1, B_1) in the image of π^* .

REFERENCES

- [1] Andreev F. V., Kitaev A. V. Transformations $RS_4^2(3)$ of the ranks ≤ 4 and algebraic solutions of the sixth Painlevé equation // *Comm. Math. Phys.* 2002. Vol. 228, № 1. P. 151–176.
- [2] Boalch P. Towards a non-linear Schwarz's list // *The many facets of geometry*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2010. P. 210–236.
- [3] Bolibrukh A. A. The Riemann — Hilbert problem // *Russian Math. Surveys.* 1990. Vol. 45, № 2. P. 1–58.
- [4] Cantat S., Loray F. Dynamics on character varieties and Malgrange irreducibility of Painlevé VI equation // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 2009. Vol. 59, № 7. P. 2927–2978.
- [5] Diarra K. Construction et classification de certaines solutions algébriques des systèmes de Garnier // *Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.)*. 2013. Vol. 44, № 1. P. 129–154.
- [6] Diarra K. Solutions algébriques partielles des équations isomonodromiques sur les courbes de genre 2 // *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*. 2015. Vol. 24, № 1. P. 39–54.
- [7] Doran C. F. Algebraic and geometric isomonodromic deformations // *J. Diff. Geom.* 2001. Vol. 59, № 1. P. 33–85.
- [8] Dubrovin B., Mazzocco M. On the reductions and classical solutions of the Schlesinger equations // *Differential equations and quantum groups*. Zürich: Eur. Math. Soc., 2007. (IRMA Lect. Math. Theor. Phys.; Vol. 9). P. 157–187.
- [9] Heu V. Universal isomonodromic deformations of meromorphic rank 2 connections on curves // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 2010. Vol. 60, № 2. P. 515–549.
- [10] Heu V., Loray F. Flat rank 2 vector bundles on genus 2 curves. arXiv:1401.2449 [math.AG].
- [11] Hitchin N. Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations // *J. Diff. Geom.* 1995. Vol. 42, № 1. P. 30–112.
- [12] Kitaev A. V. Quadratic transformations for the sixth Painlevé equation // *Lett. Math. Phys.* 1991. Vol. 21, № 2. P. 105–111.
- [13] Krichever I. M. Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations // *Mosc. Math. J.* 2002. Vol. 2, № 4. P. 717–752.
- [14] Lisovsky O., Tykhyy Y. Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. Preprint, <http://arxiv.org/abs/0809.4873v2> (2008).
- [15] Loray F., van der Put M., Ulmer F. The Lamé family of connections on the projective line // *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*. 2008. Vol. 17, № 2. P. 371–409.
- [16] Loray F. Okamoto symmetry of Painlevé VI equation and isomonodromic deformation of Lamé connections // *Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies*. Kyoto: Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), 2007. (RIMS Kôkyûroku Bessatsu; Vol. B2). P. 129–136.
- [17] Loray F. Isomonodromic deformation of Lamé connections, Painlevé VI equation and Okamoto symmetry. arXiv:1410.4976 [math.AG] (2014).
- [18] Machu F.-X. Monodromy of a class of logarithmic connections on an elliptic curve // *SIGMA*. 2007. Vol. 3. Paper 082.
- [19] Manin Yu. I. Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve and mirror of \mathbb{P}^2 // *Geometry of differential equations*. Providence, RI: AMS, 1998. (AMS Transl. Ser. 2; Vol. 186). P. 131–151.
- [20] Mazzocco M. Picard and Chazy solutions to the Painlevé VI equation // *Math. Ann.* 2001. Vol. 321. P. 157–195.
- [21] Mazzocco M. The geometry of the classical solutions of the Garnier systems // *Int. Math. Res. Not.* 2002. № 12. P. 613–646.
- [22] Mazzocco M., Vidunas R. Cubic and quartic transformations of the sixth Painlevé equation in terms of Riemann — Hilbert correspondence // *Stud. Appl. Math.* 2013. Vol. 130, № 1. P. 17–48.
- [23] Okamoto K. Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 1986. Vol. 33, № 3. P. 575–618.
- [24] Okamoto K., Kimura H. On particular solutions of the Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables // *Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2)*. 1986. Vol. 37, № 1. P. 61–80.
- [25] Simpson C. T. Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. II // *IHÉS. Publ. Math.* 1994. N 80. P. 5–79.

- [26] *Tsuda T., Okamoto K., Sakai H.* Folding transformations of the Painlevé equations // *Math. Ann.* 2005. Vol. 331, N° 4. P. 713–738.
- [27] *Watanabe H.* Birational canonical transformations and classical solutions of the sixth Painlevé equation // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. 1998. Vol. 27, N° 3–4. P. 379–425.

KARAMOKO DIARRA

Université des Sciences, des Techniques
et des Technologies de Bamako, Mali.

E-mail: diarak2005@yahoo.fr

karamoko.diarra@univ-rennes1.fr

Received 19.12.2014

FRANK LORAY

Université de Rennes 1, France

E-mail: frank.loray@univ-rennes1.fr

Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором

В. З. Гринес, М. К. Носкова, О. В. Починка

В настоящей работе устанавливается существование энергетической функции структурно устойчивых диффеоморфизмов замкнутых трёхмерных многообразий, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор.

Библиография: 24 названия. *УДК:* 517.938. *MSC2010:* 37D20. *Ключевые слова и фразы:* энергетическая функция, *DA*-диффеоморфизм, структурная устойчивость.

ПОСВЯЩЕНИЕ

Авторы посвящают эту работу Юлию Сергеевичу Ильяшенко, который является для нас примером замечательного руководителя научной школы. Он внимательно следит за каждым из своих учеников, умело напутствует и направляет их по жизни. Нам посчастливилось окунуться в добрую атмосферу этой школы. По сей день нас связывают не только полезные взаимно обогащающие научные контакты, но и искренне дружеские отношения. С огромной благодарностью вспоминаются выступления на семинаре у Юлия Сергеевича в МГУ, его желание понять и донести до аудитории результаты докладчика. Когда имелась возможность, он всегда посещал наши доклады на конференциях и семинарах, подбадривал своими меткими замечаниями. Хочется надеяться, что и впредь наши научные и жизненные пути будут иметь множественные пересечения.

ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В силу тесной взаимосвязи между динамической системой и её *функцией Ляпунова* (непрерывной функцией, не возрастающей вдоль траекторий системы), качественное поведение системы во многом определяется структурой её функции Ляпунова. Особенно сильно этот эффект проявляется в случае, когда система обладает *энергетической функцией*, то есть гладкой функцией

© В. З. Гринес, М. К. Носкова, О. В. Починка, 2015

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 13-01-12452-офи-м, 15-01-03687-а) и Российского научного фонда (грант 14-41-00044). В данной научной работе использованы результаты проекта «Динамические системы и их приложения», выполненного в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 г.

Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы. Кроме того, функция — объект много более удобный для изучения, чем однопараметрическое семейство отображений многообразия, поэтому естественно встаёт вопрос о существовании энергетической функции у динамической системы. Наличие функции Ляпунова у любой динамической системы доказано К. Конли [3] в 1978 г., этот факт был назван позже фундаментальной теоремой динамических систем (см., например, [20, теорема 1.1, с. 404]). Существование энергетической функции у любого потока следует из работы В. Вильсона и Дж. Йорке [24]. Каскады даже с регулярной динамикой не обладают в общем случае энергетической функцией. Такие примеры построены в работе Д. Пикстона [14], а также В. З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О. В. Починки [6], в последней также найдены достаточные условия существования энергетической функции Морса для трёхмерных каскадов Морса — Смейла. Тем более удивительным является факт наличия энергетической функции у некоторых дискретных динамических систем с хаотическим поведением, доказанный в настоящей работе.

Более детально. Пусть $f \in \text{Diff}^1(M)$ — C^1 -гладкий диффеоморфизм замкнутого n -мерного ($n \geq 2$) многообразия M , снабжённого некоторой римановой метрикой d . Множество $\Lambda \subset M$, инвариантное относительно f , называется *гиперболическим*, если ограничение $T_\Lambda M$ касательного расслоения TM многообразия M на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$ df -инвариантных подрасслоений E_Λ^s, E_Λ^u ($\dim E_x^s + \dim E_x^u = n, x \in \Lambda$) и существуют такие константы $C_s > 0, C_u > 0, 0 < \lambda < 1$, что

$$\begin{aligned} \|df^m(v)\| &\leq C_s \lambda^m \|v\| & \text{для } v \in E_\Lambda^s, \\ \|df^{-m}(v)\| &\leq C_u \lambda^m \|v\| & \text{для } v \in E_\Lambda^u, m > 0. \end{aligned}$$

Гиперболическая структура порождает существование так называемых *устойчивых* и *неустойчивых* многообразий, которые объединяют точки с одинаковым асимптотическим поведением при положительных и отрицательных соответственно итерациях [10, 22]. Для любой точки $x \in \Lambda$ существует инъективная иммерсия $J_x^s: \mathbb{R}^s \rightarrow M$, образ которой $W_x^s = J_x^s(\mathbb{R}^s)$ называется *устойчивым многообразием точки x* , такая что выполняются следующие свойства:

- (1) $T_x W_x^s = E_\Lambda^s$;
- (2) точки $x, y \in M$ принадлежат одному многообразию $W^s(x)$ тогда и только тогда, когда $d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- (3) $f(W_x^s) = W_{f(x)}^s$;
- (4) если $x, y \in \Lambda$, то либо $W_x^s = W_y^s$, либо $W_x^s \cap W_y^s = \emptyset$;
- (5) если точки $x, y \in \Lambda$ близки на M , то W_x^s, W_y^s C^1 -близки на компактных множествах.

Неустойчивое многообразие W_x^u точки $x \in \Lambda$ определяется как устойчивое многообразие относительно диффеоморфизма f^{-1} . Неустойчивые многообразия

обладают аналогичными свойствами. С учётом свойства (3) устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*.

Точка $x \in M$ называется *неблуждающей*, если для любой её окрестности $U(x)$ и любого натурального числа N найдётся $n_0 \in \mathbb{Z}$, $|n_0| \geq N$, такое что $f^{n_0}(x) \in U(x)$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f будем обозначать через $NW(f)$. Диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A (или, что то же самое, является A -диффеоморфизмом), если множество $NW(f)$ гиперболическое и периодические точки всюду плотны в $NW(f)$.

Смейл [23] доказал следующее утверждение, известное как *теорема о спектральном разложении*. Пусть диффеоморфизм $f \in \text{Diff}^1(M)$ удовлетворяет аксиоме A . Тогда множество $NW(f)$ представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную орбиту. При этом объемлющее многообразие M можно представить следующим образом:

$$M = \bigcup_{i=1}^k W_{\Lambda_i}^s = \bigcup_{i=1}^k W_{\Lambda_i}^u,$$

где

$$W_{\Lambda_i}^s = \bigcup_{x \in \Lambda_i} W_x^s \quad \text{и} \quad W_{\Lambda_i}^u = \bigcup_{x \in \Lambda_i} W_x^u.$$

Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно не является периодической орбитой (в частности, не является неподвижной точкой).

В силу транзитивности f на каждом базисном множестве Λ_i , ограничения расслоений $E_{\Lambda_i}^s, E_{\Lambda_i}^u$ на Λ_i имеют постоянную размерность во всех точках $x \in \Lambda_i$.

Компактное f -инвариантное множество $A \subset M$ называется *аттрактором* диффеоморфизма f , если оно имеет такую компактную окрестность U_A , что $f(U_A) \subset \text{int } U_A$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1} .

В силу [16], базисное множество Λ диффеоморфизма f является аттрактором (репеллером) тогда и только тогда, когда $\Lambda = \bigcup_{x \in \Lambda} W_x^u$ ($\Lambda = \bigcup_{x \in \Lambda} W_x^s$).

Аттрактор Λ A -диффеоморфизма f называется *растягивающимся аттрактором*, если топологическая размерность $\dim \Lambda$ равна размерности неустойчивого многообразия W_x^u , $x \in \Lambda$. Репеллер диффеоморфизма f называется *сжимающимся*, если он является растягивающимся аттрактором для f^{-1} .

Два диффеоморфизма $f, g \in \text{Diff}^1(M)$ называются *топологически сопряжёнными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M$ такой, что $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Диффеоморфизм $f \in \text{Diff}^1(M)$ называется *структурно устойчивым*, если существует такая его окрестность $U(f) \subset \text{Diff}^1(M)$, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ сопряжён f . Если потребовать, чтобы сопрягающий гомеоморфизм был близок к тождественному в C^0 -топологии, то получим определение *грубого* диффеоморфизма. Теперь известно, что понятия «грубости» и «структурной устойчивости» эквивалентны, хотя доказательство этого факта весьма

нетривиально (см. обзор [1], где обсуждаются различные определения и соответствующие результаты).

При формулировке условий структурной устойчивости большую роль играет условие, которое называют сильным условием трансверсальности. Пусть $W_1, W_2 \subset M$ — два иммерсированных многообразия, имеющих непустое пересечение. По определению, W_1, W_2 *пересекаются трансверсально*, если для любой точки $x \in W_1 \cap W_2$ касательное пространство $T_x M$ порождается касательными подпространствами $T_x W_1$ и $T_x W_2$. В частности, если W_1, W_2 пересекаются трансверсально, то $\dim T_x W_1 + \dim T_x W_2 \geq \dim T_x M$.

Говорят, что A -дiffeоморфизм удовлетворяет *сильному условию трансверсальности*, если для любых точек $x, y \in NW(f)$ многообразия W_x^s, W_y^u имеют только трансверсальные пересечения. Известно [11, 19], что диффеоморфизм структурно устойчив тогда и только тогда, когда он является A -дiffeоморфизмом и удовлетворяет сильному условию трансверсальности. Необходимость доказал Мане [11], достаточность — Робинсон [19].

В настоящей работе рассматривается класс G структурно устойчивых диффеоморфизмов на 3-многообразии $f: M \rightarrow M$, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор Ω . В этом случае (см. предложение 1) многообразие M диффеоморфно трёхмерному тору и аттрактор Ω — единственное нетривиальное базисное множество диффеоморфизма f . Главным результатом настоящей работы является следующий факт.

Теорема 1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне базисного множества Ω .*

§ 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КЛАССА G

В этом разделе мы изложим необходимую для доказательства теоремы 1 информацию о динамике диффеоморфизма $f \in G$, следуя работе [7]. Заметим, что все результаты работы [7] сформулированы для многообразия размерности $n \geq 3$ и случая, когда Ω является ориентируемым базисным множеством¹. Однако в работе [25] доказано, что в случае нечётного n базисное множество Ω является ориентируемым. Поэтому везде ниже, формулируя выжимку результатов работы [7] для случая $n = 3$, мы не требуем от Ω дополнительно быть ориентируемым.

Пусть $f \in G$ и Ω — двумерный растягивающийся аттрактор диффеоморфизма f . Тогда $\dim W_x^s = 1$ для любой точки $x \in \Omega$, что позволяет ввести обозначение $(z, y)^s$ ($[z, y]^s$) для открытой (замкнутой) дуги устойчивого многообразия W_x^s , ограниченной точками $y, z \in W_x^s$.

¹Базисное множество Λ называется *ориентируемым*, если для любой точки $x \in \Lambda$ и любых фиксированных чисел $\alpha > 0, \beta > 0$ индекс пересечения $W_\alpha^s(x) \cap W_\beta^u(x)$ во всех точках пересечения один и тот же (+1, либо −1). В противном случае базисное множество Λ называется *неориентируемым* (см., например, [9, с. 622]).

Множество $W_x^s \setminus x$ состоит из двух компонент связности. Хотя бы одна из этих компонент имеет непустое пересечение с множеством Ω . Точка $x \in \Omega$ называется *s-граничной*, если одна из компонент связности множества $W_x^s \setminus x$ не пересекается с Ω , будем обозначать такую компоненту через $W_x^{s\emptyset}$. Множество Γ_Ω граничных точек множества Ω не пусто и состоит из конечного числа периодических точек, которые разбиваются на ассоциированные пары (p, q) точек одинакового периода так, что 2-связка $B_{pq} = W_p^u \cup W_q^u$ является достижимой изнутри границей² компоненты связности множества $M \setminus \Omega$.

Для каждой пары (p, q) ассоциированных граничных точек множества Ω построим так называемую *характеристическую сферу*.

Пусть B_{pq} — 2-связка аттрактора Ω , состоящая из двух неустойчивых многообразий W_p^u и W_q^u ассоциированных граничных точек p и q соответственно, и m_{pq} — период точек p, q . Тогда для любой точки $x \in W_p^u \setminus p$ существует единственная такая точка $y \in (W_q^u \cap W_x^s)$, что дуга $(x, y)^s$ не пересекается с множеством Ω . Определим отображение

$$\xi_{pq}: B_{pq} \setminus \{p, q\} \rightarrow B_{pq} \setminus \{p, q\},$$

положив $\xi_{pq}(x) = y$ и $\xi_{pq}(y) = x$. Тогда

$$\xi_{pq}(W_p^u \setminus p) = W_q^u \setminus q \quad \text{и} \quad \xi_{pq}(W_q^u \setminus q) = W_p^u \setminus p,$$

т. е. отображение ξ_{pq} переводит друг в друга проколотые неустойчивые многообразия 2-связки и является инволюцией ($\xi_{pq}^2 = \text{id}$). В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий на компактных множествах отображение ξ_{pq} является гомеоморфизмом.

Ограничение $f^{m_{pq}}|_{W_p^u}$ имеет ровно одну гиперболическую отталкивающую неподвижную точку p , поэтому существует такой гладкий замкнутый 2-диск $D_p \subset W_p^u$, что $p \in D_p \subset \text{int}(f^{m_{pq}}(D_p))$. Тогда множество $C_{pq} = \bigcup_{x \in \partial D_p} (x, \xi_{pq}(x))^s$ гомеоморфно замкнутому двумерному цилиндру $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Множество C_{pq} называют *связывающим цилиндром*. Окружность $\xi_{pq}(\partial D_p)$ ограничивает в W_q^u двумерный 2-диск D_q такой, что $q \in D_q \subset \text{int}(f^{m_{pq}}(D_q))$. Множество $S_{pq} = D_p \cup C_{pq} \cup D_q$ гомеоморфно двумерной сфере, которую называют *характеристической сферой*, соответствующей связке B_{pq} (см. рис. 1).

Положим $T(f) = NW(f) \setminus \Omega$ и основные динамические свойства диффеоморфизма $f \in G$ сформулируем в виде предложения (см. рис. 2 для лучшего понимания).

Предложение 1. Пусть $f: M \rightarrow M$ — диффеоморфизм из класса G . Тогда имеют место следующие факты:

² Пусть $G \subset M$ — открытое множество с границей ∂G ($\partial G = \text{cl}(G) \setminus \text{int}(G)$). Подмножество $\delta G \subset \partial G$ называется *достижимой изнутри границей* области G , если для любой точки $x \in \delta G$ найдётся открытая дуга, полностью лежащая в G и такая, что x является одной из её концевых точек.

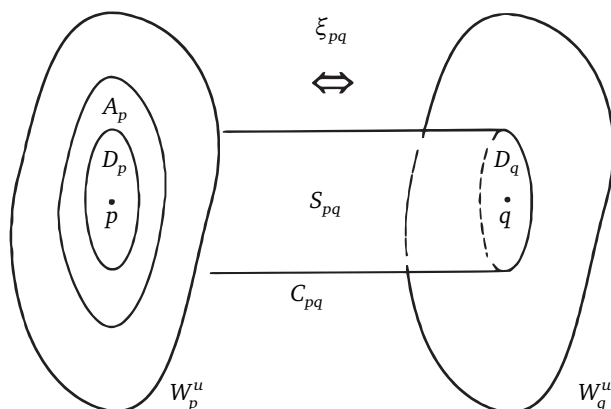
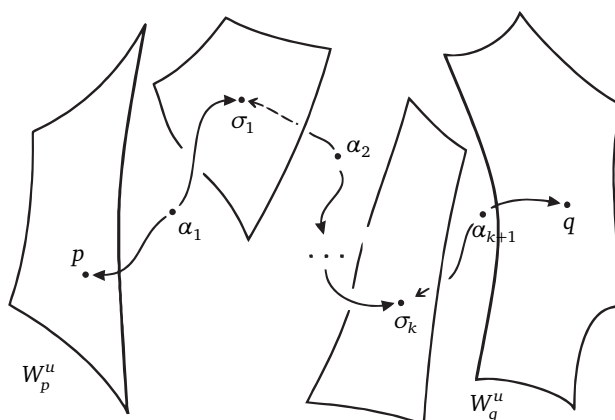


Рис. 1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СФЕРА

Рис. 2. Дуга l_{pq}

- (1) объемлющее многообразие M гомеоморфно трёхмерному тору \mathbb{T}^3 [7, теорема 5.1];
- (2) каждая характеристическая сфера S_{pq} ограничивает 3-шар Q_{pq} такой, что $T(f) \subset \bigcup_{(p,q) \in \Gamma_\Omega} Q_{pq}$ [7, теорема 5.1];
- (3) для каждой ассоциированной пары (p, q) граничных точек существует натуральное число k_{pq} такое, что $T(f) \cap Q_{pq}$ состоит из k_{pq} периодических источников $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_{pq}}$ и $k_{pq} - 1$ седловых периодических точек $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_{pq}-1}$, чередующихся на простой дуге [7, следствие 5.2]

$$l_{pq} = W_p^{s\emptyset} \cup \bigcup_{i=1}^{k_{pq}-1} W_{\sigma_i}^s \cup \bigcup_{i=1}^k W_{\alpha_i}^s \cup W_q^{s\emptyset};$$

- (4) пересечение $W_{\sigma_i}^u \cap Q_{pq}$, $i = 1, \dots, k_{pq} - 1$, состоит в точности из одного двумерного диска [7, теорема 4.1].

§ 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В БАССЕЙНЕ ОДНОМЕРНОГО АТТРАКТОРА ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНОГО 3-ДИФФЕОМОРФИЗМА

В этом разделе мы приводим результаты работы [5] и книги [8], касающиеся критерия существования энергетической функции в бассейне одномерного аттрактора градиентно-подобного 3-диффеоморфизма.

В 1978 г. К. Конли [3] доказал существование функции Ляпунова для любого потока (каскада), заданного на гладком замкнутом ориентируемом n -многообразии N , то есть непрерывной функции, которая строго убывает вдоль орбит вне цепно рекуррентного множества и постоянна на компонентах этого множества. Для диффеоморфизмов Морса — Смейла³ цепно рекуррентное множество совпадает с множеством периодических орбит, так что в этом случае представляется естественным искать функцию Ляпунова в классе функций Морса. В 1977 г. Д. Пикстон [14] определил функцию Ляпунова для диффеоморфизма Морса — Смейла $g: N \rightarrow N$ как функцию Морса $\varphi: N \rightarrow \mathbb{R}$, такую что $\varphi(g(x)) < \varphi(x)$, если x — блуждающая точка, и $\varphi(g(x)) = \varphi(x)$, если x — периодическая точка. Такая функция может быть построена, в частности, с помощью перехода к надстройке над заданным диффеоморфизмом Морса — Смейла и дальнейшим применением результатов работы К. Мейера [12], построившего энергетическую функцию Морса — Ботта для произвольного потока Морса — Смейла.

Если φ — это функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса — Смейла $g: N \rightarrow N$, то любая периодическая точка β является максимумом ограничения φ на неустойчивое многообразие W_β^u и минимумом ограничения φ на устойчивое многообразие W_β^s . Если эти экстремумы являются невырожденными, то инвариантные многообразия точки β трансверсальны всем регулярным множествам уровня φ в некоторой окрестности U_β точки β . Функция Ляпунова $\varphi: N \rightarrow \mathbb{R}$ для диффеоморфизма Морса — Смейла $f: N \rightarrow N$ называется *функцией Морса — Ляпунова*, если любая периодическая точка β является невырожденным максимумом (минимумом) ограничения φ на неустойчивое (устойчивое) многообразие W_β^u (W_β^s).

Среди функций Ляпунова для диффеоморфизма Морса — Смейла g функции Морса — Ляпунова образуют открытое всюду плотное в C^∞ -топологии множество.

Если β — критическая точка функции Морса $\varphi: N \rightarrow \mathbb{R}$, то, согласно лемме Морса (см., например, [13]), в некоторой окрестности $V(\beta)$ точки β существует локальная система координат x_1, \dots, x_n , называемая *координатами*

³ Диффеоморфизм $g: N \rightarrow N$ называется *диффеоморфизмом Морса — Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(g)$ состоит из конечного числа гиперболических периодических точек ($NW(g) = \text{Per}(g)$), инвариантные многообразия которых пересекаются трансверсально.

Морса, такая что $x_j(p) = 0$ для каждого $j = \overline{1, n}$ и φ имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi(\beta) - x_1^2 - \dots - x_b^2 + x_{b+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

где b — индекс⁴ точки β . Если φ — функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса — Смейла $f: N \rightarrow N$, то, в силу [14], для любой периодической точки $\beta \in \text{Per}(g)$ выполняется равенство $b = \dim W_\beta^u$.

Если φ — функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса — Смейла g , то любая периодическая точка диффеоморфизма g является критической точкой функции φ . Обратное, вообще говоря, неверно: функция Ляпунова может иметь критические точки, которые не являются периодическими точками для g . Д. Пикстон [14] определил *энергетическую функцию* для диффеоморфизма Морса — Смейла g как функцию Морса — Ляпунова φ , множество критических точек которой совпадает с множеством периодических точек диффеоморфизма g . Он доказал, что любой диффеоморфизм Морса — Смейла, заданный на поверхности, обладает энергетической функцией, однако существует пример диффеоморфизма Морса — Смейла на трёхмерной сфере \mathbb{S}^3 , не имеющего энергетической функции. В работе В. З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О. В. Починки [4] доказано, что функция Ляпунова в примере Пикстона имеет не менее шести критических точек.

Напомним, что диффеоморфизм Морса — Смейла $g: N \rightarrow N$ называется *градиентно-подобным*, если для любой пары периодических точек β, γ ($\beta \neq \gamma$) из условия $W_\beta^u \cap W_\gamma^s \neq \emptyset$ следует, что $\dim W_\beta^s < \dim W_\gamma^s$. Следующее определение выделяет для градиентно-подобных диффеоморфизмов класс функций Морса — Ляпунова с дополнительными свойствами, аналогичными свойствам функций, введённых С. Смейлом [21] для градиентно-подобных векторных полей.

Функция Морса — Ляпунова φ для градиентно-подобного диффеоморфизма g называется *самоиндексирующейся энергетической функцией*, если выполняются следующие условия:

- 1) множество критических точек функции φ совпадает с множеством $\text{Per}(g)$ периодических точек диффеоморфизма g ;
- 2) $\varphi(\beta) = \dim W_\beta^u$ для любой точки $\beta \in \text{Per}(g)$.

Заметим, что понятие функции Ляпунова корректно определено на любом g -инвариантном подмножестве многообразия N .

Следующие рассуждения относятся только к трёхмерным многообразиям.

Пусть $g: N \rightarrow N$ — градиентно-подобный диффеоморфизм, Σ^+ (Ω^+) — подмножество множества всех седловых точек с одномерными неустойчивыми инвариантными многообразиями (стоковых точек) и множество $A^+ = W_{\Sigma^+}^u \cup \Omega^+$ является замкнутым и g -инвариантным. Тогда A^+ является аттрактором диффеоморфизма g . Множество $W_{A^+}^s = \bigcup_{\beta^+ \in (\Sigma^+ \cup \Omega^+)} W_{\beta^+}^s$ является g -инвариантным

⁴ Индексом критической точки β называется число отрицательных собственных значений матрицы $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\beta)$.

и называется *бассейном одномерного аттрактора* A^+ . Обозначим через c^+ число компонент связности аттрактора A^+ , через r^+ — число седловых точек и через s^+ — число стоковых точек в A^+ . Положим $\delta(A^+) = c^+ + r^+ - s^+$. Аттрактор A^+ называется *тесно вложенным*, если он обладает окрестностью P^+ со следующими свойствами:

- 1) $g(P^+) \subset \text{int } P^+$;
- 2) P^+ является дизъюнктым объединением c^+ ручечных тел⁵, сумма родов которых равен $\delta(A^+)$;
- 3) для любой седловой точки $\sigma^+ \in \Sigma^+$ пересечение $W_{\sigma^+}^s \cap P^+$ состоит из одного двумерного диска.

Предложение 2. Самоиндексирующаяся энергетическая функция φ_{A^+} диффеоморфизма g существует в бассейне $W_{A^+}^s$ аттрактора A^+ тогда и только тогда, когда он является тесно вложенным.

Тесно вложенный репеллер A^- градиентно-подобного диффеоморфизма $g: N \rightarrow N$ и его бассейн определяются как тесно вложенный аттрактор A^+ и его бассейн для диффеоморфизма g^{-1} . При этом функция $\varphi_{A^-}(x) = 3 - \varphi_{A^+}(x)$ будет самоиндексирующейся функцией диффеоморфизма g в бассейне репеллера A^- .

В упомянутом примере Пикстона неблуждающее множество $g: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ состоит в точности из четырёх неподвижных точек: одного источника α , двух стоков ω_1, ω_2 , одного седла σ . Одномерный аттрактор A^+ этого диффеоморфизма совпадает с замыканием устойчивого многообразия седла σ и $\delta(A^+) = 0$. При этом любой трёхмерный шар, содержащий аттрактор A^+ в своей внутренности, пересекает W_{σ}^s не менее чем по трём компонентам связности (см. рис. 3). Таким образом, аттрактор A^+ не является тесно вложенным и, в силу предложения 2, в бассейне одномерного аттрактора Пикстона не существует энергетической функции.

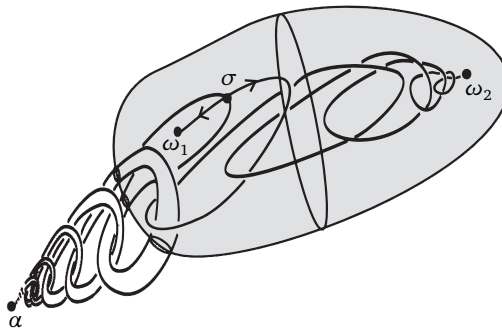


Рис. 3. ПРИМЕР ПИКСТОНА

⁵ Ручечным телом рода $\delta \geq 0$ называется компактное трёхмерное многообразие с краем, полученное из 3-шара попарным отождествлением 2δ двумерных попарно не пересекающихся дисков на границе шара посредством меняющего ориентацию отображения.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ИЗ КЛАССА G

Доказательство основной теоремы базируется на предложениях 1 и 2. Разобьём построение энергетической функции для $f \in G$ на шаги, в которых будем использовать обозначения предыдущих разделов.

Шаг 1. Пусть (p, q) — пара ассоциированных граничных точек периода m_{pq} базисного множества Ω . Положим

$$A_{pq}^- = \bigcup_{j=0}^{m_{pq}-1} f^j \left(\bigcup_{i=1}^{k_{pq}-1} W_{\sigma_i}^s \cup \bigcup_{i=1}^{k_{pq}-1} W_{\alpha_i}^s \right).$$

По построению множество A_{pq}^- является репеллером диффеоморфизма f и $\delta(A_{pq}^-) = 0$. Покажем, что он является тесно вложенным. Для этого достаточно показать, что существует 3-шар P_{pq}^- такой, что $f^{-m_{pq}}(P_{pq}^-) \subset \text{int } P_{pq}^-$ и пересечение $P_{pq}^- \cap W_{\sigma_j}^u$ состоит в точности из одного двумерного диска для каждого седла σ_j , $j \in \{1, \dots, k_{pq} - 1\}$.

В силу предложения 1, 3-шар Q_{pq} пересекает двумерное неустойчивое многообразие седла σ_j , $j \in \{1, \dots, k_{pq} - 1\}$, в точности по одному двумерному диску. Искомый 3-шар P_{pq}^- получается из Q_{pq} вдавливанием внутрь дисков D_p , D_q и сглаживанием углов (см. рис. 4).

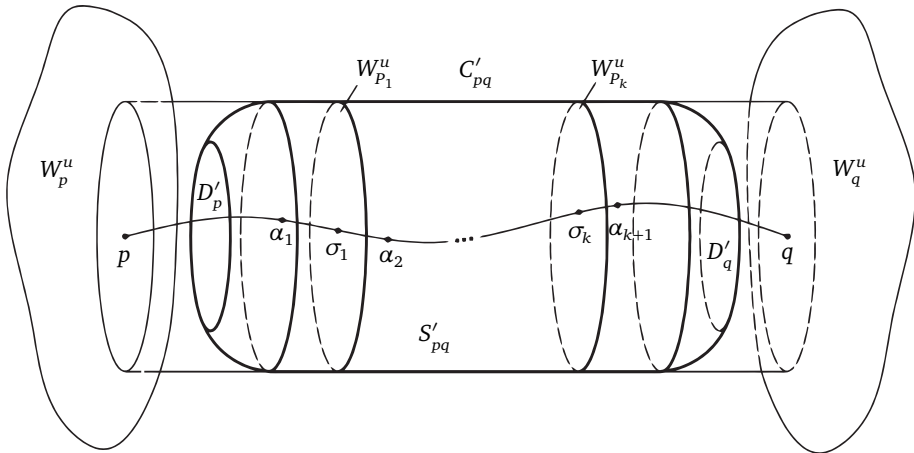


Рис. 4. Окрестность P_{pq}^-

В силу предложения 2, в бассейне $W_{A_{pq}^-}^u$ репеллера A_{pq}^- существует самоиндексирующаяся энергетическая функция $\varphi_{A_{pq}^-}$ диффеоморфизма f . Положим

$$b_{pq} = \inf \{ \varphi_{A_{pq}^-}(z), z \in W_{A_{pq}^-}^u \}.$$

Определим функцию $g_{pq}: (b_{pq}, 3] \rightarrow (0, 3]$ следующим образом: если $b_{pq} > -\infty$, то положим

$$g_{pq}(x) = 2^{\frac{(2-b_{pq})(3-x)}{x-b_{pq}}} 3^{\frac{(3-b_{pq})(x-2)}{x-b_{pq}}},$$

а если $b_{pq} = -\infty$, то положим

$$g_{pq}(x) = 2^{3-x} 3^{x-2}.$$

По построению функция g_{pq} является бесконечно гладкой и имеет положительную производную, при этом $g_{pq}(2) = 2$, $g_{pq}(3) = 3$ и $\lim_{x \rightarrow b_{pq}} g_{pq}(x) = 0$. Рассмотрим суперпозицию $\varphi_{pq} = g_{pq} \varphi_{A_{pq}^-}$. Поскольку $\text{grad } \varphi_{pq} = g'_{pq} \cdot \text{grad } \varphi_{A_{pq}^-}$ и гессианы $\Delta \varphi_{pq}$ и $\Delta \varphi_{A_{pq}^-}$ связаны соотношением

$$\Delta \varphi_{pq} = g''_{pq} \cdot (\text{grad } \varphi_{A_{pq}^-}) \cdot (\text{grad } \varphi_{A_{pq}^-})^T + g'_{pq} \cdot \Delta \varphi_{A_{pq}^-},$$

функция φ_{pq} является энергетической функцией Морса для f в бассейне $W_{A_{pq}^-}^u$.

Положим

$$A^- = \bigcup_{(p,q) \in \Gamma_\Omega} A_{pq}^-, \quad W_{A^-}^u = \bigcup_{(p,q) \in \Gamma_\Omega} W_{A_{pq}^-}^u$$

и обозначим через φ_{A^-} функцию, составленную из функций φ_{pq} , $(p, q) \in \Gamma_\Omega$. Определим на многообразии M функцию φ формулой

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_{A^-}(z), & \text{если } z \in W_{A^-}^u; \\ 0, & \text{если } z \in \Omega. \end{cases}$$

Шаг 2. Пусть d — риманова метрика на многообразии M , а расстояние между множествами определяется как инфимум расстояний между элементами этих множеств, то есть

$$\forall X, Y \subset M \quad d(X, Y) = \inf\{d(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Для $c \in (0, 3]$ положим

$$\alpha(c) = \min\{1, d^2(\varphi^{-1}(c), \Omega)\} \quad \text{и} \quad \beta(c) = \max\left\{1, \max_{x \in \varphi^{-1}([c, 3])} |\text{grad } \varphi(x)|\right\}.$$

По построению функции $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ являются непрерывными, причём $\alpha(c)$ — неубывающая на $(0, 3]$ и существует такое значение $c^* \in (0, 3]$, что $\alpha(c)$ монотонно возрастает на $(0, c^*]$, а $\beta(c)$ — невозрастающая. Тогда функция $\alpha(c)/\beta(c)$ является неубывающей на полуинтервале $(0, 3]$ и $\lim_{c \rightarrow 0} \alpha(c)/\beta(c) = 0$.

В шаге 3 мы построим C^2 -гладкую функцию $g: [0, 3] \rightarrow [0, 3]$ такую, что

- а) $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0, 3]$;
- б) $g(c) \leq \alpha(c)/\beta(c)$ для любого $c \in (0, 1/2]$;
- в) $g'(c) \leq \alpha(c)/\beta(c)$ для любого $c \in (0, 1/2]$;
- г) $g(2) = 2$ и $g(3) = 3$.

Покажем, что суперпозиция $\psi = g\varphi$ является искомой энергетической функцией.

Поскольку $\text{grad } \psi = g' \cdot \text{grad } \varphi$ и гессианы $\Delta \psi$ и $\Delta \varphi$ связаны соотношением

$$\Delta \psi = g'' \cdot (\text{grad } \varphi) \cdot (\text{grad } \varphi)^T + g' \cdot \Delta \varphi,$$

то функция ψ является энергетической функцией Морса для f на множестве $M \setminus \Omega$. Покажем, что функция ψ является гладкой на M .

Так как на множестве $M \setminus \Omega$ функция ψ является гладкой по построению, нам осталось показать, что функция ψ — гладкая на множестве Ω .

Рассмотрим произвольную точку $a \in \Omega$ и локальную карту (U_a, h_a) , где $h_a: U_a \rightarrow \mathbb{R}^3$ — диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность⁶ U_a точки a в \mathbb{R}^3 , причём точка a переходит в точку $O(0, 0, 0)$. Сначала покажем дифференцируемость. Если функция $\psi_a = \psi(h_a^{-1}(x))$ дифференцируема в точке O , то функция ψ дифференцируема в точке a . При этом функция ψ_a дифференцируема в точке O и имеет частные производные, равные нулю в этой точке тогда и только тогда, когда

$$\lim_{s \rightarrow O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s, O)} = 0,$$

где $s(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ и ρ — евклидова метрика в \mathbb{R}^3 , определённая формулой

$$\rho(s_1, s_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

для $s_1(x_1, y_1, z_1), s_2(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Проверка равенства

$$\lim_{s \rightarrow O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s, O)} = 0$$

и завершит доказательство дифференцируемости.

Введём на \mathbb{R}^3 метрику d_a следующим образом:

$$d_a(s_1, s_2) = d(h_a^{-1}(s_1), h_a^{-1}(s_2)) \quad \text{для } s_1, s_2 \in \mathbb{R}^3.$$

В силу [18] (лекция 15), метрики ρ и d_a эквивалентны в некоторой компактной окрестности $U(O)$ точки O , то есть существуют константы $0 < c_1 \leq c_2$, такие что

$$\forall s_1, s_2 \in U(O) \quad c_1 d_a(s_1, s_2) \leq \rho(s_1, s_2) \leq c_2 d_a(s_1, s_2).$$

Для $s \in U(O)$ положим $w = h_a^{-1}(s)$ и $c = \varphi(h_a^{-1}(s)) = \varphi(w)$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s, O)} &= \lim_{s \rightarrow O} \frac{\psi(h_a^{-1}(s))}{c_1 d(h_a^{-1}(s), a)} = \lim_{w \rightarrow a} \frac{\psi(w)}{c_1 d(w, a)} = \lim_{w \rightarrow a} \frac{g(\varphi(w))}{c_1 d(w, a)} = \\ &= \lim_{w \rightarrow a} \frac{g(c)}{c_1 d(w, a)} < \lim_{w \rightarrow a} \frac{\alpha(c)}{\beta(c) c_1 d(w, a)} \leq \lim_{w \rightarrow a} \frac{d^2(w, a)}{c_1 d(w, a)} = \lim_{w \rightarrow a} \frac{d(w, a)}{c_1} = 0. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что частные производные $(\psi_a)'_x, (\psi_a)'_y, (\psi_a)'_z$ непрерывны в точке O , то есть

$$\lim_{s \rightarrow O} (\psi_a)'_x(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow O} (\psi_a)'_y(s) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{s \rightarrow O} (\psi_a)'_z(s) = 0,$$

⁶ Окрестность выберем таким образом, чтобы для всех $x \in U_a$ выполнялось $\varphi(x) < 1/2$.

что эквивалентно $\lim_{s \rightarrow O} |\text{grad } \psi_a(s)| = 0$. Обозначим через $J_{h_a^{-1}}$ якобиан отображения h_a^{-1} , через $\|J_{h_a^{-1}}\|$ — его норму, подчинённую евклидовой норме вектора в \mathbb{R}^3 , и через B — такую константу, что $\|J_{h_a^{-1}}(s)\| \leq B$ для всех точек s в некоторой окрестности точки O . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow O} |\text{grad } \psi_a(s)| &= \lim_{s \rightarrow O} |J_{h_a^{-1}}(s) \cdot g'(c) \cdot \text{grad } \varphi(w)| \leq \\ &\leq \lim_{s \rightarrow O} \|J_{h_a^{-1}}(s)\| \cdot |g'(c)| \cdot |\text{grad } \varphi(w)| \leq \lim_{s \rightarrow O} B \cdot \frac{\alpha(c)}{\beta(c)} \cdot |\text{grad } \varphi(w)| \leq \\ &\leq \lim_{w \rightarrow a} B \cdot \frac{d^2(w, a)}{|\text{grad } \varphi(w)|} \cdot |\text{grad } \varphi(w)| = \lim_{w \rightarrow a} B \cdot d^2(w, a) = 0. \end{aligned}$$

Шаг 3. Построение функции g . Положим $\gamma(c) = \alpha(c)/\beta(c)$. По построению γ является положительной неубывающей на полуинтервале $(0, 3]$ функцией и $\lim_{c \rightarrow 0} \alpha(c)/\beta(c) = 0$.

Построим такую C^2 -гладкую функцию $g: [0, 3] \rightarrow [0, 3]$, что

- а) $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0, 3]$;
- б) $g(c) \leq \gamma(c)$ для любого $c \in (0, 1/2]$;
- в) $g'(c) \leq \gamma(c)$ для любого $c \in (0, 1/2]$;
- г) $g(2) = 2$ и $g(3) = 3$.

Возьмём открытое покрытие полуинтервала $(0, 3]$ множествами

$$\begin{aligned} U_1 &= \{x \in \mathbb{R}: 1 < x \leq 3\}, \quad U_2 = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} < x \leq 3\right\}, \\ U_3 &= \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{4} < x \leq 3\right\}, \quad U_i = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2^{i-1}} < x < \frac{1}{2^{i-5}}\right\}, \quad i = 4, 5, \dots, \end{aligned}$$

и следующее локально конечное разбиение единицы⁷, подчинённое этому покрытию:

$$\begin{aligned} \sigma_2(x) &= \begin{cases} \exp\left\{\frac{(x-2)^4}{(x-1)(x-3)}\right\}, & \text{если } x \in (1, 3); \\ 0, & \text{если } x \notin (1, 3); \end{cases} \\ \sigma_1(x) &= \begin{cases} 1 - \sigma_2(x), & \text{если } x \in (2, 3]; \\ 0, & \text{если } x \notin (2, 3]; \end{cases} \end{aligned}$$

⁷ Пусть дано открытое покрытие топологического пространства M открытыми множествами U_α . Разбиением единицы, подчинённым покрытию $\{U_\alpha\}$, называется набор гладких функций $\sigma_\gamma: M \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих следующими свойствами:

- для всех γ $\text{Supp}(\sigma_\gamma) \subset U_\alpha$ для некоторого α (где $\text{Supp}(\sigma_\gamma)$ — замыкание множества, на котором функция отлична от нуля);
- $0 \leq \sigma_\gamma \leq 1$ на M ;
- $\forall x \in M$ имеем $\sum_\gamma \sigma_\gamma(x) = 1$.

Если для любой точки $x \in M$ существует такая окрестность W_x , что пересечение $W \cap \text{Supp}(\sigma_\gamma)$ непусто не более чем для конечного числа индексов γ , то такое разбиение единицы называется локально конечным.

$$\forall i = 4, 6, \dots \quad \sigma_i(x) = \begin{cases} \exp \left\{ \frac{\left(x - \frac{1}{2^{i-3}}\right)^4}{\left(x - \frac{1}{2^{i-2}}\right)\left(x - \frac{1}{2^{i-4}}\right)} \right\}, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2^{i-2}}, \frac{1}{2^{i-4}}\right); \\ 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{1}{2^{i-2}}, \frac{1}{2^{i-4}}\right); \end{cases}$$

$$\forall i = 3, 5, \dots \quad \sigma_i(x) = \begin{cases} 1 - \sigma_{i-1}(x), & \text{если } x \in \left[\frac{1}{2^{i-3}}, \frac{1}{2^{i-4}}\right); \\ 1 - \sigma_{i+1}(x), & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2^{i-2}}, \frac{1}{2^{i-3}}\right); \\ 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{1}{2^{i-2}}, \frac{1}{2^{i-4}}\right). \end{cases}$$

Положим $\varepsilon_i = \gamma(1/2^{i-2})$ для всех $i = 3, 4, 5, \dots$. Пусть

$$c_2 = \int_0^2 \left(\sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x) \right) dx, \quad c_3 = \int_0^2 \left(\sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x) \right) dx,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{3 - c_2}{\int_2^3 \sigma_1(x) dx} \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \frac{2 - c_3}{\int_1^2 \sigma_2(x) dx}.$$

Определим функцию g формулой

$$g(c) = \begin{cases} \int_0^c \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x) \right) dx, & \text{если } c \in (0, 3]; \\ 0, & \text{если } c = 0, \end{cases}$$

и покажем, что она является искомой, проверив условия а)–г).

а) Поскольку

$$g'(c) = \sum_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(c),$$

получаем, что $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0, 3]$.

б) Последовательность $\{\varepsilon_i\}$ невозрастающая по построению. Заметим, что для любого $c \in (0, 1/2)$ существует единственный номер i^* , такой что

$$c \in \left(\frac{1}{2^{i^*-2}}, \frac{1}{2^{i^*-3}} \right].$$

Тогда $\sigma_{i^*}(c) \neq 0$ и $\sigma_i(c) = 0$ для всех $i \notin \{i^*, i^* + 1\}$. Из выбора параметров ε_i получаем цепочку неравенств

$$g(c) = \int_0^c \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x) \right) dx = \int_0^c \left(\sum_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x) \right) dx < \int_0^c \left(\sum_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_{i^*} \sigma_i(x) \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_{i^*} \int_0^c \left(\sum_{i=i^*}^{\infty} \sigma_i(x) \right) dx < \varepsilon_{i^*} \int_0^c \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(x) \right) dx = \\
&= \varepsilon_{i^*} \int_0^c 1 dx = \varepsilon_{i^*} c < \varepsilon_{i^*} = \gamma \left(\frac{1}{2^{i^*-2}} \right) < \gamma(c).
\end{aligned}$$

в) Для $g'(c)$ справедлива следующая оценка:

$$g'(c) = \sum_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(c) < \varepsilon_{i^*} \sum_{i=i^*}^{\infty} \sigma_i(c) = \varepsilon_{i^*} < \gamma(c).$$

г) Из выбора $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ следует, что $g(2) = 2$ и $g(3) = 3$.

Благодарности. Авторы выражают огромную признательность В. В. Чистякову за чрезвычайно полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аносов Д. В. Грубые системы // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 59–93.
- [2] Artin E., Fox R. Some wild cells and spheres in three-dimensional space // Ann. Math. 1948. Vol. 49. P. 979–990.
- [3] Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. Providence, RI: AMS, 1978. (CBMS Regional Conference Series in Math.; Vol. 38).
- [4] Гринес В. З., Лауденбах Ф., Починка О. Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами // Матем. заметки. 2009. Т. 86, вып. 2. С. 175–183.
- [5] Grines V., Laudenbach F., Pochinka O. Self-indexing function for Morse — Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Mosc. Math. J. 2009. № 4. P. 801–821.
- [6] Гринес В. З., Лауденбах Ф., Починка О. В. Динамически упорядоченная энергетическая функция для диффеоморфизмов Морса — Смейла на 3-многообразиях // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 34–48.
- [7] Гринес В. З., Жужома Е. В. Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // Известия РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, № 2. С. 3–66.
- [8] Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. М. — Ижевск: РХД, 2011.
- [9] Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors // Trans. AMS. 2005. Vol. 357, № 2. P. 617–667.
- [10] Hirsch M., Pugh C., Shub M. Invariant manifolds. Berlin — New York: Springer-Verlag, 1977. (Lecture Notes in Math.; Vol. 583).
- [11] Mañé R. A proof of C^1 stability conjecture // Publ. Math. IHES. 1988. Vol. 66. P. 161–210.
- [12] Meyer K. R. Energy functions for Morse — Smale systems // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. P. 1031–1040.
- [13] Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
- [14] Pixton D. Wild unstable manifolds // Topology. 1977. Vol. 16, № 2. P. 167–172.
- [15] Плькин Р. В. О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла // Матем. сб. 1971. Т. 84, № 2. С. 301–312.
- [16] Плькин Р. В. Источники и стоки A -диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб. 1974. Т. 23. С. 223–253.
- [17] Plykin R. V. Hyperbolic attractors of codimension one // Topology (Leningrad, 1982). Berlin: Springer, 1984. (Lecture Notes in Math.; Vol. 1060). P. 348–354.

- [18] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. М.: Факториал, 1998.
- [19] Robinson C. Structural stability of C^1 diffeomorphisms // J. Diff. Equat. 1976. Vol. 22, №1. P. 28–73.
- [20] Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics and chaos. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999. (Studies in Advanced Math.).
- [21] Smale S. On gradient dynamical systems // Ann. Math. (2). 1961. Vol. 74. P. 199–206.
- [22] Smale S. Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms // Ann. Scuola Norm. Pisa. 1963. Vol. 17. P. 97–116.
- [23] Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, вып. 1(151). С. 113–185.
- [24] Wilson F. Wesley Jr., Yorke James A. Lyapunov functions and isolating blocks // J. Diff. Equat. 1973. Vol. 13. P. 106–123.
- [25] Жужома Е. В., Медведев В. С. О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях // Матем. сб. 2002. Т. 193(6). С. 83–104.

Вячеслав Зигмундович Гринес
ННГУ им. Н. И. Лобачевского, кафедра
численного и функционального анализа
НИУ ВШЭ, кафедра
фундаментальной математики
E-mail: vgrines@yandex.ru

Представлено в редакцию 03.01.2015/13.03.2015

Марина Константиновна Носкова
ННГУ им. Н. И. Лобачевского, кафедра
численного и функционального анализа
E-mail: mknoskova@yandex.ru

Ольга Витальевна Починка
НИУ ВШЭ, кафедра
фундаментальной математики
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

Symmetric band complexes of thin type and chaotic sections which are not quite chaotic

I. Dynnikov, A. Skripchenko

In a recent paper we constructed a family of foliated 2-complexes of thin type whose typical leaves have two topological ends. Here we present simpler examples of such complexes that are, in addition, symmetric with respect to an involution and have the smallest possible rank. This allows for constructing a 3-periodic surface in the three-space with a plane direction such that the surface has a central symmetry, and the plane sections of the chosen direction are chaotic and consist of infinitely many connected components. Moreover, typical connected components of the sections have an asymptotic direction, which is due to the fact that the corresponding foliation on the surface in the 3-torus is not uniquely ergodic.

References: 25 entries. *UDK:* 515.162. *MSC2010:* 57R30, 37E05, 37E25. *Keywords:* band complex, Rips machine, Rauzy induction, measured foliation, ergodicity.

*On the occasion
of Yu. Ilyashenko's 70th birthday*

1. INTRODUCTION

Our motivation for this work came from the problem about the asymptotic behavior of plane sections of triply periodic surfaces in \mathbb{R}^3 posed by S. P. Novikov in [18] in connection with conductivity theory in monocrystals. The physical model where such sections appeared was studied by I. M. Lifshitz and his school in 1950–60s. The surface in the model is the Fermi surface of a normal metal and is defined as the level surface of the dispersion law in the space of quasimomenta, which topologically is a 3-torus. The Fermi surface of a metal can also be considered as a 3-periodic surface in the 3-space.

The model is designed to study the conductivity in a monocrystal at low temperature under the influence of a constant and uniform magnetic field H . According to the model the trajectories of electron's quasimomentum are connected components of the sections of the Fermi surface by planes perpendicular to H .

Novikov suggested to study plane sections of general null-homologous surfaces in the 3-torus and asked what asymptotic properties the unbounded connected components of such sections may have. The problem can be considered as one about a foliation induced by a closed 1-form on a closed oriented surface, but as such it is very specific as there are serious restrictions on the cohomology class of the 1-form.

We thank our anonymous referee for careful reading of our paper and a number of helpful remarks. The first author is supported in part by Russian Foundation for Basic Research (grant no. 13-01-12469). The second author is partially supported by Lavrentiev Prix and by the Dynasty Foundation.

The first result in this area was obtained by A. Zorich who discovered what is now called the integrable case [23]. It was shown later by I. Dynnikov that generically either the integrable case occurs or there are no open trajectories (trivial case) [7].

For non-generic vectors H whose components are dependent over \mathbb{Z} , S. Tsarev constructed examples that do not fit into the trivial or integrable case, though minimal components of the induced foliation on the Fermi surface were of genus 1, see [8]. A situation in which the foliation has a single minimal component of genus 3 and H is completely irrational was discovered by I. Dynnikov in [8]. Such examples are now referred to as chaotic.

Physical implications from different types of dynamics of the trajectories for the conductivity tensor are discussed in [15, 16].

After the work [9], where the construction of [8] was reformulated in different terms, it became clear that the main instrument for studying chaotic examples coincided with a particular case of an object that was well known in the geometric group theory and the theory dynamical systems under the name of band complex, which is a measured foliated 2-complex of certain type. The theory of such complexes was developed by E. Rips, see [3]. In a sense, constructing examples with chaotic dynamics in Novikov's problem is equivalent to constructing band complexes of thin type consisting of three bands.

Several years ago A. Maltsev drew first author's attention to the fact that a Fermi surface of any monocrystal is always centrally symmetric. So, it is natural to single out the case when our surface has such a symmetry. For the corresponding band complexes this means that they must be invariant under an involution flipping the transverse orientation of the foliation. Symmetric band complexes of thin type, which give examples of chaotic dynamic on a centrally symmetric surface, are constructed by A. Skripchenko in [19].

The behavior of chaotic trajectories in Novikov's problem is not well understood in general. One of the interesting questions is how many trajectories may lie in a single plane. In the theory of band complexes of thin type this is related to the question about the number of topological ends of a typical leaf. A single topological end would imply a single connected component of a typical chaotic section, and two topological ends would imply infinitely many components (see [9], [20]). This question about possible typical leaf structure of thin type band complexes is also interesting on its own.

Before recently only examples of thin type band complexes had been known in which almost all leaves had exactly one topological end [3, 4, 20]. In [10] we described the reason for that, which was the self-similarity of the known examples, and constructed examples of thin type band complexes having two-ended typical leaves. Those examples did not obey any symmetry, and it was not clear for a while whether additional symmetry would be an obstruction for a band complex to have two-ended typical leaves.

Here we show that not only symmetry but also a certain degeneracy is not an obstruction (see Theorem 1). Quite surprisingly, the phenomenon can be observed for band complexes that are related to the so called regular skew polyhedron $\{4, 6 \mid 4\}$, a surface for which the set of all chaotic regimes was explicitly described by I. Dynnikov and R. de Leo in [6]. Our construction here appears to be even simpler than in [10].

We also analyze the corresponding chaotic dynamics on the surface in the 3-torus. We show that the induced flow, though being minimal, decomposes into two ergodic components (see Proposition 5). This appears to be a reason for the existence of an asymptotic direction of the trajectories in \mathbb{R}^3 . In principle, the proofs of these facts, which are given in Section 3, are self-contained and do not use any band complexes. However, band complexes provide for a more intuitive way to understand the origin of the construction, and we start the exposition from introducing them.

2. BAND COMPLEXES

We start by recalling basic definitions.

Definition 1. A *band* is a (possibly degenerate) rectangular

$$\mathcal{B} = [a, b] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2, \quad a \leq b,$$

endowed with the 1-form dx , where x is the first coordinate in the plane \mathbb{R}^2 . The horizontal sides $[a, b] \times \{0\}$ and $[a, b] \times \{1\}$ are called *the bases* of the band; the band is *degenerate* if $a = b$. The value $(b - a)$ is called *the width* of the band.

Definition 2. A *band complex* is a 2-complex X endowed with a closed 1-form ω obtained from a union D of pairwise disjoint closed (possibly degenerate to a point) intervals of \mathbb{R} , called *the support multi-interval* of X , and several pairwise disjoint bands $\mathcal{B}_i = [a_i, b_i] \times [0, 1]$ by gluing each base of every band isometrically and preserving the orientation to a closed subinterval of D . The form ω is the one whose restriction to each band and to D is dx , so, we keep using notation dx for it.

The 1-form dx defines a *singular foliation* \mathcal{F}_X on X whose *leaves* are maximal path connected subsets of X the restriction of dx to which vanishes. *Singularities* of \mathcal{F}_X are such points $p \in X$ that the restriction of \mathcal{F}_X to any open neighborhood of p is not a fibration over an open interval. It is easy to see the set of singular points is the union of vertical sides of all the bands. Leaves containing a singularity are called *singular*, and otherwise *regular*.

A band complex Y is called *annulus free* if all regular leaves are simply connected.

Definition 3. The dimension

$$\dim_{\mathbb{Q}} \left\{ \int_c dx; c \in H_1(X, \text{sing}(X); \mathbb{Z}) \right\},$$

where $\text{sing}(X)$ is the set of all singularities of \mathcal{F}_X , is called the *rank* of a band complex X and denoted $\text{rank}(X)$.

Remark 1. Our definition of a band complex is less general than appears in geometric group theory as an instrument for describing actions of free groups on \mathbb{R} -trees (see [3] for details). Band complexes also appear as suspension complexes for a generalization of interval exchange transformations (more precisely, it is an analogue of Veech's construction of zippered rectangles, see [21]).

Definition 4. Let Y_1 and Y_2 be band complexes with support multi-intervals D_1 and D_2 , respectively. We say that they are *isomorphic* if there is a homeomorphism $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ (called then an *isomorphism from Y_1 to Y_2*) such that we have $f^*(dx) = dx$. If, additionally, Y_1 has minimal possible number of bands among all band complexes isomorphic to Y_2 and we have $f(D_1) \subset D_2$, then the image $f(\mathcal{B})$ of any band \mathcal{B} of Y_1 is called a *long band* of Y_2 .

Definition 5. A band complex X is *symmetric* if there exists an involution $\tau: X \rightarrow X$ such that it takes bands to bands and we have $\tau^*(dx) = -dx$.

Definition 6. An *enhanced band complex* is a band complex Y together with an assignment of a positive real number to each band. This number is called *the length of the band*.

A band of width w and length ℓ is said to *have dimensions $w \times \ell$* . The product $w\ell$ will be referred to as *the area* of the band. *The length* of a long band \mathcal{B} is the sum of the lengths of all bands contained in \mathcal{B} .

Each band \mathcal{B} of an enhanced band complex Y will be endowed with the measure μ_Y obtained from the standard Lebesgue measure on $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ by a rescaling so as to have the total measure of \mathcal{B} equal to its area.

Two enhanced band complexes Y_1 and Y_2 are *isomorphic* if there exist an isomorphism $Y_1 \rightarrow Y_2$ that preserves the lengths of long bands.

Definition 7. Let Y be an enhanced band complex with support multi-interval D . A *free arc* of Y is a maximal open interval $J \subset D$ such that it is covered by one of the bases of bands, and all other bases are disjoint from J .

Let J be a free arc and $\mathcal{B} = [a, b] \times [0, 1]$ be the band one of whose bases covers J under the attaching map. Let $(c, d) \subset [a, b]$ be the subinterval such that $(c, d) \times \{0\}$ or $(c, d) \times \{1\}$ is identified with J in Y . Let Y' be the band complex obtained from Y by removing J from D , and $(c, d) \times [0, 1]$ from \mathcal{B} thus replacing \mathcal{B} with two smaller bands $\mathcal{B}' = [a, c] \times [0, 1]$ and $\mathcal{B}'' = [d, b] \times [0, 1]$ whose bases are attached to D by the restriction of the attaching maps for the bases of \mathcal{B} . If this produces an isolated point of D such that only one degenerate band is attached to it (which may occur if $a = c$ or $b = d$), the point and the band are removed. We then say that Y' is obtained from Y by a *collapse from a free arc*, see Fig. 1.

If Y is an enhanced band complex then the lengths of \mathcal{B}' and \mathcal{B}'' are set to that of \mathcal{B} .

Definition 8. An annulus free band complex Y is said to be of *thin type* if the following two conditions hold:

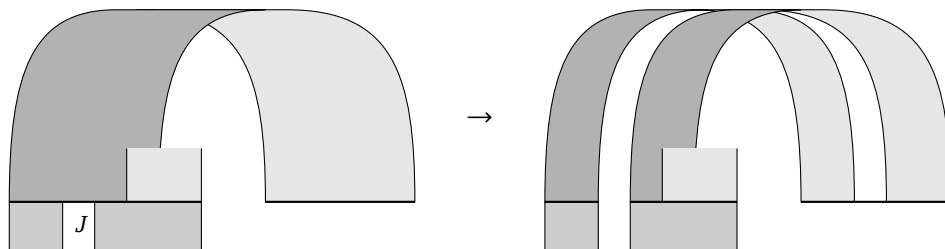


FIG. 1. COLLAPSE FROM A FREE ARC

- (1) every leaf of the foliation \mathcal{F}_Y is everywhere dense in Y ;
- (2) there is an infinite sequence $Y_0 = Y, Y_1, Y_2, \dots$ in which every $Y_i, i \geq 1$, is a band complex obtained from Y_{i-1} by a collapse from a free arc (such a sequence is said to be produced by the Rips machine).

Remark 2. Again, we use a particular case of a more general notion of a band complex of thin type, which need not necessarily be annulus free. For a full description of the Rips machine see [3].

From the general theory of the Rips machine [3] one can extract the following.

Proposition 1. *Let Y be a band complex made of three bands. Then the following conditions are equivalent:*

- (1) Y is of thin type;
- (2) all leaves of \mathcal{F}_Y are infinite trees that are not quasi-isometric to a straight line;
- (3) there are uncountably many leaves of \mathcal{F}_Y that are not quasi-isometric to a point, to a straight line, or to a plane.

The first example of a band complex of thin type was constructed by Levitt [14].

In [11] D. Gaboriau asked a question about possible number of topological ends of orbits (or, equivalently, leaves) in the thin case. It was noted by M. Bestvina and M. Feighn in [3] and D. Gaboriau in [11] that all but finitely many leaves of a band complex of thin type are quasi-isometric to infinite trees with at most two topological ends, and shown that one-ended and two-ended leaves are always present and, moreover, there are uncountably many leaves of both kinds.

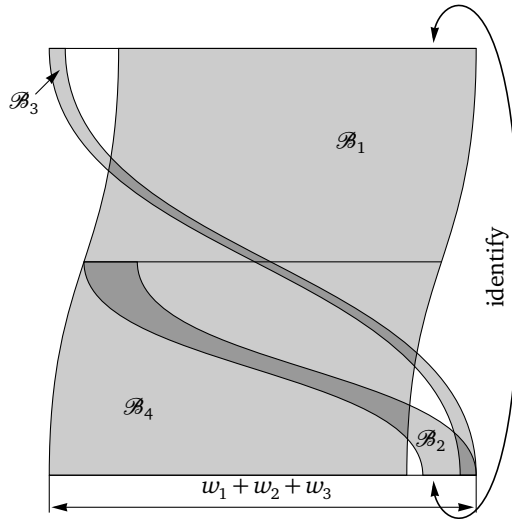
In [10] we constructed the first example when almost all orbits are trees with exactly two topological ends. However, due to the physical origin of our problem we are also interested to see if such band complexes exist among symmetric ones.

Below we construct an example with the required symmetry and, in addition, the highest possible level of degeneracy (all singularities are contained in just two singular leaves). The rank of the complex in our example is equal to 3, the smallest possible as one can show.

More precisely, we have the following

Theorem 1. *There exist uncountably many symmetric band complexes Y such that:*

- (1) Y consists of 3 bands;

FIG. 2. THE BAND COMPLEX $Z(\vec{w}, \vec{\ell})$

- (2) Y has rank 3;
- (3) Y is of thin type;
- (4) almost any leaf \mathcal{F}_Y is a 2-ended tree.

This theorem will be derived from Proposition 2 below and use the construction of the band complex $Z(\vec{w}, \vec{\ell})$ we now proceed with.

We use notation $\vec{\ell}, \vec{\ell}', \vec{\ell}_k, \vec{w}, \vec{w}'$ and \vec{w}_k for

$$(\ell_1 \ \ell_2 \ \ell_3 \ \ell_4), (\ell'_1 \ \ell'_2 \ \ell'_3 \ \ell'_4), (\ell_{k1} \ \ell_{k2} \ \ell_{k3} \ \ell_{k4}), \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}, \text{ and } \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \\ w_{3k} \end{pmatrix},$$

respectively. All the coordinates of these columns and rows will be positive reals.

Let $Z(\vec{w}, \vec{\ell})$ be an enhanced band complex shown in Fig. 2. It consists of four bands $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$, and \mathcal{B}_4 having dimensions $w_1 \times \ell_1, w_2 \times \ell_2, w_3 \times \ell_3$, and $w_4 \times \ell_4$, respectively.

Now we define:

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B(k) = \begin{pmatrix} k & k & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

We identify matrices and the linear transformations they define.

Denote: $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Lemma 1. Let $\vec{\ell}, \vec{\ell}' \in (\mathbb{R}_+)^4, \vec{w}, \vec{w}' \in (\mathbb{R}_+)^3$ be related as follows:

$$\vec{\ell} A(k) = \vec{\ell}', \quad \vec{w} = B(k) \vec{w}',$$

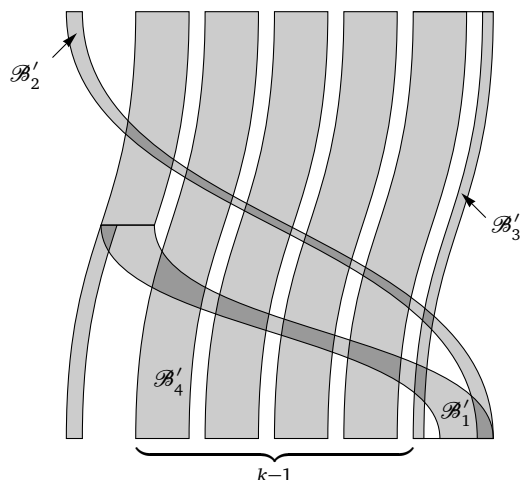


FIG. 3. RUNNING THE RIPS MACHINE

where k is natural number. Then the enhanced band complex $Z(\vec{w}', \vec{\ell}')$ is isomorphic to one obtained from $Z(\vec{w}, \vec{\ell})$ by several collapses from a free arc.

Proof. It is illustrated in Fig. 3, where the result of the collapses is shown. One can see that the obtained band complex is isomorphic to $Z(\vec{w}', \vec{\ell}')$, and \mathcal{B}'_i , $i = 1, 2, 3, 4$, are the new bands. \square

Lemma 2. Let k_0, k_1, k_2, \dots be an arbitrary infinite sequence of natural numbers. Then there exists an infinite sequence $\vec{w}_0, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots$ of points from $(\mathbb{R}_+)^3$ such that

$$\vec{w}_i = B(k_i)\vec{w}_{i+1}.$$

Such a sequence is unique up to scale.

Proof. Let $K = \mathbb{R}_+^3$ be the positive cone in the three-space and let $K' = \{\vec{w} \in K; w_3 < w_1 + w_2\}$. For any $k, l, m \in \mathbb{N}$ we have

$$B(k)B(l)B(m) = B'(k, l, m)B'',$$

where

$$B'(k, l, m) = \begin{pmatrix} k(l-1)+1 & k(l(m-1)+m) & 2k-1 \\ l-1 & l(m-1)+1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$B'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

is a constant matrix. One can verify that

$$B''(\bar{K}) \subset \bar{K}', \quad B''(\bar{K}') \subset K', \quad B'(k, l, m)(K') \subset K'$$

for any $k, l, m \in \mathbb{N}$. It follows that the linear map B'' restricted to K' is a contraction in the Hilbert projective metric (e. g., see [17] for the definition and basic

properties), and the linear map defined by $B'(k, l, m)$ does not expand in this metric for any $k, l, m \in \mathbb{N}$. Therefore, the intersection

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B(k_1) \dots B(k_{3i})(K)$$

is a single open ray in K' . The claim follows. \square

Remark 3. In [10] a flaw occurs in the proof of Lemma 14, where a similar argument is used. A 6×6 matrix $B(m, n)$ depending on two parameters arises there. The decomposition of $B(m, n)$ that is given there does not work as proposed. One should use the following decomposition instead:

$$B(m_1, n_1)B(m_2, n_2) = B'(m_1, n_1, m_2, n_2)B'',$$

where

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

The matrix B'' has only positive entries, so it defines a contraction of the positive cone $(\mathbb{R}_+)^5$ with respect to the Hilbert projective metric. It is a direct check that the matrix $B'(m_1, n_1, m_2, n_2)$ has only non-negative entries, so, the corresponding linear map does not expand the Hilbert metric.

Let $\vec{\ell}_0 = (1, 1, 1, 1)$, and let \vec{w}_0 be as in Lemma 2. Define recursively

$$\vec{\ell}_{i+1} = \vec{\ell}_i \cdot A(k_i). \quad (2)$$

Proposition 2. *For any sequence k_0, k_1, k_2, \dots of natural numbers the band complex $Z(\vec{w}_0, \vec{\ell}_0)$ defined above is annulus free and of thin type.*

If, in addition, for all $i \geq 0$, we have $k_{i+1} \geq 2k_i$, then the union of leaves in $Z(\vec{w}_0, \vec{\ell}_0)$ that are not two-ended trees has zero measure.

Proof. First, we show that $Z(\vec{w}_0, \vec{\ell}_0)$ is annulus free. One can see from (1) and (2) that all entries of $\vec{\ell}_i$ grow without bound with i . On the other hand, the length of any loop contained in a leaf of $\mathcal{F}_{Z(\vec{w}_0, \vec{\ell}_0)}$ is preserved by the Rips machine and should remain fixed. Therefore, all the leaves of $\mathcal{F}_{Z(\vec{w}_0, \vec{\ell}_0)}$ are simply connected.

Now verify that $Z(\vec{w}_0, \vec{\ell}_0)$ is of thin type. The condition (2) of Definition 8 is satisfied by Lemma 1 and by construction of \vec{w}_0 , so we need only to check that any leaf of $\mathcal{F}_{Z(\vec{w}_0, \vec{\ell}_0)}$ is everywhere dense. By Imanishi's theorem (see [13] and [12]) the converse would imply the existence of an arc connecting two singularities of \mathcal{F}_Y through the regular part of a singular leaf. Such an arc can get only shorter under a collapse from a free arc, which is inconsistent with the infinite growth of all band lengths.

Now we prove the last claim of the Proposition. Denote for short:

$$A_i = A(k_i), \quad B_i = B(k_i), \quad Z_i = Z(\vec{w}_i, \vec{\ell}_i).$$

It follows from Lemma 1 that Z_{i+1} can be identified with an enhanced band complex Z_i obtained from Z_i by a few collapses from a free arc. So, we think of Z_{i+1} as a subset of Z_i and, hence, of Z_0 .

Denote by S_k the total area of Z_i :

$$S_i = \vec{\ell}_i \cdot C \cdot \vec{w}_i,$$

where

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We claim that under the assumptions of the Proposition we have

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_i > 0. \quad (3)$$

Indeed, it can be checked directly that the matrix

$$\left(A_i C - \left(1 - \frac{2}{k_i} \right) C B_i \right) B_{i+1}$$

has only positive entries for all $i \geq 0$ since they can be expressed as polynomials in k_i and $(k_{i+1} - 2k_i)$ with positive coefficients. Therefore,

$$S_{i+1} - \left(1 - \frac{2}{k_i} \right) S_i = \vec{\ell}_i \left(A_i C - \left(1 - \frac{2}{k_i} \right) C B_i \right) B_{i+1} \vec{w}_{i+2} > 0,$$

which can be rewritten as

$$S_{i+1} > \left(1 - \frac{2}{k_i} \right) S_i.$$

Since k_i grows exponentially fast with i , we have $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{k_i} < \infty$, which implies (3).

By definition of a collapse from a free arc the measure $\mu_{Z_{i+1}}$ (see Definition 8) coincides with the restriction of μ_{Z_i} , and hence of μ_{Z_0} , to Z_{i+1} . So, $\lim_{i \rightarrow \infty} S_i$ equals $\mu_{Z_0}(\bigcap_i Z_i)$. By general theory of band complexes (see [3]) the subset $\bigcap_i Z_i \subset Z_0$ has an empty intersection with one-ended leaves of \mathcal{F}_{Z_0} . Therefore, the union of two-ended leaves of \mathcal{F}_{Z_0} has positive measure. Lemma 2 implies “a unique ergodicity” for \mathcal{F}_{Z_0} , and hence ergodicity of \mathcal{F}_{Z_0} with respect to the transverse measure $|dx|$. This means that any measurable union of leaves of \mathcal{F}_{Z_0} has either zero or full measure with respect to μ_{Z_0} . We conclude that the union of two-ended leaves has full measure. \square

Proof of Theorem 1. Let $Z(\vec{w})$ be a band complex with support interval $D = [0, w_1 + w_2 + w_3]$ and three bands $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ whose bases are glued to the following subintervals of D :

$$\mathcal{B}_1: \text{ to } [0, w_1] \text{ and } [w_2 + w_3, w_1 + w_2 + w_3],$$

$$\mathcal{B}_2: \text{ to } [0, w_2] \text{ and } [w_1 + w_3, w_1 + w_2 + w_3],$$

$$\mathcal{B}_3: \text{ to } [0, w_3] \text{ and } [w_1 + w_2, w_1 + w_2 + w_3].$$

So, the band complex $Z(\vec{w})$ can be obtained from the enhanced band complex $Z(\vec{w}, \vec{\ell})$ by collapsing the band \mathcal{B}_4 and forgetting the lengths of the bands. More

precisely, there is a continuous map $\psi: Z(\vec{w}, \vec{\ell}) \rightarrow Z(\vec{w})$ that preserves the 1-form dx and takes the bands $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ of $Z(\vec{w}, \vec{\ell})$ to the respective bands of $Z(\vec{w})$ and takes \mathcal{B}_4 to a subinterval of D . Clearly the map ψ takes leaves to leaves and preserve the quasi-isometry and homotopy class of each leaf. It is also clear that $Z(\vec{w})$ is symmetric with respect to the involution that flips the support interval D .

It follows from Proposition 2 that there are uncountably many choices of parameters \vec{w} for which almost all leaves of $Z(\vec{w})$ are two-ended trees. \square

3. PLANE SECTIONS OF THE REGULAR SKEW POLYHEDRON $\{4, 6 | 4\}$

We recall briefly the formulation of Novikov's problem on plane sections of 3-periodic surfaces. Let M be a closed null-homologous surface in the 3-torus $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L$, where $L \cong \mathbb{Z}^3$ is a lattice, and let $H = (H_1, H_2, H_3) \in \mathbb{R}^3$ be a non-zero vector. We denote by p the projection $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, and by $\widehat{M} \subset \mathbb{R}^3$ the \mathbb{Z}^3 -covering $p^{-1}(M)$ of M . We also fix a smooth function $f: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ of which M is a level surface, $M = \{x \in \mathbb{T}^3; f(x) = c\}$.

Non-singular connected components of the intersection of \widehat{M} with a plane of the form

$$\Pi_a = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle H, x \rangle = a\}, \quad (4)$$

where \langle, \rangle stands for the Euclidean scalar product, are trajectories of the following ODE:

$$\dot{x} = \nabla \widehat{f}(x) \times H, \quad (5)$$

where $\widehat{f} = f \circ p$. Their image in \mathbb{T}^3 under p are leaves of the foliation \mathcal{F}_M on M defined by the kernel of the closed 1-form

$$\eta = (H_1 dx_1 + H_2 dx_2 + H_3 dx_3)|_M. \quad (6)$$

Novikov's question was about the existence of an asymptotic direction of open trajectories defined by (5). As shown in [7] the foliation \mathcal{F}_M typically does not have minimal components of genus larger than one. For open trajectories this implies that they are typically either not present (in which case we call the pair (M, H) *trivial*) or have a *strong asymptotic direction* (then the pair (M, H) is called *integrable*), which means that, for a certain parametrization (not related to the one prescribed by (5)), they have the form

$$x(s) = sv + O(1), \quad (7)$$

where $v \in \mathbb{R}^3$ is a constant vector. There is also a special case discovered by S. Tsarev (see [8]) when minimal components of \mathcal{F}_M have genus one but the trajectories have an asymptotic direction only in the usual, not the strong, sense, i. e. with $o(s)$ instead of $O(1)$ in (7). In Tsarev's case, the vector H is not "maximally irrational", i. e. $\dim_{\mathbb{Q}} \langle H_1, H_2, H_3 \rangle = 2$.

It is, however, possible that \mathcal{F}_M has a minimal component of genus > 1 (as shown in [8] the genus cannot be equal to 2, so " > 1 " actually means " ≥ 3 " here),

see [8]. In this case, the pair (M, H) is called *chaotic* since there is a priori no reason for open trajectories to have an asymptotic direction. If the system is chaotic and uniquely ergodic, then, as A. Zorich notes in [24], trajectories, indeed, cannot have an asymptotic direction. Particular chaotic examples [8, 9, 19] are known in which almost all planes of the form (4) intersect \widehat{M} in a single open trajectory, which, in a sense, wanders around the whole plane [20].

Chaotic pairs (M, H) can be characterized in terms of any of the foliations \mathcal{F}_{N_-} , \mathcal{F}_{N_+} induced by the 1-form $\omega = H_1 dx_1 + H_2 dx_2 + H_3 dx_3$ on the submanifolds $N_- = \{x \in \mathbb{T}^3; f(x) \leq c\}$, $N_+ = \{x \in \mathbb{T}^3; f(x) \geq c\}$, of which M is the boundary. Namely, the following can be extracted from [8]:

Proposition 3. *A pair (M, H) is chaotic if and only if \mathcal{F}_{N_-} (or, equivalently, on \mathcal{F}_{N_+}) has uncountably many leaves that are not quasi-isometric (in the induced intrinsic metric) to a point, to a straight line, or to a plane.*

Since only quasi-isometry class of the leaves matters, one can replace N_- by a foliated 2-complex Z embedded in N_- so that every leaf of Z embeds in a leaf of N_- quasi-isometrically. In the genus 3 case, such a 2-complex can be chosen among band complexes made of 3 bands.

This is how band complexes are related to Novikov's problem in general. Below we demonstrate this relation explicitly in very detail for a single surface, which was also the main subject of [6], where the set of all H 's giving rise to the chaotic case was described. It appeared to be a fractal set discovered earlier by G. Levitt [14] in connection with pseudogroups of rotations and arose also in symbolic dynamics (see [2]). It is shown by A. Avila, A. Skripchenko, and P. Hubert in [1] that the Hausdorff dimension of this set is strictly less than two.

Our 3-periodic surface \widehat{M} is going to be the one consisting of all squares of the form

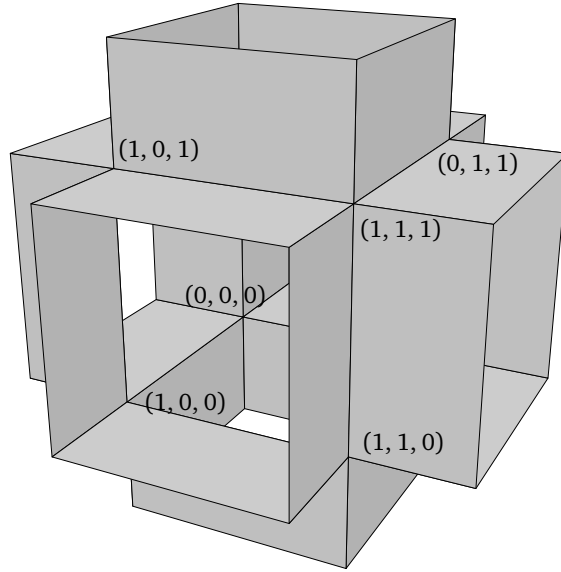
$$\begin{aligned} &\{i\} \times [j, j+1] \times [k, k+1], \\ &[j, j+1] \times \{i\} \times [k, k+1], \\ &[j, j+1] \times [k, k+1] \times \{i\} \end{aligned}$$

with $i, j, k \in \mathbb{Z}$, $j+k \equiv 1 \pmod{2}$.

The fundamental domain of M is shown in Fig. 4. The lattice L is set to $2\mathbb{Z}^3$. One readily checks that $M = \widehat{M}/L$ has genus 3. The surface \widehat{M} is known in the literature as the regular skew polyhedron $\{4, 6|4\}$, see [5].

The reader may protest here since the surface M is PL but not smooth. However, for any fixed H , one can smooth it out so as to keep the topology of the foliation \mathcal{F}_M unchanged. In order to do so it suffices to C^0 -approximate M so as to keep the positions of the two monkey saddle singularities of \mathcal{F}_M fixed (if $H_1, H_2, H_3 > 0$, they occur at points $(0, 0, 0)$ and $(1, 1, 1) \pmod{L}$) and to avoid introducing new singularities.

Remark 4. Our settings here are in a sense opposite to those of [9], where the vector H is fixed and the lattice L and the surface M are being varied.

FIG. 4. A FUNDAMENTAL DOMAIN OF \widehat{M}

Proposition 4. *The band complex $Z(\vec{w})$ introduced in the proof of Theorem 1 is of thin type if and only if the pair (M, H) is chaotic, where*

$$2H = (w_2 + w_3, w_1 + w_3, w_1 + w_2). \quad (8)$$

Note that due to the cubic symmetry of the surface M the pair (M, H) is chaotic if and only if so is $(M, (|H_1|, |H_2|, |H_3|))$. If all H_i 's are positive but don't have the form (8) with positive w_i 's, i. e. don't satisfy the triangle inequalities, then the pair (M, H) is integrable (see [6]).

Proof. For $n \in \mathbb{Z}^3$ we denote:

by $D(n)$ the straight line segment connecting n with $n + (1, 1, 1)$;

by e_1, e_2, e_3 the standard basis of \mathbb{Z}^3 ;

by $\mathcal{S}_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, the parallelogram with vertices

$$\begin{aligned} 2n + \left(1 - \frac{w_i}{w_1 + w_2 + w_3}\right)(1, 1, 1), \quad 2n + (1, 1, 1), \\ 2n + 2e_i + \frac{w_i}{w_1 + w_2 + w_3}(1, 1, 1), \quad 2n + 2e_i, \end{aligned}$$

see Fig. 5;

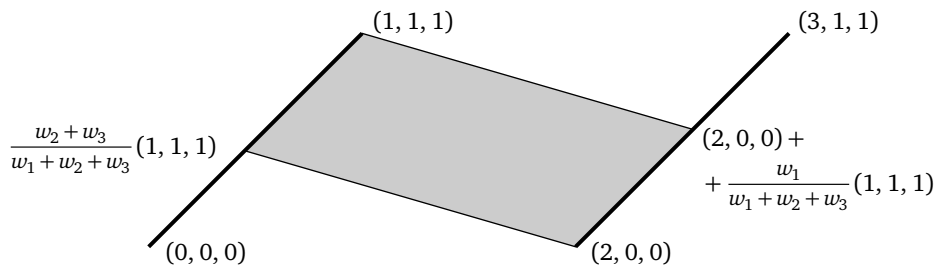
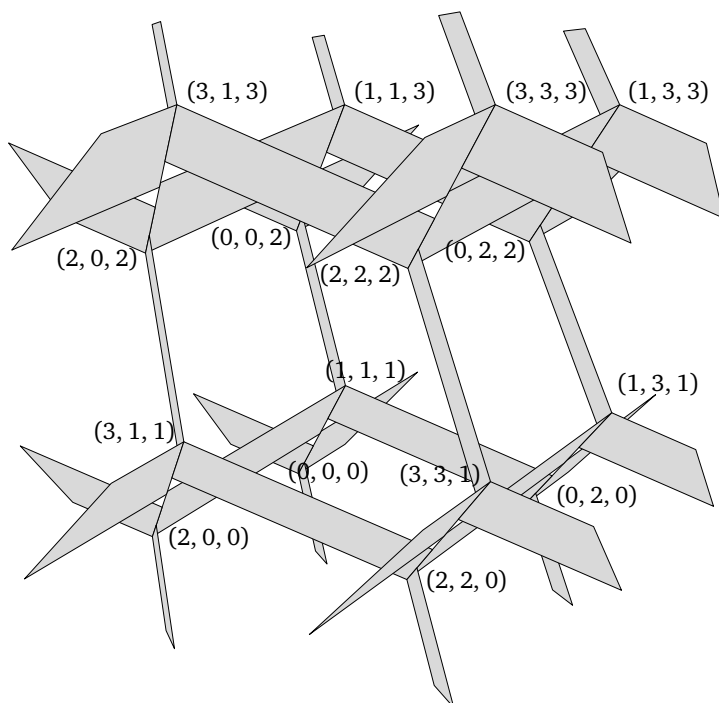
by \widehat{Z} the union

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^3} (D(n) \cup \mathcal{S}_1(n) \cup \mathcal{S}_2(n) \cup \mathcal{S}_3(n))$$

see Figs. 6, 7;

by Z the projection $p(\widehat{Z}) \subset \mathbb{T}^3$;

by \mathbb{A}_0 the unit cube $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$;


 FIG. 5. THE STRIP $S_1(0, 0, 0)$

 FIG. 6. THE 2-COMPLEX \widehat{Z}

by $\mathfrak{C}_0(n)$ the cube $\mathfrak{C}_0 + 2n$;

by $\mathfrak{C}_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, the cube $\mathfrak{C}_0 + e_i + 2n$;

by \widehat{N}_- the union

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^3} (\mathfrak{C}_0(n) \cup \mathfrak{C}_1(n) \cup \mathfrak{C}_2(n) \cup \mathfrak{C}_3(n));$$

by \widehat{N}_+ the subset \widehat{N}_+ shifted by the vector $(1, 1, 1)$;

and by N_- (respectively, N_+) the projection $p(\widehat{N}_-) \subset \mathbb{T}^3$ (respectively, $p(\widehat{N}_+)$).

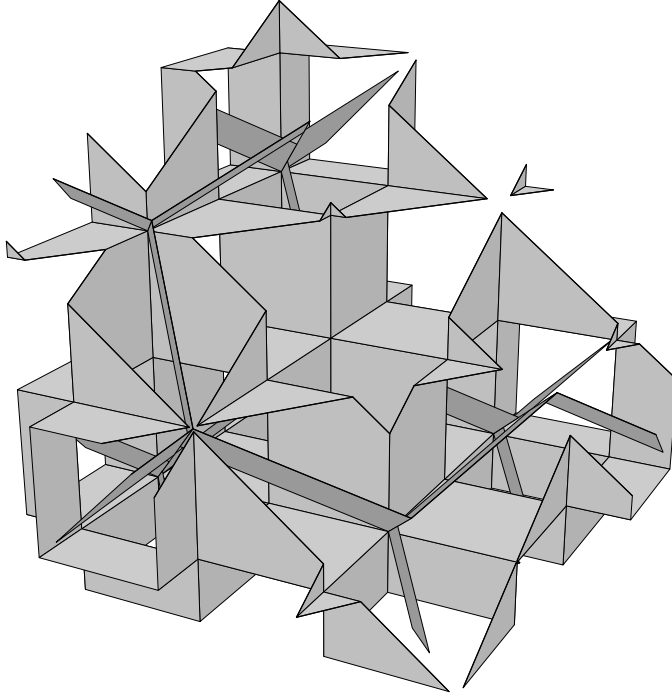


FIG. 7. THE SURFACE \widehat{M} AND THE 2-COMPLEX \widehat{Z} CUT BY A PLANE Π_a

One can readily check the following:

$$N_- \cap N_+ = \partial N_- = \partial N_+ = M, \quad N_- \cup N_+ = \mathbb{T}^3;$$

$$D(n) \subset \mathbb{D}_0(n) \text{ and } \mathcal{S}_i(n) \subset \mathbb{D}_0(n) \cup \mathbb{D}_i(n) \cup \mathbb{D}_0(n + e_i) \text{ for all } n \in \mathbb{Z}^3;$$

the two sides of each $\mathcal{S}_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{Z}^3$, that are not parallel to $(1, 1, 1)$ are orthogonal to H ;

the intersection $\Pi_a \cap \mathbb{D}_0(n)$ is non-empty if and only if so is $\Pi_a \cap D(n)$;

the interiors of all the cubes $\mathbb{D}_i(n)$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $n \in \mathbb{Z}^3$ are pairwise disjoint;

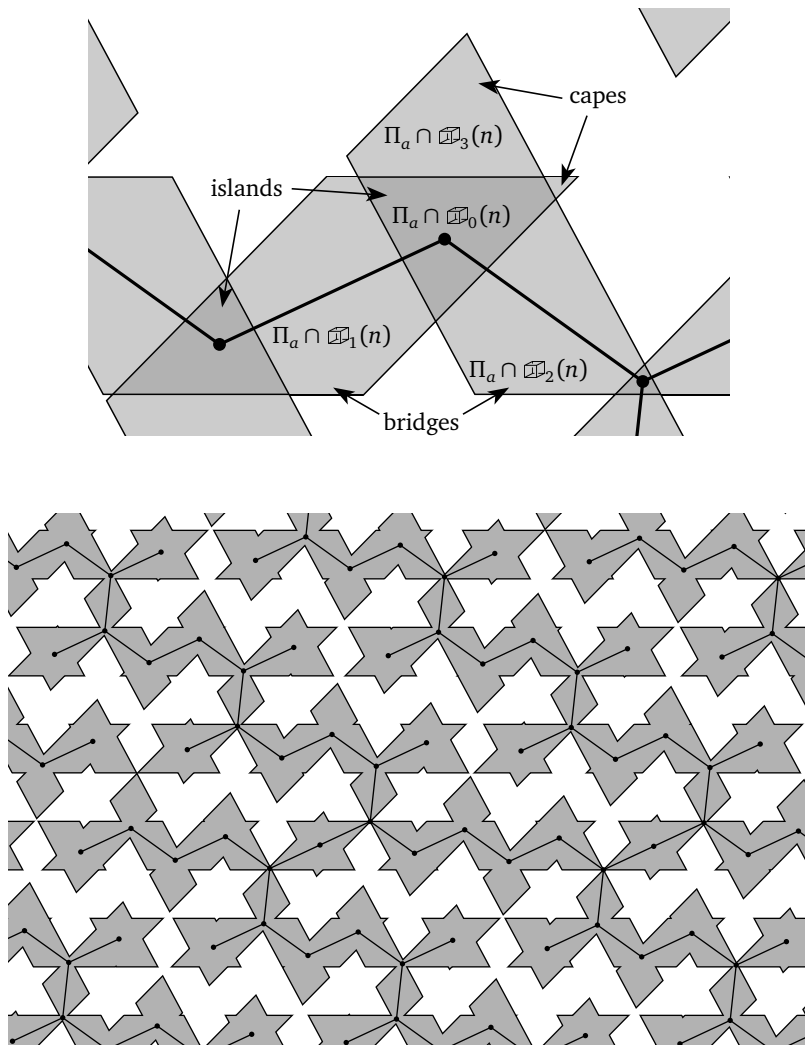
each $\mathbb{D}_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{Z}^3$ shares a face with $\mathbb{D}_0(n)$ and with $\mathbb{D}_0(n + e_i)$, and the rest of the boundary of $\mathbb{D}_i(n)$ is disjoint from all other cubes $\mathbb{D}_j(m)$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \mathbb{Z}^3$;

the boundary of the polygon $\Pi_a \cap \mathbb{D}_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, has non-empty intersection with those of $\Pi_a \cap \mathbb{D}_0(n)$ and $\Pi_a \cap \mathbb{D}_0(n + e_i)$ which are not empty;

the intersection $\Pi_a \cap S_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, is a straight line segment connecting $\Pi_a \cap D(n)$ and $\Pi_a \cap D(n + e_i)$ if $\Pi_a \cap D(n) \neq \emptyset \neq \Pi_a \cap D(n + e_i)$, and otherwise empty.

Thus the intersection $\Pi_a \cap \widehat{Z}$ is a graph Γ_a with the set of vertices

$$\Pi_a \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^3} D(n) \right).$$


 FIG. 8. THE INTERSECTIONS $\Pi_a \cap \widehat{N}_-$ AND $\Pi_a \cap \widehat{Z}$

The intersection $\Pi_a \cap \widehat{N}_-$ has the following structure. It contains the union of disjoint discs (some may be degenerate to a point)

$$\Pi_a \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^3} \widehat{\mathbb{D}}_0(n) \right)$$

in each of which there is a single vertex of Γ_a . We call these discs *islands*.

The whole intersection $\Pi_a \cap \widehat{N}_-$ is obtained from the union of islands by attaching disks of the form $\Pi_a \cap \widehat{\mathbb{D}}_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{Z}^3$. Among such disks there are

some whose boundary has a single connected component of intersection with an island. We call such disks *capes*. An island with all adjoint capes attached is still a disk containing a single vertex of Γ_a .

The boundary of any disk of the form $\Pi_a \cap \mathbb{D}_i(n)$ that is not a cape has exactly two connected components in common with islands. We call such a disk a *bridge*.

One can see that two islands are connected by a bridge if and only if the corresponding vertices of Γ_a are connected by an edge, see Fig. 8. Since all islands, capes, and bridges have uniformly bounded diameter the inclusion of any component of Γ_a into the corresponding component of $\Pi_a \cap \widehat{N}_-$ is a quasi-isometry.

Connected components of $\Pi_a \cap \widehat{N}_-$ and of Γ_a project under p onto leaves of \mathcal{F}_{N_-} and \mathcal{F}_Z , respectively. The claim now follows from Propositions 1 and 3. \square

Proposition 5. *Let k_0, k_1, \dots be a sequence of natural numbers such that the series $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k_i}$ converges. Let $\vec{w}_0, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots$ be defined as in Lemma 2 and*

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{w}_0.$$

Then:

- (1) *the pair (M, H) is chaotic;*
- (2) *the foliation \mathcal{F}_M is not ergodic with respect to the transverse measure $|\eta|$ defined by the 1-form (6), there are two ergodic components;*
- (3) *almost all connected components of the sections $\Pi_a \cap \widehat{M}$ have an asymptotic direction, which is, up to sign, common for all of them.*

Proof. The first claim follows from Propositions 2 and 4. It is also a corollary to Lemma 3 below.

Let ξ be an oriented simple arc transverse to \mathcal{F}_M such that $a = \int_{\xi} \eta > 0$. For any $b \in (0, a]$ we denote by $\xi(b)$ the initial subarc of ξ such that $\int_{\xi(b)} \eta = b$.

Let $\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2, \widehat{\xi}_3$ be the transversals of $\mathcal{F}_{\widehat{M}}$, starting at $(0, 0, 0)$ composed of the following straight line segments

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_1 &: [(0, 0, 0), (0, 0, 1)] \cup [(0, 0, 1), (0, 1, 1)], \\ \widehat{\xi}_2 &: [(0, 0, 0), (1, 0, 0)] \cup [(1, 0, 0), (1, 0, 1)] \cup [(1, 0, 1), (1, 1, 1)], \\ \widehat{\xi}_3 &: [(0, 0, 0), (0, 1, 0)] \cup [(0, 1, 0), (1, 1, 0)] \cup [(1, 1, 0), (1, 1, 1)], \end{aligned}$$

and let $\xi_i = p(\widehat{\xi}_i)$, $i = 1, 2, 3$. We have

$$\int_{\xi_1} \eta = w_{10} + \frac{w_{20} + w_{30}}{2}, \quad \int_{\xi_2} \eta = \int_{\xi_3} \eta = w_{10} + w_{20} + w_{30},$$

so we have $\int_{\xi_i} \eta > w_{10}$ for all $i = 1, 2, 3$.

Let $R(k)$ be the matrix of the following linear transformation of \mathbb{R}^9 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (k-1)(x_2+x_3+x_7+x_8+x_9)+x_7 \\ x_8 \\ x_2+x_9 \\ x_3+x_7 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \\ (k-1)(x_2+x_3+x_7+x_8+x_9)+x_2+x_3+x_7 \\ x_5 \\ x_2+x_3+x_6 \\ (k-1)(x_1+x_2+x_3+x_4+x_8)+x_4 \end{pmatrix}.$$

Lemma 3. *The first return map defined on*

$$\xi_1(w_{1i}) \cup \xi_2(w_{1i}) \cup \xi_3(w_{1i}) \quad (9)$$

by the foliation \mathcal{F}_M (for a proper orientation of leaves) endowed with the invariant measure $|\eta|$ is an interval exchange map with permutation

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 6 & & 4 & 8 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 5 \end{array} \right) \quad (10)$$

and vector of parameters

$$\vec{x}_i = (w_{1i} - w_{2i} - w_{3i}, w_{3i}, w_{2i} - w_{3i}, w_{3i}, w_{2i}, w_{1i} - w_{2i}, w_{3i}, w_{2i}, w_{1i} - w_{2i} - w_{3i})^T. \quad (11)$$

Let μ be another invariant transverse measure for \mathcal{F}_M , and let \vec{y}_i be the vector of parameters of the corresponding interval exchange map induced on the union of transversals (9) (with the same numbering as for \vec{x}_i). Then for all $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ we have

$$\vec{y}_{i+1} = R(k_i)\vec{y}_i, \quad \vec{y}_i \in V. \quad (12)$$

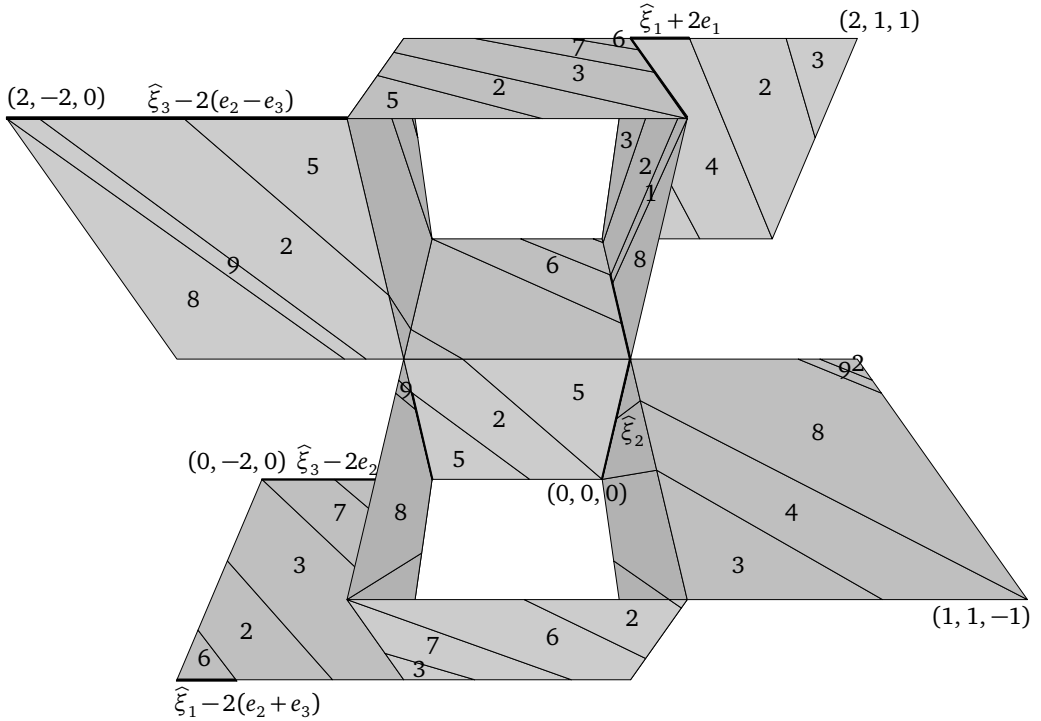
Any sequence $\vec{y}_0, \vec{y}_1, \dots \in \mathbb{R}_+^9$ satisfying (12) defines an invariant transverse measure for \mathcal{F}_M .

We refer the reader to [22] for a detailed account on interval exchange transformations and on the Rauzy — Veech induction. Here we use a slightly modified version of the standard construction by taking a union of three transverse arcs instead of just one. That's why we subdivided each row in (10) into three blocks that correspond to $\xi_1(w_{1k})$, $\xi_2(w_{1k})$, and $\xi_3(w_{1k})$ (not in this order if $k \not\equiv 0 \pmod{3}$).

Proof. Note that by definition of \vec{w}_k we always have $w_{1k} > w_{2k} + w_{3k}$ and $w_{2k} > w_{3k}$.

For $k = 0$ the claim of the Lemma is obtained by a direct routine check. The surface M is cut into 9 strips each foliated by arcs. Preimages of the strips in \mathbb{R}^3 are shown in Fig. 9.

Let $\vec{x} \in V$ and $\vec{y} = R(k)\vec{x}$, $k \in \mathbb{N}$. We claim that we can run the Rauzy — Veech induction starting from the permutation (10) and the vector of parameters \vec{y} so that to obtain after several steps an interval exchange map with the same permutation and the vector of parameters \vec{x} . Relations (14) guarantee that, for any $i = 1, 2, 3$, the sum of parameters corresponding to the i th block is the same for the top and bottom rows of the permutation.

FIG. 9. CUTTING M INTO 9 STRIPS

The procedure will be slightly more general than usually since we are using three transversals instead of one. This simply means that we can exchange the blocks synchronously in both rows, so, the process is not uniquely defined by the initial data. Fig. 10 shows how the Rauzy — Veech induction can be run. The transition between any two subsequent lines is the result of several steps of the ordinary Rauzy — Veech induction with the same winner or just a permutation of blocks. Each line displays the current permutation, the vector of parameters, and relations (if any) used to obtain the subsequent transition.

After reordering parameters in the last line we get the original permutation with the same subdivision into blocks.

It remains to check that vectors \vec{x}_i defined by (11) (written as columns) satisfy

$$\vec{x}_i = R(k_i)\vec{x}_{i+1} \quad (13)$$

for all $i \geq 0$, which is straightforward. \square

Let V be the subset of \mathbb{R}_+^9 defined by the equations

$$x_1 + x_4 - x_6 = x_5 - x_8 = x_7 - x_2. \quad (14)$$

It is invariant under $R(k)$ for any $k > 0$.

$\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 6 & & 4 & 8 & 1 & & \end{array} \right)$	$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9)$	$y_9 = x_4 + (k-1)(y_2 + y_5)$
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 6 & & 4 & 8 & 1 & & \end{array} \right)$	$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, x_4)$	$y_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & & 4 & 8 & 1 & 9 & 2 & 5 \end{array} \right)$	$(y_1, y_2, y_3, y_4, x_1 + x_2 + x_3, y_6, y_7, y_8, x_4)$	
$\left(\begin{array}{cc ccc} 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 6 \\ 9 & 2 & 5 & 3 & 7 & 6 & & 4 & 8 & 1 \end{array} \right)$	$(y_1, y_2, y_3, y_4, x_1 + x_2 + x_3, y_6, y_7, y_8, x_4)$	$y_6 = y_1 + x_2 + x_3$
$\left(\begin{array}{cc ccc} 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 6 \\ 9 & 2 & 5 & 3 & 7 & 6 & 1 & & 4 & 8 \end{array} \right)$	$(y_1, y_2, y_3, y_4, x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, y_7, y_8, x_4)$	$y_8 = x_2 + x_3 + x_6$
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 9 & 2 & 5 & 3 & 7 & 6 & 1 & & 4 & 8 \end{array} \right)$	$(y_1, y_2, y_3, y_4, x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, y_7, x_6, x_4)$	
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 5 & 9 & 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 9 & 2 & 5 & 3 & 7 & 6 & 1 \end{array} \right)$	$(y_1, y_2, y_3, y_4, x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, y_7, x_6, x_4)$	$y_1 = (k-1)(y_2 + y_3 + y_4) + x_7$
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 5 & 9 & 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 9 & 2 & 5 & 3 & 7 & 6 & 1 \end{array} \right)$	$(x_7, y_2, y_3, y_4, x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, y_7, x_6, x_4)$	$y_4 = x_3 + x_7$
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 5 & 9 & 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 8 & 9 & 2 & 5 & 3 & 7 & 6 \end{array} \right)$	$(x_7, y_2, y_3, x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, y_7, x_6, x_4)$	$y_2 = x_8, y_7 = x_5$
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 5 & 9 & 7 & 8 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 9 & 2 & 5 & 3 & 7 & 6 \end{array} \right)$	$(x_7, x_8, y_3, x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_2, x_5, x_6, x_4)$	$y_3 = x_2 + x_9$
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 5 & 9 & 7 & 8 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 9 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{array} \right)$	$(x_7, x_8, x_9, x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_2, x_5, x_6, x_4)$	
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 5 & 9 & 7 & 8 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 9 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{array} \right)$	$(x_7, x_8, x_9, x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_2, x_5, x_6, x_4)$	
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 9 & 7 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 1 & 8 & 9 & 2 & 5 \end{array} \right)$	$(x_7, x_8, x_9, x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_2, x_5, x_6, x_4)$	
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 9 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 1 & 8 & 9 & 2 & 5 \end{array} \right)$	$(x_7, x_8, x_9, x_3, x_1, x_2, x_5, x_6, x_4)$	
$\left(\begin{array}{ccc ccc} 5 & 6 & 4 & 9 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 9 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{array} \right)$	$(x_7, x_8, x_9, x_3, x_1, x_2, x_5, x_6, x_4)$	

FIG. 10. RUNNING THE RAUZY — VEECH INDUCTION

For $i \geq 0$ denote

$$V_i = R(k_0)R(k_1) \dots R(k_i)(V), \quad V_\infty = \bigcap_{i=0}^{\infty} V_i.$$

We obviously have $V \supset V_0 \supset V_1 \supset \dots$

Lemma 4. *The subset V_∞ has the form*

$$V_\infty = \{ \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}; \alpha, \beta \geq 0, (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \} \quad (15)$$

for some non-collinear $\vec{u}, \vec{v} \in V$. They can be chosen so as to have $\vec{x}_0 = \vec{u} + \vec{v}$.

Proof. The matrix $R(k)$ can be written in the form $R(k) = kR' + R''$ with R', R'' not depending on k , in a unique way. By explicit check we get $(R')^4 = (R')^2$. Since the series $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k_i}$ converges this implies that the limit

$$\tilde{R} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{R(k_0)}{k_0} \frac{R(k_1)}{k_1} \dots \frac{R(k_{2i-1})}{k_{2i-1}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(R' + \frac{1}{k_0} R'' \right) \left(R' + \frac{1}{k_1} R'' \right) \dots \left(R' + \frac{1}{k_{2i-1}} R'' \right)$$

exists and satisfies the relation

$$\tilde{R} \cdot (R')^2 = \tilde{R}. \quad (16)$$

The product of six matrices of the form $R(k)$ with $k > 0$ has only positive entries. This implies $(V_i \cup \{0\}) \supset \bar{V}_{i+6}$ and

$$V_\infty \cup \{0\} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \bar{V}_i = \bar{V}_\infty.$$

Together with (16) this gives

$$V_\infty \cup \{0\} = \tilde{R}(\bar{V}) = \tilde{R}R'(\bar{V}).$$

Denote:

$$\vec{u}_\infty = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^\top, \quad \vec{v}_\infty = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^\top.$$

One easily checks the following

$$R'(\bar{V}) = \{\alpha \vec{u}_\infty + \beta \vec{v}_\infty; \alpha, \beta \geq 0\}, \quad R'\vec{u}_\infty = \vec{v}_\infty, \quad R'\vec{v}_\infty = \vec{u}_\infty.$$

Thus, (15) holds for $\vec{u} = \tilde{R}\vec{u}_\infty$, and $\vec{v} = \tilde{R}\vec{v}_\infty$.

The matrix $R(k)$ is invertible for all k , so we can set $\vec{u}_0 = \vec{u}$, $\vec{v}_0 = \vec{v}$

$$\vec{u}_{i+1} = k_i R(k_i)^{-1} \vec{u}_i, \quad \vec{v}_{i+1} = k_i R(k_i)^{-1} \vec{v}_i \quad \text{for } i \geq 0. \quad (17)$$

We will have

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \vec{u}_{2i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \vec{v}_{2i+1} = \vec{u}_\infty, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \vec{v}_{2i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \vec{u}_{2i+1} = \vec{v}_\infty,$$

which implies that \vec{u} and \vec{v} are not collinear.

Now $\vec{x}_0 \in V_\infty$, so, \vec{x}_0 is a non-trivial linear combination $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$. From (13) and (17) we have

$$\vec{x}_{2i} = \frac{1}{\prod_{j=0}^{2i-1} k_j} (\alpha \vec{u}_{2i} + \beta \vec{v}_{2i}).$$

From the definition of \vec{u}_i (see Lemma 2) it follows that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{w_{2i}}{w_{1i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{w_{3i}}{w_{1i}} = 0$$

if $k_i \rightarrow \infty$. Together with (11) this implies

$$\vec{x}_i = w_{1i} ((1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)^\top + o(1)) = w_{1i} (\vec{u}_\infty + \vec{v}_\infty + o(1)), \quad i \rightarrow \infty,$$

hence $\alpha = \beta$, and by rescaling \vec{x}_0 we can make $\alpha = \beta = 1$. □

We can now finalize the proof of Proposition 5. It follows from Lemmas 3 and 4 that \mathcal{F}_M admits two invariant ergodic transverse measures, μ and ν , say, that correspond to the vectors \vec{u} and \vec{v} from Lemma 4, and, for an appropriate normalization, we have $|\eta| = \mu + \nu$. Let $c_\mu, c_\nu \in H_1(M; \mathbb{R})$ be the asymptotic cycles of μ and ν , respectively (see [25] for the definition), and $\mathcal{E}_\mu, \mathcal{E}_\nu$ the respective ergodic components of \mathcal{F}_M .

Denote by ι the inclusion $M \hookrightarrow \mathbb{T}^3$. Since η is a restriction of a closed 1-form in \mathbb{T}^3 , we have

$$\iota_*(c_\mu + c_\nu) = \iota(\eta^*) = 0 \in H_1(\mathbb{T}^3), \quad (18)$$

where $\eta^* \in H_1(M)$ is the Poincaré dual of the cohomology class of η . We claim that $\iota_*(c_\mu) \neq 0 \neq \iota_*(c_\nu)$, which implies the assertion of the Proposition about the existence of an asymptotic direction.

Indeed, suppose on the contrary that $\iota_*(c_\mu) = 0$. Then for any 1-cycle c on M that is null-homologous in \mathbb{T}^3 we must have $c \frown c_\mu = 0$. Let $c = \xi_2 - \xi_3$, where $\xi_{2,3}$ are oriented transversals of \mathcal{F} introduced in the proof of Proposition 5 (see Fig. 9, where initial portions of $\xi_{2,3}$ are shown). The cycle c is homologous to zero in \mathbb{T}^3 , so we must have $\int_{\xi_2} \mu = \int_{\xi_3} \mu$. Similarly, we must have $\int_{\xi_2} \mu = \int_{\xi_4} \mu = \int_{\xi_5} \mu$, where

$$\xi_4 = p\left([(0, 0, 0), (0, 0, 1)] \cup [(0, 0, 1), (1, 0, 1)] \cup [(1, 0, 1) \cup (1, 1, 1)]\right),$$

$$\xi_5 = p\left([(0, 0, 0), (0, 0, 1)] \cup [(0, 0, 1), (0, 1, 1)] \cup [(0, 1, 1) \cup (1, 1, 1)]\right).$$

We have

$$\begin{aligned} \int_{\xi_2} \mu &= u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6, & \int_{\xi_3} \mu &= u_2 + u_5 + u_7 + u_8 + u_9, \\ \int_{\xi_4} \mu &= u_2 + 2u_3 + u_4 + u_6 + u_7, & \int_{\xi_5} \mu &= u_2 + 2u_3 + u_6 + 2u_7. \end{aligned} \quad (19)$$

So, \vec{u} must satisfy the relations:

$$u_3 + u_6 = u_8 + u_9, \quad u_5 = u_3 + u_7, \quad u_4 = u_7. \quad (20)$$

It must also satisfy (14) (with x_i replaced by u_i). The subspace in \mathbb{R}^9 defined by all these equations is invariant under $R(k)^{\pm 1}$. Therefore, they must hold true also for \vec{u}_∞ , but the first relation in (19) does not. Contradiction.

It follows from (18) that $\iota_*(c_\mu) = -\iota_*(c_\nu)$, which implies that the asymptotic direction of trajectories for \mathcal{E}_μ will be opposite to the one for \mathcal{E}_ν . \square

The hypothesis on the sequence (k_i) in Proposition 5 is much weaker than in Proposition 2. One can show that it can be weakened in Proposition 2, too, by deducing it from Proposition 5, but the argument will be less straightforward.

We expect that all thin type band complexes with three bands give rise, through the construction of [9], to a chaotic dynamics in Novikov's problem with almost all trajectories having an asymptotic direction, but don't see a rigorous proof of that so far.

REFERENCES

- [1] Avila A., Hubert P., Skripchenko A. On the Hausdorff dimension of the Rauzy gasket, arXiv: 1311.5361v2.
- [2] Arnoux P., Starosta Š. The Rauzy gasket // Further developments in fractals and related fields, Mathematical Foundations and Connections. New York: Birkhäuser/Springer, 2013. (Trends Math.; Vol. 13). P. 1–24.
- [3] Bestvina M., Feighn M. Stable actions of groups on real trees // Invent. Math. 1995. Vol. 121, № 2. P. 287–321.
- [4] Coulbois T. Fractal trees for irreducible automorphisms of free groups // J. Mod. Dyn. 2010. Vol. 4, № 2. P. 359–391.
- [5] Coxeter H. S. M. Regular skew polyhedra in three and four dimensions and their topological analogues // Proc. London Math. Soc. 1937. Vol. 43, № 1. P. 33–62.
- [6] De Leo R., Dynnikov I. Geometry of plane sections of the infinite regular skew polyhedron $\{4, 6 \mid 4\}$ // Geom. Dedic. 2009. Vol. 138, № 1. P. 51–67.

- [7] *Dynnikov I.* A proof of the conjecture of S. P. Novikov on semiclassical motion of an electron // *Math. Notes.* 1993. Vol. 53, № 6. P. 495–501.
- [8] *Dynnikov I. A.* Semiclassical motion of the electron. A proof of the Novikov conjecture in general position and counterexamples // *Solitons, geometry, and topology: on the crossroad.* Providence, RI: AMS, 1997. (AMS Transl. Ser. 2; Vol. 179). P. 45–73.
- [9] *Dynnikov I.* Interval identification systems and plane sections of 3-periodic surfaces // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2008. Vol. 263. P. 65–77.
- [10] *Dynnikov I., Skripchenko A.* On typical leaves of a measured foliated 2-complex of thin type, // *Topology, geometry, integrable systems, and mathematical physics.* Providence, RI: AMS, 2014. (AMS Transl. Ser. 2; Vol. 234). P. 173–199.
- [11] *Gaboriau D.* Dynamique des systèmes d'isométries: sur les bouts des orbites // *Invent. Math.* 1996. Vol. 126, № 2. P. 297–318.
- [12] *Gaboriau D., Levitt G., Paulin F.* Pseudogroups of isometries of \mathbb{R} and Rips' theorem on free actions on \mathbb{R} -trees // *Israel J. Math.* 1994. Vol. 87. P. 403–428.
- [13] *Imanishi H.* On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities // *J. Math. Kyoto Univ.* 1979. Vol. 19. P. 285–291.
- [14] *Levitt G.* La dynamique des pseudogroupes de rotations // *Invent. Math.* 1993. Vol. 113. P. 633–670.
- [15] *Maltsev A. Ya.* Anomalous behavior of the electrical conductivity tensor in strong magnetic fields // *JETP.* 1997. Vol. 85, № 5. P. 934–942.
- [16] *Maltsev A. Ya., Novikov S. P.* Dynamical systems, topology, and conductivity in normal metals // *J. Stat. Phys.* 2004. Vol. 115. P. 31–46.
- [17] *McMullen C. T.* Coxeter groups, Salem numbers and the Hilbert metric // *Publications Mathématiques de l'IHÉS.* 2002. Vol. 95. P. 151–183.
- [18] *Novikov S. P.* The Hamiltonian formalism and multivalued analogue of Morse theory (in Russian) // *Uspekhi Mat. Nauk.* 1982. Vol. 37, № 5. P. 3–49. Translated in *Russ. Math. Surv.* 1982. Vol. 37, № 5. P. 1–56.
- [19] *Skripchenko A.* Symmetric interval identification systems of order 3 // *Disc. Cont. Dyn. Syst.* 2012. Vol. 32, № 2. P. 643–656.
- [20] *Skripchenko A.* On connectedness of chaotic sections of some 3-periodic surfaces // *Ann. Glob. Anal. Geom.* 2013. Vol. 43. P. 253–271.
- [21] *Veech W. A.* Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps // *Ann. Math. (2).* 1982. Vol. 115, № 1. P. 201–242.
- [22] *Viana M.* Ergodic theory of interval exchange maps // *Rev. Mat. Complut.* 2006. Vol. 19, № 1. P. 7–100.
- [23] *Zorich A.* A Problem of Novikov on the semiclassical motion of an electron in a uniform almost rational magnetic field // *Russ. Math. Surv.* 1984. Vol. 39, № 5. P. 287–288.
- [24] *Zorich A.* Asymptotic flag of an orientable measured foliation // *Séminaire de théorie spectrale et géométrie.* 1992–1993. Vol. 11. P. 113–131.
- [25] *Zorich A.* How do the leaves of a closed 1-form wind around a surface? // *Pseudoperiodic topology.* Providence, RI: AMS, 1999. (AMS Transl. Ser. 2; Vol. 197). P. 135–178.

IVAN DYNNIKOV

Steklov Mathematical Institute
of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia
E-mail: dynnikov@mech.math.msu.su

Received 24.01.2015/15.03.2015

ALEXANDRA SKRIPCHENKO

Faculty of Mathematics,
National Research University
Higher School of Economics,
Moscow, Russia
E-mail: sashaskrip@gmail.com

On symplectic dynamics near a homoclinic orbit to 1-elliptic fixed point

L. Lerman, A. Markova

We study the orbit behavior of a four dimensional smooth symplectic diffeomorphism f near a homoclinic orbit Γ to an 1-elliptic fixed point under some natural genericity assumptions. 1-Elliptic fixed point has two real eigenvalues outside the unit circle and two on the unit circle. Thus there is a smooth 2-dimensional center manifold W^c where the restriction of the diffeomorphism has the elliptic fixed point supposed to be generic (no strong resonances and first Birkhoff coefficient is nonzero). Then the Moser theorem guarantees the existence of a positive measure set of KAM invariant curves. W^c itself is a normally hyperbolic manifold in the whole phase space and due to Fenichel results every point on W^c has 1-dimensional stable and unstable smooth invariant curves smoothly foliating the related stable and unstable manifolds. In particular, each KAM invariant curve has stable and unstable smooth 2-dimensional invariant manifolds being Lagrangian ones. Stable and unstable manifolds of W^c are 3-dimensional smooth manifolds which are assumed to be transverse along homoclinic orbit Γ . One of our theorems present conditions under which each KAM invariant curve on W^c in a sufficiently small neighborhood of Γ has four transverse homoclinic orbits. Another result ensures that under some Moser genericity assumption for the restriction of f on W^c saddle periodic orbits in resonance zone also have homoclinic orbits in the whole phase space though its transversality or tangency cannot be verified directly. All this implies the complicated dynamics of the diffeomorphism and can serve as a criterion of its nonintegrability.

References: 42 entries. *UDK:* 517.925/.926.4 + 517.938/.938.5. *MSC2010:* 37J10, 37J30, 37J45, 70H07. *Keywords:* 1-elliptic fixed point, homoclinic, invariant curve, periodic orbits.

1. INTRODUCTION AND SET-UP

Any tools that can help to understand, if a given Hamiltonian system is integrable or non-integrable and therefore has a complicated orbit behavior, are of the great importance. There are well known criteria based on the Melnikov method [10, 26, 29, 33, 37], but they are mainly applicable for systems being nearly integrable.

There exists other class of criteria based on the study of the orbit behavior in definitely non-integrable systems: if we know that some structures in the phase space are met only in non-integrable systems, then we may take the existence of such a structure in the phase space of a system under consideration as a criterion of its non-integrability. Such criteria are most efficient, if the structures mentioned can be rather easily identified. To this type of criteria one can refer those based on

The authors thank R. de la Llave and S.V.Gonchenko for useful discussions. We acknowledge a partial support from the Russian Foundation for Basic Research under the grants 13-01-00589a (L.L.) and 14-01-00344 (A.M.). L.L. is also grateful for support from the Russian Ministry of Science and Education (project 1.1410.2014/K, target part) and from the Russian Science Foundation (project 14-41-00044).

the existence of homoclinic orbits to the different type of invariant sets, the most popular are those related with homoclinic orbits to different types of equilibria, periodic orbits and invariant tori [4, 8, 12, 23–26, 28, 30]. Surely, non-integrability criteria are not the unique goal of the study: a much more interesting and hard problem is to describe possible types of the orbit behavior in the system near such the structure and its changes when parameters of the system vary.

In the paper we study a C^r -smooth, $r \geq 6$, symplectic diffeomorphism f on a C^∞ -smooth 4-dimensional symplectic manifold (M, Ω) , Ω is C^∞ -smooth non-degenerate 2-form. We assume f to have an 1-elliptic fixed point p , that is, differential Df_p has one pair of multipliers $e^{\pm i\alpha}$ on the unit circle and a pair of real multipliers μ, μ^{-1} , $\mu \neq \pm 1$. Below we suppose μ to be positive and $0 < \mu < 1$. We call such fixed point to be an orientable 1-elliptic point. The fixed point with negative μ, μ^{-1} we call to be non-orientable. The non-orientable point becomes orientable, if one considers f^2 instead of f .

Near an 1-elliptic fixed point there is a C^{r-1} -smooth 2-dimensional invariant symplectic center submanifold W^c corresponding to multipliers $e^{\pm i\alpha}$ [22, 34]. The restriction of f on W^c is a C^{r-1} -smooth 2-dimensional symplectic diffeomorphism and p is its elliptic fixed point. We assume p to be of the generic elliptic type [2], that is, strong resonances are absent in the system ($\alpha \neq \pi/2, 2\pi/3$) and the first coefficient in the Birkhoff normal form for $f|_{W^c}$ does not vanish. In this case we shall call an 1-elliptic fixed point to be a *generic 1-elliptic fixed point*. Then the Moser theorem [36] is valid for the restriction $f|_{W^c}$ near p , this gives a positive measure Cantor set of closed invariant curves on W^c which enclose p and are accumulated to it. The needed minimal smoothness for a symplectic diffeomorphism is 5 due to [38]. This explains the inequality $r \geq 6$.

Center manifold W^c is a normally hyperbolic invariant manifold in the sense of [15, 21] and has its local C^{r-1} -smooth 3-dimensional stable manifold $W_{\text{loc}}^{\text{cs}}$ and local C^{r-1} -smooth 3-dimensional unstable one $W_{\text{loc}}^{\text{cu}}$, since two other multipliers μ, μ^{-1} are lesser than 1 and greater than 1, respectively (these two local 3-dimensional manifolds for the fixed point p are simultaneously center-stable and center-unstable manifolds, respectively, this explains our notations). These manifolds can be extended till the global ones by the action of f^{-1} and f , respectively. The extended manifolds will be denoted as W^{cs} and W^{cu} .

Each invariant KAM-curve γ on W^c can be considered as being saddle one, since it has local 2-dimensional stable and unstable manifolds which can be also extended till global manifolds $W^s(\gamma), W^u(\gamma)$ by the action of f, f^{-1} . Topologically these manifolds are local cylinders, both being Lagrangian submanifolds in M [1]. The existence and smoothness of these manifolds relies on the results of [14, 15] and will be proved in Appendix.

Fixed point p has also two C^r -smooth local invariant curves through p being its local stable $W_{\text{loc}}^s(p)$ and unstable $W_{\text{loc}}^u(p)$ manifolds [22]. Their extensions by the action of f^{-1} and f are C^r -smooth invariant curves $W^s(p)$ and $W^u(p)$, respectively.

Our first two assumptions in the paper concern the existence of a homoclinic orbit to p and its type.

Assumption 1 (Homoclinic intersection). *Curves $W^u(p)$ and $W^s(p)$ have an intersection at some point q , thus generating a homoclinic orbit Γ to fixed point p .*

Assumption 2 (Transversality condition). *Manifolds $W^s(p)$ and $W^{cu}(p)$ are transverse at point q and, hence, along Γ .*

Later on in the Section 3 we will construct linear symplectic scattering map S which acts on tangent plane $T_p W^c$ and describes in the linear approximation an asymptotic behavior of orbits close to Γ after one-round travel near Γ . The restriction of differential Df_p on symplectic invariant plane $T_p W^c \subset T_p M$ is a linear symplectic 2-dimensional map with two eigenvalues $e^{\pm i\alpha}$, and, therefore, this plane is foliated into closed invariant curves of the map. Every such a curve is an ellipse, all of them can be obtained from the one multiplying their vectors at positive constants. Fix one such ellipse $E \subset T_p W^c$. Then its image $S(E)$ is also an ellipse (usually not from the foliation) with the same center at the origin and of the same area with respect to the restriction of 2-form Ω on this plane. Thus, the intersection $E \cap S(E)$ consists of either four points (a generic case) or these two ellipses coincide (a degenerate case). In the first case the intersection of two ellipses is transverse at every of four points.

Assumption 3 (Genericity condition). *The intersection $E \cap S(E)$ is transverse and therefore consists of four points.*

It is evident that this assumption does not depend on the explicit choice of the ellipse E . This condition allows one to select a generic case and provides the mean to verify this.

Our first result is the following theorem.

Theorem 1. *Let a 4-dimensional symplectic diffeomorphism f with 1-elliptic fixed point p obeys Assumptions 1, 2, 3. Then there is a sufficiently small neighborhood U of homoclinic orbit Γ such that every closed invariant KAM-curve on $W^c(p) \cap U$ possesses four transverse homoclinic orbits in U .*

Intersection of invariant manifolds of the diffeomorphism f in the neighborhood of homoclinic orbit are sketchy represented on Fig. 1. It is worth remarking that for our case center manifold W^c , as was mentioned, is normally hyperbolic two-dimensional invariant manifold on which the restriction of f is a twist map. Thus our results on existence of transverse homoclinic orbits to invariant KAM-curves are connected with the study of Hamiltonian dynamics near low-dimensional invariant whiskered tori initiated in [13] and extended in many recent papers (see, for instance, reviews [8, 11, 27]).

Before going to the proof, let us recall some related results for Hamiltonian vector fields [18, 19, 23, 24, 30, 32, 35]. Homoclinic orbits to a saddle-center equilibrium for a real analytic Hamiltonian system with two degrees of freedom, namely, for restricted circular three body problem, were found numerically in [31] and proved to exist analytically through asymptotic expansions in [32]. The problem on the orbit behavior of a real analytic Hamiltonian system near a homoclinic orbit to

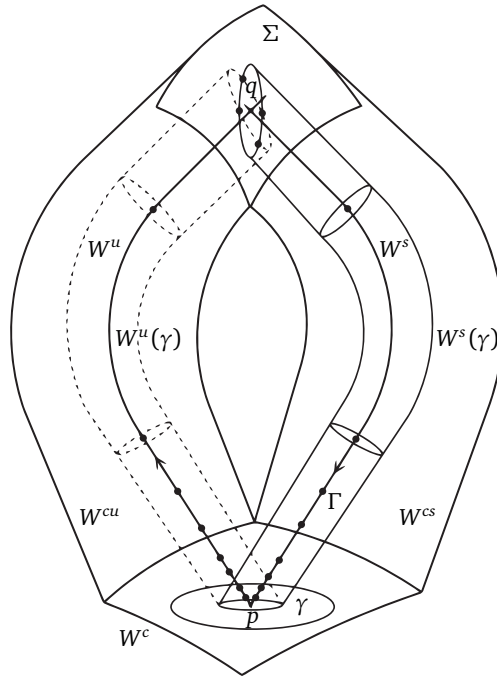


FIG. 1. INVARIANT MANIFOLDS IN THE NEIGHBORHOOD OF HOMOCLINIC ORBIT

a saddle-center equilibrium was first set up and partially solved in [30], though it was earlier discussed in [7]. In particular, the existence of four transverse homoclinic orbits to every small (Lyapunov's) periodic orbit on the center manifold of the saddle-center was proved in [30] using the Moser normal form and the needed genericity condition was found first in [30]. In [18] under an additional assumption that a homoclinic orbit to a saddle-center belongs to some invariant symplectic 2-dimensional submanifold (that is generically not the case), the genericity condition was reformulated in terms of the related scattering problem for the transverse 2-dimensional system linearized at the homoclinic orbit. It was first discovered in [35] and in a more refined invariant form in [19] that in a generic 1-parameter unfolding of reversible 2 d.o.f. Hamiltonian systems that unfolds a Hamiltonian system with a symmetric homoclinic orbit to a symmetric saddle-center equilibrium, there exists a (self-accumulated) countable set of parameter values near the critical one such that for a point of this set the related Hamiltonian system has a homoclinic orbit to its symmetric saddle-center. Usually these latter orbits are multi-round with respect to the initial homoclinic orbit. Several applications, where non-integrability of a system under consideration was proved using this method, can be found in [6, 20]. A partial extension of results to the case of Hamiltonian systems with n degrees of freedom, $n \geq 3$, having a center-saddle equilibrium (one pair of pure imaginary eigenvalues and the remaining ones with

nonzero real parts) with a homoclinic orbit, was given in [24]. Here the scattering map was extended onto the case when the center manifold is 2-dimensional but the dimension of transverse directions is $2(n-1)$.

In fact, the results we discuss here refer to a 3 d.o.f. Hamiltonian system on a C^∞ -smooth symplectic manifold with a smooth Hamiltonian H such that X_H has a periodic orbit \mathcal{C} of the center-saddle type. The latter means the multipliers of this orbit (except for the common double unit) are a pair $e^{\pm i\alpha}$ and a pair of reals μ, μ^{-1} , $\mu \neq \pm 1$. Such periodic orbit has 2-dimensional stable and unstable invariant manifolds through \mathcal{C} , they both belong to 5-dimensional level $H = H(\mathcal{C})$. If these manifolds have an intersection along some orbit Γ , then this homoclinic orbit tends to \mathcal{C} as $t \rightarrow \pm\infty$. Choose some cross-section N to the flow through a point $p \in \mathcal{C}$ in 5-dimensional level $H = H(\mathcal{C})$. We get a four-dimensional symplectic (w. r. t. the restriction of 2-form Ω to N) local Poincaré diffeomorphism $f: N \rightarrow N$ with fixed point p of the 1-elliptic type (corresponding to \mathcal{C}) defined in a neighborhood $U \subset N$ of p . Intersection of stable and unstable manifolds of \mathcal{C} with N give smooth local curves through the fixed point, the traces of Γ in N form a countable set of homoclinic points accumulating at p . Fix one homoclinic point $q_- \in U$ on the unstable curve and one homoclinic point $q_+ \in U$ on the stable curve. Choose some small neighborhoods $V_- \subset U$ of q_- and $V_+ \subset U$ of q_+ on N . Flow orbits define a symplectic map $F: V_- \rightarrow V_+$, $F(q_-) = q_+$, that we call as global one. Then a symplectic first return map defined as f for points which belong to $U \setminus V_-$ and as F for points in V_- is a map we discuss.

The local center manifold $W^c(\mathcal{C})$ for periodic orbit \mathcal{C} is of dimension four, it contains the symplectic cylinder filled with periodic orbits (continuations of \mathcal{C} onto close levels of H) and if conditions of Theorem 1 hold, then the restriction of the system on $W^c(\mathcal{C})$ has a positive measure set of invariant 2-dimensional tori with Diophantine rotation numbers. When we fix the level $H = H(\mathcal{C})$, then its intersection with the center manifold is 3-dimensional. Every torus \mathcal{T} has stable and unstable 3-dimensional manifolds which intersect each other along four transverse homoclinic orbits to the torus within 5-dimensional level $H = H(\mathcal{C})$.

2. CONSEQUENCES OF THE TRANSVERSALITY CONDITION

Due to Assumptions 1 and 2, two smooth 3-dimensional manifolds $W^{cs}(p)$ and $W^{cu}(p)$ intersect transversally at a homoclinic point q and thus along a smooth 2-dimensional disk Σ containing q . This disk is symplectic w. r. t. 2-form ω being the restriction of 2-form Ω on Σ . Indeed, in Section 4 it will be proved that in normalized coordinates in which $\Omega = dx \wedge dy + du \wedge dv$ disk (more exactly, some its finite iteration under f) will have the following representation:

$$x = \Phi(u, v), \quad y = 0.$$

This implies that Σ is symplectic w. r. t. 2-form $\omega = du \wedge dv$. The following lemma is valid:

Lemma 1. *If Assumptions 1 and 2 hold, then Σ and $W^u(p)$ are transverse at q within $W^{cu}(p)$ and, therefore, $W^u(p)$ and $W^{cs}(p)$ are also transverse at q .*

Proof. To prove this lemma, we use some symplectic coordinates (x, u, y, v) , $\Omega = dx \wedge dy + du \wedge dv$, in a neighborhood V of point p in which manifolds W^{cu} and W^{cs} are straightened, that is they are given as $x = 0$ (for W^{cu}) and $y = 0$ (for W^{cs}). In addition, in these coordinates local stable manifold $W^s(p)$ is given as $y = u = v = 0$ and local unstable manifold $W^u(p)$ is done as $x = u = v = 0$. The existence of such coordinates is proved in Appendix 7.1. We also assume that $q \in V$. Since orbit Γ through q is homoclinic, then there is an integer $N > 0$ such that $f^{-n}(q) \in V$ for all $n \geq N$. Denote q_1 the point $f^{-N}(q) \in V$ and let l^u be the tangent to $W^u(p)$ at q_1 . Denote $L = Df_{q_1}^N: T_{q_1}M \rightarrow T_qM$, then $L(l^u)$ is transversal to T_qW^{cs} in virtue to Assumption 2 (transversality condition). Set $D = L(T_{q_1}W^{cu}) \cap T_qW^{cs}$, D is 2-dimensional plane. One needs to prove that l^s (the tangent to $W^s(p)$ at q) does not belong to D , that is intersects D at only one point. For linear symplectic map L the following matrix representation holds:

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

where a, b, c, d are 2×2 -matrices. Since W^{cu}, W^{cs} are straightened in coordinates we use, tangent spaces to $W^{cu}, W^u(p)$ at q_1 and tangent spaces to $W^{cs}, W^s(p)$ at q are written as follows:

$$T_{q_1}W^{cu} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix}, \quad T_qW^{cs} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \\ 0 \\ \bar{v} \end{pmatrix}, \quad l^u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l^s = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Transversality of $L(l^u)$ and T_qW^{cs} is expressed as $d_{11} \neq 0$ in matrix L . Indeed, one has $L(l^u) = (b_{11}y, b_{21}y, d_{11}y, d_{21}y)^T$ (vector-column). Transversality of $L(l^u)$ and T_qW^{cs} means that determinant

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 1 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 1 & 0 \\ d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = d_{11}$$

does not vanish.

The plane D is given by the set of solutions of the system (1):

$$D: \begin{cases} \bar{x} = a_{12}u + b_{11}y + b_{12}v, \\ \bar{u} = a_{22}u + b_{21}y + b_{22}v, \\ 0 = c_{12}u + d_{11}y + d_{12}v, \\ \bar{v} = c_{22}u + d_{21}y + d_{22}v. \end{cases} \quad (1)$$

If $l^s \subset D$ then in the system above $\bar{u}=0$, $\bar{v}=0$ for all (u, v) . Expressing y from the third equation in (1) and inserting into other equations we get a parametric representation of plane D (with parameters u, v). Consider separately subsystem (2):

$$\begin{cases} a_{22}u + b_{21}y + b_{22}v = \bar{u}, \\ c_{22}u + d_{21}y + d_{22}v = \bar{v}. \end{cases} \quad (2)$$

Due to inequality $d_{11} \neq 0$ we can express $y = (-c_{12}u - d_{12}v)/d_{11}$ from (1) and insert it into (2):

$$\begin{cases} d_{11}a_{22}u + b_{21}(-c_{12}u - d_{12}v) + d_{11}b_{22}v = \bar{u}, \\ d_{11}c_{22}u + d_{21}(-c_{12}u - d_{12}v) + d_{11}d_{22}v = \bar{v}. \end{cases} \quad (3)$$

Let us calculate the determinant of the system (3). To this end, we rewrite it in the following form:

$$\begin{cases} u(d_{11}a_{22} - b_{21}c_{12}) + v(b_{22}d_{11} - b_{21}d_{12}) = \bar{u}, \\ u(d_{11}c_{22} - d_{21}c_{12}) + v(d_{22}d_{11} - d_{21}d_{12}) = \bar{v}. \end{cases}$$

This determinant is calculated as follows:

$$\begin{aligned} \Delta &= (d_{11}a_{22} - b_{21}c_{12})(d_{22}d_{11} - d_{21}d_{12}) - (b_{22}d_{11} - b_{21}d_{12})(d_{11}c_{22} - d_{21}c_{12}) = \\ &= d_{11}^2 a_{22}d_{22} - d_{11}a_{22}d_{21}d_{12} - b_{21}c_{12}d_{22}d_{11} + b_{21}c_{12}d_{21}d_{12} - d_{11}^2 c_{22}b_{22} + \\ &\quad + b_{22}d_{11}d_{21}c_{12} + b_{21}d_{12}d_{11}c_{22} - b_{21}d_{12}c_{12}d_{21} = \\ &= d_{11}^2 a_{22}d_{22} - d_{11}a_{22}d_{21}d_{12} - b_{21}c_{12}d_{22}d_{11} - \\ &\quad - d_{11}^2 c_{22}b_{22} + b_{22}d_{11}d_{21}c_{12} + b_{21}d_{12}d_{11}c_{22} = \\ &= d_{11}^2 (a_{22}d_{22} - c_{22}b_{22}) + d_{11}c_{12}(b_{22}d_{21} - b_{21}d_{22}) + d_{12}d_{11}(b_{21}c_{22} - a_{22}d_{21}). \end{aligned}$$

Matrix L is symplectic, therefore the following identities hold (see, for instance [17]):

$$a^T c \equiv c^T a, \quad b^T d \equiv d^T b, \quad d^T a - b^T c \equiv E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The first identity is equivalent to equality:

$$a_{12}c_{11} + a_{22}c_{21} = c_{12}a_{11} + c_{22}a_{21}.$$

Similarly, the second matrix identity is reduced to equality:

$$b_{12}d_{11} + b_{22}d_{21} = d_{12}b_{11} + d_{22}b_{21}. \quad (4)$$

The third matrix identity gives the following relations:

$$\begin{aligned} d_{11}a_{11} + d_{21}a_{21} - b_{11}c_{11} - b_{21}c_{21} &= 1, \\ d_{11}a_{12} + d_{21}a_{22} - b_{11}c_{12} - b_{21}c_{22} &= 0, \\ d_{12}a_{11} + d_{22}a_{21} - b_{12}c_{11} - b_{22}c_{21} &= 0, \\ d_{12}a_{12} + d_{22}a_{22} - b_{12}c_{12} - b_{22}c_{22} &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Now, taking into account relations (4), the second and the fourth equalities in (5), the expression for Δ can be transformed as follows:

$$\begin{aligned}
\Delta &= d_{11}^2(1+b_{12}c_{12}-d_{12}a_{12})+d_{11}c_{12}(b_{11}d_{12}-b_{12}d_{11})+d_{12}d_{11}(d_{11}a_{12}-b_{11}c_{12}) = \\
&= d_{11}^2+d_{11}^2b_{12}c_{12}-d_{11}^2d_{12}a_{12}+d_{11}c_{12}b_{11}d_{12}-d_{11}^2c_{12}b_{12}+ \\
&\quad +d_{11}^2d_{12}a_{12}-d_{12}d_{11}b_{11}c_{12} = d_{11}^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Thus, linear system (3) has a unique solution (u, v) at the given (\bar{u}, \bar{v}) . So, $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$ only if $(u, v) = (0, 0)$ and l^s intersects D at the unique point. \square

The Assumption 1 says that f is degenerate since generically two smooth curves in a 4-dimensional manifold do not intersect. This assumption selects a codimension 2 set of diffeomorphisms in the space of all C^r -smooth symplectic diffeomorphisms on M . Indeed, when a diffeomorphism with a homoclinic orbit to an 1-elliptic fixed point is perturbed within the class of smooth symplectic ones, for a perturbed f' the fixed point p' persists and its type is preserved. Therefore, due to transversality condition, the intersection of perturbed $W^{cu}(p')$ and $W^s(p')$ persists as well, but the intersection point does not give generically a homoclinic orbit to p' : with backward iterations of f' the orbit through the intersection point can be either a heteroclinic orbit connecting p' and some invariant curve on $W^c(p')$ or some other orbit wandering near W^c (recall that there are instability regions on $W^c(p')$, the orbit returns to $W^c(p')$ staying within 3-dimensional $W^{cu}(p')$, thus it is locked between unstable 2-dimensional manifolds of invariant curves on $W^c(p')$, since they locally divide $W^{cu}(p')$).

Nevertheless, if we turn to the related 3 d. o. f. Hamiltonian system with a periodic orbit \mathcal{C} of 1-elliptic type (or it can be called to be of the saddle-center type), then such an orbit belongs to a smooth symplectic cylinder of periodic orbits of the same type. So, if \mathcal{C} has a homoclinic orbit, then for the related close levels of Hamiltonian on the cross-section to \mathcal{C} one gets a one-parameter family of symplectic Poincaré maps. Thus, if Hamiltonian itself depends on a parameter ε in a generic way, then first return map for \mathcal{C} , derived by a homoclinic orbits to it, unfolds to a two-parameter family of symplectic maps and hence any close smooth 1-parameter family of smooth Hamiltonians also has a 1-elliptic periodic orbit with a homoclinic orbits to it. Thus, this phenomenon is generic for generic 1-parameter unfoldings of a Hamiltonian with such the structure.

Now we return to the problem under study. In a neighborhood of homoclinic point q let us consider 2-dimensional symplectic disk Σ through q being the transverse intersection of extended 3-dimensional center-unstable manifold $W^{cu}(p)$ with 3-dimensional center-stable manifold $W^{cs}(p)$. Below we shall prove the existence of smooth stable and unstable manifolds for any KAM-curve on W^c lying in a sufficiently small neighborhood of p . All stable manifolds belong to W^{cs} and all unstable manifolds belong to W^{cu} . Hence, they intersect with Σ . The first statement concerning this intersection is the following:

Lemma 2. *Disk Σ contains two Cantor sets of smooth closed curves $w_u(\gamma)$ and $w_s(\gamma)$ being, respectively, traces of the related stable $W^s(\gamma)$ and unstable $W^u(\gamma)$ manifolds of invariant KAM-curves $\gamma \in W^c$. For a fixed invariant curve γ integrals*

of 2-form ω over disks $D^u(\gamma)$ and $D^s(\gamma)$ bounded by $w_u(\gamma)$ and $w_s(\gamma)$, are equal:

$$\int_{D^u(\gamma)} \omega = \int_{D^s(\gamma)} \omega.$$

Proof. The existence of stable manifold $W^s(\gamma)$ and unstable manifold $W^u(\gamma)$ of invariant KAM-curves $\gamma \in W^c$ will be proved in Appendix.

The transversality condition implies the intersection of W^{cu} with W^{cs} near q to occur along a smooth 2-dimensional disk Σ . For every invariant curve γ in W^c its stable manifold being extended by f^{-1} in a finite number of iterations reaches a neighborhood of q and transversely intersects Σ within $W^{cs}(\gamma)$ along closed curve $w_s(\gamma)$, the trace of $W^s(p)$ is point q itself. Traces on Σ of $W^u(p)$ and $W^u(\gamma)$ in $W^{cu}(p)$ are respectively point q and curve $w_u(\gamma)$.

Consider now a piece-wise smooth 2-dimensional surface made up of a piece of the lateral side of the cylinder $W^s(\gamma)$ between W^c and Σ , the piece of W^c bounded by γ and disk Σ . Integration of the form Ω over this surface is reduced to the difference of integrals over the disk in W^c and that over disk in Σ bounded by $w_s(\gamma)$, since the integral over lateral side is equal zero (it is a Lagrangian submanifold). This gives the equality of integrals in the statement of the Lemma. Similarly, we get equality of the integral over disk in W^c , bounded by γ , and the integral over disk in Σ , bounded by $w_u(\gamma)$. \square

3. LINEARIZATION AND SCATTERING MAP

The genericity Assumption 3 is formulated using scattering map S . In this Section we will construct this map which acts on tangent plane $T_p W^c$. Scattering map is an analog of the scattering matrix for a Schrödinger type equation [42]. For the problems of the homoclinic dynamics related with non-hyperbolic equilibria this map was first introduced in [23]. Far-reaching extension of this map for a normally hyperbolic manifold in a Hamiltonian system was obtained in [11].

Consider first the linearization of the family of diffeomorphisms f^n at homoclinic orbit

$$\Gamma = \{q_n, n \in \mathbb{N} \mid q_{n+1} = f(q_n), q_0 = q\}.$$

This linearization is a sequence of linear symplectic maps

$$L_n = Df|_{T_{q_n} M}: T_{q_n} M \rightarrow T_{q_{n+1}} M$$

and hence $\lim L_n = Df_p$ as $|n| \rightarrow \infty$. Since $f^n(q) \rightarrow p$ as $n \rightarrow \pm\infty$, there exists an integer N large enough such that given a neighborhood V of p one gets $f^n(q) \in V$ for all $|n| \geq N$.

In neighborhood V we choose a symplectic chart where fixed point p is the origin, then map f is in the standard form “linear diffeomorphism plus higher

order terms". After a linear symplectic change of variables the linear part of the map can be transformed to the block-diagonal form:

$$\begin{cases} x_1 = \mu x + \dots, \\ y_1 = \mu^{-1} y + \dots, \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots, \end{cases} \quad (6)$$

with $0 < \mu < 1$, dots mean terms of the order 2 and higher. In these coordinates the linearization of this discrete dynamical system at the homoclinic orbit Γ is given as follows:

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = \mu \xi_n + P_n \zeta_n, \\ \eta_{n+1} = \mu^{-1} \eta_n + Q_n \zeta_n, \\ \chi_{n+1} = R_\alpha \chi_n + W_n \zeta_n, \end{cases} \quad (7)$$

where $\zeta_n = (\xi_n, \eta_n, \chi_n)^\top = (\xi_n, \eta_n, \chi_n^1, \chi_n^2)^\top$ is coordinate 4-column vector in the tangent space at the point $q_n = (x_n, y_n, u_n, v_n)$; R_α denotes the rotation matrix through angle α :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

P_n, Q_n are 1-row matrices, W_n is (2×4) -matrix. Since P_n, Q_n, W_n are of at least order 1 at $(0, 0, 0, 0)$ and (x_n, y_n, u_n, v_n) decay exponentially fast to $(0, 0, 0, 0)$ as $|n| \rightarrow \infty$, for these matrices the following estimates hold for $|n| \geq N$ and some positive C depending on N and on size of the neighborhood V :

$$\|P_n\| \leq C\mu_1^{|n|}, \quad \|Q_n\| \leq C\mu_1^{|n|}, \quad \|W_n\| \leq C\mu_1^{|n|},$$

where $0 < \mu < \mu_1 < 1$. Take $|n| \geq N$ and denote

$$S_n = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & R_{n\alpha} \end{pmatrix},$$

where E_2 is 2×2 identity matrix.

Consider now the case $n \geq N$ and perform in the system (7) a sequence of nonautonomous (with "time" n) symplectic changes of variables $\zeta_n = S_{n-N} \psi_n$, where $\psi_n = (\hat{\xi}_n, \hat{\eta}_n, \hat{\chi}_n)$, and consider (7) in the rotating coordinate frame. This change of variables allows one to exclude asymptotically the rotation in coordinates $\chi_n = (\chi_n^1, \chi_n^2)$ and prove that in new coordinates each invariant bounded sequence for the linear system obtained from (7) has a limit as $n \rightarrow \infty$.

After the change system (7) casts as follows (we hold previous notations for variables):

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = \mu \xi_n + F_n \zeta_n, \\ \eta_{n+1} = \mu^{-1} \eta_n + G_n \zeta_n, \\ \chi_{n+1} = \chi_n + H_n \zeta_n, \end{cases} \quad (8)$$

where F_n, G_n are again 1-row matrices and H_n is (2×4) -matrix. For these matrices estimates similar to those for matrices P_n, Q_n and W_n are valid. Sequence

$\{(\xi_n, \eta_n, \chi_n)\}$ is called the solution of the system or the invariant sequence, if equalities (8) are satisfied for all $n \in \mathbb{Z}_+$. The following lemma is valid.

Lemma 3. *There is an integer $N > 0$ large enough such that for any given $\xi^0 \in \mathbb{R}$, $\chi_+ \in \mathbb{R}^2$ a unique solution $\{(\xi_n, \eta_n, \chi_n)\}$, $n \geq N$, exists for the system (8) such that for this solution the boundary conditions are satisfied: $\xi_N = \xi^0$, $\chi_n \rightarrow \chi_+$, $|\xi_n| \rightarrow 0$, $|\eta_n| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$.*

Proof. Similar to [24], instead of system (8) consider a system of difference equations (9):

$$\begin{cases} \xi_n = \mu^{n-N} \xi^0 + \sum_{s=N}^{n-1} \mu^{n-1-s} F_s \zeta_s, \\ \eta_n = - \sum_{s=n}^{\infty} \mu^{s+1-n} G_s \zeta_s, \\ \chi_n = \chi_+ - \sum_{s=n}^{\infty} H_s \zeta_s. \end{cases} \quad (9)$$

Note that any solution of this system obeys the boundary conditions in the statement of the lemma. Let us show first that the solution of the system (9) is also the solution of the system (8) and vice versa. Indeed, the following equalities hold:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \mu^{n+1-N} \xi^0 + \sum_{s=N}^n \mu^{n-s} F_s \zeta_s \mu \left(\mu^{n-N} \xi^0 + \sum_{s=N}^{n-1} \mu^{n-1-s} F_s \zeta_s \right) + F_n \zeta_n = \mu \xi_n + F_n \zeta_n, \\ \eta_{n+1} &= - \sum_{s=n+1}^{\infty} \mu^{s-n} G_s \zeta_s = G_n \zeta_n - G_n \zeta_n - \sum_{s=n+1}^{\infty} \mu^{s-n} G_s \zeta_s = \\ &= G_n \zeta_n + \mu^{-1} \left(- \sum_{s=n}^{\infty} \mu^{s+1-n} G_s \zeta_s \right) = \mu^{-1} \eta_n + G_n \zeta_n, \\ \chi_{n+1} &= \chi_+ - \sum_{s=n+1}^{\infty} H_s \zeta_s = \chi_+ - \sum_{s=n}^{\infty} H_s \zeta_s + H_n \zeta_n = \chi_n + H_n \zeta_n. \end{aligned}$$

So, if the sequence $\{(\xi_n, \eta_n, \chi_n)\}$ solves (9), then it satisfies (8). The converse assertion is given as $n \rightarrow \infty$ by the consecutive application of (8) to an initial point.

Thus, one needs to prove the existence of solutions for system (9). To do this, we use the contraction mapping principle. Denote B the Banach space of sequences $\zeta = \{(\xi_n, \eta_n, \chi_n)\}$ uniformly bounded on $[N, +\infty)$ with the norm

$$\|\zeta\| = \sup_{n \geq N} (|\xi_n|, |\eta_n|, \|\chi_n\|).$$

Right hand sides of (9) define operator $T: T[\zeta] = \bar{\zeta}$ on B . At the first step let us verify that T is defined correctly, that is $T[B] \subset B$, here χ_+ , ξ^0 and N are considered as parameters. Recall that for F_n , G_n , H_n the following estimates are valid: $\|F_n\|, \|G_n\|, \|H_n\| \leq C\nu^n$, $0 < \nu < 1$. Here C depends on N , but is finite for

a fixed N . Denote $\kappa = \max\{\mu, \nu\} < 1$. Then one proceeds as follows:

$$\begin{aligned} |\bar{\xi}_n| &\leq \kappa^{n-N} \xi^0 + \|\zeta\| \sum_{s=N}^{n-1} \kappa^{n-1-s} C \kappa^s = \kappa^{n-N} \xi^0 + \|\zeta\| C \kappa^{n-1} (n-N), \\ |\bar{\eta}_n| &\leq \|\zeta\| \sum_{s=n}^{\infty} \kappa^{s+1-n} C \kappa^s = C \|\zeta\| \kappa^{1-n} \sum_{s=n}^{\infty} \kappa^{2s} = C \|\zeta\| \kappa^{1-n} \frac{\kappa^{2n}}{1-\kappa^2} = C \|\zeta\| \frac{\kappa^{n+1}}{1-\kappa^2}, \\ \|\bar{\chi}_n\| &\leq \|\chi_+\| + C \|\zeta\| \sum_{s=n}^{\infty} \kappa^s = \|\chi_+\| + C \|\zeta\| \frac{\kappa^n}{1-\kappa}. \end{aligned}$$

Thus, the sequence $\bar{\zeta}$ is uniformly bounded on $[N, +\infty)$, so the operator T is defined correctly.

Next we prove T to be a contraction map:

$$\begin{aligned} |\bar{\xi}_n^1 - \bar{\xi}_n^2| &\leq \|\zeta_1 - \zeta_2\| C \sum_{s=N}^{n-1} \kappa^{n-1-s} \kappa^s = \|\zeta_1 - \zeta_2\| C \kappa^{n-1} (n-N), \\ |\bar{\eta}_n^1 - \bar{\eta}_n^2| &\leq \|\zeta_1 - \zeta_2\| C \sum_{s=n}^{\infty} \kappa^{s+1-n} \kappa^s = \|\zeta_1 - \zeta_2\| C \kappa^{1-n} \frac{\kappa^{2n}}{1-\kappa^2} = \\ &= \|\zeta_1 - \zeta_2\| \frac{C \kappa^{n+1}}{1-\kappa^2} \leq \|\zeta_1 - \zeta_2\| \frac{C \kappa^N}{1-\kappa^2}, \\ \|\bar{\chi}_n^1 - \bar{\chi}_n^2\| &\leq \|\zeta_1 - \zeta_2\| C \sum_{s=n}^{\infty} \kappa^s = \|\zeta_1 - \zeta_2\| \frac{C \kappa^n}{1-\kappa} \leq \|\zeta_1 - \zeta_2\| \frac{C \kappa^N}{1-\kappa}. \end{aligned}$$

These estimates show that T is contracting for N large enough and $n \geq N$. Thus, for any fixed $\xi^0 \in \mathbb{R}$ and $\chi_+ \in \mathbb{R}^2$ there is a unique solution

$$\zeta(\xi^0, \chi_+) = \{\zeta_n(\xi^0, \chi_+)\} = \{(\xi_n(\xi^0, \chi_+), \eta_n(\xi^0, \chi_+), \chi_n(\xi^0, \chi_+))\}$$

for the system (9) such that $\xi_N(\xi^0, \chi_+) = \xi^0$. The estimates above also show that $|\xi_n|$, $|\eta_n|$ and $\|\chi_n - \chi_+\|$ tend to zero as $n \rightarrow \infty$. \square

For the further purposes one needs to prove some linearity relations for solutions of system (8).

Lemma 4. *Solutions $\zeta(\xi^0, \chi_+)$ of the system (8) satisfy the following linearity relations:*

- I. $\zeta(\xi'_0, \chi_+) + \zeta(\xi''_0, 0) = \zeta(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+)$;
- II. $\zeta(\xi'_0, 0) + \zeta(\xi''_0, 0) = \zeta(\xi'_0 + \xi''_0, 0)$, $\zeta(\alpha \xi'_0, 0) = \alpha \zeta(\xi'_0, 0)$;
- III. $\zeta(0, \alpha \chi_+ + \beta \chi'_+) = \alpha \zeta(0, \chi_+) + \beta \zeta(0, \chi'_+)$.

Proof. To prove the first equality consider the function

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \{\Delta_1(n)\} &= \zeta(\xi'_0, \chi_+) + \zeta(\xi''_0, 0) - \zeta(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+) = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_n(\xi'_0, \chi_+) + \xi_n(\xi''_0, 0) - \xi_n(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+) \\ \eta_n(\xi'_0, \chi_+) + \eta_n(\xi''_0, 0) - \eta_n(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+) \\ \chi_n(\xi'_0, \chi_+) + \chi_n(\xi''_0, 0) - \chi_n(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+) \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

This function is a solution of the system (9) with boundary conditions $(0, 0)$. Indeed, consider the following systems with boundary conditions (ξ'_0, χ_+) , $(\xi''_0, 0)$ and $(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+)$, respectively:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_n(\xi'_0, \chi_+) = \mu^{n-N} \xi^0 + \sum_{s=N}^{n-1} \mu^{n-1-s} F_s \zeta_s(\xi'_0, \chi_+), \\ \eta_n(\xi'_0, \chi_+) = - \sum_{s=n}^{+\infty} \mu^{s+1-n} G_s \zeta_s(\xi'_0, \chi_+), \\ \chi_n(\xi'_0, \chi_+) = \chi_+ - \sum_{s=n}^{+\infty} H_s \zeta_s(\xi'_0, \chi_+), \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_n(\xi''_0, 0) = \mu^{n-N} \xi^0 + \sum_{s=N}^{n-1} \mu^{n-1-s} F_s \zeta_s(\xi''_0, 0), \\ \eta_n(\xi''_0, 0) = - \sum_{s=n}^{+\infty} \mu^{s+1-n} G_s \zeta_s(\xi''_0, 0), \\ \chi_n(\xi''_0, 0) = \chi_+ - \sum_{s=n}^{+\infty} H_s \zeta_s(\xi''_0, 0), \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_n(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+) = \mu^{n-N} \xi^0 + \sum_{s=N}^{n-1} \mu^{n-1-s} F_s \zeta_s(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+), \\ \eta_n(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+) = - \sum_{s=n}^{+\infty} \mu^{s+1-n} G_s \zeta_s(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+), \\ \chi_n(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+) = \chi_+ - \sum_{s=n}^{+\infty} H_s \zeta_s(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+). \end{array} \right. \quad (12)$$

Summing related equalities from (10), (11) and subtracting (12) we get:

$$\begin{aligned} & \xi_n(\xi'_0, \chi_+) + \xi_n(\xi''_0, 0) - \xi_n(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+) = \mu^{n-N} (\xi'_0 + \xi''_0 - (\xi'_0 + \xi''_0)) + \\ & + \sum_{s=N}^{n-1} \mu^{n-s-1} F_s (\zeta_s(\xi'_0, \chi_+) + \zeta_s(\xi''_0, 0) - \zeta_s(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+)) = \sum_{s=N}^{n-1} \mu^{n-s-1} F_s \Delta_1(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \eta_n(\xi'_0, \chi_+) + \eta_n(\xi''_0, 0) - \eta_n(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+) = \\ & = - \sum_{s=n}^{+\infty} \mu^{-(n-s-1)} G_s (\zeta_s(\xi'_0, \chi_+) + \zeta_s(\xi''_0, 0) - \zeta_s(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+)) = \\ & = - \sum_{s=n}^{+\infty} \mu^{-(n-s-1)} G_s \Delta_1(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_n(\xi'_0, \chi_+) + \chi_n(\xi''_0, 0) - \chi_n(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+) &= (\chi_+ + 0 - \chi_+) - \\ &- \sum_{s=n}^{+\infty} H_s(\zeta_s(\xi'_0, \chi_+) + \zeta_s(\xi''_0, 0) - \zeta_s(\xi'_0 + \xi''_0, \chi_+)) - \sum_{s=n}^{+\infty} H_s \Delta_1(s). \end{aligned}$$

The equalities obtained imply that Δ_1 satisfies (9) with boundary conditions $(\xi^0, \chi_+) = (0, 0)$. Since the solution of (9) with given boundary conditions is unique, then $\Delta_1 \equiv 0$ and therefore the relation I is valid.

Relations *II* and *III* are proved in a similar way, if instead of Δ_1 one considers Δ_2 and Δ_3 , respectively:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \zeta(\alpha \xi'_0 + \beta \xi''_0, 0) - \alpha \zeta(\xi'_0, 0) - \beta \zeta(\xi''_0, 0), \\ \Delta_3 &= \zeta(0, \alpha \chi'_+ + \beta \chi''_+) - \alpha \zeta(0, \chi'_+) - \beta \zeta(0, \chi''_+). \end{aligned}$$

Lemma has been proved. \square

Similar constructions are done for $n \leq -N$.

3.1. Geometry of linearized map. Now let us present a geometrical interpretation of the results obtained. To do this, we introduce a countable set of linear symplectic spaces X_n , $|n| \geq N$, with coordinates $(\xi_n, \eta_n, \chi_n^1, \chi_n^2)$, and linear symplectic maps $\mathcal{L}_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$, $n \geq N$, defined by (9). If we fix χ_+ and vary ξ_0 , $\xi_0 = \xi'_0 + \xi''_0$, $\xi''_0 \in \mathbb{R}$, then due to Lemma 4, the related solutions of (9) define an affine straight line in X_N (in fact, they are initial points of these solutions) and hence in any X_n , $n > N$. These straight lines have the characteristic property that any solution which passes through this line in X_n decays exponentially as $n \rightarrow \infty$: $\xi_n \rightarrow 0$, $\eta_n \rightarrow 0$, $\|\chi_n - \chi_+\| \rightarrow 0$. In addition, if we fix not χ_+ but only the value $2I = \chi_1^2 + \chi_2^2 = \|\chi_+\|^2$, then in every X_n , $n \geq N$, we get a 2-dimensional cylinder $C_n^+(I)$ formed of those straight lines in X_n through which solutions asymptotically satisfy to $\|\chi_n - \chi_+\| \rightarrow 0$, each straight line on $C_n^+(I)$ corresponds to the unique point on the circle $2I = \chi_1^2 + \chi_2^2$ (an asymptotic phase). Varying I , ξ_0 defines a linear 3-dimensional subspace \mathcal{L}_n^+ of bounded solutions in X_N , and hence in X_n , which in turn foliates on the cylinders $C_n^+(I)$. Such a cylinder shrinks to the straight line $C_n^+(0)$, as $I \rightarrow 0$, this straight line just corresponds to solutions with $\chi_+ = 0$.

Now let us turn to the initial linearization problem along homoclinic orbit Γ for diffeomorphism f . To derive results described above, we performed the sequence of linear changes of variables that allowed us to prove for any bounded solution the existence of an asymptotic phase. In the initial coordinates all objects found preserve: for any point q_n in the related tangent space $T_{q_n}M$ we have 3-dimensional subspace of bounded as $n \rightarrow \infty$ solutions \mathcal{L}_n^+ (we preserve the same notations for similar objects) which are foliated into cylinders $C_n^+(I)$ (it is worth mentioning that the value of I does not change when returning to the initial coordinates), foliations into straight lines, etc. It is evident that in fact \mathcal{L}_n^+ is nothing else as tangent space $T_{q_n}W^{cs}$.

The same picture takes place for X_n with $n \leq -N$, the only difference is that one needs take limits as $n \rightarrow -\infty$. Here we also have cylinders C_n^- , straight lines, 3-subspaces $\mathcal{L}_n^- = T_{q_n} W^{cu}$, and so forth.

For tangent space $T_{q(-N)}M$ and $T_{q(N)}M$ we have linear symplectic map

$$\mathcal{S} = Df^{2N}: T_{q(-N)}M \rightarrow T_{q(N)}M$$

calculated at the point $q(-N)$. This map transforms \mathcal{L}_n^- to a 3-dimensional subspace in $T_{q(N)}M$ which transversely intersects the straight line $C_N^+(0) = l_N^s$ being the tangent space to $W^s(p)$.

3.2. Scattering map. Now we are ready to construct the scattering map

$$S: T_p W^c \rightarrow T_p W^c.$$

Take any point $s \in T_p W^c$. Fixing this point defines the unique straight line in $T_{q(-N)}M$ of the foliation defined in $\mathcal{L}_{-N} = T_{q(-N)}W^{cu}$ whose points are asymptotic to s as $n \rightarrow -\infty$. Let us apply linear map Df^{2N} to points of this line. We get the straight line in $T_{q(N)}M$ which is transversal to 3-plane $\mathcal{L}_N = T_{q(N)}W^{cs}$ due to transversality condition. Thus, the line obtained intersects this 3-plane at the unique point through which a unique line of the foliation defined in plane \mathcal{L}_N passes. Denote $s_1 \in T_p W^c$ that unique point which is the limit as $n \rightarrow \infty$ for all sequences starting on this line. We set $S(s) = s_1$ (Fig. 2).

Let us verify that S is a linear map. It is clear that $S(0) = 0$. Indeed, for $s = 0$ the corresponding straight line in 3-plane \mathcal{L}_{-N} is the tangent line to W^u in tangent space $T_{q(-N)}M$. Its image under $\mathcal{S} = Df^{2N}$ is a straight line in $T_{q(N)}M$ which is transversal to $T_{q(N)}W^{cs}$ due to Assumption 2 and intersects it at the origin

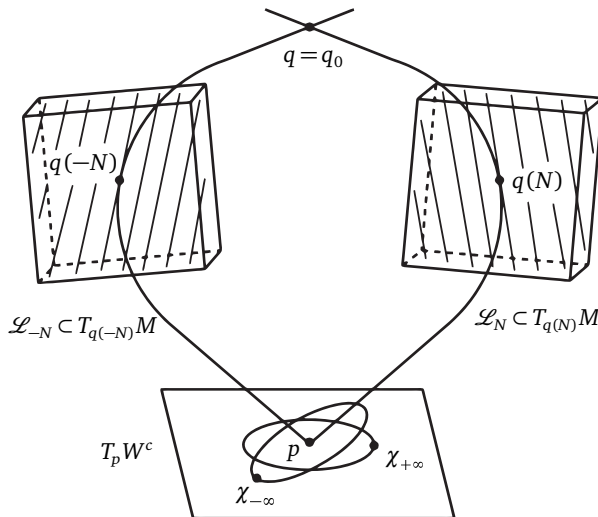


FIG. 2. SCATTERING MAP CONSTRUCTION

of $T_{q(N)}M$. Through the origin the unique line from the constructed foliation passes: the tangent line to W^s which corresponds to $s_1 = 0$ in $T_p W^c$.

Denote l_s that straight line in \mathcal{L}_{-N} which consists of points through which solutions pass tending to s as $n \rightarrow -\infty$. Using the linearity relations *I* and *II* we get the following representation for the solutions of system (8):

$$\zeta_n(\xi^0, \lambda \chi_-) = \zeta_n(0, \lambda \chi_-) + \zeta_n(\xi^0, 0) = \lambda \zeta_n(0, \chi_-) + \zeta_n(\xi^0, 0) \quad \text{for any } \lambda \in \mathbb{R}.$$

To find the image $S(\lambda s)$ we act by Df^{2N} on $\lambda l_s + l_0^u$ (here l_0^u is the tangent line to W^u at point $q(-N)$). In \mathcal{L}_N we get two vectors, through each such vector a unique straight line passes: these lines are λl_s and l_0^s , respectively (l_0^s is tangent line to W^s at point q_N). Thus, S maps λs to $\lambda s_1 + 0 = \lambda s_1$. Similarly, for the sum $s' + s''$ we get relations for corresponding χ'_-, χ''_- :

$$\begin{aligned} \zeta_n(\xi^0, \chi'_- + \chi''_-) &= \zeta_n(\xi^0 + 0, \chi'_- + \chi''_-) = \\ &= \zeta_n(\xi^0, 0) + \zeta_n(0, \chi'_- + \chi''_-) = \zeta_n(\xi^0, 0) + \zeta_n(0, \chi'_-) + \zeta_n(0, \chi''_-). \end{aligned}$$

In this case we act by Df^{2N} on $l_{s'} + l_{s''} + l_0^u$.

The next proposition characterizes map S .

Proposition 1. *Map $S: T_p W^c \rightarrow T_p W^c$ is symplectic.*

Proof. Choose any two vectors in the symplectic plane $T_p W^c$. These vectors define two straight lines from the foliation in \mathcal{L}_{-N} . Take then two vectors v_1, v_2 in $\mathcal{L}_{-N} = T_{q(-N)} W^{cu}$ corresponding to these lines: origins of vectors coincide with zero point of $T_{q(-N)} W^{cu}$ and ends of the vectors belong to corresponding line. Skew-scalar product being the restriction of 2-form Ω on tangent space \mathcal{L}_{-N} , does not depend on vectors we choose. Indeed, difference of vectors corresponding to the same line is vector lying in l^u which is zero vector for skew-scalar product (such vectors shrink exponentially in backward iterations). \mathcal{S} -images of these two straight lines are two straight lines in $T_{q(N)}M$ which are transversal to subspace \mathcal{L}_N . The intersection of the lines with \mathcal{L}_N gives two vectors $T(v_1), T(v_2)$, whose origins coincides with zero of $\mathcal{L}_N = T_{q(N)} W^{cs}$, for specified v_1, v_2 . Since \mathcal{S} is linear symplectic map, then the skew-scalar product is preserved. Now we have two straight lines from foliation in \mathcal{L}_N and again skew-scalar product of vectors corresponding to different lines does not depend on exact vectors we choose. But this product is equal to skew-scalar product of vectors v_1, v_2 and does not change in forward iterations. Therefore skew-scalar product in limit in $T_p W^c$ equals to skew-scalar product of initial vectors in $T_p W^c$. \square

Linear symplectic map S we call *the scattering map*.

4. HOMOCLINIC ORBITS TO INVARIANT KAM-CURVES

To prove Theorem 1 we assume for diffeomorphism f Assumptions 1, 2 and 3 to hold. Thus, according to Section 2 manifolds $W^{cu}(p)$ and $W^{cs}(p)$ intersect at homoclinic point q transversally, and therefore along a symplectic 2-disk Σ (we may

regard $q = q_+$ and disk Σ to belong to a neighborhood of fixed point p). The idea of the existence proof for homoclinic orbits to invariant KAM-curve $\gamma \in W^c$ is the following. Let V be a sufficiently small neighborhood of point p . For each KAM-curve $\gamma \subset W^c \cap V$ its action is defined according to the Stokes theorem as the integral of 2-form Ω over that disk in W^c whose boundary is curve γ . Curve γ has its local stable manifold which can be extended by a finite number of iterations of map f^{-1} till the manifold reaches the neighborhood of homoclinic point q staying inside of $W^{cs}(p)$. Therefore, this manifold intersects transversally within $W^{cs}(p)$ disk Σ along a closed curve $w_s(\gamma)$. Similarly, unstable manifold of the same curve γ under the action of f reaches the neighborhood of q staying inside $W^{cu}(p)$ and hence intersects Σ along a closed curve $w_u(\gamma)$. Two obtained curves on Σ have the same value of action as follows from Lemma 2. Thus, two disks in Σ bounded by $w_s(\gamma)$, $w_u(\gamma)$ are of the same area and have common point q lying inside both of them. Hence, the intersection of curves $w_s(\gamma)$ and $w_u(\gamma)$ is not empty and consists of at least two different points, homoclinic orbits to γ pass through the intersection points (see Fig. 3).

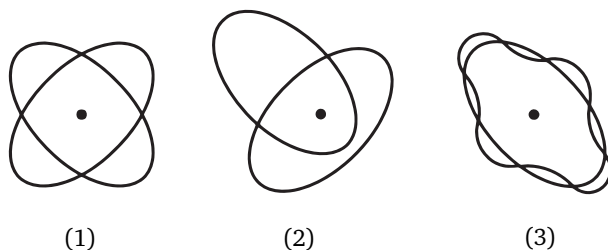


FIG. 3. POSSIBLE INTERSECTIONS OF $W^s(\gamma)$, $W^u(\gamma)$ ON Σ

The problem here is that we do not know a precise information on this intersection: how many points does it contain, if the intersection is transverse or not, etc. All these questions are relevant for the further study of nearby dynamics. In the case of an integrable diffeomorphism (when an invariant w. r. t. the diffeomorphism f smooth function exists) these two curves coincide, since both of them belong to the same level of the invariant function whose restriction on Σ near q usually forms a connected closed curve.

Provided that our Assumptions hold, we shall prove for any KAM-curve on W^c in a sufficiently small V with a given value of action I , the intersection to consist of exactly four points and it is transverse at each of these points. To prove this we shall connect intersection properties for curves $w_u(\gamma)$ and $w_s(\gamma)$ on Σ with intersection properties of related ellipses E and $S(E)$ with the same action I in tangent plane $T_p W^c$. The genericity Assumption implies that these ellipses have the same center and the same area and intersect transversally at exactly four points. This property will be carried to the intersection of $w_u(\gamma)$ and $w_s(\gamma)$.

To prove the intersection of these curves is as in Fig. 3 (left panel), we transform f in neighborhood V of fixed point p to the normal form (15) (see Appendix 7.2) up to the third order terms and consider first the truncated map. For this map two local functions xy and $u^2 + v^2$ are local integrals up to sixth order terms, but what is more important for our goals, circles $x = y = 0$, $u^2 + v^2 = c$ on W^c are invariant curves for any positive c small enough and stable and unstable manifolds of these curves have the representation $y = 0$, $u^2 + v^2 = c$ and $x = 0$, $u^2 + v^2 = c$, respectively. Since the whole map differs from the truncated map by terms of the fourth order and higher, then for a given positive constant c small enough invariant manifolds of KAM-curves for the truncated and full maps are at least C^3 -close in V , due to Fenichel theorems. According to these theorems [15], as diffeomorphism is C^r -smooth, then invariant cylinders of KAM-curves are C^{r-1} -smooth (see Appendix 7.3). Also we shall suppose, without loss of generality, that both points $q_- = q(-N)$ and $q_+ = q(N)$ belong to V .

For diffeomorphism (15) for $n \geq N$, due to properties of functions φ , ψ , system (8) has the linearization matrices for f along the homoclinic orbit

$$\begin{pmatrix} \mu(1+\dots) & p_n & q_n & r_n \\ 0 & \mu^{-1}(1+\dots) & 0 & 0 \\ 0 & l_n & \cos \alpha + \dots & -\sin \alpha + \dots \\ 0 & s_n & \sin \alpha + \dots & \cos \alpha + \dots \end{pmatrix},$$

where dots and p_n, q_n, r_n, l_n, s_n mean terms tending to zero exponentially fast as $n \rightarrow +\infty$. The form of this matrix implies that 3-dimensional plane $\eta = 0$ in the tangent space at homoclinic point $q(N)$ under the action of this linear map is transformed to 3-dimensional plane $\eta = 0$ in the tangent space at homoclinic points $q(N+1) = f(q(N))$, etc. As Lemma 3 implies, for a fixed I , $(\chi^1)^2 + (\chi^2)^2 = 2I$, we get in $T_{q(N)}M$ a cylinder in 3-dimensional plane $\eta = 0$, consisting of solutions for the system (8) which asymptotically tend to the circle $(\chi^1)^2 + (\chi^2)^2 = 2I$ in $T_p W^c$. Intersection of this cylinder with tangent plane to Σ_+ at point $q(N)$ is an ellipse. Similar cylinders and ellipses are obtained, if one considers linearization of diffeomorphism along homoclinic orbit for $n \leq -N$ as $n \rightarrow -\infty$.

Global symplectic map $\mathcal{G} = f^{2N}$ transforms a neighborhood of homoclinic point $q(-N)$ to a neighborhood of homoclinic point $q(N)$. In normalized coordinates (15), homoclinic points have coordinates:

$$q(-N) = (0, y_1, 0, 0), \quad q(N) = (x_0, 0, 0, 0).$$

Therefore, symplectic map \mathcal{G} has the following local representation

$$\begin{aligned} \bar{x} - x_0 &= F(x, y - y_1, u, v), \\ \bar{y} &= G(x, y - y_1, u, v), \\ \bar{u} &= P(x, y - y_1, u, v), \\ \bar{v} &= Q(x, y - y_1, u, v), \end{aligned}$$

$$d\bar{x} \wedge d\bar{y} + d\bar{u} \wedge d\bar{v} = dx \wedge dy + du \wedge dv,$$

and all functions F, G, P, Q vanish at the point $(0, y_1, 0, 0)$. Transversality condition at point $q(N)$ means the tangent vector to W^s , that is $(1, 0, 0, 0)$, be transverse to tangent plane to W^{cu} being \mathcal{G} -image of 3-disk $x = 0$. This implies that determinant

$$\det \left(\frac{\partial(G, P, Q)}{\partial(y - y_1, u, v)} \right)$$

calculated at point $(0, y_1, 0, 0)$ does not vanish. In virtue of Lemma 1 the same transversality condition holds at $q(-N)$: tangent vector to W^u (i. e. $(0, 1, 0, 0)$) and tangent plane to W^{cs} (\mathcal{G} -pre-image of $\bar{y} = 0$) are transverse, this is equivalent to the inequality $G_y \neq 0$ at $(0, y_1, 0, 0)$. 2-Disk $\Sigma = \Sigma_+$ at these coordinates is the intersection of \mathcal{G} -image of local 3-disk $x = 0$ near point $q(-N)$ and local 3-disk $\bar{y} = 0$ near $q(N)$. Then one has a representation for $\Sigma_- = \mathcal{G}^{-1}(\Sigma_+)$ in the form $x = 0$, $y - y_1 = \Psi(u, v)$, and for Σ_+ in the form $\bar{x} = \Phi(\bar{u}, \bar{v})$, $\bar{y} = 0$. In particular, since map \mathcal{G} is symplectic and the restrictions of symplectic 2-form Ω to symplectic disks Σ_- and Σ_+ are $du \wedge dv$ and $d\bar{u} \wedge d\bar{v}$, respectively, then the restriction \mathcal{G}_Σ of map \mathcal{G} , $\mathcal{G}_\Sigma: \Sigma_- \rightarrow \Sigma_+$ is symplectic and has the form

$$\bar{u} = a_{11}u + a_{12}v + \dots, \quad \bar{v} = a_{21}u + a_{22}v + \dots, \quad (13)$$

where dots mean terms of the second order and higher, matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

is symplectic, here this means to be uni-modular: $\det A = 1$. In fact, matrix A depends on integer parameter N , $A = A_N$, since our choice of the homoclinic points $q(-N)$, $q(N)$ and hence Σ_- , Σ_+ , and related tangent planes to them depends on N . But for any N large enough the representations for these tangent plane are similar and coordinates of them are coordinates on $T_p W^c$. As $N \rightarrow \infty$ the related tangent planes to $\Sigma_\pm(N)$ tend to $T_p W^c$. This implies

Lemma 5. *For N large enough matrix A_N is not a rotation matrix.*

Proof. To prove Lemma we shall show that its conclusion follows from the transversality Assumption 2 and genericity Assumption 3. As follows from Lemmas 3, 4, A_N tends to matrix A_∞ being the coordinate representation of scattering map S . \square

Consider symplectic disk Σ_- through the point $q(-N)$. In normalized coordinates it has a representation $x = 0$, $y = \Psi(u, v)$. Hence the tangent plane to it at $q(-N)$ has a representation $\xi = 0$, $\eta = a\chi^1 + b\chi^2$. This implies this plane to intersect transversely any Lagrangian cylinder $C_n^-(I)$ and these intersections form a foliation of the plane into ellipses. Similar foliation into ellipses exists in the tangent plane to Σ_+ through the point $q(N)$, it is generated by intersection of this plane with cylinders $C_n^+(I)$. Differential of the global map $\mathcal{G} = f^{2N}$ is a linear symplectic map and its restriction to Σ_- is a linear symplectic map $L_N: T_{q(-N)}\Sigma_- \rightarrow T_{q(N)}\Sigma_+$. If we fix I , then related ellipses $E_-(I)$, $E_+(I)$ in Σ_- , Σ_+ ,

respectively, have the same area and $L_N(E_-(I))$ intersects $E_+(I)$ at four different points transversely, due to Assumption 3.

Let us fix a sufficiently small neighborhood of fixed point p on the center manifold W^c . Its smallness is controlled by a parameter ε . To this end, following [36], we introduce symplectic polar coordinates on $W^c = \{x = y = 0\}$ in the neighborhood of fixed point

$$u = \varepsilon\sqrt{2I} \cos \theta, \quad v = \varepsilon\sqrt{2I} \sin \theta.$$

Then we get a symplectic map on W^c :

$$\bar{I} = I + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \bar{\theta} = \theta + \alpha + \nu\varepsilon^2 I + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (14)$$

According to the Moser theorem [36], there is an $I_0 > 0$ such that for ε small enough and any given I , $0 < I < I_0$, such that the number $\alpha + 2\nu\varepsilon^2 I$ is Diophantine, there exists an invariant curve which is ε^2 -close in C^2 topology in the space of curves $I = r(\theta)$ to curve $u^2 + v^2 = 2\varepsilon^2 I$. The map (14) is the restriction of the initial map on a neighborhood of p in W^c and normalized up to the third order terms. Thus each invariant curve on the center manifold has two invariant Lagrangian cylinders being its stable and unstable manifolds, they are C^2 -close to cylinders $u^2 + v^2 = 2\varepsilon^2 I$, $y = 0$, or $x = 0$, respectively, of the truncated map.

Let us verify that traces of $W^s(\gamma)$, $W^u(\gamma)$, corresponding to invariant KAM-curve γ on $T_p W^c$ with action $2\varepsilon^2 I$ also intersect on Σ_+ transversally along four points. To this purpose, we consider the restriction of \mathcal{G} on Σ_- near point $q(-N)$ with values on disk Σ_+ near point $q(N)$. Fix in V some neighborhood of p on W^c defined by ε small enough, and let γ be some KAM-curve in this neighborhood. This defines some I . The restriction of \mathcal{G} on Σ_- is a two dimensional symplectic map (13). Since the coordinates on Σ_- and Σ_+ are (u, v) , after the change of variables (14) where ε and I are considered as parameters, we come to the system for intersection points of $w^s(\gamma)$, $w^u(\gamma)$. Taking into account that these manifolds of the same KAM-curve, we get the value I be the same and then we have:

$$\begin{aligned} \varepsilon\sqrt{2I} \cos \bar{\theta} &= \varepsilon a_{11} \sqrt{2I} \cos \theta + \varepsilon a_{12} \sqrt{2I} \sin \theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \varepsilon\sqrt{2I} \sin \bar{\theta} &= \varepsilon a_{21} \sqrt{2I} \cos \theta + \varepsilon a_{22} \sqrt{2I} \sin \theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Dividing the equations on $\varepsilon\sqrt{2I}$, squaring both sides of each of the equalities and sum them we get the equation for θ corresponding intersection points:

$$1 = (a_{11} \cos \theta + a_{12} \sin \theta)^2 + (a_{21} \cos \theta + a_{22} \sin \theta)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

This equation have precisely four simple roots, if matrix A is not a rotation matrix [30]. Therefore, due to implicit function theorem, traces of cylinders of truncated map on disk Σ intersect transversally along four points. This implies that C^2 -close traces of cylinders of full map, that is curves $w_u(\gamma)$ and $w_s(\gamma)$, also intersect transversally along four points. Theorem 1 has been proved. \square

Results given in Theorem 1 are of much more wider applications than it is formulated there. Indeed, let us fix some invariant KAM-curve γ on W^c being sufficiently close to fixed point p . Its stable and unstable invariant cylinders intersect each other at four transverse homoclinic orbits as stated in Theorem 1. It is well known that every such KAM-curve is a limit of other KAM-curves in C^2 -topology and their invariant stable and unstable cylinders are also close in C^2 -topology on compact sets (under our assumptions of smoothness for f). Let us fix KAM-curve γ_1 being sufficiently close to γ . Their C^2 -closeness implies the transverse intersecting of $W^s(\gamma)$ and $W^u(\gamma_1)$ along four heteroclinic orbits (their traces on Σ are transversely intersecting each other close “almost ellipses”) and vice versa, the same is true for $W^u(\gamma)$ and $W^s(\gamma_1)$. Thus, there are many heteroclinic connections between different close KAM-curves. The dynamics which follows from this picture is not completely understood as for the case of homoclinic orbits to a periodic orbit. As was mentioned before, first contribution here was done in [13] for some model problem. More details was found in [8,11], nevertheless, a complete picture is not understood. Some more details will be presented in the next Section.

5. HOMOCLINIC ORBITS TO SADDLE PERIODIC ORBITS ON W^c

As is well known, a sufficiently smooth 2-dimensional symplectic diffeomorphism near its generic elliptic fixed point O (some Birkhoff coefficient in the normal form does not vanish) is a twist map with respect to action-angle variables given by symplectic coordinates of the Birkhoff normal form. In particular, this implies the existence of a positive measure Cantor set of invariant KAM-curves with Diophantine rotation numbers accumulating at p [36]. For our case as such diffeomorphism we have the restriction of f onto $W^c(p)$. Since W^c is a smooth normally hyperbolic invariant submanifold for f , the Fenichel results [14,15] are applicable that gives smooth foliations of W^{cs} and W^{cu} into smooth curves (see Appendix). These smooth foliations allow us to define two smooth maps $F_u : W^c \rightarrow \Sigma$, $F_s : W^c \rightarrow \Sigma$.

Let us fix some invariant KAM-curve γ with a Diophantine rotation number. Near such the curve there is a positive measure set of other smooth invariant curves accumulating at γ in at least C^2 -topology. Another consequence of the twist condition is by Poincaré–Birkhoff theorem that for any rational rotation number l/n with incommensurate integers l, n there are at least two n -periodic points. Generically, these two periodic orbits are one elliptic and another hyperbolic. Moreover, if this diffeomorphism satisfies some additional genericity condition (sometimes, this is called as the Moser genericity [16]), then stable and unstable separatrices of the hyperbolic orbit intersect transversely along related homoclinic orbits in W^c . This allows, in particular, to construct a “fence” made up of stable and unstable separatrices which divorces one invariant curve from another one.

This can be done in the following way. We assume, for simplicity, $n = 2$, thus the related periodic orbits are 2-periodic. Let us fix one hyperbolic 2-periodic

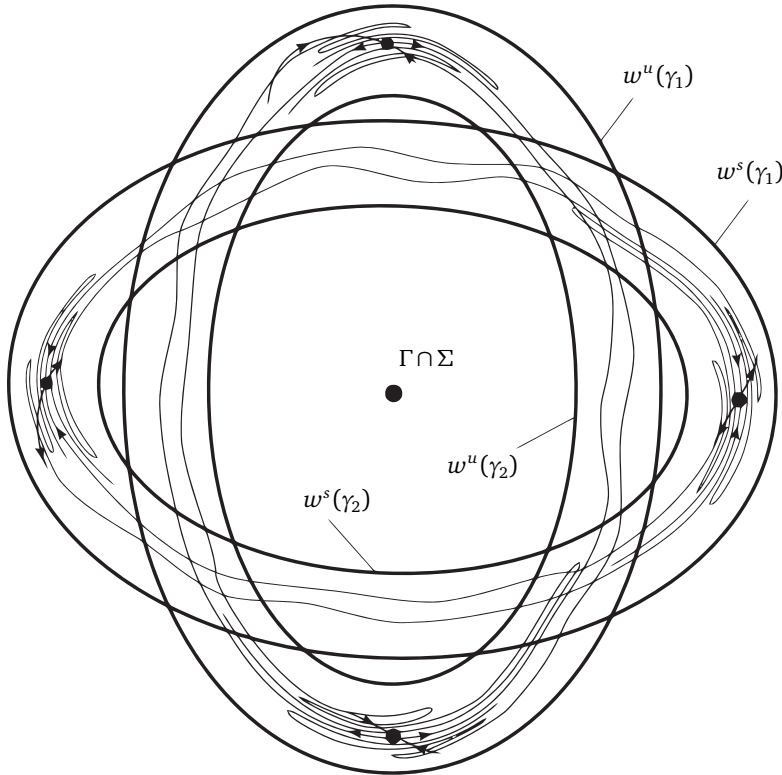


FIG. 4. A FENCE ON Σ MADE UP OF STABLE AND UNSTABLE MANIFOLDS OF A SADDLE PERIODIC ORBIT

point m_0 and let m_1 be the second point of this orbit, $m_1 = f(m_0)$. Suppose that unstable manifold $W^u(m_0)$ for the restriction of f on W^c transversely intersects stable manifold of $W^s(m_1)$ and stable manifold of $W^s(m_0)$ transversely intersects unstable manifold of $W^u(m_1)$. In this case, due to so-called lambda lemma [39], the topological limit of $W^u(m_0)$ contains the whole $W^u(m_1)$ and vice versa. Thus we get some closed invariant set \mathfrak{F}_u made up of these curves and their closures. Similar set \mathfrak{F}_s is formed by stable manifolds (see Fig.4).

Take \mathfrak{F}_u and for every its point consider the related unstable leaf of the unstable foliation in W^{cu} . Then map F_u transforms set \mathfrak{F}_u to the homeomorphic set in Σ . Similar set in Σ is obtained from \mathfrak{F}_s using F_s . Now choose any invariant KAM-curve in W^c in a neighborhood U where Theorem 1 applies. Choose a sufficiently close invariant KAM-curve γ_1 such that on Σ related traces $w^s(\gamma)$, $w^s(\gamma_1)$ intersect transversely traces $w^u(\gamma)$, $w^u(\gamma_1)$. Then we have on Σ two annuli: A_s bounded by $w^s(\gamma)$, $w^s(\gamma_1)$ and A_u bounded by $w^u(\gamma)$, $w^u(\gamma_1)$. These annuli intersect each other in such a way that each boundary curve of one annulus intersects every boundary curve of another annulus transversely. Since the restriction f_c of f

on W^c is a twist map, then invariant KAM-curves γ, γ_1 have different rotation numbers ρ, ρ_1 . Thus there are periodic orbits inside the annulus between γ, γ_1 corresponding to some rational $\rho < \rho_* < \rho_1$, $\rho_* = p/q$. If f_c is Moser generic, then the half of these periodic orbits are hyperbolic Birkhoff q -periodic and its stable manifolds form a fence \mathfrak{F}_s in $A_s \subset \Sigma$. This fence separates A_s in the sense that if we take two points on different boundary curves of A_s , then any path going from one point to another one will cut \mathfrak{F}_s . The same holds for \mathfrak{F}_u in A_u . This implies

Theorem 2. *The sets $\mathfrak{F}_s, \mathfrak{F}_u$ intersect, hence there are Poincaré homoclinic orbits to a saddle hyperbolic periodic orbit on W^s .*

It is clear that in fact there are countably many such Poincaré homoclinic orbits. Of course, it is impossible to assert that they are transverse or tangent since this cannot be caught by such considerations.

6. MULTIDIMENSIONAL EXTENSION

The problem we have studied possesses a multidimensional extension. The tool to get this extension are essentially the same, so we present only the related set up and formulations. In a smooth symplectic manifold (M, Ω) of dimension $2n + 2$ we consider a symplectic diffeomorphism f that possesses a fixed point p of the elliptic-hyperbolic $(2, 2n)$ -type. The latter means this point has the linearization operator with the only pair of complex eigenvalues on the unit circle $\exp[\pm i\alpha]$ and remaining $2n$ eigenvalues are off the unit circle and thus are met either in real pairs μ_k, μ_k^{-1} , $|\mu_k| < 1$, or in complex quartets $\rho_m \exp[\pm i\kappa_m]$, $\rho_m^{-1} \exp[\pm i\kappa_m]$, $\kappa_m \neq 0, \pi$. Here one has $k + 2m = n$. Such a fixed point has locally a smooth two dimensional center manifold W^c corresponding to the pair $\exp[\pm i\alpha]$ on which p is an elliptic fixed point and we assume henceforth it to be of generic elliptic type. Besides center manifold, through fixed point other smooth manifolds pass: n -dimensional strong stable W^s and strong unstable W^u ones, as well as $(n + 2)$ -dimensional center stable W^{cs} and center unstable W^{cu} ones.

Analog of three Assumptions 1–3 are

Assumption 4 (Homoclinic intersection). *Manifolds $W^u(p)$ and $W^s(p)$ have an intersection at some point q , generating thus a homoclinic orbit Γ to point p .*

Dimensions of stable W^s (n) and center unstable manifold W^{cu} ($n + 2$) are complementary, this allows one to impose

Assumption 5 (Transversality condition). *The intersection of manifolds $W^s(p)$ and $W^{cu}(p)$ at point q is transverse.*

Below we shall show that the linearized along the homoclinic orbit Γ the sequence of linearized map generates the linear symplectic scattering map

$$S: T_p W^c \rightarrow T_p W^c.$$

We assume this map being generic that means as above that the foliation into ellipses on the tangent plane $T_p W^c$ generated by the linearized map Df_p has the property: any ellipse E of this foliation satisfies

Assumption 6 (Genericity condition). *The intersection $E \cap S(E)$ is transverse and consists of four points.*

If these three conditions hold then the analog of the main theorem is valid.

Theorem 3. *Let a C^r -smooth, $r \geq 6$, symplectic diffeomorphism f on a C^∞ -smooth $2(n+1)$ -dimensional symplectic manifold M with an elliptic-hyperbolic fixed point of the type $(2, 2n)$ obey Assumptions 4–6. Then there is a neighborhood U of homoclinic orbit Γ such that every closed invariant KAM-curve on W^c possesses four transverse homoclinic orbits in U .*

To prove this theorem we again first study the linearized nonautonomous problem given by the linearization of f on the homoclinic orbit Γ . Also, in order to avoid possible complications, one assumes in addition that orbit Γ leaves from p and enters to p along leading direction in W^u and W^s (one or two dimensional).

Then, as above, we construct scattering map S acting on $T_p W^c$ and assuming Assumptions 4–6 to hold we prove the Theorem. This proof uses again that the transverse intersection of W^{cu} and W^{cs} near a homoclinic point $q \in \Gamma$ occurs along a 2-dimensional disk Σ which belongs to both of them. Hence $(n+1)$ -dimensional stable and unstable manifolds of any invariant KAM-curve $\gamma \subset W^c$ when continuing by f in W^{cs} , W^{cs} , respectively, intersect again Σ along closed curves $w^s(\gamma)$, $w^u(\gamma)$. Genericity Assumption 6 implies this intersection to happen transversely at four points through which homoclinic orbits to γ pass.

7. APPENDICES

7.1. Straightening invariant manifolds. In some neighborhood of the fixed point the symplectic diffeomorphism under consideration can be in the form (6). In this form 1-dimensional stable manifold W^s is given as a smooth curve tangent to the x -axis (at point p) and 1-dimensional unstable manifold W^u is given as a smooth curve tangent to the y -axis. Center stable W^{cs} and center unstable W^{cu} manifolds are given as graphs of the functions $y = F(x, u, v)$ and $x = G(y, u, v)$ being tangent at p to 3-dimensional planes $y = 0$ and $x = 0$, respectively. Let us first straighten the curves W^s , W^u :

Lemma 6. *Let in linear symplectic space $(\mathbb{R}^4, \Omega = dx \wedge dy + du \wedge dv)$ a smooth curve $(x, y(x), u(x), v(x))$ through the point $(0, 0, 0, 0)$ is given, such that $y'(0) = u'(0) = v'(0) = 0$. Then this curve can be transformed by a symplectic transformation $(x, y, u, v) \rightarrow (\xi, \eta, \nu, \omega)$ into the ξ -axis.*

There are many of such transformations, for instance, this is one of them:

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = y - y(x) - v'(x)(u - u(x)) + u'(x)(v - v(x)), \\ \nu = u - u(x), \\ \omega = v - v(x). \end{cases}$$

All other transformations in a neighborhood of p we perform holding straight W^s and W^u . At the next step we straighten W^{cs} and W^{cu} :

Lemma 7. *In some neighborhood of point p there exist symplectic coordinates (x, y, u, v) , $\Omega = dx \wedge dy + du \wedge dv$, such that submanifolds W^{cs} , W^{cu} in these coordinates become flat, that is they are given as $y=0$, $x=0$, respectively.*

Proof. In principal, this lemma follows from the related result of the theory of symplectic manifolds (the relative Darboux theorem) [3]. But for the reader's convenience, we present a direct proof. We follow the lines of the proof of the Darboux theorem given in [1].

In coordinates (6) W^{cs} is expressed as $y = F(x, u, v)$, where

$$F(0, 0, 0) = F_x(0, 0, 0) = F_u(0, 0, 0) = F_v(0, 0, 0) = 0.$$

Center unstable manifold W^{cu} in the same coordinates is given as $x = G(y, u, v)$,

$$G(0, 0, 0) = G_y(0, 0, 0) = G_u(0, 0, 0) = G_v(0, 0, 0) = 0.$$

Take function $p_1 = y - F$ as a Hamilton function and consider the related Hamiltonian flow. Since $\dot{x} = 1$ then in a neighborhood of p small enough submanifold $x = G(y, u, v)$ is transversal to flow orbits. We take this manifold as a cross-section to the flow. Denote $q_1(x, y, u, v)$ the time needed for the flow orbit through the initial point $(x_0 = G(y_0, u_0, v_0), y_0, u_0, v_0)$ to reach the point (x, y, u, v) . Then $q_1 = 0$ for points on the cross-section and $p_1 = 0$ on W^{cs} since it is a level of the Hamiltonian. The Lie derivative of q_1 w. r. t. the vector field X_{p_1} is equal to 1. Therefore, Hamiltonian vector fields with the Hamilton functions p_1, q_1 are commute and independent in a neighborhood of p . Thus, orbits of \mathbb{R}^2 -action generated by these two commuting Hamilton functions give a smooth foliation into 2-dimensional orbits near p and its leaves are transversal to 2-dimensional submanifold being joint level of functions p_1 and q_1 . Next we take joint level $p_1 = q_1 = 0$ that is just locally W^c . We introduce any local symplectic w. r. t. the restriction of 2-form Ω on W^c coordinates (p_2, q_2) near p . These coordinates are extended onto a neighborhood of W^c setting (p_2, q_2) constant along the whole 2-dimensional orbit of the action through the point on W^c with coordinates (p_2, q_2) on it. \square

Remark 1. If W^s and W^u were previously made straighten, then one has

$$F(x, 0, 0) \equiv 0, \quad G(y, 0, 0) \equiv 0$$

and straightening W^{cs} , W^{cu} preserves W^s , W^u straighten.

7.2. Normal form near 1-elliptic fixed point. Here we shall derive the normal form up to the terms of third order for a smooth symplectic 4-dim diffeomorphism f in neighborhood V of its fixed 1-elliptic point p . Without a loss of generality one may assume $\alpha \in (0, \pi)$.

Proposition 2. *In some neighborhood V of fixed 1-elliptic point p there exist symplectic coordinates (x, y, u, v) , $\Omega = dx \wedge dy + du \wedge dv$, such that diffeomorphism f*

has the following form in these coordinates:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \mu x_n (1 + ax_n y_n + b(u_n^2 + v_n^2) + \mathcal{O}_3), \\ y_{n+1} = \mu^{-1} y_n (1 - ax_n y_n - b(u_n^2 + v_n^2) + \mathcal{O}_3), \\ u_{n+1} = u_n \cos(\alpha + \nu(u_n^2 + v_n^2)) - v_n \sin(\alpha + \nu(u_n^2 + v_n^2)) - \\ \quad - \kappa x_n y_n (u_n \sin \alpha + v_n \cos \alpha) + \varphi(x_n, y_n, u_n, v_n), \\ v_{n+1} = u_n \sin(\alpha + \nu(u_n^2 + v_n^2)) + v_n \cos(\alpha + \nu(u_n^2 + v_n^2)) + \\ \quad + \kappa x_n y_n (u_n \cos \alpha - v_n \sin \alpha) + \psi(x_n, y_n, u_n, v_n), \end{cases} \quad (15)$$

where $\nu \neq 0$, functions φ, ψ are of the fourth order and higher at the origin, \mathcal{O}_3 means terms of third order and higher at the origin. In these coordinates manifolds W^s, W^u coincide with x -axis, y -axis, respectively, that is the following identities hold:

$$\varphi(x, 0, 0, 0) = \varphi(0, y, 0, 0) = \psi(x, 0, 0, 0) = \psi(0, y, 0, 0) \equiv 0.$$

Proof. At the first step we straighten manifolds W^{cs}, W^{cu} in the neighborhood of p (see Appendix). As the result, first two relations in (6) are transformed to the form:

$$x_{n+1} = x_n(\mu + \dots), \quad y_{n+1} = y_n(\mu^{-1} + \dots).$$

Next we apply the standard normal form method for symplectic maps (see for instance [3]). We shall use such symplectic coordinate transformations which hold W^{cs}, W^{cu} be straightened. Next we use complex coordinates instead of u, v in order to diagonalize the linear part of the third and fourth relations. Monomials of the second order and those of third order other than resonance monomials can be killed.

Resonance relations for the set of eigenvalues $(\mu, \mu^{-1}, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$ and integer vectors (m_1, m_2, n_1, n_2) have the form:

$$\begin{aligned} \mu^{m_1-m_2-1} e^{i\alpha(n_1-n_2)} &= 1, & \mu^{m_1-m_2+1} e^{i\alpha(n_1-n_2)} &= 1, \\ \mu^{m_1-m_2} e^{i\alpha(n_1-n_2-1)} &= 1, & \mu^{m_1-m_2} e^{i\alpha(n_1-n_2+1)} &= 1. \end{aligned}$$

These relations can be rewritten in the following way:

$$m_1 = m_2 + 1, \quad \alpha(n_1 - n_2) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (16)$$

$$m_2 = m_1 + 1, \quad \alpha(n_1 - n_2) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (17)$$

$$m_1 = m_2, \quad \alpha(n_1 - n_2 - 1) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (18)$$

$$m_1 = m_2, \quad \alpha(n_1 - n_2 + 1) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

From these relations for integers vectors (m_1, m_2, n_1, n_2) such that

$$|m| + |n| = m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 2, 3$$

we derive that if $|m| + |n| = 2$, then resonance relations (16) and (17) are absent, resonance relations (18) and (19) are the same as for the case of 2-dimensional elliptic point: $\alpha = 2\pi/3$. Thus, according to our assumptions (that p is 1-elliptic fixed point of generic type for $f|_{W^c}$) resonant monomials of second order can

be removed. If $|m| + |n| = 3$, then for resonance relations (16) we get resonant monomials x^2y , corresponding to 2-dimensional saddle point of symplectic diffeomorphism, and $x(u^2 + v^2)$. For relations (17) we get xy^2 and $y(u^2 + v^2)$. Under an assumption that strong resonances are absent in the system, relations (18) and (19) show resonant monomials xyu , xyv , $u(u^2 + v^2)$ and $v(u^2 + v^2)$ cannot be eliminated. The last two present in the normal form for a diffeomorphism in a neighborhood of an elliptic point. Taking into account that the transformation to the normal form should be symplectic we get (15). \square

7.3. Invariant foliations and their smoothness. In this subsection we verify the conditions from [14, 15] which guarantee the existence and smoothness of stable and unstable invariant foliations within manifolds W^{cs} , W^{cu} , respectively. In particular, these conditions imply the existence of stable and unstable smooth invariant manifolds for KAM-curves on the center manifold W^c . Homoclinic orbits to KAM-curves belongs to intersection of these manifolds. Note that this fact does not follow immediately from the Hirsch–Pugh–Shub theorem [21] and we use the theory developed by Fenichel [14, 15]. Let us recall the definition of weakly overflowing invariant set according to [14]:

Definition 1 (N. Fenichel, 1974). Let U and V be open subsets of some C^l -manifold M_1 , $1 \leq l \leq \infty$, and let $F: U \rightarrow V$ be a C^l -diffeomorphism. A set $\Lambda \subset U$ is called weakly overflowing invariant (under F) if $\Lambda \subset F(\Lambda)$.

Let $TF: TU \rightarrow TV$ be the map induced by F on tangent spaces. A sub-bundle $E \subset TM_1|_{\Lambda}$ is called weakly overflowing invariant if $E \subset TF(E)$.

Let us choose any invariant KAM-curve on W^c in a sufficiently small neighborhood of p . Then the closure of subset in W^c bounded by this KAM-curve is weakly overflowing invariant set under diffeomorphism f . Denote this compact set as Λ . Here we assume $M_1 = W^{cu}$ and consider $f|_{M_1}$. To apply expanding family theorems one need to show that there exists weakly overflowing invariant sub-bundle $E \subset TM_1|_{\Lambda}$. It will be proved using contraction mapping principle. Recall that locally near p manifolds W^{cu} , W^{cs} are straightened (i. e. $x \equiv 0$ on W^{cu} and $y \equiv 0$ on W^{cs}) and (y, u, v) are coordinates on it. Then the restriction f on W^{cu} has following form:

$$\begin{cases} y_{n+1} = \mu^{-1}y_n + h(y_n, u_n, v_n)y_n, \\ u_{n+1} = u_n \cos \alpha - v_n \sin \alpha + g_1(y_n, u_n, v_n), \\ v_{n+1} = u_n \sin \alpha + v_n \cos \alpha + g_2(y_n, u_n, v_n), \end{cases}$$

where functions g_1, g_2 are of second order in (y, u, v) , h is first order function. Now let us change variables $(y_n, u_n, v_n) \rightarrow (\hat{y}_n, \hat{u}_n, \hat{v}_n)$:

$$\begin{cases} y_n = \hat{y}_n, \\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = R_{n\alpha} \begin{pmatrix} \hat{u}_n \\ \hat{v}_n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

In new coordinates the diffeomorphism will have the form (we keep old notations for variables):

$$\begin{cases} y_{n+1} = \mu^{-1}y_n + h(y_n, u_n, v_n)y_n, \\ u_{n+1} = u_n + g_1(y_n, u_n, v_n), \\ v_{n+1} = v_n + g_2(y_n, u_n, v_n), \end{cases} \quad (20)$$

At any point $m \in \Lambda$ differential Df has the following representation (recall $\Lambda \subset W^c$ is given as $y \equiv 0$):

$$Df_m = \begin{pmatrix} \mu^{-1} + h(m) & 0 & 0 \\ g_{1_y}(m) & 1 + g_{1_u}(m) & g_{1_v}(m) \\ g_{2_y}(m) & g_{2_u}(m) & 1 + g_{2_v}(m) \end{pmatrix}.$$

Since we work in one coordinate chart (y, u, v) , we will denote (η, χ_1, χ_2) as coordinates in the tangent space to a point m . Now consider any orbit $(\dots, m_n, m_{n+1}, \dots)$ of $f|_{W^c}$, $m = m_0$, which belongs to Λ (that is to W^c). At each point of this orbit choose in $T_{m_n}M_1$ a straight line through the origin in the tangent space being transversal to plane $\eta = 0$. Such straight line can be given parametrically: $(\eta, p_n\eta, q_n\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$, functions p_n and q_n smoothly depend on m in Λ . Differential Df_m transforms this line to another line in $T_{f(m)}M_1$:

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= (\mu^{-1} + h(m_n))\eta, \\ \bar{p}_{n+1} &= \frac{g_{1_y}(m_n) + (1 + g_{1_u}(m_n))p_n + g_{1_v}(m_n)q_n}{\mu^{-1} + h(m_n)}, \\ \bar{q}_{n+1} &= \frac{g_{2_y}(m_n) + g_{2_u}(m_n)p_n + (1 + g_{2_v}(m_n))q_n}{\mu^{-1} + h(m_n)}. \end{aligned} \quad (21)$$

R. h. s. of the second and third relations define an operator in the Banach space of uniformly bounded sequences $\zeta = \{(p_n, q_n)\}$ with norm $\|\zeta\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} (|p_n|, |q_n|)$. Indeed, operator will transform a uniformly bounded sequence ζ to the bounded one, as all derivatives $(g_i)'_y, (g_i)'_u, (g_i)'_v$, $i = 1, 2$, calculated at m_n , are small (functions g_i , $i = 1, 2$, are of second order at zero):

$$\begin{aligned} |\bar{p}_{n+1}| &\leq \frac{|g_{1_y}(m_n)| + |1 + g_{1_u}(m_n)| \cdot \|\zeta\| + |g_{1_v}(m_n)| \cdot \|\zeta\|}{|\mu^{-1} + h(m_n)|}, \\ |\bar{q}_{n+1}| &\leq \frac{|g_{2_y}(m_n)| + |g_{2_u}(m_n)| \cdot \|\zeta\| + |1 + g_{2_v}(m_n)| \cdot \|\zeta\|}{|\mu^{-1} + h(m_n)|}. \end{aligned}$$

To prove the operator is contracting, consider following inequalities:

$$\begin{aligned} |\bar{p}_{n+1}^1 - \bar{p}_{n+1}^2| &\leq \frac{|1 + g_{1_u}(m_n)| \cdot |p_n^1 - p_n^2| + |g_{1_v}(m_n)| \cdot |q_n^1 - q_n^2|}{|\mu^{-1} + h(m_n)|} \leq \\ &\leq \frac{(|1 + g_{1_u}(m_n)| + |g_{1_v}(m_n)|) \|\zeta^1 - \zeta^2\|}{|\mu^{-1} + h(m_n)|}, \end{aligned}$$

$$|\bar{q}_{n+1}^1 - \bar{q}_{n+1}^2| \leq \frac{|g_{2_u}(m_n)| \cdot |p_n^1 - p_n^2| + |1 + g_{2_v}(m_n)| \cdot |q_n^1 - q_n^2|}{|\mu^{-1} + h(m_n)|} \leq \frac{(|g_{2_u}(m_n)| + |1 + g_{2_v}(m_n)|) \|\zeta^1 - \zeta^2\|}{|\mu^{-1} + h(m_n)|}.$$

Quantities such as

$$\frac{|1 + g_{1_u}(m_n)| + |g_{1_v}(m_n)|}{\text{eft}|\mu^{-1} + h(m_n)|}$$

are less than 1 uniformly in n , if we are working in a neighborhood of p small enough, so that the operator is contracting. According to contraction mapping principle there exists a unique fixed point of the operator, namely some sequence $\{(p_n^*, q_n^*)\}$. This sequence (as the point in the related Banach space) depends continuously in $m \in \Lambda$. The straight lines corresponding to this sequence, as m varies along Λ , form weakly overflowing invariant sub-bundle $E \subset TM_1|_\Lambda$.

Next we choose a vector bundle $N \subset TM_1|_\Lambda$, complementary to E , that is $TM_1|_\Lambda = E \oplus N$. We set $N = T\Lambda$. According to [14] for $m \in \Lambda$, any $v_0 \in E$ and $w_0 \in N$ let

$$v_{-k} = Df^{-k}(m)v_0, \quad w_{-k} = \pi^N Df^{-k}(m)w_0,$$

where π^N is projection to N (note that in our case N is invariant under Df , so one can just let $w_{-k} = Df^{-k}(m)w_0$). Let us also define two numbers

$$\alpha^*(m) = \inf_{\alpha > 0} \{ |v_{-k}| / \alpha^k \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty \quad \forall v_0 \in E \},$$

$$\rho^*(m) = \inf_{\rho > 0} \{ |v_{-k}| / |w_{-k}| / \rho^k \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty \quad \forall v_0 \in E, w_0 \in N \}.$$

The number $\alpha^*(m)$ is an asymptotic measure of the growth of vectors in E under the action of Df^{-1} , and $\rho^*(m)$ is an asymptotic measure of the ratio of the growth of vectors in E to the growth of vectors in N under the action of Df^{-1} .

Recall one more definition and formulate expanding family theorem [14] for reader's convenience.

Definition 2 (N. Fenichel, 1974). The pair (Λ, E) is called an invariant set with expanding structure for f , if Λ is compact and weakly overflowing invariant, E is weakly overflowing invariant, and $\alpha^*(m) < 1$, $\rho^*(m) < 1$ for all $m \in \Lambda$.

Theorem 4 (Expanding Family Theorem, N. Fenichel, 1974). Let M_1 be C^1 -manifold, $1 \leq l \leq \infty$, and let $F: M_1 \rightarrow M_1$ be a C^l -diffeomorphism. Let (Λ, E) be an invariant set with expanding structure. Then there is a family of C^l -manifolds $W^E(m)$, $m \in \Lambda$, invariant in the sense that

$$F^{-1}(W^E(m)) = W^E(F^{-1}(m)).$$

The manifold $W^E(m)$ is C^l -diffeomorphic to the fiber E_m , and is tangent to E_m at m .

Let us show that in our case $\alpha^*(m) < 1$, $\rho^*(m) < 1$ for any $m \in \Lambda$. Take any $v_0 \in E$, it has the coordinate representation: $v_0 = (\eta_0, p_0^* \eta_0, q_0^* \eta_0)$. Vector v_{-k} will have the representation: $v_{-k} = (\eta_{-k}, p_{-k}^* \eta_{-k}, q_{-k}^* \eta_{-k})$. Taking into account first

and, so:

$$\begin{aligned} |c_{-k}| + |d_{-k}| &\leq |c_{-k+1}| + |d_{-k+1}| + 2\delta_2(|c_{-k+1}| + |d_{-k+1}|) = \\ &= (|c_{-k+1}| + |d_{-k+1}|)(1 + 2\delta_2) \leq \\ &\leq (|c_{-k+2}| + |d_{-k+2}|)(1 + 2\delta_2)^2 \leq \dots \leq (|c_0| + |d_0|)(1 + 2\delta_2)^k. \end{aligned}$$

Then one gets:

$$\begin{aligned} \sqrt{|c_{-k}|^2 + |d_{-k}|^2} &\leq \sqrt{2(\max\{|c_{-k}|, |d_{-k}|\})^2} \leq \sqrt{2} \max\{|c_{-k}|, |d_{-k}|\} \leq \\ &\leq \sqrt{2}(|c_{-k}| + |d_{-k}|) \leq \sqrt{2}(|c_0| + |d_0|)(1 + 2\delta_2)^k. \end{aligned}$$

On the other side:

$$\begin{aligned} |c_{-k}| &\geq (1 - \delta_2)|c_{-k+1}| - \delta_2|d_{-k+1}| = |c_{-k+1}| - \delta_2(|c_{-k+1}| + |d_{-k+1}|), \\ |d_{-k}| &\geq (1 - \delta_2)|d_{-k+1}| - \delta_2|c_{-k+1}| = |d_{-k+1}| - \delta_2(|c_{-k+1}| + |d_{-k+1}|), \end{aligned}$$

and, consequently,

$$\begin{aligned} |c_{-k}| + |d_{-k}| &\geq |c_{-k+1}| + |d_{-k+1}| - 2\delta_2(|c_{-k+1}| + |d_{-k+1}|) = \\ &= (|c_{-k+1}| + |d_{-k+1}|)(1 - 2\delta_2) \geq \\ &\geq (|c_{-k+2}| + |d_{-k+2}|)(1 - 2\delta_2)^2 \geq \dots \geq (|c_0| + |d_0|)(1 - 2\delta_2)^k. \end{aligned}$$

The following inequalities are valid:

$$(|c_0| + |d_0|)(1 - 2\delta_2)^k \leq |c_{-k}| + |d_{-k}| \leq 2 \max\{|c_{-k}|, |d_{-k}|\},$$

so,

$$\max\{|c_{-k}|, |d_{-k}|\} \geq \frac{|c_0| + |d_0|}{2}(1 - 2\delta_2)^k$$

and

$$\sqrt{|c_{-k}|^2 + |d_{-k}|^2} \geq \sqrt{(\max\{|c_{-k}|, |d_{-k}|\})^2} = \max\{|c_{-k}|, |d_{-k}|\} \geq \frac{|c_0| + |d_0|}{2}(1 - 2\delta_2)^k.$$

Now let us evaluate

$$\frac{|v_{-k}|}{|w_{-k}|\rho^k} = \frac{\mu^k |\eta_0| \sqrt{1 + (p_{-k}^*)^2 + (q_{-k}^*)^2}}{\rho^k (1 + \mu h(m_{-1})) \dots (1 + \mu h(m_{-k})) \sqrt{|c_{-k}|^2 + |d_{-k}|^2}}.$$

Next estimates are valid:

$$\begin{aligned} \frac{|v_{-k}|}{|w_{-k}|\rho^k} &\geq \frac{\mu^k |\eta_0| \sqrt{1 + (p_{-k}^*)^2 + (q_{-k}^*)^2}}{\rho^k (1 + \mu \delta_1)^k \sqrt{2}(|c_0| + |d_0|)(1 + 2\delta_2)^k}, \\ \frac{|v_{-k}|}{|w_{-k}|\rho^k} &\leq \frac{2\mu^k |\eta_0| \sqrt{1 + (p_{-k}^*)^2 + (q_{-k}^*)^2}}{\rho^k (1 - \mu \delta_1)^k (|c_0| + |d_0|)(1 - 2\delta_2)^k}. \end{aligned} \tag{24}$$

The expression in the r. h. s. of the first inequality in (24) tends to zero as k tends to ∞ if $\rho > \frac{\mu}{(1 + \mu \delta_1)(1 + 2\delta_2)}$, while expression in the r. h. s. of the second inequality in (24) tends to zero as k tends to ∞ if $\rho > \frac{\mu}{(1 - \mu \delta_1)(1 - 2\delta_2)}$. Thus, we get:

$$\rho^*(m_0) \in \left[\frac{\mu}{(1 + \mu \delta_1)(1 + 2\delta_2)}, \frac{\mu}{(1 - \mu \delta_1)(1 - 2\delta_2)} \right] < 1.$$

Then expanding family theorem holds and for each point $m \in \Lambda$ there exists 1-dimensional manifold (a curve) in M_1 being tangent to corresponding layer in E . The collection of these curves is invariant under f^{-1} . In particular, collecting these manifolds for points of an invariant KAM-curve defines its unstable manifold.

Now we want to have smoothness properties for the expanding foliation obtained. Let us apply smoothness theorem for invariant sets with expanding structure to prove that these manifolds smoothly depend on m_0 [15]. For this purpose we define the quantity τ^* according to [15]:

$$\tau^*(m_0) = \inf \left\{ \tau : [|v_{-k}|/|w_{-k}|]^\tau |\xi_{-k}| \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \inf \right. \\ \left. \forall v_0 \in E, w_0 \in N, \xi_0 \in T_{m_0}\Lambda = N \right\}.$$

Theorem 5 (Smooth Invariant Bundle Theorem, N. Fenichel, 1977). *Let U and V be open subsets of a C^l -manifold M_1 , and let $F: U \rightarrow V$ be a C^l -diffeomorphism, $2 \leq l \leq \infty$. Let Λ be a compact, properly embedded, C^l -manifold with boundary, overflowing invariant under F . Let (Λ, E) be an invariant set with expanding structure. If $1 \leq l' \leq l-1$, and $\tau^*(m) < 1/l'$ for all $m \in \Lambda$, then E is a $C^{l'}$ -smooth vector bundle.*

Taking into account estimates found before, one gets for diffeomorphism (20) and any vector $\xi_0 = (0, \bar{c}_0, \bar{d}_0) \in N$, $\xi_{-k} = (0, \bar{c}_{-k}, \bar{d}_{-k})$, following inequality to be valid:

$$\frac{|v_{-k}|^\tau}{|w_{-k}|^\tau} |\xi_{-k}| = \left(\frac{\mu^k |\eta_0| \sqrt{1 + (p_{-k}^*)^2 + (q_{-k}^*)^2}}{|(1 + \mu h(m_{-1})) \dots (1 + \mu h(m_{-k}))| \sqrt{|\bar{c}_{-k}|^2 + |\bar{d}_{-k}|^2}} \right)^\tau \sqrt{|\bar{c}_{-k}|^2 + |\bar{d}_{-k}|^2} \leq \\ \leq \frac{\mu^{\tau k} C_1^\tau}{(1 - \mu \delta_1)^{\tau k} (1 - 2\delta_2)^{\tau k}} \sqrt{2} (|\bar{c}_0| + |\bar{d}_0|) (1 + 2\delta_2)^k, \quad (25)$$

here C_1 is constant which can be easily calculated. The r. h. s. of (25) tends to zero as $k \rightarrow \infty$ if

$$\tau \geq \tau_1 = \frac{\ln(1 + 2\delta_2)}{\ln[(1 - \mu \delta_1)(1 - 2\delta_2)] - \ln \mu} > 0.$$

Quantity τ_1 is small enough of order δ_2 . On the other hand,

$$\frac{|v_{-k}|^\tau}{|w_{-k}|^\tau} |\xi_{-k}| \geq \frac{\mu^{\tau k} C_2^\tau}{(1 + \mu \delta_1)^{\tau k} (1 + 2\delta_2)^{\tau k}} \frac{|\bar{c}_0| + |\bar{d}_0|}{2} (1 - 2\delta_2)^k. \quad (26)$$

The r. h. s. of (26) tends to zero as $k \rightarrow \infty$ if

$$\tau \geq \tau_2 = \frac{\ln(1 - 2\delta_2)}{\ln[(1 + \mu \delta_1)(1 + 2\delta_2)] - \ln \mu}, \quad \tau_2 < 0.$$

Therefore, $\tau^*(m_0) \in [\tau_2, \tau_1]$, so vector bundle E is $C^{r'}$ smooth, where $r' < 1/\tau_1$, $r' \leq r - 2$.

Existence of stable manifold $W^s(\gamma)$ and its smoothness can be proved in a similar way.

REFERENCES

- [1] *Arnold V.I.* Mathematical methods of classical mechanics. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [2] *Arnold V., Kozlov V., Neishtadt A.* Mathematical aspects of classical and celestial mechanics // Dynamical systems III. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [3] *Arnold V.I., Givental A.B.* Symplectic Geometry and its Applications // Dynamical Systems IV, Eds. Arnold V.I. & Novikov S. P. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [4] *Bolotin S.V.* Homoclinic orbits to invariant tori of Hamiltonian systems // AMS Transl. Ser. 2. 1995. Vol. 168. P. 21–90.
- [5] *Bolotin S. V., Treschev D. V.* Remarks on the definition of hyperbolic tori of Hamiltonian systems // Regul. Chaotic Dyn. 2000. Vol. 5, № 4. P. 401–412.
- [6] *Celletti A., Negrini P.* Non-integrability of the problem of motion around an oblate planet // Cel. Mech. Dynam. Astron. 1995. Vol. 61. P. 253–260.
- [7] *Conley C.C.* On the ultimate behavior of orbits with respect to an unstable critical point. I. Oscillating, asymptotic, and capture orbits // J. Diff. Equat. 1969. Vol. 5. P. 136–158.
- [8] *Cresson J.* Symbolic dynamics and Arnold diffusion // J. Diff. Equat. 2003. Vol. 187. P. 269–292.
- [9] *Cushman R.* Examples of nonintegrable analytic Hamiltonian vector fields with no small divisors // Trans. AMS. 1978. Vol. 238, № 1. P. 45–55.
- [10] *Delshams A., Gutiérrez P.* Splitting potential and the Poincaré–Melnikov method for whiskered tori in Hamiltonian systems // J. Nonlinear Sci. 2000. Vol. 10, № 4. P. 433–476.
- [11] *Delshams A., de la Llave R., Seara T.M.* Geometric properties of the scattering map of a normally hyperbolic invariant manifold // Adv. Math. 2008. Vol. 217, № 3. P. 1096–1153.
- [12] *Devaney R.L.* Homoclinic orbits in Hamiltonian systems // J. Diff. Equat. 1976. Vol. 21, № 2. P. 431–438.
- [13] *Easton R.* Homoclinic phenomena in Hamiltonian systems with several degrees of freedom // J. Diff. Equat. 1978. Vol. 29. P. 241–252.
- [14] *Fenichel N.* Asymptotic stability with rate conditions // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 23, № 12. P. 1109–1137.
- [15] *Fenichel N.* Asymptotic stability with rate conditions, II // Indiana Univ. Math. J. 1977. Vol. 26, № 1. P. 81–93.
- [16] *Franks J.* Rotation numbers and instability sets // Bull. AMS. 2003. Vol. 40, № 3. P. 263–279.
- [17] *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* Elliptic periodic orbits near a homoclinic tangency in four-dimensional symplectic maps and Hamiltonian systems with three degrees of freedom // Reg. Chaot. Dyn. 1998. Vol. 3, № 4. P. 3–26.
- [18] *Grotta Ragazzo C.* Nonintegrability of some Hamiltonian systems, scattering and analytic continuation // Comm. Math. Phys. 1994. Vol. 166. P. 255–277.
- [19] *Grotta Ragazzo C.* Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle centers // Comm. Pure Appl. Math. 1997. Vol. 50, № 2. P. 105–147.
- [20] *Grotta Ragazzo C., Koiller J., Oliva W. M.* On the motion of two-dimensional vortices with mass // J. Nonlinear Sci. 1994. Vol. 4, № 5. P. 375–418.
- [21] *Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant manifolds. Berlin — New York: Springer-Verlag, 1977. (Lecture Notes in Math.; Vol. 583).
- [22] *Kelley A.* The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds // J. Diff. Equat. 1967. Vol. 3. P. 546–570.
- [23] *Koltsova O. Yu., Lerman L. M.* Periodic and homoclinic orbits in a two-parameter unfolding of a Hamiltonian system with a homoclinic orbit to a saddle-center // Int. J. Bifurcation & Chaos. 1995. Vol. 5, № 2. P. 397–408.
- [24] *Koltsova O., Lerman L.* Families of transverse Poincaré homoclinic orbits in 2N-dimensional Hamiltonian systems close to the system with a loop to a saddle-center // Int. J. Bifurcation & Chaos. 1996. Vol. 6, № 6. P. 991–1006.
- [25] *Koltsova O., Lerman L., Delshams A., Gutiérrez P.* Homoclinic orbits to invariant tori near a homoclinic orbit to center-center-saddle equilibrium // Phys. D. 2005. Vol. 201, № 3–4. P. 268–290.
- [26] *Kozlov V.V.* Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics // Russ. Math. Surv. 1983. Vol. 38. P. 1–76.

- [27] *de la Llave R.* Some recent progress in geometric methods in the instability problem in Hamiltonian mechanics // Intern. Congr. of Mathematicians (Madrid, Spain, 2006). Vol. 2. Zürich: Eur. Math. Soc., 2006. P. 1705–1729.
- [28] *Lerman L. M.* Complex dynamics and bifurcations in Hamiltonian system having the transversal homoclinic orbit to a saddle focus // *Chaos*. 1991. Vol. 1, № 2. P. 174–180.
- [29] *Lerman L. M., Umanskiy Ya. L.* On the existence of separatrix loops in four-dimensional systems similar to the integrable Hamiltonian systems // *Prikl. Mat. Mekh.* 1983. Vol. 47, № 3. P. 395–401 (in Russian). (Engl. transl. *J. Appl. Math. Mech.*, 1983, vol. 47, № 3, p. 335–340).
- [30] *Lerman L. M.* Hamiltonian systems with a separatrix loop of a saddle-center // *Methods of Qualitative Theory of Diff. Equat.* / Ed. E. A. Leontovich-Andronova. Gorky State Univ., 1987. P. 89–103 (Russian). (Engl. transl. *Selecta Math. Sov.*, 1991, vol. 10, № 3, p. 297–306).
- [31] *Lidov M. L., Vashkov'yak M. A.* Doubly asymptotic symmetric orbits in the plane restricted circular three-body problem. Preprint № 115, Inst. for Applied Math. of USSR Acad. of Sci., Moscow, 1975 (in Russian).
- [32] *Llibre J., Martínez R., Simó C.* Transversality of the invariant manifolds associated to the Lyapunov family of periodic orbits near L_2 in the restricted three-body problem // *J. Diff. Equat.* 1985. Vol. 58, № 1. P. 104–156.
- [33] *Melnikov V. K.* On the stability of a center for time-periodic perturbations // *Trudy Moskov. Mat. Obsch.* 1963. Vol. 12. P. 3–52 (in Russian).
- [34] *Mielke A.* Hamiltonian and Lagrangian flows on center manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1991. (Lecture Notes in Math.; Vol. 1489).
- [35] *Mielke A., Holmes P., O'Reilly O.* Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle-center // *J. Dyn. Diff. Equat.* 1992. Vol. 4, № 1. P. 95–126.
- [36] *Moser J.* Lectures on Hamiltonian systems // *Memoirs of AMS.* 1968. Vol. 81.
- [37] *Robinson C.* Horseshoes for autonomous Hamiltonian systems using the Melnikov integral // *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 1988. Vol. 8. P. 395–409.
- [38] *Rüssmann H.* Kleine Nenner I: Über invarianten Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes // *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. II.* 1970. P. 67–105.
- [39] *Smale S.* Differential dynamical systems // *Bull. AMS.* 1967. Vol. 73. P. 747–817.
- [40] *Turaev D. V., Shilnikov L. P.* On Hamiltonian systems with homoclinic saddle curves // *Soviet Math. Dokl.* 1989. Vol. 39. P. 165–168.
- [41] *Treshchev D.* Hyperbolic tori and asymptotic surfaces in Hamiltonian systems // *Russian J. Math. Phys.* 1994. Vol. 2, № 1. P. 93–110.
- [42] *Zakharov V. E., Manakov S. V., Novikov S. P., Pitaevsky L. P.* Theory of solitons. The inverse problem method. Plenum Press, 1999.

LEV LERMAN

Dept. of Diff. Equat. & Math. Analysis and
Research Inst. for Appl. Math. & Cybernetics
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
E-mail: lermanl@mm.unn.ru

Received 18.01.2015/06.05.2015

ANNA MARKOVA

Dept. of Diff. Equat. & Math. Analysis and
Research Inst. for Appl. Math. & Cybernetics
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
E-mail: anijam@yandex.ru