ГРОМОВ Е.М., ТЮТИН В.В.
г. Нижний Новгород

(Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики)

Ударные стационарные волны в средах с индуцированным рассеянием Рамана и нелинейной дисперсией

Интерес к стационарным волнам обусловлен возможностью использования для переноса энергии и информации без потерь. Высокочастотные стационарные волны имеют большое значение в различных областях науки: оптические импульсы в волоконных линиях связи [1–3], электромагнитные и ленгмюровские волны в плазме [4]. Распространение импульсов большой протяженности хорошо описывается нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [5–6], учитывающим линейную дисперсию второго порядка и кубичную нелинейность. Стационарные волны в рамках этого уравнения существуют в результате баланса дисперсионного разбегания и нелинейного сжатия волнового пакета. Уменьшение протяженности высокочастотных волновых пакетов приводит к необходимости учета в НУШ членов, соответствующих нелинейным эффектам укручения [7], индуцированного рассеяния Рамана [8] и линейного эффекта аберрационного искажения, отвечающего линейной дисперсии третьего порядка. Это расширенное НУШ. В расширенном НУШ с учетом индуцированного рассеяния Рамана, но в пренебрежении нелинейной дисперсией и линейной дисперсией третьего порядка стационарные волны изучались в [9]. В пренебрежении эффектом рассеяния Рамана, но с учетом нелинейной дисперсии и линейной дисперсии третьего порядка стационарные волны изучались в [10] при нелинейной фазовой модуляции, а в [11–12] – при линейной фазовой модуляции. В этом случае стационарные волны существуют в результате баланса нелинейной дисперсии и линейной дисперсии третьего порядка. В [13] рассматривались стационарные волны в рамках расширенного НУШ с учетом нелинейной дисперсии, но в пренебрежении индуцированным рассеянием и линейной дисперсией третьего порядка.

В данной работе найдены стационарные волны перепада в рамках расширенного нелинейного уравнения Шредингера, в котором учтены как индуцированное рассеяние Рамана, так и нелинейная дисперсия, но отсутствует линейная дисперсия третьего порядка. При описании динамики огибающей $U(\xi,t)$ волнового поля $U(\xi,t)\exp(i\omega t-ik\xi)$, расширенное НУШ имеет вид:

$$2i\frac{\partial U}{\partial t}+2i\beta\frac{\partial\left(|U|^2U\right)}{\partial\xi}-\mu U\frac{\partial\left(|U|^2\right)}{\partial\xi}+q\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}+2\alpha|U|^2\,U=0,$$

где $\xi=x-V_g^L\cdot t$, $V_g^L=\partial\omega/\partial k$ – линейная групповая скорость, $\omega=\omega\left(k,|U|^2\right)$ – нелинейное дисперсионное соотношение, $q=-\partial^2\omega/\partial k^2$ – параметр линейной дисперсии второго порядка, $\alpha=\partial\omega/\partial\left(|U|^2\right)$ – параметр кубичной нелинейности, β – коэффициент нелинейной дисперсии, μ – параметр индуцированного рассеяния Рамана. В движущейся со скоростью V системе ($\eta=\xi-V\cdot t, t'=t$) решение вновь полученного уравнения ищем в виде стационарной волны: $U(\eta,t)=A(\eta)\exp(i\Omega t+i\varphi(\eta))$. Для $\varphi(\eta)$ и $A(\eta)$ получим:

$$d\varphi/d\eta=\left(V-\frac{3}{2}\beta A^2\right)\Big/q\,, \tag{1}$$

$$q^2\frac{d^2A}{d\eta^2}-2\mu qA^2\frac{dA}{d\eta}+\left(V^2-2q\Omega\right)A+\left(q\alpha-2V\beta\right)A^3+\frac{3}{4}\beta^2A^5=0\,. \tag{2}$$

Проанализируем это при различных знаках соотношений $V^2 - 2q\Omega$ и $q\alpha - 2V\beta$.

1. При $V^2 - 2q\Omega > 0$ и $q\alpha - 2V\beta < 0$, произведя в (2) замену координаты $\rho = \eta\sqrt{V^2 - 2q\Omega}/q$ и амплитуды волнового поля $A = B \cdot \sqrt{(V^2 - 2q\Omega)/(2V\beta - q\alpha)}$, имеем:

$$\frac{d^2B}{d\rho^2} - pB^2\frac{dB}{d\rho} + B - B^3 + rB^5 = 0, \tag{3}$$

где $p = 2\mu\frac{\sqrt{V^2 - 2q\Omega}}{2V\beta - q\alpha} > 0, r = \frac{3}{4}\beta^2\frac{V^2 - 2q\Omega}{(2V\beta - q\alpha)^2} > 0$. Параметр $p \sim \mu$ характеризует индуцированное рассеяние, а $r \sim \beta^2$ – нелинейную дисперсию. Уравнение (3) имеет пять состояний равновесия: $B = 0$ - неустойчивый фокус (получено усреднением малых осцилляций по методу Ван-дер-Поля [14]), $\pm B_- = \pm\sqrt{\left(1 - \sqrt{1-4r}\right)/(2r)}$ - седла, и $\pm B_+ = \pm\sqrt{\left(1 + \sqrt{1-4r}\right)/(2r)}$. Последние четыре существуют при $r \le 1/4$. Тип неустойчивых состояний $\pm B_+$ определяется соотношением p и r. При малом p^2 состояния $\pm B_+$ – фокусы (рис. 1.a). При большом p^2 состояния $\pm B_+$ – узлы (рис. 1.b).

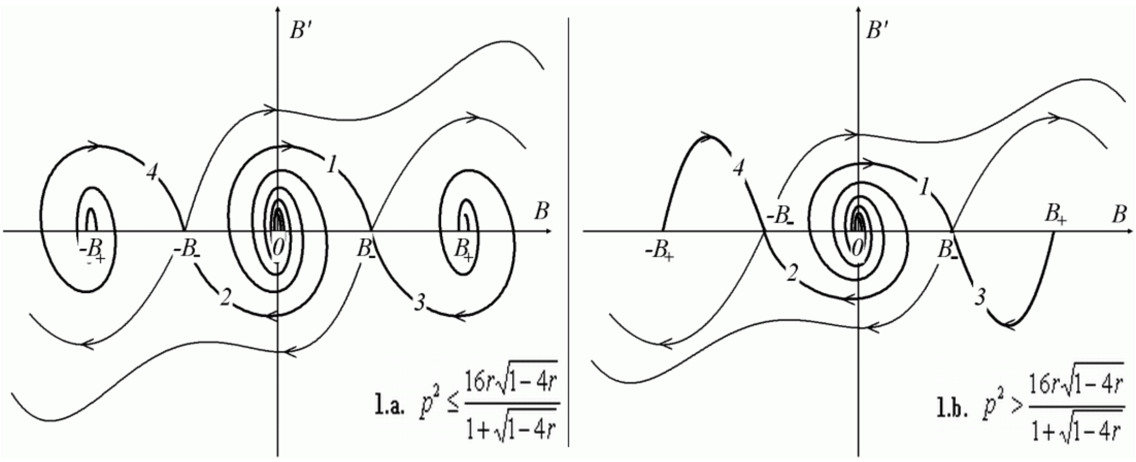

Рис. 1.a,b. Фазовая плоскость уравнения (3). Траектории 1, 2 отвечают стационарным волнам конечной амплитуды без подложки, а траектории 3, 4 – волнам на подложках величины $\pm B_-$.

Отметим, что при $r \to 0$ выполняется $B_-^2 \to 1$. Состояния же $\pm B_+$ уходят на бесконечность. Т.е., при $r = 0$ стационарные волны на подложке (траектории 3, 4) исчезают, остаются лишь волны перепада с затухающими осцилляциями в окрестности нулевой амплитуды (траектории 1, 2). Отсюда следует, что стационарные волны на подложке существуют при балансе нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния.

2. При $V^2 - 2q\Omega < 0$ и $q\alpha - 2V\beta < 0$, произведя в (2) замену координаты $\rho = \eta\sqrt{2q\Omega - V^2}/q$ и амплитуды волнового поля $A = B \cdot \sqrt{(2q\Omega - V^2)/(2V\beta - q\alpha)}$, получим:

$$\frac{d^2B}{d\rho^2} - pB^2\frac{dB}{d\rho} - B - B^3 + rB^5 = 0, \tag{4}$$

где $p = 2\mu\frac{\sqrt{2q\Omega - V^2}}{2V\beta - q\alpha} > 0, r = \frac{3}{4}\beta^2\frac{2q\Omega - V^2}{(q\alpha - 2V\beta)^2} > 0$. Уравнение (4) имеет три состояния равновесия: $B = 0$ - седло и $\pm B_0 = \pm\sqrt{\left(1 + \sqrt{1+4r}\right)/(2r)}$. Тип неустойчивых состояний равновесия $\pm B_0$ определяется соотношением параметров p и r. При малом p^2 состояния $\pm B_0$ – узлы (рис.2.a). При большом p^2 состояния $\pm B_0$ - фокуса (рис. 2.b).

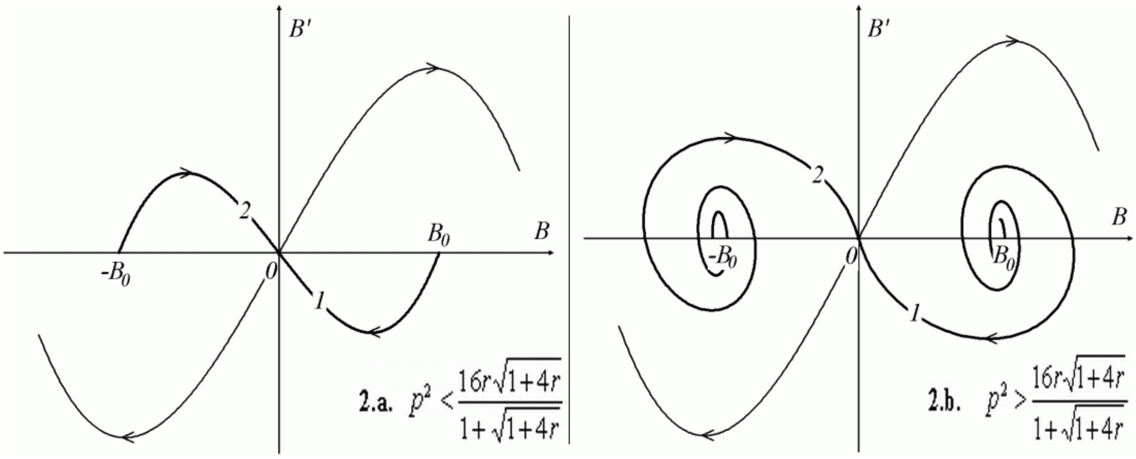

Рис. 2.a,b. Фазовая плоскость уравнения (4). Стационарным волнам конечной амплитуды без подложки отвечают траектории 1 и 2, связывающие состояния равновесия.

Необходимо отметить, что при $r \to 0$ в уравнении (4) состояния равновесия $\pm B_0$ уходят на бесконечность, что приводит к исчезновению стационарных волн конечной амплитуды. Т.е., существование стационарных волн конечной амплитуды в этом случае обусловлено балансом эффектов нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния.

3. При $V^2 - 2q\Omega < 0$ и $q\alpha - 2V\beta > 0$, произведя в (2) замену координаты $\rho = \eta\sqrt{2q\Omega - V^2}/q$ и амплитуды волнового поля $A = B\cdot\sqrt{(2q\Omega - V^2)/(2V\beta - q\alpha)}$, получим:

$$\frac{d^2B}{d\rho^2} - pB^2\frac{dB}{d\rho} - B + B^3 + rB^5 = 0, \qquad (5)$$

в котором $p = 2\mu\frac{\sqrt{2q\Omega - V^2}}{q\alpha - 2V\beta} > 0,\ r = \frac{3}{4}\beta^2\frac{2q\Omega - V^2}{(q\alpha - 2V\beta)^2} > 0$. Уравнение (5) имеет три состояния равновесия: $B = 0$ - седло и $\pm B_1 = \pm\sqrt{\left(-1+\sqrt{1+4r}\right)/(2r)}$. Тип неустойчивых состояний $\pm B_1$ определяется соотношением p и r. При малом p^2 состояния $\pm B_1$ – фокусы (рис. 3.a). При большом p^2 состояния равновесия $\pm B_1$ - узлы (рис. 3.b).

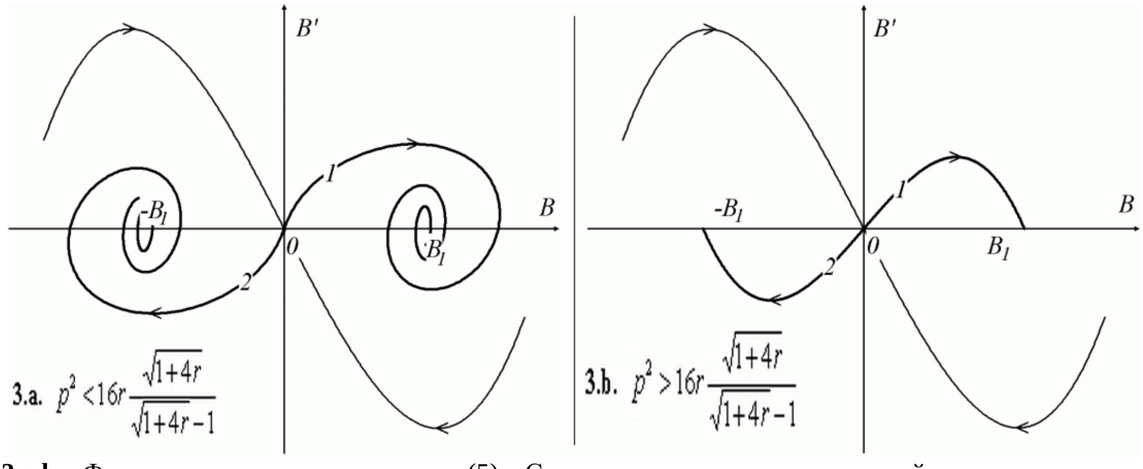

Рис. 3.a,b. Фазовая плоскость уравнения (5). Стационарным волнам конечной амплитуды отвечают траектории 1, 2, связывающие состояния равновесия.

При отсутствии в (5) нелинейной дисперсии, стационарные волны не исчезают, т.е. они обусловлены балансом эффектов индуцированного рассеяния и линейной дисперсии второго порядка.

4. При $V^2 - 2q\Omega > 0$ и $q\alpha - 2V\beta > 0$, стационарные волны конечной амплитуды отсутствуют.

Заключение. В данной работе исследованы стационарные волны с нелинейной фазовой модуляцией, пропорциональной интенсивности волнового поля. Найдены два класса стационарных волн: существование одних обусловлено балансом эффектов нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния Рамана; существование других обусловлено балансом индуцированного рассеяния и линейной дисперсии второго порядка. Показано, что для волн перепада, обусловленных балансом эффектов нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния, величина перепада интенсивности волнового поля определяется параметром нелинейной дисперсии r и уменьшается с его увеличением. Соотношение же параметров нелинейной дисперсии r и индуцированного рассеяния p меняет лишь структуру стационарных волн перепада.

Работа поддержана РФФИ (проект 12-02-00436-а).
В данной научной работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта № 11-01-0066, реализованного в рамках Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2012-2013 гг.

Список литературы:

[1] Yang Y., Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis (Springer, New York, 2001).
[2] Dickey L.A., Soliton Equation and Hamiltonian Systems (World Scientific, New York, 2005).
[3] Kivshar Y.S. and Agraval G.P., Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals (Academic, San Diego, 2003).
[4] Захаров В.Е., Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. № 5. С. 1745–1759.
[5] Zakharov V.E., Shabat A.B., Exact theory of two-dimensional self–focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media// Sov. Phys. JETP. 1972. V. 34. P. 62–69.
[6] Hasegava A., Tappert F., Transmission of Stationary Nonlinear Optical Physics in Dispersive Dielectric Fibers I: Anomalous Dispersion // Appl. Phys. Lett. 1973. V. 23. N. 3. P. 142–144.
[7] Oliviera J.R., Moura M.A., Analytical Solution for the Modified Nonlinear Schrodinger Equation Describing Optical Shock Formation // Phys. Rev. E. 1998, V. 57. P. 4751–4755.
[8] Gordon J.P., Theory of the Soliton Self–frequency Shift // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662–664.
[9] Kivshar Y.S., Dark–soliton Dynamics and Shock Waves Induced by the Stimulated Raman Effect in Optical Fibers // Phys. Rev. A. 1990. V. 42. N. 3. P. 1757–1761.
[10] Gromov E.M., Tyutin V.V., Stationary Waves in a Third–Order Nonlinear Schrödinger Equation // Wave Motion. 1998. V. 28. N. 1. P. 13–24.
[11] Gromov E.M., Talanov V.I., Nonlinear Dynamics of Short Wave Trains in Dispersive Media // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1996. V. 110. P. 137–141.; JETP. 1996. V. 83. P. 73–79.
[12] Gromov E.M., Talanov V.I., Short Optical Solitons in Fibers // Chaos. 2000. V. 10. N. 3. P. 551–558.
[13] Громов Е.М., Таланов В.И., Короткие солитоны огибающей (комбинированное нелинейное уравнение) // Изв. ВУЗов Радиофизика. 1996. Т. 39. N. 6. С. 735–755.
[14] Рабинович М.И., Трубецков Д.И., Введение в теорию колебаний и волн (Москва, Наука, 1984).

E-mail address: egromov@hse.ru (Е.М. Громов); vtyutin@hse.ru (В.В. Тютин)