УДК 517.53

А. Д. Баранов

Вложения модельных подпространств класса Харди: компактность и идеалы Шаттена–фон Неймана

Исследованы свойства операторов вложения модельных подпространств K^p_Θ класса Харди H^p (коинвариантных подпространств оператора сдвига), порожденных внутренними функциями. Найден критерий компактности вложения пространства K^p_Θ в пространство $L^p(\mu)$, аналогичный теореме Вольберга–Трейля об ограниченных вложениях; при этом получен положительный ответ на вопрос, поставленный Симой и Мейтсоном. Доказательство основано на неравенствах типа Бернштейна для функций из K^p_Θ. Исследованы меры μ такие, что оператор вложения принадлежит некоторому идеалу Шаттена–фон Неймана.

Библиография: 32 наименования.

Ключевые слова: класс Харди, внутренняя функция, теорема вложения, мера Карлесона.

§ 1. Введение и основные результаты

Пусть $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ – единичный круг, а $\mathbb{T} = \{z\colon |z| = 1\}$ – единичная окружность. Обозначим через m нормированную меру Лебега на $\mathbb{T}$. Ограниченную аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию Θ называют *внутренней*, если $|\Theta| = 1$ m-п. в. на $\mathbb{T}$ в смысле некасательных граничных значений. Напомним, что всякая внутренняя функция Θ допускает факторизацию:

$$\Theta(z) = B(z) I_\psi(z)$$

(с точностью до постоянного множителя, равного по модулю единице). Здесь

$$B(z) = \prod_n \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z}_n z}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

– *произведение Бляшке* с нулями $z_n \in \mathbb{D}$, последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию Бляшке $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$ (мы считаем $|z_n|/z_n = 1$, если $z_n = 0$), *сингулярную внутреннюю функцию* I_ψ определяют формулой

$$I_\psi(z) = \exp\biggl(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\psi(\zeta)\biggr), \qquad z \in \mathbb{D},$$

где ψ – конечная борелевская мера на $\mathbb{T}$, сингулярная относительно меры m.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00313).

Обозначим через H^p класс Харди в $\mathbb{D}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Каждой внутренней функции Θ сопоставим подпространство

$$K^p_\Theta = H^p \cap \Theta \overline{H^p_0}$$

пространства H^p, где $H^p_0 = \{f \in H^p \colon f(0) = 0\} = zH^p$. Иначе можно определить K^p_Θ как множество всех функций f в H^p таких, что $\langle f, \Theta g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{\Theta g}\,dm = 0$ для всех $g \in H^q$, $1/p + 1/q = 1$.

Заметим, что $K^2_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$. Известно, что для $1 \leqslant p < \infty$ всякое замкнутое подпространство в H^p, инвариантное относительно оператора обратного сдвига $(S^*f)(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$, имеет вид K^p_Θ для некоторой внутренней функции Θ (см. [1, гл. II] и [2]). Подпространства K^p_Θ часто называют $*$-*инвариантными*. Эти подпространства важны как в теории операторов, так и в теории функций (см. [3]–[6]) и, в частности, в модели Надя–Фойаша для операторов сжатия в гильбертовом пространстве (поэтому их называют также *модельными подпространствами*). Заметим, что в том случае, когда Θ – произведение Бляшке, K^p_Θ совпадает с замыканием в H^p линейной оболочки простейших дробей с полюсами соответствующих кратностей в точках $1/\overline{z}_n$.

Обозначим через $\sigma(\Theta)$ так называемый *спектр* внутренней функции Θ, т. е. множество таких $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$, что $\liminf_{z\to\zeta,\, z\in\mathbb{D}} |\Theta(z)| = 0$. Иначе говоря, $\sigma(\Theta)$ – наименьшее замкнутое подмножество в $\overline{\mathbb{D}}$, содержащее нули z_n и носитель меры ψ. Хорошо известно, что Θ так же, как и всякий элемент подпространства K^p_Θ, допускает аналитическое продолжение через любую дугу, лежащую в множестве $\mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta)$.

В настоящей статье мы рассматриваем следующую задачу: для данных внутренней функции Θ и показателя $p \geqslant 1$ описать класс борелевских мер μ в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$ таких, что подпространство K^p_Θ вложено в $L^p(\mu)$, или таких, что вложение компактно. Эта задача была поставлена Коном в 1982 г. [7]; несмотря на целый ряд частичных результатов, вопрос остается открытым. Вложение $K^p_\Theta \subset L^p(\mu)$ равносильно оценке

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|f\|_p, \qquad f \in K^p_\Theta. \tag{1.1}$$

Класс мер μ с вышеуказанным свойством мы обозначим через $\mathcal{C}_p(\Theta)$.

Напомним, что конечную борелевскую меру μ в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$ называют *мерой Карлесона*, если найдется константа $M > 0$ такая, что

$$\mu(S(I)) \leqslant M|I| \tag{1.2}$$

для всякой дуги $I \subset \mathbb{T}$. Здесь и всюду в дальнейшем мы обозначаем через $|I|$ длину дуги I, а через $S(I)$ – *квадрат Карлесона*,

$$S(I) = \bigl\{z = \rho e^{i\varphi} \in \overline{\mathbb{D}} \colon e^{i\varphi} \in I,\ 1 - (2\pi)^{-1}|I| \leqslant \rho \leqslant 1\bigr\}. \tag{1.3}$$

Класс мер Карлесона обозначим через $\mathcal{C}$; для меры $\mu \in \mathcal{C}$ обозначим через M_μ наименьшую константу M в неравенстве (1.2). Классическая теорема Карлесона утверждает, что $H^p \subset L^p(\mu)$ для некоторого (любого) $p > 0$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \mathcal{C}$ (см. [1], [3]). Вложение $H^p \subset L^p(\mu)$ компактно тогда и только тогда, когда μ – *исчезающая мера Карлесона*, т. е.

$$\lim_{|I|\to 0} \frac{\mu(S(I))}{|I|} = 0 \tag{1.4}$$

(см. [8]; некоторые обобщения можно найти в статье [9]).

Очевидно, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_p(\Theta)$. Можно ожидать, что класс $\mathcal{C}_p(\Theta)$ будет существенно зависеть от геометрических свойств функции Θ. В настоящее время класс $\mathcal{C}_p(\Theta)$ полностью описан только для некоторых специальных классов внутренних функций. Будем говорить, что Θ – *однокомпонентная* внутренняя функция, если множество уровня

$$\Omega(\Theta, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{D} \colon |\Theta(z)| < \varepsilon\}$$

связно для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$. Кон [7] показал, что в том случае, когда функция Θ однокомпонентная, достаточно проверить неравенство (1.1) для *воспроизводящих ядер* пространства K^2_Θ (см. определение в § 2). Недавно Ф. Назаров и А. Л. Вольберг [10] показали, что в общем случае это неверно.

Геометрическое условие на меру μ, достаточное для вложения пространства K^p_Θ, принадлежит А. Л. Вольбергу и С. Р. Треилю [11]: вложение $K^p_\Theta \subset L^p(\mu)$ имеет место, если найдется $\varepsilon \in (0,1)$ такое, что $\mu(S(I)) \leqslant C|I|$ для всех квадратов $S(I)$, удовлетворяющих условию

$$S(I) \cap \Omega(\Theta, \varepsilon) \neq \varnothing.$$

Таким образом, достаточно проверить условие Карлесона (1.2) только для квадратов специального вида. Обозначим через $\mathcal{C}(\Theta)$ класс мер, удовлетворяющих условию теоремы Вольберга–Треиля для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$. А. Б. Александров [12] показал, что условие $\mu \in \mathcal{C}(\Theta)$ необходимо (т. е. $\mathcal{C}_p(\Theta) = \mathcal{C}(\Theta)$) тогда и только тогда, когда функция Θ однокомпонентная. Более того, если Θ не является однокомпонентной функцией, то класс $\mathcal{C}_p(\Theta)$, $p > 0$, существенно зависит от показателя p (в отличие от классической теоремы Карлесона). Некоторые другие теоремы вложения были получены в статьях [12]–[14], компактность вложений рассматривалась в [13], [15], [16].

Особый интерес представляет случай, когда $\mu = \sum_n a_n \delta_{\lambda_n}$ – дискретная мера; тогда вложение равносильно свойству Бесселя для системы воспроизводящих ядер $\{k_{\lambda_n}\}$. Даже частный случай, когда μ – мера на единичной окружности, представляет большой интерес. В отличие от вложений всего класса Харди H^p (отметим, что меры Карлесона на $\mathbb{T}$ – это меры с ограниченной плотностью относительно меры Лебега m), класс $\mathcal{C}_p(\Theta)$ при $p \geqslant 1$ всегда содержит нетривиальные примеры сингулярных мер на $\mathbb{T}$, в частности для $p = 2$ меры Кларка [17], для которых вложение $K^2_\Theta \subset L^2(\mu)$ изометрично. С другой стороны, если $\mu = wm$, $w \in L^2(\mathbb{T})$, то проблема вложения оказывается связанной со свойствами оператора Теплица T_w (см. [13]).

Новый подход к теоремам вложения был предложен в статьях автора [18], [19]. Он основан на неравенствах Бернштейна для пространств K^p_Θ. Под неравенством Бернштейна мы подразумеваем оценку весовой нормы производной f' через обычную L^p-норму функции $f \in K^p_\Theta$ в пространстве $L^p(\mathbb{T}, \mu)$, т. е. оценку вида

$$\|f'\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|f\|_p, \qquad f \in K^p_\Theta, \tag{1.5}$$

где μ – мера в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$. Этот подход позволил получить существенно новые теоремы вложения, обобщающие теорему Вольберга–Треиля и некоторые результаты Кона. Еще одно приложение неравенств Бернштейна связано с устойчивостью последовательностей Бесселя и базисов Рисса из воспроизводящих ядер [20]. Результаты статей [19], [20] получены для классов Харди в верхней полуплоскости. В § 3 мы обсудим их аналоги для случая круга.

В настоящей статье мы применим неравенства Бернштейна для K^p_Θ к изучению компактности оператора вложения и его принадлежности идеалам Шаттена–фон Неймана. Один из наших основных результатов – геометрическое условие, достаточное для компактности вложения, аналогичное теореме Вольберга–Треиля. Теперь нам достаточно проверить "условие исчезновения" (1.4) только для квадратов, пересекающих множество уровня. В случае однокомпонентных функций это условие оказывается также и необходимым.

Теорема 1.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, μ *– борелевская мера на* $\overline{\mathbb{D}}$, $\varepsilon \in (0,1)$ *и выполнены условия*:

(i) *для всякого* $\eta > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что* $\mu(S(I))/|I| < \eta$, *как только* $|I| < \delta$ *и* $S(I) \cap \Omega(\Theta, \varepsilon) \neq \varnothing$;

(ii) *вложение подпространства* K^p_Θ *в* $L^p(\mu)$ *компактно*.

Тогда условие (i) *влечет за собой условие* (ii). *Если внутренняя функция* Θ *однокомпонентная, то верно и обратное*: *из условия* (ii) *следует* (i).

Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (i) для однокомпонентных внутренних функций была доказана в работе [16], где был задан вопрос о достаточности условия (i). Теорема 1.1 дает положительный ответ на этот вопрос. Также в статье [16] было предложено другое "условие исчезновения" меры μ, достаточное для компактности вложения $K^p_\Theta \subset L^p(\mu)$ для всех $p > 0$. Мы покажем (предложение 4.1), что это условие влечет за собой условие (i) теоремы 1.1 (таким образом, мы отвечаем на еще один вопрос, заданный в [16]). Мы выведем теорему 1.1 из более общей теоремы вложения (теорема 3.1), обобщающей теорему Вольберга–Треиля.

В § 5, 6 мы изучаем принадлежность оператора вложения $\mathcal{J}_\mu \colon K^2_\Theta \to L^2(\mu)$, $\mathcal{J}_\mu f = f$, идеалам Шаттена–фон Неймана $\mathcal{S}_r$ и даем полное описание таких мер для однокомпонентной внутренней функции Θ и $r \geqslant 1$. Для $\varepsilon \in (0,1)$ мы рассмотрим разбиение типа Уитни множества $\mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta)$ в объединение дуг I_k со свойством

$$\operatorname{dist}(I_k, \Omega(\Theta, \varepsilon)) \asymp |I_k|$$

(подробное описание см. в § 3, лемма 3.3). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть* μ *– борелевская мера такая, что* $\operatorname{supp}\mu \subset \bigcup_k S(I_k)$. *Предположим, что для некоторого* $r > 0$

$$\mathfrak{M}_r(\mu) = \sum_k \left(\frac{\mu(S(I_k))}{|I_k|} \right)^{r/2} < \infty. \tag{1.6}$$

Тогда $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_r$ *и* $\|\mathcal{J}_\mu\|^r_{\mathcal{S}_r} \leqslant \mathfrak{M}_r(\mu)$.

Через $R_{n,m}$ обозначим элементы стандартного диадического разбиения круга (см. определение в § 5). Имеет место следующее необходимое условие.

Теорема 1.3. *Пусть* $\varepsilon \in (0,1)$. *Если* $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_r$, $r \geqslant 1$, *то*

$$\sum_{R_{n,m}\cap\Omega(\Theta,\varepsilon)\neq\varnothing} (2^n \mu(R_{n,m}))^{r/2} < \infty. \tag{1.7}$$

Для однокомпонентных внутренних функций верны утверждения, обратные теоремам 1.2 и 1.3; в этом случае мы получим полное описание вложений класса $\mathcal{S}_r$, $r \geqslant 1$.

Теорема 1.4. *Пусть* Θ – *однокомпонентная внутренняя функция, и пусть* μ – *борелевская мера на* $\mathbb{D}\cup(\mathbb{T}\setminus\sigma(\Theta))$. *Тогда оператор вложения* $\mathcal{J}_\mu$ *принадлежит классу* $\mathcal{S}_r$, $r \geqslant 1$, *в том и только в том случае, когда мера* μ *удовлетворяет условиям* (1.6) *и* (1.7) *для всякого* $\varepsilon \in (0,1)$.

Наши условия, сформулированные в терминах диадического разбиения круга, аналогичны теореме Люкинга [21], описывающей вложения класса $\mathcal{S}_r$ всего пространства Харди, а также результатам Парфенова [22], [23]. Дальнейшее обсуждение этих результатов см. в § 5, 6.

Как и в статьях [19], [20], нашим основным инструментом исследования служат неравенства Бернштейна для K^p_Θ. Для полноты изложения мы включили обсуждение этих результатов, представляющих самостоятельный интерес. При этом, в отличие от статьи [19], мы дадим оценки и для старших производных. Сформулируем два результата такого рода. Первый из них показывает, что рост производных на границе контролируется расстоянием до множества уровня. Для $\zeta \in \mathbb{T}$ положим $d_\varepsilon(\zeta) = \operatorname{dist}(\zeta, \Omega(\Theta,\varepsilon))$.

Теорема 1.5. *Пусть* $\varepsilon \in (0,1)$, $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\|f^{(n)} d_\varepsilon^n\|_p \leqslant C(p,n,\varepsilon)\|f\|_p, \qquad f \in K^p_\Theta.$$

Пусть Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Тогда граничный спектр $\sigma(\Theta)\cap\mathbb{T}$ имеет нулевую меру Лебега [24]; таким образом, n-я производная $f^{(n)}(\zeta)$ корректно определена для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$.

Теорема 1.6. *Пусть* Θ – *однокомпонентная внутренняя функция, и пусть* $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{C}$. *Тогда*

$$\int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p \left(\frac{1-|z|}{1-|\Theta(z)|}\right)^{pn} d\mu(z) \leqslant C(\Theta,p,n,\mu)\|f\|_p^p, \qquad f \in K^p_\Theta, \tag{1.8}$$

и, в частности,

$$\|f^{(n)}|\Theta'|^{-n}\|_p \leqslant C(\Theta,p,n)\|f\|_p, \qquad f \in K^p_\Theta. \tag{1.9}$$

Теоремы 1.5, 1.6 представляют собой следствия более общего, но несколько более сложного неравенства Бернштейна, которое будет доказано в § 2 (теорема 2.1).

Мы будем использовать следующие обозначения: для данных неотрицательных функций g и h будем записывать $g \lesssim h$, если $g \leqslant Ch$ для положительной константы C и всех допустимых значений переменных, и $g \asymp h$, если $g \lesssim h \lesssim g$. Через $C, C_1, \ldots$ будем обозначать различные положительные константы, которые могут менять свои значения в различных формулах.

Автор благодарит А. Б. Александрова за полезные обсуждения и замечания.

§ 2. Неравенства Бернштейна для старших производных

Всюду далее полагаем, что $p \in [1, \infty)$, а q – сопряженный показатель, т. е. $1/p + 1/q = 1$. Через L^p обозначено обычное пространство $L^p(\mathbb{T}, m)$.

Начнем с обсуждения локального поведения элементов модельного подпространства и их производных вблизи границы. Важную роль в дальнейшем играют воспроизводящие ядра. *Воспроизводящее ядро* пространства K^2_Θ, отвечающее точке $z \in \mathbb{D}$, имеет вид

$$k_z(\zeta) = \frac{1 - \overline{\Theta(z)}\Theta(\zeta)}{1 - \overline{z}\zeta}\,.$$

Поскольку $k_z \in K^\infty_\Theta$, мы имеем

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} f(\tau)\overline{k_z(\tau)}\,dm(\tau), \qquad f \in K^p_\Theta \tag{2.1}$$

для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Аналогичное представление имеет место и для n-й производной:

$$f^{(n)}(z) = n! \int_{\mathbb{T}} \overline{\tau}^n f(\tau)(\overline{k_z(\tau)})^{n+1}\,dm(\tau), \qquad f \in K^p_\Theta, \tag{2.2}$$

что вытекает из того факта, что $(1 - \tau\overline{z})^{n+1} - (k_z(\tau))^{n+1} \in \Theta H^\infty$.

Интегральные представления (2.1), (2.2) могут быть распространены на некоторые точки $z = \zeta$ единичной окружности $\mathbb{T}$. Хорошо известно, что всякая функция из K^p_Θ допускает аналитическое продолжение через любую дугу, лежащую в множестве $\mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta)$, и, таким образом, равенства (2.1), (2.2) выполняются для всех $z = \zeta \in \mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta)$. Граничное поведение в точках спектра зависит от "плотности" спектра вблизи данной точки, и ответ зависит от "плотности" спектра вблизи данной точки. Для $\zeta \in \mathbb{T}$ положим

$$S_q(\zeta) = \sum_n \frac{1 - |z_n|^2}{|\zeta - z_n|^q} + \int_{\mathbb{T}} \frac{d\psi(\tau)}{|\zeta - \tau|^q}\,.$$

Тогда согласно результатам, полученным П. Р. Ахерном, Д. Н. Кларком [25] и В. С. Коном [26], производная $f^{(n)}(\zeta)$ (понимаемая в смысле некасательных граничных значений) существует для всякой функции $f \in K^p_\Theta$ тогда и только тогда, когда $S_{(n+1)q}(\zeta) < \infty$; в этом случае $k^{n+1}_\zeta \in K^q_\Theta$ и равенство (2.2) выполнено и для $z = \zeta$. Величина S_2, отвечающая за включение $k_\zeta \in K^2_\Theta$, представляет особый интерес. В том случае, когда функция Θ имеет некасательный предел в точке ζ и $\Theta(\zeta) \in \mathbb{T}$, величина S_2 совпадает с модулем угловой производной функции Θ в точке ζ (под угловой производной мы понимаем $\lim_{z\to\zeta} \frac{\Theta(z)-\Theta(\zeta)}{z-\zeta}$, где z стремится к ζ некасательным образом):

$$|\Theta'(\zeta)| = \sum_n \frac{1 - |z_n|^2}{|\zeta - z_n|^2} + \int_{\mathbb{T}} \frac{d\psi(\tau)}{|\zeta - \tau|^2}\,.$$

Наш основной результат, полученный в настоящем параграфе, – следующее весовое неравенство Бернштейна вида (1.5), которое имеет место для произвольной внутренней функции Θ и для мер вида $w\mu$, где μ – мера Карлесона, а вес $w(z)$ зависит от нормы ядра k_z^{n+1} в L^q (т. е., фактически, от нормы функционала $f \mapsto f^{(n)}(z)$, $f \in K_\Theta^p$). Положим

$$w_{p,n}(z) = \|k_z^{n+1}\|_q^{-\frac{pn}{pn+1}}.$$

Мы считаем $\|k_\zeta^{n+1}\|_q = \infty$ и $w_{p,n}(\zeta) = 0$, как только $\zeta \in \mathbb{T}$ и $S_{(n+1)q}(\zeta) = \infty$; таким образом, произведение $f^{(n)}(z)w_{p,n}(z)$ корректно определено для всех $f \in K_\Theta^p$, $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\mu \in \mathcal{C}$, $1 \leqslant p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда оператор*

$$(T_{p,n}f)(z) = f^{(n)}(z)w_{p,n}(z)$$

имеет слабый тип (p,p) как оператор, действующий из K_Θ^p в $L^p(\mu)$, и ограничен как оператор из K_Θ^r в $L^r(\mu)$ для всякого $r > p$; более того, существует константа $C = C(M_\mu, p, r, n)$ такая, что

$$\|f^{(n)}w_{p,n}\|_{L^r(\mu)} \leqslant C\|f\|_r, \qquad f \in K_\Theta^r. \tag{2.3}$$

Чтобы применять теорему 2.1, необходимо получить эффективные оценки для участвующих весов, т. е. для норм воспроизводящих ядер. Для $p = 2$ имеется явная формула

$$\|k_z\|_2^2 = \frac{1 - |\Theta(z)|^2}{1 - |z|^2}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

и $\|k_\zeta\|_2^2 = |\Theta'(\zeta)|$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Точные неравенства для норм воспроизводящих ядер известны для случая однокомпонентных функций Θ (см. [12, неравенство (15)]). Мы также свяжем вес $w_{p,n}$ с геометрическими свойствами множеств уровня функции Θ:

$$d_\varepsilon^n(\zeta) \lesssim w_{p,n}(\zeta) \lesssim |\Theta'(\zeta)|^{-n}, \qquad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{2.4}$$

Доказательство этих оценок содержится в [19, лемма 4.5], где соответствующее неравенство получено для $n = 1$; рассуждения очевидным образом переносятся на случай $n \geqslant 2$. Близкие результаты можно найти в [12].

Доказательство теоремы 2.1 основано на интегральном представлении (2.2), которое сводит исследование оператора дифференцирования к исследованию некоторых сингулярных интегральных операторов. Мы выведем неравенство (2.3) из ограниченности следующих интегральных операторов в L^p-пространствах, связанных с мерами Карлесона [19, теоремы 3.1, 3.2].

Теорема 2.2. *Пусть $\mu \in \mathcal{C}$, и пусть h – неотрицательная функция в $\overline{\mathbb{D}}$, измеримая относительно мер μ, m и такая, что $h(z) \geqslant A(1 - |z|)$, $z \in \mathbb{D}$, для некоторой константы $A > 0$. Положим*

$$Tf(z) = h(z) \int_{|\zeta - z| \geqslant h(z)} \frac{f(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, dm(\zeta), \qquad z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Тогда T – оператор слабого типа $(1,1)$ как оператор из L^1 в $L^1(\mu)$, он ограничен как оператор из L^r в $L^r(\mu)$ для всех $r > 1$. При этом норма оператора T не превосходит константы C, зависящей только от r, A и константы Карлесона M_μ меры μ.

Мы рассмотрим также класс интегральных операторов с “диагональным” ядром. Пусть $\mu,\ \nu \in \mathcal{C}$, и пусть $K(z,u)$ – $(\mu\times\nu)$-измеримая функция. Для $z\in\overline{\mathbb{D}}$ положим

$$\Delta_z(p) = \bigl\{u\in\overline{\mathbb{D}}\colon |u-z| < \|K(z,\,\cdot\,)\|^{-p}_{L^q(\nu)}\bigr\}$$

(не умаляя общности, мы считаем, что функция $K(z,\,\cdot\,)$ ν-измерима для всех z, и полагаем $\|K(z,\,\cdot\,)\|^{-p}_{L^q(\nu)} = 0$, если $K(z,\,\cdot\,)\notin L^q(\nu)$). Рассмотрим следующее “усечение” интегрального оператора с ядром K:

$$T_p f(z) = \int_{\Delta_z(p)} K(z,u) f(u)\,d\nu(u).$$

Теорема 2.3. *Если $\|K(z,\,\cdot\,)\|^{-p}_{L^q(\nu)} \geqslant A(1-|z|)$, то оператор T_p имеет слабый тип (p,p) как оператор из $L^p(\nu)$ в $L^p(\mu)$, он ограничен как оператор из $L^r(\nu)$ в $L^r(\mu)$ для всех $r>p$.*

Подробные доказательства теорем 2.2 и 2.3 даны в [19] для случая полуплоскости; доказательства для круга получаются с помощью точно тех же рассуждений, поэтому мы их не приводим.

Идея доказательства теоремы 2.1 состоит в том, чтобы разбить интеграл, представляющий производную, на “диагональную” и “внедиагональную” части и оценить их по отдельности, используя теоремы 2.2 и 2.3 соответственно.

Доказательство теоремы 2.1. Положим $h(z) = (w_{p,n}(z))^{1/n}$. Из очевидного неравенства $|k_z(w)| \leqslant 2(1-|z|)^{-1}$, $z,w\in\mathbb{D}$, вытекает оценка $h(z)\geqslant A(1-|z|)$. Умножим интеграл в равенстве (2.2) на $w_{p,n}(z)$ и разобьем его на две части:

$$\frac{1}{n!} w_{p,n}(z) f^{(n)}(z) = I_1 f(z) + I_2 f(z), \tag{2.5}$$

где

$$I_1 f(z) = w_{p,n}(z) \int_{|\zeta-z|\geqslant h(z)} \overline{\zeta}^n f(\zeta)\,\overline{k_z^{n+1}(\zeta)}\,dm(\zeta),$$
$$I_2 f(z) = w_{p,n}(z) \int_{|\zeta-z|< h(z)} \overline{\zeta}^n f(\zeta)\,\overline{k_z^{n+1}(\zeta)}\,dm(\zeta).$$

Поскольку $|1-\overline{\zeta}z| = |\zeta - z|$, $\zeta\in\mathbb{T}$, мы имеем

$$|I_1 f(z)| \leqslant C h^n(z) \int_{|\zeta-z|\geqslant h(z)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{n+1}}\,dm(\zeta) \leqslant C h(z) \int_{|\zeta-z|\geqslant h(z)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{2}}\,dm(\zeta).$$

Теперь из теоремы 2.2 следует, что оператор I_1 ограничен как оператор из L^r в $L^r(\mu)$ для всякой меры Карлесона μ и $r>1$.

Чтобы оценить интеграл $I_2 f$, положим $K(z,\zeta) = (h(z))^n\overline{k_z^{n+1}}(\zeta)$. Тогда $\|K(z,\,\cdot\,)\|_q^{-p} = (h(z))^{-pn}\|k_z^{n+1}\|_q^{-p} = h(z)$. Таким образом,

$$I_2 f(z) = \int_{|\zeta-z|<\|K(z,\,\cdot\,)\|_q^{-p}} \overline{\zeta}^n f(\zeta) K(z,\zeta)\,dm(\zeta),$$

и, применив теорему 2.3, мы заключаем, что оператор I_2 имеет слабый тип (p,p) как оператор из L^p в $L^p(\mu)$ и ограничен как оператор из L^r в $L^r(\mu)$ для всякой меры $\mu\in\mathcal{C}$ и $r>p$.

Доказательство теоремы 1.5. Ввиду неравенства (2.4) утверждение вытекает из теоремы 2.1 при $\mu = m$.

Доказательство теоремы 1.6. В [12] показано, что для однокомпонентной функции Θ мы имеем

$$\|k_z\|_s^s \asymp \|k_z\|_2^{2(s-1)}, \qquad z \in \overline{\mathbb{D}}, \tag{2.6}$$

с константами, зависящими от Θ и $s \in (1, \infty)$, но не зависящими от z. Следовательно,

$$w_{p,n}(z) \asymp \left(\|k_z\|_2^{2(q(n+1)-1)}\right)^{-\frac{pn}{(pn+1)q}} = \|k_z\|_2^{-2n} = \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\Theta(z)|^2}\right)^n, \qquad z \in \mathbb{D},$$

и $w_{p,n}(\zeta) \asymp |\Theta'(\zeta)|^{-n}$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Следует сравнить неравенство (1.9) в теореме 1.6 с неравенством Бернштейна для L^∞-норм: если функция Θ имеет некасательный предел в точке $\zeta \in \mathbb{T}$, $\Theta(\zeta) \in \mathbb{T}$ и $|\Theta'(\zeta)| < \infty$, то для всякой функции $f \in K_\Theta^\infty$ производная $f'(\zeta)$ существует в смысле некасательных граничных значений и

$$\left|\frac{f'(\zeta)}{\Theta'(\zeta)}\right| \leqslant \|f\|_\infty. \tag{2.7}$$

В самом деле, $f'(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \overline{\tau} f(\tau) \overline{k_\zeta^2(\tau)}\, dm(\tau)$, следовательно, $|f'(\zeta)| \leqslant \|f\|_\infty \|k_\zeta\|_2^2 = \|f\|_\infty |\Theta'(\zeta)|$. Заметим, что неравенство (2.7) выполнено для произвольной (не обязательно однокомпонентной) внутренней функции и константа 1 является точной. Это неравенство принадлежит Левину [27]; для случая конечного произведения Бляшке оно было позднее переоткрыто рядом авторов (см., например, [28]).

Замечание 2.2. В [19, пример 5.2] показано, что показатель $\frac{p}{p+1}$ в определении веса $w_{p,1}$ в определенном смысле точен.

Замечание 2.3. Неравенства Бернштейна для модельных подпространств $(K_\theta^p)_+$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$ исследовались К. М. Дьяконовым [29], [30], который показал, что дифференцирование действует как ограниченный оператор из $(K_\theta^p)_+$ в $L^p(\mathbb{R})$ при $1 < p \leqslant \infty$, т. е.

$$\|f'\|_p \leqslant C(p,\theta)\|f\|_p, \qquad f \in (K_\theta^p)_+, \tag{2.8}$$

тогда и только тогда, когда $\theta' \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$. В этом случае функция θ мероморфна во всей комплексной плоскости и подпространство $(K_\theta^p)_+$ тесно связано с определенным пространством целых функций (в частности, для $p = 2$ – с пространствами де Бранжа [31, предложение 1.1]). Весовые неравенства Бернштейна вида (1.5), полученные в [18], [19], существенно обобщают неравенство (2.8). Преимущество весовых оценок состоит в том, что вес может компенсировать возможный рост элементов подпространства $(K_\theta^p)_+$ и их производных около границы. Отметим, что неравенство Бернштейна для обычных L^p-норм, т. е. $\|f'\|_p \leqslant C\|f\|_p$, выполняется для модельного подпространства K_Θ^p в круге тогда и только тогда, когда оно конечномерно, таким образом, Θ – конечное произведение Бляшке. Поэтому идея рассматривать весовые неравенства Бернштейна (с “исправляющим” весом) представляется еще более естественной, когда мы рассматриваем пространства в круге.

§ 3. Теоремы вложения

Неравенства Бернштейна для модельных подпространств оказались удобным инструментом для доказательства новых теорем вложения. Это позволяет дать новые доказательства и существенно обобщить почти все известные результаты о вложениях. Так, мы покажем, что теорема 2.1 влечет за собой теорему вложения, обобщающую теорему Вольберга–Треиля. Этот результат даст нам также условие, достаточное для компактности вложения. Всюду далее мы считаем, что μ – конечная борелевская мера в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$.

Квадратом со стороной длины h в единичном круге мы будем называть множество вида

$$S(h_0,\phi_0,h)=\left\{\rho e^{i\phi}\colon h_0-\frac{h}{2\pi}\leqslant\rho\leqslant h_0,\ \phi_0\leqslant\phi\leqslant\phi_0+h\right\},$$

где $h_0\in(0,1]$, $\phi_0\in\mathbb{R}$ и $0<h<2\pi h_0$. Мы будем обозначать через $J(S)$ *внешнюю сторону* квадрата S, т. е. $J(S)=\{h_0e^{i\phi}\colon \phi_0\leqslant\phi\leqslant\phi_0+h\}$.

Заметим, что это определение содержит как частные случаи карлесоновы квадраты (1.3) (они отвечают $h_0=1$) и диадические квадраты (5.1), которые будут введены в § 5.

Пусть $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность квадратов в $\overline{\mathbb{D}}$, J_k – внешняя сторона квадрата S_k и δ_{J_k} – мера Лебега на дуге J_k. Предположим, что $1<r<p$, а квадраты S_k удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\sum_k\delta_{J_k}\in\mathcal{C},\tag{3.1}$$

$$\sup_k|J_k|\,\|w_r^{-1}\|^p_{L^q(J_k)}<\infty,\tag{3.2}$$

где $w_r(z)=w_{r,1}(z)=\|k_z^2\|_{r'}^{-\frac{r}{r+1}}$, $1/r+1/r'=1$, – вес из неравенства Бернштейна (см. § 2). Условие (3.1) означает, что последовательность квадратов $\{S_k\}$ достаточно редкая, в то время как их размеры контролируются неравенством (3.2).

Теорема 3.1. *Пусть последовательность квадратов* $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет условиям* (3.1) *и* (3.2), *и пусть* μ *– борелевская мера на* $\bigcup_k S_k$. *Тогда*:

(i) *если* $\mu(S_k)\leqslant C|J_k|$, *то* $\mu\in\mathcal{C}_p(\Theta)$;

(ii) *если, к тому же,* $\mu(S_k)=o(|J_k|)$, $k\to\infty$, *то вложение* $K^p_\Theta\subset L^p(\mu)$ *компактно*.

Заметим, что, как и в теореме Вольберга–Треиля, мы рассматриваем меры с условием Карлесона для специального класса достаточно больших квадратов. Мы увидим, что квадраты в теореме 3.1 могут быть существенно больше (см. ниже предложение 3.1).

При доказательстве теоремы 3.1 нам понадобятся следующие леммы. Первая из них утверждает, что нормы воспроизводящих ядер обладают определенной монотонностью на радиусах.

Лемма 3.1. *Пусть* $q>1$. *Тогда найдется константа* $C=C(q)$ *такая, что для всех* $z=\rho e^{i\phi}$ *и* $\widetilde z=\widetilde\rho e^{i\phi}$, $0\leqslant\widetilde\rho\leqslant\rho$, *мы имеем*

$$\|k_{\widetilde z}\|_q\leqslant C(q)\|k_z\|_q.\tag{3.3}$$

Доказательство. Для случая верхней полуплоскости соответствующее свойство установлено в [19, следствие 4.7]. Утверждение для круга следует с помощью тех же рассуждений. Лемма доказана.

Если последовательность $\{S_k\}$ удовлетворяет условию (3.2), то из оценки (3.3) вытекает, что

$$\sup_k |J_k| \biggl(\int_{S_k \cap \{|z|=\rho\}} w_r^{-q}(z)\,|dz| \biggr)^{p/q} \leqslant C \tag{3.4}$$

для всех $\rho \in (0,1]$ (через $|dz|$ обозначена мера Лебега на соответствующей дуге).

Лемма 3.2. *Если $J_k \subset \mathbb{T}$, то из условия (3.2) следует, что интеграл $\int_{J_k} |\Theta'(\tau)|\,dm(\tau)$ конечен. В частности, $\operatorname{Int} J_k \cap \sigma(\Theta) = \varnothing$ (через $\operatorname{Int} J_k$ обозначена относительная внутренность дуги J_k в $\mathbb{T}$), и функция Θ непрерывна в каждом из (замкнутых) квадратов S_k.*

Доказательство. Согласно неравенствам (2.4) и (3.2) мы имеем

$$\int_{J_k} |\Theta'(\tau)|^q\,dm(\tau) < \infty.$$

Следовательно, $\int_{J_k} |\Theta'(\tau)|\,dm(\tau) < \infty$, и мы заключаем, что Θ непрерывна на J_k. Легко видеть, что $|\Theta'(r\zeta)| \leqslant C|\Theta'(\zeta)|$, $\zeta \in \mathbb{T}$, $r \in (0,1)$, и поэтому Θ непрерывна на S_k. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. (i) Вложение $K^p_\Theta \subset L^p(\mu|_{\{|z|<1/2\}})$, очевидно, компактно. Поэтому мы можем, не умаляя общности, считать, что $\operatorname{supp}\mu \subset \{1/2 \leqslant |z| \leqslant 1\}$. Из леммы 3.2 следует, что множество функций $f \in K^p_\Theta$, непрерывных на каждом из S_k, плотно в K^p_Θ, $1 < p < \infty$ (достаточно рассмотреть воспроизводящие ядра). Таким образом, достаточно доказать неравенство

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|f\|_p, \qquad f \in K^p_\Theta,$$

только для функций, непрерывных на $\bigcup_k S_k$.

Пусть функция $f \in K^p_\Theta$ непрерывна на каждом из S_k. Тогда найдутся $w_k \in S_k$ такие, что

$$\|f\|^p_{L^p(\mu)} \leqslant \sum_k |f(w_k)|^p \mu(S_k) \leqslant \sup_k \frac{\mu(S_k)}{|J_k|} \sum_k |f(w_k)|^p\,|J_k|. \tag{3.5}$$

Утверждение (i) будет доказано, как только мы покажем, что

$$\sum_k |f(w_k)|^p\,|J_k| \leqslant C\|f\|^p_p, \tag{3.6}$$

где C не зависит от f и от выбора точек $w_k \in S_k$.

Рассмотрим дуги $\tilde J_k = S_k \cap \{|z| = |w_k|\}$. Поскольку $\mu(\{|z| < 1/2\}) = 0$, то $|\tilde J_k| \geqslant |J_k|/2$. Пусть $\nu = \sum_k \delta_{\tilde J_k}$. Тогда из условия (3.1) следует, что $\nu \in \mathcal{C}$ (и константы Карлесона M_ν таких мер ν равномерно ограничены). Имеем

$$\biggl(\sum_k |f(w_k)|^p\,|\tilde J_k| \biggr)^{1/p} \leqslant \|f\|_{L^p(\nu)} + \biggl(\sum_k \int_{\tilde J_k} |f(z) - f(w_k)|^p\,|dz| \biggr)^{1/p} \tag{3.7}$$

и $\|f\|_{L^p(\nu)} \leqslant C_1\|f\|_p$.

Оценим последнее слагаемое в формуле (3.7). Для $z \in \tilde{J}_k$ обозначим через $\gamma(z, w_k)$ дугу с концами z и w_k, лежащую внутри дуги $\tilde{J}_k$. Тогда $f(z) - f(w_k) = \int_{\gamma(z,w_k)} f'(u)\,du$ (в случае $J_k \subset \mathbb{T}$ заметим, что по лемме 3.2 всякая функция $f \in K^p_\Theta$ аналитична на J_k, за исключением, может быть, концевых точек) и, значит,

$$\sum_k \int_{\tilde{J}_k} |f(z) - f(w_k)|^p\,|dz| = \sum_k \int_{\tilde{J}_k} \left|\int_{\gamma(z,w_k)} f'(u)\,du\right|^p |dz|$$
$$\leqslant \sum_k \int_{\tilde{J}_k} \left(\int_{\gamma(z,w_k)} w_r^{-q}(u)\,|du|\right)^{p/q} \left(\int_{\gamma(z,w_k)} |f'(u)|^p w_r^p(u)\,|du|\right) |dz|$$
$$\leqslant \sum_k |\tilde{J}_k| \left(\int_{\tilde{J}_k} w_r^{-q}(u)\,|du|\right)^{p/q} \left(\int_{\tilde{J}_k} |f'(u)|^p w_r^p(u)\,|du|\right).$$

Согласно неравенству (3.4) получим

$$\sum_k \int_{\tilde{J}_k} |f(z) - f(w_k)|^p\,|dz| \leqslant C_2 \sum_k \int_{\tilde{J}_k} |f'(u)|^p w_r^p(u)\,|du|$$
$$= C_2 \|f' w_r\|^p_{L^p(\nu)} \leqslant C_3 \|f\|^p_p,$$

где последнее неравенство вытекает из теоремы 2.1.

(ii) Для борелевского множества $E \subset \overline{\mathbb{D}}$ определим оператор $\mathcal{I}_E \colon K^p_\Theta \to L^p(\mu)$ как $\mathcal{I}_E f = \chi_E f$, где χ_E – характеристическая функция множества E. Для $N \in \mathbb{N}$ положим $F_N = \bigcup_{k=1}^N S_k$. Как и выше, мы считаем, что функция $f \in K^p_\Theta$ непрерывна в $\bigcup_k S_k$. Тогда из оценок (3.5) и (3.6) следует, что

$$\int_{\overline{\mathbb{D}} \setminus F_N} |f|^p\,d\mu \leqslant C \sup_{k>N} \frac{\mu(S_k)}{|J_k|} \|f\|^p_p,$$

значит, $\|\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{D}} \setminus F_N}\| \to 0$, $N \to \infty$. Утверждение (ii) будет доказано, как только мы покажем, что оператор $\mathcal{I}_{F_N}$ компактен для всякого N (таким образом, наш оператор вложения $\mathcal{J} = \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{D}}} = \mathcal{I}_{F_N} + \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{D}} \setminus F_N}$ может быть приближен в операторной норме компактными операторами $\mathcal{I}_{F_N}$). Очевидно, достаточно показать компактность оператора $\mathcal{I}_{S_k}$ для всякого фиксированного k.

Приблизим оператор $\mathcal{I}_{S_k}$ операторами конечного ранга. Разобьем квадрат S_k в конечное объединение квадратов $\{\widetilde{S}_l\}_{l=1}^L$ с попарно не пересекающимися внутренностями и зафиксируем произвольную точку ζ_l в каждом из квадратов $\widetilde{S}_l$. По лемме 3.1 мы можем выбрать квадраты $\widetilde{S}_l$ настолько малыми, что для данного $\epsilon > 0$ мы получим

$$\left(\int_{[\zeta_l, z_l]} w_r^{-q}(z)\,|dz|\right)^{p/q} < \epsilon \tag{3.8}$$

при всех l, $1 \leqslant l \leqslant L$, и всех $z_l \in \widetilde{S}_l$. Здесь через $[z, w]$ обозначен отрезок прямой с концами z и w.

Теперь рассмотрим оператор конечного ранга

$$T \colon K^p_\Theta \to L^p(\mu), \qquad (Tf)(z) = \sum_{l=1}^L f(\zeta_l)\chi_{\widetilde{S}_l}(z).$$

Покажем, что $\|\mathcal{I}_{S_k} - T\|^p \leqslant C\epsilon$. Как и в доказательстве утверждения (i), имеем

$$\|(\mathcal{I}_{S_K} - T)f\|^p_{L^p(\mu)} = \sum_{l=1}^{L} \int_{\widetilde{S}_l} |f(z) - f(\zeta_l)|^p \, d\mu(z)$$
$$\leqslant \sum_{l=1}^{L} \int_{\widetilde{S}_l} \left(\int_{[\zeta_l, z]} |f'(u)|^p w_r^p(u) \, |du|\right)\left(\int_{[\zeta_l, z]} w_r^{-q}(u) \, |du|\right)^{p/q} d\mu(z).$$

По теореме 2.1 получаем

$$\int_{[\zeta_l, z]} |f'(u)|^p w_r^p(u) \, |du| \leqslant C_1 \|f\|_p^p,$$

где C_1 не зависит от $f \in K^p_\Theta$, $1 \leqslant l \leqslant L$ и $z \in \widetilde{S}_l$. Следовательно, согласно неравенству (3.8) имеем

$$\|(\mathcal{I}_{S_K} - T)f\|^p_{L^p(\mu)} \leqslant C_1 \epsilon \|f\|_p^p \sum_{l=1}^{L} \mu(\widetilde{S}_l) = C_1 \epsilon \mu(S_k) \|f\|_p^p.$$

Мы заключаем, что оператор $\mathcal{I}_{S_K}$ может быть приближен операторами конечного ранга, следовательно, он компактен.

Замечание 3.1. В доказательстве теоремы 3.1 мы воспользовались тем, что по лемме 3.2 функции, непрерывные в каждом из квадратов S_k, плотны в K^p_Θ. На самом деле из результатов статьи [2] вытекает, что функции, непрерывные во всем замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$, плотны в K^p_Θ, $p \geqslant 1$.

Теорема 3.1 описывает более широкий класс мер, чем класс $\mathcal{C}(\Theta)$ в теореме Вольберга–Треиля. А именно, имеет место следующее предложение.

Предложение 3.1. *Если $\mu \in \mathcal{C}(\Theta)$, то $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где мера μ_1 удовлетворяет условиям теоремы 3.1,* (i) *для всех $p > 1$ и $r \in (1, p)$, в то время как $\mu_2 \in \mathcal{C}$.*

В дальнейшем нам понадобится специальное семейство дуг на $\mathbb{T}$ (нетрудно видеть аналогию с разбиением Уитни для множества $\overline{\mathbb{D}} \setminus \Omega(\Theta, \varepsilon)$).

Лемма 3.3. *Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Предположим, что $\mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta) \neq \varnothing$. Тогда найдется последовательность таких дуг $I_k \subset \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{N}$, с попарно непересекающимися внутренностями, что $\bigcup_k I_k = \mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta)$ и*

$$|I_k| \leqslant \operatorname{dist}(I_k, \Omega(\Theta, \varepsilon)) \leqslant 2|I_k|. \tag{3.9}$$

Более того, если мы положим $F = \bigcup_k S(I_k)$ и $G = \overline{\mathbb{D}} \setminus F$, то для всех $z \in G$, $z \neq 0$, мы имеем

$$\operatorname{dist}\left(\frac{z}{|z|}, \Omega(\Theta, \varepsilon)\right) \leqslant 6\pi(1 - |z|). \tag{3.10}$$

Доказательство. Заметим, что $\int_{\mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta)} d_\varepsilon^{-1}(\zeta) \, dm(\zeta) = \infty$. Поэтому мы можем выбрать последовательность дуг I_k с попарно непересекающимися внутренностями так, что $\bigcup_k I_k = \mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta)$ и

$$\int_{I_k} d_\varepsilon^{-1}(\zeta) \, dm(\zeta) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, найдется точка $\zeta_k \in I_k$ такая, что $d_\varepsilon(\zeta_k) = 2|I_k|$. Тогда для всех $\zeta \in I_k$ выполнено $d_\varepsilon(\zeta) \geqslant d_\varepsilon(\zeta_k) - |I_k| \geqslant |I_k|$ и мы получаем неравенство (3.9).

Пусть теперь $z = re^{i\phi} \in G$. Тогда либо $e^{i\phi} \in \sigma(\Theta)$ (и, значит, $\operatorname{dist}(e^{i\phi}, \Omega(\Theta, \varepsilon)) \leqslant 1 - |z|$), либо $e^{i\phi} \in I_k$ для некоторого k. Поскольку $z \notin S(I_k)$, мы имеем $1 - r \geqslant |I_k|/(2\pi)$. Следовательно, согласно неравенству (3.9) выполнено $\operatorname{dist}(e^{i\phi}, \Omega(\Theta, \varepsilon)) \leqslant 3|I_k| \leqslant 6\pi(1 - r)$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 3.1. Как обычно, для дуги $I \subset \mathbb{T}$ и $a > 0$ мы обозначаем через aI дугу с тем же центром и длиной, равной $a|I|$. Положим $\mu_1 = \mu|_F$ и $\mu_2 = \mu|_G$, где множества F, G определены в формулировке леммы 3.3. Из оценки (3.9) вытекает, что

$$|I_k|\biggl(\int_{I_k} d_\varepsilon^{-q}(\zeta)\, dm(\zeta)\biggr)^{p/q} \leqslant C.$$

Пусть $r \in (1, p)$. Согласно неравенству (2.4) выполнено $d_\varepsilon \lesssim w_r$, следовательно, мы имеем

$$|I_k|\biggl(\int_{I_k} w_r^{-q}(\zeta)\, dm(\zeta)\biggr)^{p/q} \leqslant C_1. \tag{3.11}$$

Таким образом, семейство квадратов $S(I_k)$ удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2). Покажем, что $\mu_1(S(I_k)) \leqslant C_2|I_k|$. В самом деле, из оценки (3.9) следует, что $S(AI_k) \cap \Omega(\Theta, \varepsilon) \neq \varnothing$ для достаточно большой абсолютной константы A. Учитывая, что $\mu \in \mathcal{C}(\Theta)$, мы получаем $\mu_1(S(I_k)) \leqslant \mu(S(AI_k)) \leqslant C_2|I_k|$.

Покажем теперь, что μ_2 – обычная мера Карлесона. Если $S(I) \cap G \neq \varnothing$ для некоторой дуги $I \subset \mathbb{T}$, то по неравенству (3.10) существует константа $A_1 > 1$ такая, что

$$S(A_1 I) \cap \Omega(\Theta, \varepsilon) \neq \varnothing, \tag{3.12}$$

значит, $\mu(S(I)) \leqslant C_3|I|$ для положительной константы C_3. Предложение доказано.

Следующий пример показывает, что теорема 3.1 описывает существенно более широкий класс мер, чем теорема Вольберга–Треиля.

Пример 3.1. Согласно предложению 3.1 всякая мера $\mu \in \mathcal{C}(\Theta)$ имеет вид $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где мера μ_1 удовлетворяет условию (i) теоремы 3.1, а μ_2 – обычная мера Карлесона. Таким образом, теорема Вольберга–Треиля следует из теоремы 3.1. С другой стороны, нетрудно построить меру μ, удовлетворяющую условиям теоремы 3.1, (i), которая не лежит в $\mathcal{C}(\Theta)$.

Например, если $\mu \in \mathcal{C}(\Theta)$, то мера μ не имеет точечных нагрузок в точках граничного спектра, т. е. $\mu(\{\zeta\}) = 0$ для всех $\zeta \in \sigma(\Theta) \cap \mathbb{T}$ (заметим, что в этом случае $S(I) \cap \Omega(\Theta, \varepsilon) \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ и для любой дуги I такой, что ζ – внутренняя точка I). В то же время меры в теореме 3.1 могут иметь нетривиальные нагрузки на $\sigma(\Theta) \cap \mathbb{T}$. Пусть B – произведение Бляшке с нулями $z_n = (1 - 2^{-n})e^{i/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для всякого $p \in (1, \infty)$ имеем

$$\|k_\zeta^2\|_q \leqslant C_1, \qquad -\pi < \arg\zeta \leqslant 0,$$

следовательно, $w_p^{-1}(\zeta) = \|k_\zeta^2\|_q^{p/(p+1)} \leqslant C_2$ при $-\pi < \arg\zeta \leqslant 0$. Таким образом, $\delta_1 \in \mathcal{C}_p(\Theta)$. Аналогично, нетрудно построить бесконечную сумму точечных нагрузок, т.е. $\mu = \sum_n a_n \delta_{\zeta_n}$ при $a_n > 0$, $\zeta_n \in \sigma(\Theta) \cap \mathbb{T}$, такую, что вложение $K^p_\Theta \subset L^p(\mu)$ ограничено или даже компактно (подробности см. в [19, пример 6.3]).

§ 4. Компактные вложения. Доказательство теоремы 1.1

В настоящем параграфе мы докажем теорему 1.1 и обсудим соотношение между двумя “условиями исчезновения”, введенными в статье [16].

Доказательство теоремы 1.1. Как уже было отмечено, импликация (ii) $\Longrightarrow$ (i) для однокомпонентных внутренних функций была доказана в [16]. Мы рассмотрим импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii), ее доказательство аналогично доказательству предложения 3.1. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, и пусть I_k, F, G, μ_1 и μ_2 имеют тот же смысл, что в предложении 3.1 и в лемме 3.3. Покажем, что мера μ_1 удовлетворяет условию (ii) теоремы 3.1, а μ_2 – исчезающая мера Карлесона (см. определение в § 2), таким образом, вложение $H^p \subset L^p(\mu_2)$ компактно.

Для всех $p \in (1,\infty)$ и $r \in (1,p)$ мы имеем оценку (3.11). Поскольку $|I_k| \to 0$, $k \to \infty$, при этом $S(AI_k) \cap \Omega(\Theta,\varepsilon) \neq \varnothing$ для достаточно большой абсолютной константы $A > 1$, из предположения теоремы вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu(S(I_k))}{|I_k|} = 0.$$

Следовательно, вложение $K^p_\Theta \subset L^p(\mu_1)$ компактно по теореме 3.1, (ii). Как показано в доказательстве предложения 3.1, для всякой дуги I такой, что $\mu_2(S(I)) \neq 0$ (т.е. $S(I) \cap G \neq \varnothing$), мы имеем (3.12) для достаточно большой абсолютной константы $A_1 > 1$. По условию (i) теоремы 1.1 имеем $\mu_2(S(I))/|I| \to 0$, когда $|I| \to 0$ и $S(A_1 I) \cap \Omega(\Theta,\varepsilon) \neq \varnothing$. Следовательно, μ_2 – исчезающая мера Карлесона. Теорема доказана.

В статье [16] было предложено другое условие исчезновения, достаточное для компактности вложения: для $\delta > 0$ положим

$$H_\delta = \{z \in \overline{\mathbb{D}} \colon \operatorname{dist}(z, \sigma(\Theta) \cap \mathbb{T}) < \delta\}$$

и будем говорить, что мера μ удовлетворяет *первому условию исчезновения* (кратко, И1), если

$$M_{\mu_\delta} \to 0, \qquad \delta \to 0, \tag{4.1}$$

где $\mu_\delta = \mu\big|_{H_\delta}$. Напомним, что M_ν обозначает константу Карлесона меры ν. Если мера μ удовлетворяет условию (i) теоремы 1.1, будем говорить, что μ удовлетворяет *второму условию исчезновения* (И2).

В [16] показано, что в том случае, когда мера μ удовлетворяет И1, вложение $K^p_\Theta \subset L^p(\mu)$ компактно для всех $0 < p < \infty$. Авторы статьи [16] задали вопрос: какова связь между этими двумя условиями исчезновения? Здесь мы ответим на этот вопрос, показав, что условие И1 всегда влечет за собой условие И2, но не наоборот (таким образом, для $p > 1$ достаточное условие компактности, приведенное в [16], следует из доказанной теоремы 1.1).

Предложение 4.1. *Из условия* И1 *следует условие* И2.

Доказательство. Предположим, что мера μ удовлетворяет условию И1, но не удовлетворяет условию И2. Тогда найдется последовательность дуг $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ таких, что для некоторого фиксированного $\varepsilon \in (0,1)$ выполнено $S(J_n)\cap\Omega(\Theta,\varepsilon)\neq\varnothing$, $|J_n|\to 0$, $n\to\infty$, но

$$\mu(S(J_n)) \geqslant C|J_n| \tag{4.2}$$

для некоторой константы $C>0$.

Зафиксируем $\delta>0$ и положим $G_\delta=\overline{\mathbb{D}}\setminus H_\delta$. Из определения спектра $\sigma(\Theta)$ следует, что Θ непрерывна на G_δ и $|\Theta(z)|\to 1$ равномерно при $|z|\to 1$, $z\in G_\delta$. Следовательно, найдется константа $\delta_1\in(0,\delta)$ такая, что

$$|\Theta(z)|>\varepsilon, \qquad z\in G_\delta, \quad 1-\delta_1\leqslant |z|\leqslant 1. \tag{4.3}$$

Выберем N так, чтобы $|J_n|<\delta_1$, $n\geqslant N$. Очевидно, $S(J_n)\subset\{z\in\overline{\mathbb{D}}\colon 1-\delta_1\leqslant |z|\leqslant 1\}$. Поскольку $S(J_n)\cap\Omega(\Theta,\varepsilon)\neq\varnothing$, то из условия (4.3) вытекает, что

$$S(J_n)\not\subseteq G_\delta\cap\{1-\delta_1\leqslant|z|\leqslant 1\}, \qquad n\geqslant N.$$

Приходим к заключению, что $S(J_n)\cap H_\delta\neq\varnothing$, $n\geqslant N$. Следовательно, $S(J_n)\subset H_{2\delta}$, значит, $\mu(S(J_n))\leqslant M_{\mu_{2\delta}}|J_n|$, $n\geqslant N$. Это противоречит оценке (4.2), так как согласно условию (4.1) имеет место $M_{\mu_{2\delta}}\to 0$, когда $\delta\to 0$.

Пример 4.1. Покажем теперь, что условие И1 не необходимо для вложения даже в случае однокомпонентных функций (и, таким образом, из условия И2 не следует условие И1). Пусть I_n – последовательность дуг из леммы 3.3, и пусть ζ_n – середина дуги I_n. Положим $\mu=\sum_n a_n|I_n|\delta_{\zeta_n}$, где $a_n\to 0$, $n\to\infty$. По теореме 3.1, (ii) вложение $K^p_\Theta\subset L^p(\mu)$ компактно для всякого $p\in(1,\infty)$. Предположим, что функция Θ однокомпонентная. Тогда по теореме 1.1, (ii) мера μ удовлетворяет условию И2 (это можно проверить аналогично доказательству предложения 3.1). Однако мера μ_δ имеет нетривиальные точечные нагрузки на $\mathbb{T}$ для всех $\delta>0$, следовательно, она не будет мерой Карлесона. Таким образом, мера μ не удовлетворяет условию И1.

§ 5. Классы $\mathcal{S}_r$. Достаточные условия

Определение и основные свойства операторных идеалов Шаттена–фон Неймана $\mathcal{S}_r$ можно найти в [32].

Пусть $R_{n,m}$ – элементы стандартного диадического разбиения круга $\mathbb{D}$, а именно

$$R_{n,m}=\left\{z=\rho e^{i\phi}\colon 1-\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant\rho\leqslant 1-\frac{1}{2^n}\,,\ \frac{\pi m}{2^{n-1}}\leqslant\phi<\frac{\pi(m+1)}{2^{n-1}}\right\}, \tag{5.1}$$

где $n\in\mathbb{N}$, $m=0,1,\dots,2^n-1$.

Напомним принадлежащую Люкингу [21] теорему, описывающую $\mathcal{S}_r$-свойства вложений всего класса Харди H^2. Для меры Карлесона μ в $\mathbb{D}$ оператор вложения пространства H^2 в $L^2(\mu)$ принадлежит $\mathcal{S}_r$, $r>0$, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n,m}(2^n\mu(R_{n,m}))^{r/2}<\infty, \tag{5.2}$$

где мы суммируем по всем диадическим квадратам $R_{n,m}$. Интересный общий подход к вложениям гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами был предложен в статье [22]. Мы будем существенно использовать идеи из работы [22], особенно при доказательстве необходимых условий.

Критерий принадлежности оператора вложения $\mathcal{J}_\mu\colon K^2_\Theta \to L^2(\mu)$, $\mathcal{J}_\mu f = f$, идеалу $\mathcal{S}_2$ очевиден.

Предложение 5.1. *Имеем $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_2$ тогда и только тогда, когда $\|k_z\|_2 \in L^2(\mu)$; при этом $\|\mathcal{J}_\mu\|^2_{\mathcal{S}_2} = \int \|k_z\|_2^2\, d\mu(z)$.*

Доказательство. Мы имеем

$$(\mathcal{J}_\mu f)(z) = \int_{\mathbb{T}} f(w)\overline{k_z(w)}\, dm(w), \qquad f \in K^2_\Theta. \tag{5.3}$$

Заметим, что оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_\mu$, определенный формулой (5.3) на всем пространстве $L^2(\mathbb{T})$, будет ортогональным проектором из $L^2(\mathbb{T})$ на K^2_Θ. Тогда $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_2$, если и только если $\widetilde{\mathcal{J}}_\mu \in \mathcal{S}_2$, что равносильно условию

$$\int\int_{\mathbb{T}} |k_z(w)|^2\, dm(w)\, d\mu(z) = \int \|k_z\|_2^2\, d\mu(z) < \infty.$$

Предложение доказано.

Следующая теорема дает условие, достаточное для выполнения включения $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_r$, $r > 0$, и использующее дуги I_n из леммы 3.3 и некоторое специальное семейство диадических квадратов; этот результат включает в себя теорему 1.2. Для $\varepsilon \in (0,1)$ и $A > 0$ положим

$$\mathcal{R}(\varepsilon, A) = \bigl\{R_{n,m}\colon\ \mathrm{dist}(R_{n,m}, \Omega(\Theta,\varepsilon)) \leqslant 2^{-n}A\bigr\}.$$

Теорема 5.1. *Пусть $r > 0$, μ – борелевская мера в $\mathbb{D}\cup(\mathbb{T}\setminus\sigma(\Theta))$ и $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда существует абсолютная константа $A > 0$ такая, что $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_r$, как только*

$$\sum_n \left(\frac{\mu(S(I_n))}{|I_n|}\right)^{r/2} < \infty, \tag{5.4}$$

$$\sum_{R_{n,m}\in\mathcal{R}(\varepsilon,A)} (2^n\mu(R_{n,m}))^{r/2} < \infty. \tag{5.5}$$

В доказательстве теоремы 5.1 мы воспользуемся следующим свойством дуг I_n, построенных в лемме 3.3.

Лемма 5.1. *Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, и пусть $\{I_n\}$ – система дуг из леммы 3.3. Тогда найдется константа $C = C(\varepsilon) > 0$ такая, что*

$$|k_z(w)| = \left|\frac{1-\overline{\Theta(z)}\Theta(w)}{1-\overline{z}w}\right| \leqslant C|I_n|^{-1}$$

для всех n и $z, w \in S(I_n)$. В частности, $|\Theta'(\zeta)| \leqslant C|I_n|^{-1}$, $\zeta \in I_n$.

Доказательство. По построению дуг I_n имеем $d_\varepsilon(\zeta) = \operatorname{dist}(\zeta, \Omega(\Theta, \varepsilon)) \geqslant |I_n|$, $\zeta \in I_n$. Пусть $w = r\zeta$, $r \in (0,1)$, $\zeta \in I_n$. Очевидно, $|k_z(w)| \leqslant \|k_z\|_2 \, \|k_w\|_2$, и по лемме 3.1 получаем

$$\|k_w\|_2^2 \leqslant C\|k_\zeta\|_2^2 = C|\Theta'(\zeta)|.$$

Из неравенства (2.4) (см. также [19, теорема 4.9]) следует, что $|\Theta'(\zeta)| \leqslant C_1(d_\varepsilon(\zeta))^{-1} \leqslant C_1|I_n|^{-1}$. Следовательно, $\|k_w\|_2^2 \leqslant C_2|I_n|^{-1}$, $w \in S(I_n)$. Лемма доказана.

Теперь мы докажем теорему 5.1. Сначала рассмотрим случай $0 < r \leqslant 1$. Здесь мы воспользуемся одной идеей из статьи [22], затем, используя метод комплексной интерполяции между различными идеалами $\mathcal{S}_r$, дадим доказательство для случая $r > 1$.

Доказательство теоремы 5.1. Для данного $\varepsilon \in (0,1)$ рассмотрим семейство дуг $\{I_n\}$, построенное в лемме 3.3. Как в доказательстве предложения 3.1, положим $F = \bigcup_n S(I_n)$ и $G = \overline{\mathbb{D}} \setminus F$. Отметим, что $G \cap \mathbb{T} = \sigma(\Theta) \cap \mathbb{T}$ и, следовательно, $\mu(G \cap \mathbb{T}) = 0$.

Прежде всего, покажем, что для всякого $r > 0$ из условия (5.5) с подходящим A следует, что оператор вложения $\mathcal{J}_{\mu|_G}\colon H^2 \to L^2(\mu|_G)$ принадлежит идеалу $\mathcal{S}_r$. Пусть $R_{n,m}$ – диадический квадрат такой, что $R_{n,m} \cap G \neq \varnothing$. Покажем, что $R_{n,m} \in \mathcal{R}(\varepsilon, A)$ для некоторого $A > 0$. В самом деле, пусть $z \in R_{n,m} \setminus F$, $z = (1-\rho)\zeta$, $\rho \in (0,1)$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Если $\zeta \in \sigma(\Theta)$, то $\operatorname{dist}(z, \Omega(\Theta, \varepsilon)) \leqslant \rho \leqslant 2^{-(n-1)}$. В противном случае, $\zeta \in I_k$ для некоторого k, и согласно оценке (3.10) имеем $\operatorname{dist}(\zeta, \Omega(\Theta, \varepsilon)) \leqslant 6\pi\rho$. Следовательно, $\operatorname{dist}(z, \Omega(\Theta, \varepsilon)) \leqslant (6\pi+1)\rho \leqslant 2^{-(n-1)}(6\pi+1)$. Мы заключаем, что $R_{n,m} \in \mathcal{R}(\varepsilon, A)$ для $A = 12\pi + 2$. Таким образом,

$$\sum_{R_{n,m}\cap G \neq \varnothing} (2^n \mu(R_{n,m}))^{r/2} < \infty,$$

и $\mathcal{J}_{\mu|_G} \in \mathcal{S}_r$ по теореме Люкинга.

Далее мы рассматриваем оператор вложения $\mathcal{J}\colon K_\Theta^2 \to L^2(\mu)$, где μ – мера на множестве $F = \bigcup_n S(I_n)$.

Пусть $0 < r \leqslant 1$. Воспользуемся одной идеей из статьи [22]. Обозначим через D_n наименьший круг, содержащий карлесонов квадрат $S_n = S(I_n)$. По лемме 3.3 имеем $\operatorname{dist}(I_n, \Omega(\Theta, \varepsilon)) \geqslant |I_n|$, откуда радиус d_n круга D_n не превосходит $2|I_n|/3$. Обозначим через $\widetilde{D}_n$ круг с тем же центром и радиусом $\widetilde{d}_n = 3|I_n|/4$. Следовательно,

$$\operatorname{dist}(\widetilde{D}_n, \Omega(\Theta, \varepsilon)) \asymp |I_n|.$$

В этом случае функция Θ аналитична в $\widetilde{D}_n$, $\Theta(z) = 1/\overline{\Theta(1/\overline{z})}$, $z \in \widetilde{D}_n \setminus \mathbb{D}$, и $|\Theta(z)| \leqslant 1/\varepsilon$, $z \in \widetilde{D}_n$. Более того, всякая функция $f \in K_\Theta^2$ аналитична в $\widetilde{D}_n$, и k_z будет воспроизводящим ядром для K_Θ^2 в точке $z \in \widetilde{D}_n$. Мы заключаем, аналогично лемме 5.1, что

$$\|k_z\|_2^2 \lesssim |I_n|^{-1}, \qquad z \in \widetilde{D}_n. \tag{5.6}$$

Согласно известному неравенству Ротфельда для идеалов $\mathcal{S}_r$, $r \leqslant 1$, выполнено $\|A+B\|_{\mathcal{S}_r}^r \leqslant \|A\|_{\mathcal{S}_r}^r + \|B\|_{\mathcal{S}_r}^r$. Поэтому мы можем представить оператор вложения $\mathcal{J}\colon K^2_\Theta \to L^2(\mu)$ как сумму операторов вложения $J_n\colon K^2_\Theta \to L^2(\mu|_{S_n})$ и оценить их $\mathcal{S}_r$-нормы по отдельности. Теперь мы факторизуем оператор J_n как $J_n = J_n^{(2)} J_n^{(1)}$, где $J_n^{(1)}$ – оператор вложения пространства K^2_Θ в $H^2(\widetilde{D}_n)$, а $J_n^{(2)}$ – оператор вложения пространства $H^2(\widetilde{D}_n)$ в $L^2(\mu|_{S_n})$. Здесь $H^2(\widetilde{D}_n)$ обозначает класс Харди в круге $\widetilde{D}_n$.

Из стандартных свойств идеалов $\mathcal{S}_r$ вытекает, что

$$\|J_n\|_{\mathcal{S}_r} \leqslant \|J_n^{(2)}\|_{\mathcal{S}_r} \|J_n^{(1)}\|_{\mathcal{S}_2}. \tag{5.7}$$

Из неравенства (5.6) следует, что

$$\|J_n^{(1)}\|^2_{\mathcal{S}_2} = \frac{1}{2\pi \widetilde{d}_n} \int_{\partial \widetilde{D}_n} \int_{\mathbb{T}} |k_z(\zeta)|^2 \, dm(\zeta) \, |dz| = \frac{1}{2\pi \widetilde{d}_n} \int_{\partial \widetilde{D}_n} \|k_z\|_2^2 \, |dz| \leqslant C|I_n|^{-1}.$$

Заметим, что $d_n \leqslant \delta \widetilde{d}_n$, где $\delta < 1$ – некоторая абсолютная константа. Пусть s_l – l-е сингулярное число оператора $J_n^{(2)}$. Тогда имеет место оценка

$$s_l \leqslant C(\delta) \delta^l (\mu(D_n))^{1/2}. \tag{5.8}$$

В самом деле, применяя сдвиг и линейную замену переменной, мы можем свести задачу к рассмотрению ситуации $\widetilde{D}_n = \mathbb{D}$, $D_n = \delta \mathbb{D}$, а ν – мера на $\delta \mathbb{D}$. Тогда s_l не превосходит нормы сужения оператора вложения в $L^2(\nu)$ на подпространство $z^l H^2(\mathbb{D})$ пространства $H^2(\mathbb{D})$. Заметим, что $|f(z)| \leqslant C(\delta)\|f\|_2$, $z \in \delta\mathbb{D}$. Тогда

$$\|z^l f\|^2_{L^2(\nu)} = \int_{\delta\mathbb{D}} |z^l f(z)|^2 \, d\nu(z) \leqslant C^2(\delta) \delta^{2l} \nu(\delta\mathbb{D}) \|f\|_2^2, \qquad f \in H^2(\mathbb{D}),$$

откуда следует оценка (5.8). Теперь, сложив s_l^r, мы получим, что $\|J_n^{(2)}\|_r^r \leqslant C(\mu(S_n))^{r/2}$, откуда согласно неравенству (5.7) имеем

$$\|J_n\|_r^r \leqslant C \left(\frac{\mu(S_n)}{|I_n|} \right)^{r/2}.$$

Мы приходим к выводу, что

$$\|\mathcal{J}\|_r^r \leqslant C \sum_n \left(\frac{\mu(S_n)}{|I_n|} \right)^{r/2}.$$

Пусть $r > 1$. Положим $a_n = \mu(S_n)$ и рассмотрим нормализованные меры $\mu_n = a_n^{-1} \mu\big|_{S_n}$ на квадратах Карлесона S_n. Тогда $\mu = \sum_n a_n \mu_n$. Введем меру $\nu = \sum_n \mu_n$. Очевидно, отображение $f \mapsto \sum_n a_n^{1/2} f \chi_{S_n}$ будет унитарным оператором, действующим из $L^2(\mu)$ на $L^2(\nu)$ (напомним, что через χ_G мы обозначаем характеристическую функцию множества G). Таким образом, оператор вложения $\mathcal{J}$ принадлежит идеалу $\mathcal{S}_r$ тогда и только тогда, когда оператор

$$T\colon K^2_\Theta \to L^2(\nu), \qquad Tf = \sum_n a_n^{1/2} f \chi_{S_n},$$

принадлежит $\mathcal{S}_r$, и $\|\mathcal{J}\|_{\mathcal{S}_r} = \|T\|_{\mathcal{S}_r}$. Покажем, что $T \in \mathcal{S}_r$ и $\|T\|_{\mathcal{S}_r} \leqslant C\mathfrak{M}_r(\mu)$, если $\mathfrak{M}_r(\mu) = \sum_n (a_n/|I_n|)^{r/2} < \infty$.

Мы воспользуемся методом комплексной интерполяции (см. [32]). Для $\zeta \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant 1$, рассмотрим аналитическое семейство операторов $T(\zeta)\colon K^2_\Theta \to L^2(\nu)$,

$$T(\zeta)f = \sum_n a_n^{1/2}\left(\frac{a_n}{|I_n|^{r/(r-1)}}\right)^{\frac{\zeta r-1}{2}} f\chi_{S_n}.$$

Очевидно, $T(1/r) = T$. Мы покажем, что $T(\zeta)$ ограничен (как оператор из K^2_Θ в $L^2(\nu)$) и

$$\|T(\zeta)\| \leqslant A_0, \qquad \operatorname{Re}\zeta \in [0,1]. \tag{5.9}$$

Мы также покажем, что $T(\zeta) \in \mathcal{S}_1$ при $\operatorname{Re}\zeta = 1$ и

$$\|T(\zeta)\|_{\mathcal{S}_1} \leqslant A_1, \qquad \operatorname{Re}\zeta = 1. \tag{5.10}$$

Тогда согласно [32, теорема 13.1] имеем $T = T(1/r) \in \mathcal{S}_r$ и $\|T\|_{\mathcal{S}_r} \leqslant A_0^{1-1/r}A_1^{1/r}$.

Отметим, что при $t > 0$ выполнено $|t^{\zeta r-1}| \leqslant t^{-1}$, значит,

$$|T(\zeta)f| \leqslant \sum_n |I_n|^{\frac{r}{2(r-1)}}\,|f|\chi_{S_n} = Mf.$$

Нелинейный оператор M будет ограниченным как оператор из K^2_Θ в $L^2(\nu)$, как только будет ограниченным оператор вложения пространства K^2_Θ в $L^2(\nu_0)$ с мерой $\nu_0 = \sum_n |I_n|^{r/(r-1)}\mu_n$. Последнее справедливо по теореме 3.1, так как $\nu_0(S_n) = |I_n|^{r/(r-1)} \leqslant C_0|I_n|$. Таким образом, имеет место оценка (5.9).

Пусть теперь $\operatorname{Re}\zeta = 1$. Тогда

$$T(\zeta)f = \sum_n \left(\frac{a_n}{|I_n|}\right)^{r/2} e^{i\alpha_n} f\chi_{S_n},$$

где $\alpha_n = \frac{r}{2}\operatorname{Im}\zeta\log\frac{a_n}{|I_n|^{r/(r-1)}}$. Очевидно, $T(\zeta)$ принадлежит $\mathcal{S}_1$ (как оператор из K^2_Θ в $L^2(\nu)$) тогда и только тогда, когда оператор вложения пространства K^2_Θ в $L^2(\nu_1)$ принадлежит $\mathcal{S}_1$, где

$$\nu_1 = \sum_n \left(\frac{a_n}{|I_n|}\right)^r \mu_n.$$

Имеем $\nu_1(S_n) = \left(\frac{a_n}{|I_n|}\right)^r$ и

$$\mathfrak{M}_1(\nu_1) = \sum_n \left(\frac{a_n}{|I_n|}\right)^{r/2} < \infty.$$

Применяя полученный выше результат для случая $\mathcal{S}_1$, мы заключаем, что $T(\zeta) \in \mathcal{S}_1$ и оценка (5.10) выполнена для $A_1 = C_1\mathfrak{M}_1(\nu_1) = C_1\mathfrak{M}_r(\mu)$. Следовательно, $T = T(1/r) \in \mathcal{S}_r$ и $\|T\|^r_{\mathcal{S}_r} \leqslant C_2\mathfrak{M}_r(\mu)$. Доказательство теоремы завершено.

§ 6. Необходимые условия включения $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_r$. Доказательство теоремы 1.4

В этом параграфе мы рассмотрим условия, необходимые для выполнения включения $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_r$, $r \geqslant 1$. Мы воспользуемся общими результатами, полученными в работе [22]. Пусть X – гильбертово пространство, состоящее из функций, аналитических в области D, с воспроизводящим ядром K. Предположим, что $\{D_n\}$ – разбиение области D и для всякого n найдется $w_n \in D_n$ такое, что для всех $z \in D_n$

$$|K(z, w_n)|^2 \geqslant cK(z,z)K(w_n, w_n), \tag{6.1}$$

где c – положительная константа (не зависящая от n). Рассмотрим дискретную меру $\nu = \sum_n (K(w_n, w_n))^{-1}\delta_{w_n}$. Для меры μ в G положим

$$j_n = \left(\int_{D_n} K(z,z)\, d\mu(z)\right)^{1/2}.$$

Если оператор вложения пространства X в $L^2(\nu)$ ограничен, а оператор вложения пространства X в $L^2(\mu)$ принадлежит классу $\mathcal{S}_r$, $r \geqslant 1$, то $\{j_n\} \in \ell^r$ [22, теорема 3].

Доказательство теоремы 1.3. Зафиксируем нумерацию R_n, $n \in \mathbb{N}$, множества тех квадратов $R_{l,m}$, для которых $R_{l,m} \cap \Omega(\Theta, \varepsilon) \neq \varnothing$. В каждом из квадратов R_n выберем точку w_n так, чтобы $|\Theta(w_n)| < \varepsilon$. Если $R_n = R_{l,m}$, положим $d_n = 2^{-l}$. Нетрудно показать, что существует такое число $\delta < 1$, зависящее только от ε, что $|\Theta(z)| < \delta$, $z \in R_n$. Иными словами, $R_n \subset \Omega(\Theta, \delta)$ для всех n.

Мы имеем $\|k_z\|_2^2 \asymp d_n^{-1}$, $z \in R_n$, с константами, зависящими только от δ. Поэтому множества $D_n = R_n$ и точки w_n удовлетворяют условию (6.1). Если мы положим $\nu = \sum_n d_n \delta_{w_n}$, то из конструкции контуров Карлесона (см. [1, гл. VIII, § 5]) следует, что ν – мера Карлесона. Пусть теперь μ – мера на $\bigcup_n R_n$, и пусть $\mathcal{J}_\mu\colon K_\Theta^2 \to L^2(\mu)$ – оператор вложения. Если $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_r$, $r \geqslant 1$, то согласно [22, теорема 3] мы имеем $\{j_n\} \in \ell^r$, где $j_n = \big(\int_{R_n} \|k_z\|_2^2\, d\mu(z)\big)^{1/2} \asymp (\mu(R_n)/d_n)^{1/2}$. Теорема доказана.

Мы завершим этот параграф доказательством теоремы 1.4. Получим сначала элементарную оценку внутренних функций.

Лемма 6.1. *Пусть $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta)$, $z \in \mathbb{D}$, и пусть $|z-\zeta| < A \operatorname{dist}(\zeta, \sigma(\Theta))$ для некоторой константы $A \in (0,1)$. Тогда найдется константа $C = C(A) > 0$ такая, что*

$$\log|\Theta(z)| \leqslant -C(1-|z|)|\Theta'(\zeta)|.$$

Доказательство. По теореме Фростмана функция $\Theta_\alpha = \frac{\Theta - \alpha}{1-\overline{\alpha}\Theta}$ будет произведением Бляшке для почти всех α, $|\alpha| < 1$, и $\|\Theta_\alpha - \Theta\|_\infty \to 0$, когда $\alpha \to 0$. Мы имеем также $|\Theta_\alpha'(\zeta)| \to |\Theta'(\zeta)|$, $\alpha \to 0$, если $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta)$. Таким образом, достаточно доказать оценку для случая, когда Θ – произведение Бляшке.

Пусть B – произведение Бляшке с нулями z_n, и пусть $z \in \mathbb{D}$. Тогда

$$\log|B(z)|^2 = \sum_n \log\left(1 - \frac{(1-|z_n|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}_n z|^2}\right).$$

Напомним также, что $|B'(\zeta)| = \sum_n \frac{1-|z_n|^2}{|\zeta - z_n|^2}$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Поскольку выполнено $|z-\zeta| < A\,\mathrm{dist}(\zeta, \sigma(\Theta))$, мы имеем $|z-\zeta| < A|z_n - \zeta|$ для всех n. Поэтому

$$(1-A)|\zeta - z_n| < |1 - \overline{z}_n z| < (1+A)|\zeta - z_n|.$$

Учитывая, что $\log(1-t) < -t$, $t \in (0,1)$, мы получим

$$\log|B(z)|^2 < -\sum_n \frac{(1-|z_n|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}_n z|^2}$$
$$< -C(A)(1-|z|)\sum_n \frac{1-|z_n|^2}{|\zeta - z_n|^2} = -C(A)(1-|z|)|B'(\zeta)|.$$

Лемма доказана.

В следующей лемме через $\{I_n\}$ обозначено семейство дуг из леммы 3.3, построенное по $\varepsilon \in (0,1)$.

Лемма 6.2. *Пусть Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Тогда существует $\delta \in (0,1)$ (зависящее от Θ и ε, но не зависящее от n) такое, что $|\Theta(z)| \leqslant \delta$ для $z = (1 - |I_n|/(2\pi))\zeta$, $\zeta \in I_n$ (т. е. для z на внутренней стороне квадрата $S(I_n)$). Также мы имеем $k_z(z) = \|k_z\|_2^2 \asymp |I_n|^{-1}$, $z \in S(I_n)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что найдутся такие константы $C_j = C_j(\Theta, \varepsilon) > 0$, $j = 1, 2$, что

$$C_1|I_n|^{-1} \leqslant |\Theta'(\zeta)| \leqslant C_2|I_n|^{-1}, \qquad \zeta \in I_n. \tag{6.2}$$

Нужно доказать только первое неравенство; второе вытекает из леммы 5.1.

По лемме 3.3 найдется точка $w \in \Omega(\Theta, \varepsilon)$ такая, что $|\zeta - w| \leqslant C_3|I_n|$, $\zeta \in I_n$, для некоторой абсолютной константы $C_3 > 0$. Следовательно,

$$|k_w(\zeta)| \geqslant \frac{1 - |\Theta(w)|}{|\zeta - w|} \geqslant C_3^{-1}(1-\varepsilon)|I_n|^{-1}.$$

С другой стороны, согласно неравенству, полученному в [12], для однокомпонентной функции Θ имеем

$$|k_w(\zeta)| \leqslant C_4|\Theta'(\zeta)|, \qquad w \in \mathbb{D}, \quad \zeta \in \mathbb{T}, \tag{6.3}$$

откуда следует оценка (6.2).

Теперь зафиксируем $\zeta \in I_n$ и положим $z = (1 - |I_n|/(2\pi))\zeta$. Поскольку $\mathrm{dist}(I_n, \sigma(\Theta)) \geqslant |I_n|$, имеем $|\zeta - z| < A\,\mathrm{dist}(\zeta, \sigma(\Theta))$ для некоторого $A < 1$. Из неравенства (6.2) и леммы 6.1 следует, что $|\Theta(z)| \leqslant \delta = \exp(-C(A)C_1/(2\pi))$. Мы заключаем, что $k_z(z) \asymp |I_n|^{-1}$, когда $z = (1 - |I_n|/(2\pi))\zeta$, $\zeta \in I_n$. Теперь из леммы 3.1 следует оценка $k_z(z) = \|k_z\|_2^2 \asymp |I_n|^{-1}$ для всех $z \in S(I_n)$. Лемма доказана.

Следствие 6.1. *Пусть Θ – однокомпонентная внутренняя функция, $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда найдется число $\delta \in (0,1)$ такое, что $|\Theta(z)| \leqslant \delta$, $z \in G \cap \mathbb{D}$.*

Доказательство. Напомним, что $G = \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_n S(I_n)$. Покажем, что найдется $\delta \in (0,1)$ такое, что $|\Theta(z)| \leqslant \delta$, $z \in \partial G \cap \mathbb{D}$. Поскольку ∂G – спрямляемая жорданова кривая, $|\Theta(z)| \leqslant 1$ в G, а $\partial G \cap \mathbb{T} = \sigma(\Theta) \cap \mathbb{T}$ имеет нулевую меру Лебега (см. [24]), мы заключаем, что $|\Theta(z)| \leqslant \delta$, $z \in G \cap \mathbb{D}$.

Пусть $z \in \partial G \cap \mathbb{D}$. Тогда имеются две возможности: либо $z = (1 - |I_n|/(2\pi))\zeta$, $\zeta \in I_n$ для некоторого n (z лежит на внутренней стороне некоторого квадрата), либо найдутся два смежных квадрата $S(I_n)$ и $S(I_m)$, $|I_n| \leqslant |I_m|$, таких, что $z = r\zeta$, где ζ – общая концевая точка дуг I_n и I_m, а $1 - |I_m|/(2\pi) \leqslant r \leqslant 1 - |I_n|/(2\pi)$. В первом случае $|\Theta(z)| \leqslant \delta_1 < 1$ по лемме 6.2. Заметим, что по неравенству (6.2) выполнено $|I_n| \asymp |I_m| \asymp |\Theta'(\zeta)|^{-1}$. Следовательно, во втором случае $|\Theta(z)| \leqslant \delta_2 < 1$ по лемме 6.1. Здесь δ_1 и δ_2 зависят только от ε. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 1.4. Сначала докажем достаточность условий (1.6) и (1.7). Как и ранее, положим $F = \bigcup_n S(I_n)$, $G = \overline{\mathbb{D}} \setminus F$. Из теоремы 1.2 следует, что оператор вложения K^2_Θ в $L^2(\mu|_F)$ принадлежит идеалу $\mathcal{S}_r$. Пусть теперь $R_{n,m}$ – диадический квадрат такой, что $R_{n,m} \cap G \neq \varnothing$. Тогда по следствию 6.1 найдется константа $\delta < 1$ такая, что $R_{n,m} \cap \Omega(\Theta, \delta) \neq \varnothing$. По условию (1.7) имеем

$$\sum_{R_{n,m} \cap G \neq \varnothing} (2^n \mu(R_{n,m}))^{r/2} \leqslant \sum_{R_{n,m} \cap \Omega(\Theta,\delta) \neq \varnothing} (2^n \mu(R_{n,m}))^{r/2} < \infty,$$

и включение $\mathcal{J}_{\mu|_G} \in \mathcal{S}_r$ следует из теоремы Люкинга.

По теореме 1.3 условие (1.7) необходимо для включения $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_r$ даже в случае произвольной внутренней функции. Чтобы доказать необходимость условия (1.6), мы проверим условия теоремы Парфенова для $D_n = S(I_n)$. Согласно лемме 6.2 можно выбрать точки $w_n \in S(I_n)$ так, что $|\Theta(w_n)| \leqslant \delta$. Следовательно, имеем

$$|k_{w_n}(z)|^2 = \left| \frac{1 - \Theta(z)\overline{\Theta(w_n)}}{1 - z\overline{w}_n} \right|^2 \geqslant C_1 |I_n|^{-2} \geqslant C_2 k_z(z) k_{w_n}(w_n).$$

Мы воспользовались оценками $|1 - z\overline{w}_n| \lesssim |I_n|$ и $k_z(z) \lesssim |I_n|^{-1}$ (см. лемму 6.2), выполненными для всех $z \in S(I_n)$. Также имеем $k_{w_n}(w_n) \asymp |I_n|^{-1}$, и мера $\nu = \sum_n |I_n| \delta_{w_n}$ принадлежит классу $\mathcal{C}_2(\Theta)$ по теореме 3.1, (i).

Если $\mathcal{J}_{\mu|_F} \in \mathcal{S}_r$, $r \geqslant 1$, то согласно [22, теорема 3] имеем $\{j_n\} \in \ell^r$,

$$j_n = \left(\int_{S(I_n)} k_z(z)\, d\mu(z) \right)^{1/2}.$$

Остается заметить, что $j_n \asymp \big(\mu(S(I_n))/|I_n|\big)^{1/2}$, так как $k_z(z) \asymp |I_n|^{-1}$, $z \in S(I_n)$. Теорема доказана.

Замечание 6.1. Условие $R_{n,m} \in \mathcal{R}(\varepsilon, A)$ в теореме 5.1 означает, что расстояние от диадического квадрата $R_{n,m}$ до множества уровня $\Omega(\Theta, \varepsilon)$ не намного превосходит размеры квадрата $R_{n,m}$. Константа $A = 12\pi + 2$, появляющаяся в доказательстве теоремы 5.1, никоим образом не является точной. Между достаточным условием (5.5) и необходимым условием (1.7) имеется определенный зазор. Отметим, что из включения $R_{n,m} \in \mathcal{R}(\varepsilon, A)$, вообще говоря, не следует, что $R_{n,m} \cap \Omega(\Theta, \varepsilon_1) \neq \varnothing$ для некоторого $\varepsilon_1 \in (0,1)$, не зависящего от n и m.

Замечание 6.2. Теорема 1.4 (или, точнее, ее аналог для верхней полуплоскости) обобщает теорему Парфенова [23] о вложениях пространства Пэли–Винера PW_a^2 (пространства целых функций экспоненциального типа не выше a, квадратично суммируемых на $\mathbb{R}$): *если* μ *– мера на прямой* $\mathbb{R}$ *и* $\mathcal{J}_\mu\colon PW_a^2 \to L^2(\mu)$, $\mathcal{J}_\mu f = f$, *то* $\mathcal{J}_\mu \in \mathcal{S}_r$, $r > 0$, *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\mu([n, n+1])\big)^{r/2} < \infty.$$

Пространство PW_a^2 по существу совпадает с модельным пространством, порожденным однокомпонентной внутренней функцией $\theta(z) = \exp(2iaz)$ в $\mathbb{C}^+$. А именно, $PW_a^2 = e^{-iaz}(K_\theta^2)_+$. Заметим, что для функции θ интервалы $J_n = [n, n+1]$ обладают тем же свойством, что и дуги I_n в лемме 3.3: для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ расстояние $\operatorname{dist}(J_n, \Omega(\theta,\varepsilon))$ сравнимо с длиной интервала J_n.

Список литературы

1. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, New York–London, 1981.
2. А. Б. Александров, “Инвариантные подпространства оператора сдвига. Аксиоматический подход”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. XI, Записки науч. сем. ЛОМИ, **113**, Наука, Л., 1981, 7–26; англ. пер.: A. B. Aleksandrov, “Invariant subspaces of the shift operator. Axiomatic approach”, *J. Soviet Math.*, **22**:6 (1983), 1695–1708.
3. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980; англ. пер.: N. K. Nikol’skiĭ, *Treatise on the shift operator*, Grundlehren Math. Wiss., **273**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1986.
4. N. K. Nikolski, *Operators, functions, and systems: an easy reading*. Vol. 2: *Model operators and systems*, Math. Surveys Monogr., **93**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
5. J. A. Cima, W. T. Ross, *The backward shift on the Hardy space*, Math. Surveys Monogr., **79**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
6. S. V. Hruščev, N. K. Nikol’skii, B. S. Pavlov, “Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels”, *Complex analysis and spectral theory*, Lecture Notes in Math., **864**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981, 214–335.
7. B. Cohn, “Carleson measures for functions orthogonal to invariant subspaces”, *Pacific J. Math.*, **103**:2 (1982), 347–364.
8. S. C. Power, “Vanishing Carleson measures”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **12**:3 (1980), 207–210.
9. O. Blasco, H. Jarchow, “A note on Carleson measures for Hardy spaces”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **71**:1–2 (2005), 371–389.
10. F. Nazarov, A. Volberg, “The Bellman function, the two-weight Hilbert transform, and embeddings of the model spaces K_θ”, *J. Anal. Math.*, **87**:1 (2002), 385–414.
11. А. Л. Вольберг, С. Р. Треиль, “Теоремы вложения для инвариантных подпространств оператора обратного сдвига”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. XV, Записки науч. сем. ЛОМИ, **149**, Наука, Л., 1986, 38–51; англ. пер.: A. L. Vol’berg, S. R. Treil’, “Imbedding theorems for the invariant subspaces of the backward shift operator”, *J. Soviet Math.*, **42**:2 (1988), 1562–1572.

12. А. Б. Александров, “О теоремах вложения для коинвариантных подпространств оператора сдвига. II”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 27, Записки науч. сем. ПОМИ, **262**, ПОМИ, СПб., 1999, 5–48; англ. пер.: A. B. Aleksandrov, “On embedding theorems for coinvariant subspaces of the shift operator. II”, *J. Math. Sci.* (*New York*), **110**:5 (2002), 2907–2929.
13. W. S. Cohn, “Carleson measures and operators on star-invariant subspaces”, *J. Operator Theory*, **15**:1 (1986), 181–202.
14. K. M. Dyakonov, “Embedding theorems for star-invariant subspaces generated by smooth inner functions”, *J. Funct. Anal.*, **157**:2 (1998), 588–598.
15. A. L. Volberg, “Thin and thick families of rational fractions”, *Complex analysis and spectral theory*, Lect. Notes in Math., **864**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981, 440–480.
16. J. A. Cima, A. L. Matheson, “On Carleson embeddings of star-invariant supspaces”, *Quaest. Math.*, **26**:3 (2003), 279–288.
17. D. N. Clark, “One dimensional perturbations of restricted shifts”, *J. Analyse Math.*, **25**:1 (1972), 169–191.
18. А. Д. Баранов, “Весовые неравенства Бернштейна и теоремы вложения для модельных подпространств”, *Алгебра и анализ*, **15**:5 (2003), 138–168; англ. пер.: A. D. Baranov, “Weighted Bernstein-type inequalities, and embedding theorems for the model subspaces”, *St. Petersburg Math. J.*, **15**:5 (2004), 733–752.
19. A. D. Baranov, “Bernstein-type inequalities for shift-coinvariant subspaces and their applications to Carleson embeddings”, *J. Funct. Anal.*, **223**:1 (2005), 116–146.
20. A. Baranov, “Stability of the bases and frames reproducing kernels in model spaces”, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **55**:7 (2005), 2399–2422.
21. D. H. Luecking, “Trace ideal criteria for Toeplitz operators”, *J. Funct. Anal.*, **73**:2 (1987), 345–368.
22. О. Г. Парфенов, “О свойствах операторов вложения некоторых классов аналитических функций”, *Алгебра и анализ*, **3**:2 (1991), 199–222; англ. пер.: O. G. Parfenov, “On properties of imbedding operators of certain classes of analytic functions”, *St. Petersburg Math. J.*, **3**:2 (1992), 425–446.
23. О. Г. Парфенов, “Весовые оценки преобразования Фурье”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 23, Записки науч. сем. ПОМИ, **222**, ПОМИ, СПб., 1995, 151–162; англ. пер.: O. G. Parfenov, “Weighted estimates of the Fourier transformation”, *J. Math. Sci.* (*New York*), **87**:5 (1997), 3878–3885.
24. А. Б. Александров, “Внутренние функции и связанные с ними пространства псевдопродолжимых функций”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 17, Записки науч. сем. ЛОМИ, **170**, Наука, Л., 1989, 7–33; англ. пер.: A. B. Aleksandrov, “Inner functions and related spaces of pseudo-continuable functions”, *J. Soviet Math.*, **63**:2 (1993), 115–129.
25. P. R. Ahern, D. N. Clark, “Radial limits and invariant subspaces”, *Amer. J. Math.*, **92**:2 (1970), 332–342.
26. W. S. Cohn, “Radial limits and star invariant subspaces of bounded mean oscillation”, *Amer. J. Math.*, **108**:3 (1986), 719–749.
27. М. Б. Левин, “Оценка производной от мероморфной функции на границе области”, *Докл. АН СССР*, **216** (1974), 495–497; англ. пер.: M. B. Levin, “An estimate for the derivative of a meromorphic function on the boundary of a region”, *Soviet Math. Dokl.*, **15** (1974), 831–834.
28. P. Borwein, T. Erdélyi, “Sharp extensions of Bernstein's inequality to rational spaces”, *Mathematika*, **43**:2 (1996), 412–423.
29. К. М. Дьяконов, “Целые функции экспоненциального типа и модельные подпространства в H^p”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 19, Записки науч. сем. ЛОМИ, **190**, Наука, Л., 1991, 81–100; англ. пер.:

K. M. D'yakonov, "Entire functions of exponential type and model subspaces in H^p", *J. Math. Sci.*, **71**:1 (1994), 2222–2233.

30. K. M. Dyakonov, "Differentiation in star-invariant subspaces. I: Boundedness and compactness", *J. Funct. Anal.*, **192**:2 (2002), 364–386.
31. А. Д. Баранов, "Об оценках L^p-норм производных в пространствах целых функций", *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 31, Записки науч. сем. ПОМИ, **303**, ПОМИ, СПб., 2003, 5–33; англ. пер.: A. D. Baranov, "Estimates of the L^p-norms of derivatives in spaces of entire functions", *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **129**:4 (2005), 3927–3943.
32. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

А. Д. Баранов (A. D. Baranov)
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: a.baranov@ev13934.spb.edu

Поступило в редакцию
10.01.2008