Финитная аппроксимируемость предтранзитивных аналогов S5

Кудинов А. В.
ИППИ РАН
kudinov@iitp.ru

Шапировский И. Б.
ИППИ РАН
shapir@iitp.ru

Аннотация

В работе рассматриваются нормальные одномодальные предтранзитивные *логики, т.е. логики, в которых можно выразить транзитивную модальность. Вопрос финитной аппроксимируемости предтранзитивных логик остается нерешенным уже на протяжении продолжительного времени, в частности, эта проблема открыта для логик* $\mathrm{K}_n^m = \mathrm{K} + \Box^m p \to \Box^n p$, $n > m > 1$.

Хорошо известно [5], что логика отношений эквивалентности S5 *вкладывается в логику предпорядков* S4*. Мы обобщаем этот результат на случай произвольной предтранзитивной логики* L*: в* L *вкладывается логика* $\mathrm{L}.\mathsf{sym}^*$ *— расширение логики* L *аксиомой, выражающей симметричность «транзитивной» модальности. В силу этого мы имеем следующее необходимое условие финитной аппроксимируемости (и разрешимости) предтразнитивных логик:* L *финитно аппроксимируема (разрешима), только если финитно аппроксимируема (разрешима) логика* $\mathrm{L}.\mathsf{sym}^*$.

Мы также покажем, что для всех $n > m \geq 1$ *логики* $\mathrm{K}_n^m.\mathsf{sym}^*$ *финитно аппроксимируемы (этот результат обобщает результаты [1]).*

1. Предтранзитивные логики

Определение 1 ([3])**.** Логика L называется *предтранзитивной*, если существует формула $\chi(p)$ с одной переменной p, такая, что в любой модели Крипке M, если $\mathsf{M} \vDash \mathrm{L}$, то для любой точки w в M

$$\mathsf{M}, w \vDash \chi(p) \Leftrightarrow \forall u (wR^* u \Rightarrow \mathsf{M}, u \vDash p),$$

где R^* — транзитивное замыкание отношения достижимости в M.

Чтобы дать синтаксическое описание предтранзитивных логик, положим $\Box^{\leq n}\varphi = \bigwedge_{i=0}^{n} \Box^i \varphi$, где $\Box^0\varphi = \varphi$, $\Box^{i+1}\varphi = \Box\Box^i\varphi$.

Лемма 1 (Шехтман, 2010)**.** *Логика* L *предтранзитивна тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{L} \vdash \Box^{\leq m} p \to \Box^{\leq m+1} p$$

для некоторого $m \geq 1$.

Отсюда следует, что для любой предтранзитивной логики найдется такое наименьшее m, что роль $\chi(p)$ из определения 1 формула будет играть формула $\Box^{\leq m} p$ (мы будем обозначать такую формулу $\Box^* p$). Определим также соответствующий двойственный оператор $\Diamond^*\varphi = \neg\Box^*\neg\varphi$.

Рассмотрим логики $\mathrm{K}_n^m = \mathrm{K} + \mathrm{A}_n^m$, где $\mathrm{A}_n^m = \Box^m p \to \Box^n p$, $n > m \geq 1$. Для любых m и n, A_n^m является формулой Салквиста и соответствует первопорядковому свойству $R^n \subseteq R^m$. Таким образом, все логики K_n^m канонические, элементарные и полные по Крипке. В случае $m = 1$, $n = 2$ мы получаем хорошо известную логику транзитивных шкал K4, которая является финитно аппроксимируемой. Более того, согласно [2], все логики K_n^1 финитно аппроксимируемы. Логики с $m > 1$ тоже рассматривались ранее: насколько нам известно, K_3^2 появлялась уже в 1960-х годах в работах Сегерберга (K.Segerberg) и Собочинского (B. Sobociński); тем не менее, для этих логик до сих пор не получено результатов об их финитной аппроксимируемости или разрешимости.

2. Логики с аксиомой симметричности для $\Box^*$.

Для предтранзитивной логики L положим

$$\mathrm{L}.\mathsf{sym}^* = \mathrm{L} + (p \to \Box^*\Diamond^* p).$$

(Такие логики рассматривались, например, в работе [4] для случая $\mathrm{L} = \mathrm{K} + \Box^{\leq m} p \to \Box^{\leq m+1} p$.)

Хорошо известно [5], что для любой формулы φ,

$$\mathrm{S5} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{S4} \vdash \Diamond\Box\varphi.$$

Следующая теорема является обобщением этого факта.

Теорема 2. *Пусть* L — *предтранзитивная логика. Тогда для любой формулы* φ

$$\mathrm{L.sym}^* \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{L} \vdash \Diamond^*\Box^*\varphi.$$

Прежде, чем приступить к доказательству, сформулируем два важных следствия леммы 1.

Предложение 3. *Для предтранзитивной логики* L *и* L*-конуса* $\mathsf{F} = (W,R)$, $\mathsf{F} \vDash \mathrm{L.sym}^*$ *тогда и только тогда, когда* R^* *является универсальным отношением на* W.

Предложение 4. *Пусть* L — *предтранзитивная логика. Тогда для произвольной формулы* φ *имеем:* $\mathrm{S4} \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{L} \vdash \varphi^*$, $\mathrm{S5} \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{L.sym}^* \vdash \varphi^*$, *где* φ^* *получена из* φ *заменой* $\Box$ *на* $\Box^*$ *и* $\Diamond$ *на* $\Diamond^*$.

Доказательство теоремы 2. Если $\mathrm{L} \vdash \Diamond^*\Box^*\varphi$, то $\mathrm{L.sym}^* \vdash \Diamond^*\Box^*\varphi$. Поскольку $\mathrm{S5} \vdash (\Diamond\Box p \to p)$, используя предыдущее предложение, получаем $\mathrm{L} \vdash \varphi$.

Для доказательства в обратную сторону воспользуемся индукцией по длине вывода формулы φ.

Допустим, что $\varphi = p \to \Box^*\Diamond^* p$. Поскольку $\mathrm{S4} \vdash \Diamond\Box(p \to \Diamond\Box p)$, то по предложению 4 имеем $\mathrm{L} \vdash \Diamond^*\Box^*\varphi$.

Пусть $\mathrm{L.sym}^* \vdash \psi_1$, $\mathrm{L.sym}^* \vdash \psi_1 \to \varphi$. По предположению индукции $\mathrm{L} \vdash \Diamond^*\Box^*\psi_1$, $\mathrm{L} \vdash \Diamond^*\Box^*(\psi_1 \to \varphi)$. Тогда $\mathrm{L} \vdash \Box^*\Diamond^*\Box^*\psi_1$, $\mathrm{L} \vdash \Box^*\Diamond^*\Box^*(\psi_1 \to \varphi)$ (используя $\Box$-правило можно легко показать, что $\Box^*$-правило допустимо в L). Формула $\Box\Diamond\Box p \wedge \Box\Diamond\Box(p \to q) \to \Diamond\Box q$ выводима в S4, поскольку эта формула общезначима в любой конечной S4-шкале. По предложению 4 получаем $\Diamond^*\Box^*\varphi$.

Случай, когда φ получена по правилу подстановки — тривиален.

Пусть $\varphi = \Box\psi$, $\mathrm{L.sym}^* \vdash \psi$. Легко проверить (используя полноту логик $\mathrm{K}+\Box^{\leq m} p \to \Box^{\leq m+1} p$), что $\mathrm{L} \vdash \Diamond^*\Box^* p \to \Diamond^*\Box^*\Box p$. По предположению индукции, $\mathrm{L} \vdash \Diamond^*\Box^*\psi$, следовательно $\mathrm{L} \vdash \Diamond^*\Box^*\varphi$. ☐

Следствие 5. *Если* L *финитно аппроксимируема, то* $\mathrm{L.sym}^*$ *тоже финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Если формула φ $\mathrm{L.sym}^*$-непротиворечива, то $\Box^*\Diamond^*\varphi$ выполнима на конечной L-шкале (W,R). Следовательно, φ выполнима в максимальном R^*-сгустке, который является $\mathrm{L.sym}^*$-шкалой. ☐

Таким образом, в предтранзитивном случае, отрицательные результаты о финитной аппроксимируемости или разрешимости логики $\mathrm{L.sym}^*$ переносятся на L. Тем не менее, авторам не известны примеры таких негативных результатов для логик вида $\mathrm{L.sym}^*$. Более того, мы докажем, что логики $\mathrm{K}^m_n.\mathrm{sym}^*$ финитно аппроксимируемы для всех $n > m \geq 1$.

3. Финитная аппроксимируемость

По теореме Салквиста все логики $\mathrm{K}^m_n.\mathrm{sym}^*$ канонические и элементарные. Класс $\mathrm{K}^m_n.\mathrm{sym}^*$-шкал удобно описывать в терминах путей и циклов. Под R-*путем* Σ в шкале Крипке (W,R) будем понимать конечную последовательность из двух или более (не обязательно различных) точек $(x_0,x_1,\ldots,x_l)$, таких, что $x_i R x_{i+1}$ для всех $i < l$. Будем говорить, что Σ *соединяет* x_0 и x_l. Величину l будем называть *длиной* Σ (обозначение: $[\Sigma]$). Σ является R-*циклом*, если $x_l = x_0$.

Предложение 6. *Пусть* $n > m \geq 1$, $\mathsf{F} = (W,R)$ — *конус, отличающийся от иррефлексивного синглетона. Тогда* $\mathsf{F} \vDash \mathrm{K}^m_n.\mathrm{sym}^*$, *если и только если любые две точки из* W *принадлежат некоторому* R*-циклу, и для любых* w_1, w_2, *если* w_1 *и* w_2 *соединены* R*-путем длины* n, *то* w_1 *и* w_2 *соединены* R*-путем длины* m.

Предложение 7. *Для любых* $q,r \geq 0$, $n > m \geq 1$,

$$\mathrm{K}^m_n \vdash \Diamond^{m+(n-m)q+r} p \to \Diamond^{m+r} p.$$

Доказательство. Индукцией по q. ☐

Предложение 8. *Все логики* $\mathrm{K}^m_n.\mathrm{sym}^*$ *различны.*

Доказательство. Пусть $L_1 = \mathrm{K}^m_n.\mathrm{sym}^*$ и $L_2 = \mathrm{K}^s_t.\mathrm{sym}^*$. Сначала предположим, что $s < m$, и рассмотрим шкалу

$$\mathsf{F} = (W,R),\ W = \{0,1,\ldots,m\},\ xRy \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = x \text{ or } y \equiv x+1 \ (mod\ m+1).$$

Легко проверить, что $\mathsf{F} \models L_1$ и $\mathsf{F} \not\models L_2$.

Теперь предположим, что $s = m$ и $t < n$. Положим $k = n - m$,

$$\mathsf{F}' = (W',R'),\ W' = \{0,1,\ldots,k-1\},\ xR'y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y \equiv x+1 \ (mod\ k).$$

Нетрудно видеть, что $\mathsf{F}' \models L_1$ и $\mathsf{F}' \not\models L_2$. ☐

Теорема 9. *Логики* $\mathrm{K}^m_n.\mathrm{sym}^*$ *финитно аппроксимируемы для всех* $n > m \geq 1$.

При $m = 1$ утверждение теоремы следует из результатов работы [2] и следствия 5. Кроме того, для случая $m = n+1$ проходит стандартный метод фильтрации (этот метод был применен в [4] для логик $\mathrm{K} + \Box^{\leq m} p \to \Box p^{\leq m+1}$). Тем не менее, стандартная фильтрация не работает в произвольном случае. Чтобы сохранить общезначимость формулы A^m_n, приходится строить контрмодель более аккуратно. Для этого нам потребуется следующая модификация понятия фильтрации (срав. [6]).

Определение 2. Пусть $\mathsf{M} = (W,R,\theta)$ — модель Крипке, φ — формула и $\sim$ — отношение эквивалентности на W. Для $u,v \in W$ определим

$$u \sim^{\varphi} v \Leftrightarrow u \sim x \text{ и } (M,u \vDash \psi \Leftrightarrow M,v \vDash \psi) \text{ для всех подформул } \psi \text{ формулы } \varphi.$$

Пусть $\overline{W} = W/\sim^{\varphi}$, $\overline{u}\overline{R}\overline{v} \Leftrightarrow \exists u' \in \overline{u}\, \exists v' \in \overline{v}(u'Rv')$, $\overline{\theta}(p) = \{\overline{u} \mid u \in \theta(p)\}$ для всех переменных формулы φ (для определенности, полагаем $\overline{\theta}(p) = \varnothing$ для всех остальных переменных). Модель $(\overline{W},\overline{R},\overline{\theta})$ называется *(минимальной) $\sim$-фильтрацией модели* M *через* φ.

Заметим, что в случае, когда $\sim$ является универсальным отношением, $\sim$-фильтрация совпадает со стандартной *минимальной фильтрацией.* Стандартный результат о сохранении истинности для подформул φ при стандартной фильтрации легко переносится на случай $\sim$-фильтраций. Заметим также, что если $W/\sim$ конечно, то $W/\sim^{\varphi}$ тоже конечно.

Предложение 10. *Пусть $(\overline{W},\overline{R},\overline{\theta})$ — $\sim$-фильтрация модели (W,R,θ). Тогда*

- *для каждого $l > 0$, $xR^l y$ влечет $\overline{x}\overline{R}^l\overline{y}$;*
- *если R^* универсально на W, то $\overline{R}^*$ универсально на $\overline{W}$.*

Это предложение легко проверяется по определению.

Основная сложность в доказательстве теоремы 9 заключается в построении такого отношения эквивалентности $\sim$, которое бы сохраняло общезначимость A^m_n при $\sim$-фильтрации.

Наибольший общий делитель множества целых чисел I будем обозначать $\textit{НОД}(I)$.

Доказательство теоремы 9. Пусть $\mathrm{L} = \mathrm{K}^m_n.\mathsf{sym}^*$, $k = m - n$. Рассмотрим бесконечный L-конус $\mathsf{F} = (W,R)$, модель $\mathsf{M} = (W,R,\theta)$, и предположим, что $\mathsf{M},x \vDash \varphi$. Построим конечную L-шкалу $\overline{\mathsf{F}} = (\overline{W},\overline{R})$, в которой выполнима формула φ.

Для $d > 0$ определим на W отношение $\sim_d$:

$$u \sim_d w \Leftrightarrow \text{существует } R\text{-путь } \Gamma \text{ из } u \text{ в } w, \text{ т.ч. } d \text{ делит } [\Gamma]$$

Утверждение 1. Если d делит длину любого R-цикла в F, то $\sim_d$ является отношением эквивалентности и $W/\sim_d$ конечно.

Очевидно, что $\sim_d$ транзитивно; рефлексивность $\sim_d$ следует из того, что для любой точки $w \in W$ существует R-путь из w в w. Если $u \sim_d w$, то d делит $[\Gamma^{\uparrow}]$ для некоторого R-пути $\Gamma^{\uparrow}$ из u в w. Пусть $\Gamma^{\downarrow}$ — некоторый R-путь из w в u. Тогда d делит $[\Gamma^{\uparrow}] + [\Gamma^{\downarrow}]$, поэтому d делит $[\Gamma^{\downarrow}]$, и $w \sim_d u$.

Чтобы показать, что $W/\sim_d$ конечно, возьмем точки $w_1Rw_2R\ldots Rw_d$ (такие точки существуют, т.к. F сериально). Если $u \in W$, то существует путь Γ, соединяющий w_d и u. Тогда $w_{d-r} \sim_d u$, где r — остаток от деления $[\Gamma]$ на d.

Чтобы проиллюстрировать дальнейшую конструкцию, рассмотрим простейший случай, когда k — простое или $k = 1$. Имеется две возможности:
(a) существует R-цикл Γ_0, т.ч. $\textit{НОД}([\Gamma_0],k) = 1$;
(b) k делит длину любого R-цикла в F.

Пусть верно (a). Тогда покажем, что wR^lu для любых $l \geq m$, $w,u \in W$. Пусть v обозначает начальную точку Γ_0, Γ_1 — R-путь из w в v, Γ_2 — R-путь из v в u. Для некоторого $r < k$ имеем $l + [\Gamma_1] + [\Gamma_2] \equiv r \ (mod\ k)$. Рассмотрим путь $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_0^{l+k-r}\Gamma_2$ (т.е. Γ “идёт” вдоль Γ_1, потом $l + k - r$ раз “проходит” Γ_0 и в конце — Γ_2). Путь Γ соединяет w и u, и $[\Gamma] = l + qk$ для некоторого $q > 0$. По предложению 7, wR^lu.

Пусть $(\overline{\mathsf{F}},\overline{\theta})$ — минимальная фильтрация M через φ. По предложению 10, между любыми двумя точками в $\overline{W}$ существует $\overline{R}$-путь длины m, таким образом $\overline{\mathsf{F}} \vDash \mathrm{L}$.

Теперь пусть верно (b). В этом случае $\sim_k$ является отношением эквивалентности на W. Пусть $(\overline{W},\overline{R},\overline{\theta})$ — $\sim_k$-фильтрация M через φ. Покажем, что $(\overline{W},\overline{R}) \vDash \mathrm{A}^m_n$. Предположим, что $\overline{x}\overline{R}^n\overline{y}$. Это означает, что для некоторых $x_0,x'_0,\ldots,x_n,x'_n$: $x_0 = x$, $x'_n = y$, $x_i \sim_d x'_i$ и x'_iRx_{i+1} для всех $i < n$. Теперь, поскольку $x_i \sim_d x'_i$ влечет $x_iR^{q_ik}x'_i$ (для некоторого q_i), то существует R-путь Γ из x в y, т.ч. $[\Gamma] = n + qk$, $q = \sum q_i$. Поэтому, $xR^{m+(q+1)k}y$, и xR^my (предложение 7), и, значит, $\overline{x}\overline{R}^m\overline{y}$ (предложение 10). Следовательно, $\overline{\mathsf{F}} \vDash \mathrm{L}$.

Эту конструкцию можно обобщить на произвольное k. Для этого нам необходимо использовать комбинацию аргументов из (a) и (b).

Пусть $D = \{\textit{НОД}([\Gamma],k) \mid \Gamma - R\text{-цикл в } W\}$, и пусть d — наибольший общий делитель D. Для определенности, пусть $D = \{d_1,\ldots,d_s\}$.

Утверждение 2. Существуют натуральные $a_1,\ldots,a_s$ и R-циклы $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s$, такие, что

$$a_1[\Gamma_1] + \cdots + a_s[\Gamma_s] \equiv d \ (mod\ k).$$

Для доказательства этого утверждения заметим, что для любого d_i существует R-цикл Γ_i и натуральное l_i, такие, что

$$[\Gamma_i] = l_id_i \text{ и } l_i \equiv 1 \ (mod\ k).$$

Для некоторых b_i имеем $\sum_{i=1}^s b_id_i = d$, следовательно $\sum_{i=1}^s a_id_i \equiv d \ (mod\ k)$ для некоторых $a_i > 0$. Т.к. $l_i \equiv 1 \ (mod\ d)$, то $\sum_{i=1}^s a_il_id_i \equiv d \ (mod\ k)$, что доказывает утверждение 2.

По утверждению 1, $\sim_d$ — отношение эквивалентности на W. Пусть $(\overline{W},\overline{R},\overline{\theta})$ — $\sim_d$-фильтрация M через φ. Аналогично случаю (b), можно показать, что если $\overline{u}\overline{R}^n\overline{w}$, то $u \in R^{n+dr}w$ для некоторых $r \geq 0$. В силу предложения 7, можем считать $r < k$.

Пусть v_i обозначает начало пути Γ_i, $\Delta_i^{\uparrow}$ — R-путь из w в v_i, $\Delta_i^{\downarrow}$ — из v_i в w. Пусть $\Sigma_i = \Delta_i^{\uparrow k-1}\Delta_i^{\downarrow k-1}\Delta_i^{\uparrow}\Gamma_i^{(k-r)a_i}\Delta_i^{\downarrow}$. Таким образом, Σ_i — R-путь из w в w и $[\Sigma_i] \equiv (k-r)a_i[\Gamma_i] \ (mod\ k)$. Пусть $\Gamma = \Sigma_0\Sigma_1\ldots\Sigma_s$, где Σ_0 — R-путь из u в w длиной $n + dr$.

По предложению 2, $[\Gamma] \equiv m \ (mod\ k)$. Поэтому, $uR^m w$, $\overline{u}\overline{R}^m\overline{w}$ и $\overline{\mathsf{F}} \models \mathrm{A}_n^m$. $\square$

Заметим, что конструкция, предложенная в доказательстве теоремы 9, работает для случая любых расширений $\mathrm{K}_n^m.\mathsf{sym}^*$ формулами, устойчивыми относительно фильтраций. Это позволяет обобщить результаты работы [1], где была доказана финитная аппроксимируемость логик $\mathrm{K}_{m+1}^m + p \to \Box\Diamond p$, $m \geq 1$. Действительно, из симметричности исходной шкалы будет следовать и симметричность построенной конечной структуры. Следовательно, логики $\mathrm{K}_n^m.\mathsf{sym}^* + p \to \Box\Diamond p$ являются финитно аппроксимируемыми для любых $n > m \geq 1$. С другой стороны, формула симметричности бинарного отношения сильнее, чем формула симметричности его транзитивного замыкания. Таким образом,

$$\mathrm{K}_n^m.\mathsf{sym}^* + p \to \Box\Diamond p = \mathrm{K}_n^m + p \to \Box\Diamond p,$$

из чего вытекает

Следствие 11. *Логики* $\mathrm{K}_n^m + p \to \Box\Diamond p$ *финитно аппроксимируемы для всех* $n > m \geq 1$.

Список литературы

[1] *Кудинов А. В., Шапировский И. Б.* Финитная аппроксимируемость обобщенно-транзитивных симметричных модальных логик // Информационные технологии и системы (ИТиС'09). — М.: ИППИ РАН, 2009. — с. 411–416.

[2] *Gabbay D.* A General Filtration Method for Modal Logics // *Journal of Philosophical Logic.* — 1972. — Vol. 1, no. 1. — pp. 29–34.

[3] *Gabbay D., Shehtman V., Skvortsov D.* Quantification in Nonclassical Logic. — Elsevier, 2009.

[4] *Jansana R.* Some logics related to von Wright's logic of place // *Notre Dame Journal of Formal Logic.* — 1994. — Vol. 35, no. 1. — pp. 88–98.

[5] *Matsumoto K.* Reduction Theorem in Lewis's Sentential Calculi // *Mathematica Japonicae.* — 1955. — Vol. 3. — pp. 133–135.

[6] *Shehtman V. B.* Filtration via Bisimulation // Advances in Modal Logic, College Publications, London. — 2004. — pp. 289–308.