ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

Кафедра высшей
математики

Элементы функционального анализа
(интегральные уравнения и вариационное исчисление)

Методические указания
для самостоятельной работы студентов

Москва 2013

Составитель канд. физ.-мат. наук В.Н. Деменко

Элементы функционального анализа
(интегральные уравнения и вариационное исчисление)

Методические указания для самостоятельной работы студентов. /Моск. ин-т электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»; Сост. В.Н.Деменко. М., 2013. – 34 с.

Методические указания содержат теоретический материал, необходимый для выполнения контрольного домашнего задания по курсу «Функциональный анализ» для студентов 2-го курса ФИТ и ВТ специальности 230100.62.

ISBN 978-5-94506-311-2

СОДЕРЖАНИЕ

1. Метрические пространства

Определение. Множество X называется метрическим пространством, если каждой паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, называемое расстоянием между этими элементами или метрикой пространства X и удовлетворяющее следующим трем условиям (аксиомам метрики):

1. $\rho(x, y) \ge 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества),
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии),
3. $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника),

Элементы метрического пространства называются также точками этого пространства.

Примеры метрических пространств.

1.$\mathbf{R}^n$ - множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x = (x_1, ..., x_n)$ с расстоянием $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$. Справедливость первых двух аксиом расстояния очевидна. Покажем, что в R^n выполнена аксиома треугольника. Запишем нужное нам неравенство (еще не доказанное!)

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2} . \qquad (1.1)$$

Сделаем замену переменных $a_k = x_k - z_k$, $b_k = z_k - y_k$ и произведем ряд эквивалентных преобразований:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} .$$

Мы пришли к неравенству Коши-Буняковского (оно считается известным)

2.l_2 - множество последовательностей действительных чисел $x = (x_1, ..., x_k, ...)$, суммируемых с квадратом, то есть удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, и с расстоянием $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$.

Так же, как и в предыдущем случае, справедливость первых двух аксиом расстояния очевидна. Для проверки аксиомы треугольника достаточно в неравенстве (1) перейти к пределу при $n \to \infty$.

3. $C[a;b]$ - множество всех действительных функций $x(t)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$, с расстоянием $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$. Аксиомы расстояния проверяются непосредственно.

4. $C_2[a;b]$ - множество всех действительных функций $x(t)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$, с расстоянием $\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}$. Первые две аксиомы очевидны, а аксиома треугольника непосредственно вытекает из интегральной формы неравенства Коши-Буняковского.

5. $C^1[a;b]$ - множество всех действительных функций $x(t)$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$, с расстоянием $\rho_{C^1}(x,y)=\max(\rho_C(x,y),\rho_C(x',y'))$.

Задача. *Проверить аксиомы метрического пространства для* $C^1[a;b]$.

2. Предельные точки, открытые и замкнутые множества

Определение. Окрестностью радиуса δ точки x_0 метрического пространства X называется открытый шар радиуса δ с центром в этой точке:

$$x\in O_\delta(x_0)\Leftrightarrow \rho(x,x_0)<\delta.$$

Определение. Пусть в метрическом пространстве X задано некоторое множество E. Точка x_0 называется внутренней точкой множества E, если существует окрестность точки x_0, целиком принадлежащая E.

Определение. Множество E называется открытым множеством в метрическом пространстве X, если все точки E являются внутренними.

Теорема. Объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Доказательство. Пусть $G_k\ (k\in N)$ - открытые множества. Рассмотрим объединение $G=\bigcup\limits_k G_k$. Возьмем произвольную точку $x\in\bigcup\limits_k G_k$. Так как x лежит в объединении, она содержится в каком-либо множестве G_{k_0}, а поскольку это множество открыто, то является его внутренней точкой. То есть $\exists O_\delta(x)\subset G_{k_0}\subset G$. Следовательно, G - открытое множество.

Пусть теперь $G=\bigcap\limits_{k=1}^n G_k$ и $x\in G$. По определению пересечения x принадлежит всем множествам G_k и является внутренней точкой каждого из них. То есть существуют окрестности $O_{\delta_k}(x)\subset G_k\ (1\le k\le n)$. Возьмем $\delta=\min\limits_{1\le k\le n}(\delta_k)$. Тогда $O_\delta(x)=\bigcap\limits_{k=1}^n O_{\delta_k}(x)\subset\bigcap\limits_{k=1}^n G_k=G$,

то есть x - внутренняя точка G, и G - открыто.

Определение Точка x_0 называется предельной точкой множества E, если в любой сколь угодно малой окрестности этой точки содержится хотя бы один элемент множества E, отличный от x_0.

Определение. Пусть (X,ρ) - произвольное метрическое пространство. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}\subset X$ сходится к точке $x\in X$, и писать $x_n\to x$ или $\lim x_n = x$, если $\rho(x_n,x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Определение. Точка x_0 - предельная точка множества E, если существует последовательность элементов из E (отличных от x_0), которая сходится к x_0. Сама предельная точка может не лежать в E.

Определение. Множество E называется замкнутым в метрическом пространстве X, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение. Замыканием множества E - $\overline{E}$ называется множество, являющееся объединением множества E и всех его предельных точек.

Теорема. Дополнение замкнутого множества до всего пространства есть открытое множество, а дополнение открытого множества до всего пространства есть замкнутое множество.

Доказательство. Предположим, что F замкнуто и $G = CF$. Пусть x - произвольная точка из G. Точка x не может быть предельной для F, и, следовательно, найдется окрестность $O_\delta(x)$, не содержащая точек из F. Тогда $O_\delta(x)\subset CF = G$, что означает, что x - внутренняя точка G.

Теперь рассмотрим открытое множество G и его дополнение $F = CG$. Покажем, что F замкнуто. Пусть x - произвольная предельная точка F. Допустим, что $x\notin F$, тогда $x\in G$, а так как G открыто, то принадлежит G вместе с некоторой своей окрестностью $O_\delta(x)\subset G$. Тогда $O_\delta(x)\cap F=\varnothing$, и точка x не может быть предельной для множества F. Полученное противоречие доказывает, что $x\in F$ и F - замкнуто.

Теорема. Объединение конечного числа и пересечение любого числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Доказательство. Пусть F_k $(k\in N)$ - замкнутые множества. Тогда их дополнения $G_k = CF_k$ открыты. Далее воспользуемся формулой двойственности и соответствующими свойствами объединения и пересечения открытых множеств:

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{k=1}^{n} CG_k = C\bigcap_{k=1}^{n} G_k, \qquad \bigcap_{k} F_k = \bigcap_{k} CG_k = C\bigcup_{k} G_k .$$

Оба множества замкнуты как дополнения к открытым множествам.

3. Полные метрические пространства

Определение. Последовательность элементов метрического пространства X называется фундаментальной последовательностью, если $\rho(x_n,x_m)\to 0;\ n,m\to\infty$.

Определение. Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Примеры

1. $\mathbf{R}^n$ **- полное метрическое пространство.** Факт из анализа (критерий Коши): если дана последовательность $\{x_n\}$, то для того, чтобы она имела конечный предел, необходимо и достаточно выполнения условия: $|x_n - x_m| \to 0$ при $n, m \to \infty$.

2. $C[a;b]$ **- полное пространство.**

Доказательство. Пусть $x_n(t)$ - фундаментальная последовательность в $C[a;b]$, то есть

$$\rho(x_n, x_m) = \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x_m(t)| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Перепишем последнее условие в другой форме:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall x \in [a,b], \forall n,m > N$ справедливо $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$, (3.1)

то есть для всех t из $[a,b]$ будет иметь место сходимость

$$|x_n(t) - x_m(t)| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, $\{x_n(t)\}$ - фундаментальная последовательность в R^1. Так как R^1 - полное пространство, то существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t).$$

Это означает, что последовательность функций $x_n(t)$ сходится поточечно к функции $x(t)$, а из (3.1), переходя к пределу при $m \to \infty$, можно заключить, что сходимость равномерная. Из математического анализа известно, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций – непрерывная функция, то есть $x(t) \in \tilde{N}[a;b]$, что и доказывает полноту пространства $C[a;b]$.

2. $C_2[a;b]$ **- неполное пространство.**

Доказательство.

Для определенности рассмотрим пространство $C_2[-1;1]$. Возьмем последовательность функций $x_n(t)$:

$$x_n(t)=\begin{cases}-1, & -1\le t\le -\dfrac{1}{n},\\ nt, & -\dfrac{1}{n}<t<\dfrac{1}{n},\\ 1, & \dfrac{1}{\text{n}}\le t\le 1.\end{cases}$$

Это фундаментальная последовательность, так как (для определенности полагаем, что $m>n$)

$$\rho_{\tilde{N}_2}(x_n,x_m)=\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x_n(t)-x_m(t)\right)^2dt}=\sqrt{\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left(x_n(t)-x_m(t)\right)^2dt}<\sqrt{\frac{2}{n}}\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Заметим также, что

$$\rho_{\tilde{N}_2}\left(x_n(t),\operatorname{sgn}(t)\right)=\sqrt{2\int_{0}^{1}\left(x_n(t)-1\right)^2dt}<\sqrt{\frac{2}{n}}\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Предположим, что последовательность $x_n(t)$ сходится в пространстве $C_2[a;b]$ к некоторой функции $x(t)$. Тогда

$$0<\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x(t)-\operatorname{sgn}t\right)^2dt}\le\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x(t)-x_n(t)\right)^2dt}+\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x_n(t)-\operatorname{sgn}t\right)^2dt},$$

откуда видим, что $\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x(t)-x_n(t)\right)^2dt}$ не может стремиться к 0.

Теорема. Подмножество Y полного метрического пространства X само является полным метрическим пространством тогда и только тогда, когда Y замкнуто в X.

Доказательство. Пусть Y - замкнутое множество в полном метрическом пространстве X, и пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность в Y. Поскольку эта последовательность будет также фундаментальной и в X, то у нее есть предел - x_0, а так как Y замкнуто, то $x_0\in X$. Следовательно, Y само является полным метрическим пространством.

Пусть теперь Y - полное метрическое пространство и x_0 - его предельная точка. Существует последовательность $\{x_n\}$ элементов из Y, сходящаяся к x_0. Эта последовательность фундаментальна, следовательно, ее предел лежит в Y. Множество Y замкнуто.

4. Непрерывные отображения метрических пространств

Определение. Отображение $f:X\to Y$ называется непрерывным в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon .$$

Если отображение непрерывно в любой точке из X, то оно называется непрерывным в X.

Пример. Отображение $f : C[-1;1] \to R$, действующее по формуле $f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt$, непрерывно в $C[-1;1]$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, если $\rho_C(x, y) < \delta$, то $\rho_R(f(x); f(y)) = \left| \int_{-1}^{1} (x(t) - y(t))\,dt \right| \le 2\delta < \varepsilon$.

Сжимающее отображение

Определение. Отображение $f : X \to X$ называется сжимающим, если существует такое число $\alpha \in (0;1)$, что для любых точек $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x); f(y)) \le \alpha \rho(x, y).$$

Утверждение. Сжимающее отображение является непрерывным.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем $\delta = \varepsilon$. Тогда, если $\rho(x, y) < \delta$, то $\rho(f(x); f(y)) \le \alpha\delta < \varepsilon$.

Теорема (о неподвижной точке сжимающего отображения). Пусть f - сжимающее отображение полного метрического пространства X в себя. Тогда уравнение

$$f(x) = x \tag{4.1}$$

имеет решение, и это решение единственно.

Другими словами: сжимающее отображение полного метрического пространства имеет ровно одну неподвижную точку.

Доказательство.

1.**Единственность.** Допустим, что есть 2 решения уравнения (4.1) - x_1 и x_2. Тогда $\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)) \le \alpha \rho(x_1, x_2)$, что возможно только при $\rho(x_1, x_2) = 0$.

2.**Существование.** Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$, и определим рекуррентную последовательность:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \ge 0. \tag{4.2}$$

Оценим расстояние $\rho(x_n, x_{n+1})$:

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \le \alpha \rho(x_{n-1}, x_n) \le \alpha^2 \rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \le \ldots \le \alpha^n \rho(x_0, x_1)$$

Используя это, оценим расстояние $\rho(x_n, x_{n+m})$:

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \le$$

$$\le \rho(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{n+m-1} \alpha^k < \rho(x_0, x_1) \frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Итак, для любых n, m

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \le \rho(x_1, x_0) \frac{\alpha^n}{1-\alpha}. \qquad (4.3)$$

Пусть $n \to \infty$, тогда $\rho(x_n, x_{n+m}) \to 0$, то есть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, и в силу полноты X она сходится, то есть в X существует $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Перейдя к пределу в соотношении (4.2), учитывая непрерывность f, получим $x^* = f(x^*)$. Точка x^* является неподвижной точкой отображения f.

Данное доказательство является конструктивным, так как не только устанавливает факт существования неподвижной точки, но и предъявляет алгоритм ее поиска (формула (4.2)).

Если мы перейдем в (4.3) к пределу при $m \to \infty$, то получим:

$$\rho(x_n, x^*) \le \rho(x_1, x_0) \frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Это формула **оценки погрешности приближенного решения** задачи о неподвижной точке отображения, если ее искать по нашему алгоритму.

Рассмотрим аналогичную задачу для степени отображения. Обозначим $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$ $(n \ge 1)$.

Теорема. Пусть некоторая степень отображения f является сжимающим отображением полного метрического пространства X в себя. Тогда уравнение

$$f(x) = x$$

имеет решение, и это решение единственно.

Доказательство. Поскольку f^n - сжимающее отображение, то у f^n существует неподвижная точка: $f^n(x^*) = x^*$. Тогда $f\left(f^n(x^*)\right) = f(x^*)$ или $f^n\left(f(x^*)\right) = f(x^*)$, то есть $f(x^*)$ - тоже неподвижная точка отображения f^n. Из единственности неподвижной точки сжимающего отображения следует $f(x^*) = x^*$. Кроме того,

из $\begin{cases} f(x_1^*) = x_1^* \\ f(x_2^*) = x_2^* \end{cases}$ следует $\begin{cases} f^n(x_1^*) = x_1^* \\ f^n(x_2^*) = x_2^* \end{cases}$ и $x_1^* = x_2^*$,

откуда получаем единственность неподвижной точки отображения f.

Примечание. Заметим, что неподвижную точку отображения f в этом случае тоже можно искать как предел последовательности $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \ge 0, x_0$ - произвольное). В самом деле, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk+m} = \lim\limits_{k\to\infty} f^{nk}\left(f^m(x_0)\right) = x^*$ при любом $m=0,...,n-1$, а следовательно, и для всей последовательности тоже будет справедливо $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$.

5. Линейные нормированные пространства

Хотелось бы распространить дифференциальное исчисление на любое пространство. В математическом анализе в достаточно малой окрестности функцию можно аппроксимировать линейной. В произвольном метрическом пространстве мы не можем определить линейную функцию, так как надо уметь складывать элементы, чего мы не умеем. То есть надо, чтобы само пространство было не произвольным, а линейным.

Определение. Линейным пространством называется множество с введенными на нем операциями сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющими известным аксиомам.

Определение. Линейное пространство Х называется линейным нормированным пространством, если на нем определена норма (длина вектора), то есть функция $\|x\|$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\|x\|\ge 0$; $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$; (неотрицательность)

2. $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$; (однородность)

3. $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника).

Пусть X – линейное нормированное пространство. Введем расстояние между элементами X по формуле $\rho(x,y)=\|x-y\|$.

Задача. Проверить, что эта функция удовлетворяет всем аксиомам расстояния.

Примеры

1. R^n - множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x=(x_1,...,x_n)$ с нормой $\|x\|=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k)^2}$.

2. l_2 - множество последовательностей действительных чисел $x=(x_1,...,x_k,...)$, суммируемых с квадратом, то есть удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2<\infty$, и с нормой $\|x\|=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k)^2}$.

3. $C[a;b]$ - множество всех действительных функций $x(t)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$, с нормой $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$.

4. $C_2[a;b]$ - множество всех действительных функций $x(t)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$, с нормой $\|x\|=\sqrt{\int\limits_a^b (x(t))^2\,dt}$.

5. $C^1[a;b]$ - множество всех действительных функций $x(t)$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$, с нормой $\|x\| = \max(\|x\|_C, \|x'\|_C)$.

Задача. Проверить аксиомы нормы в этих пространствах.

Не следует думать, что любое метрическое пространство можно рассматривать как линейное нормированное. Отрезок на оси - не линейное нормированное пространство, так как операция суммы выводит нас за пределы этого пространства, но его можно рассматривать как множество в R.

Определение. Векторы $x_1,...x_n \in X$ называются линейно зависимыми, если для некоторого набора $\lambda_1,...,\lambda_n$ $\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k| \neq 0\right)$ будет справедливо $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k = 0$. В противном случае векторы называются линейно независимыми.

Определение. Размерностью пространства называется максимально возможное число линейно независимых векторов. Пространство называется бесконечномерным, если существуют системы, состоящие из сколь угодно большого числа линейно независимых векторов.

Известно, что R^n – $n-$мерное пространство, а $l_2, C[a,b], C_2[a,b], C^1[a,b]$ - пространства бесконечномерные.

Определение. Подпространством L в линейном нормированном пространстве X называется множество, обладающее тем свойством, что применение линейных операций к элементам из этого множества не выводит нас за его пределы.

Пример. $L = \{x(t) \in C[a,b] : x(a) = 0\}$ в $C[a,b]$.

6. Пространство линейных операторов

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства. Рассмотрим отображение $X \to Y$, называемое оператором. Оператор $A: X \to Y$ называется линейным оператором, если он сохраняет линейные операции, то есть $A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2)$. Некоторое время мы будем заниматься только линейными непрерывными операторами.

Линейные операторы можно складывать и умножать на число

$$(A+B)x = Ax + Bx,\ (\lambda A)x = \lambda Ax,$$

то есть они **образуют линейное пространство.** Обозначим это пространство $Op(X;Y)$, пространство же линейных операторов, отображающих X в себя, будем обозначать $Op(X)$.

Теорема. Если линейный оператор $A \in Op(X;Y)$ непрерывен в нуле, то он непрерывен везде.

Доказательство. Пусть x_0- произвольная точка пространства *X*, а ε>0 - произвольное положительное действительное число. Так как оператор A непрерывен в 0 (очевидно, что $A(0) = 0$), то по ε найдется δ такое, что

$\|x\|<\delta \Rightarrow \|Ax\|<\varepsilon$. Но тогда, если $\|x-x_o\|<\delta$, то $\|Ax-Ax_0\|=\|A(x-x_0)\|<\varepsilon$, что означает непрерывность A в x_0. Теорема доказана.

Теорема. Если линейный оператор $A\in Op(X;Y)$ непрерывен в нуле, то конечна величина

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, \qquad (6.1)$$

называющаяся **нормой оператора**.

Доказательство. Так как A непрерывен в 0, то для ε=1 найдется такое $\delta>0$, что: $\|x\|\leq\delta\Rightarrow\|Ax\|\leq 1$, но тогда

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}=\sup_{x\neq 0}\frac{\left\|A\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)\right\|_Y}{\left\|\frac{\delta x}{\|x\|}\right\|_X}\leq\frac{1}{\delta}<\infty.$$

Теорема доказана.

Из формулы (6.1) вытекает очень удобная оценка:

$$\|Ax\|\leq\|A\|\cdot\|x\|. \qquad (6.2)$$

Верна также и теорема, обратная предыдущей:

Теорема. Если $\|A\|<\infty$, то А непрерывен на всем пространстве.

Доказательство. Докажем непрерывность в нуле нашего оператора. Возьмем произвольное ε>0. Тогда при $\delta=\frac{\varepsilon}{\|\grave{A}\|}$ для $x:\|x\|<\delta$ с использованием (2) получим

$$\|Ax\|\leq\|A\|\cdot\|x\|<\|A\|\frac{\varepsilon}{\|A\|}=\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Запишем еще одну формулу для нормы оператора:

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}=\sup_{\|x\|_X=1}\|Ax\|_Y.$$

Докажем их эквивалентность. В самом деле,

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}=\sup_{x\neq 0}\left\|\frac{1}{\|x\|}Ax\right\|_Y=\sup_{x\neq 0}\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|_Y=\sup_{\|x\|_X=1}\|Ax\|_Y.$$

Определение. Если $Y=R$, то оператор называется функционалом.

Для этого частного случая выпишем формулу для нормы:

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1}|f(x)|.$$

Покажем, что для введенной формулой (6.1) функции выполнены все аксиомы нормы. Справедливость первых двух условий очевидна. Проверим неравенство треугольника:

$$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|(A+B)x\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax+Bx\|_Y}{\|x\|_X} \leq$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_Y+\|Bx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} + \sup_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|_Y}{\|x\|_X} = \|A\|+\|B\|.$$

Таким образом, мы установили, что пространство $Op(X;Y)$ является линейным нормированным пространством.

Пусть операторы A и В принадлежат $Op(X)$. Композицию операторов А и В будем записывать как произведение: $AB(x) = A\big(B(x)\big)$.

Теорема. Для нормы этого произведения справедлива оценка $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (6.2):

$$\|AB\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|ABx\|_X}{\|x\|_X} \leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|A\|\|Bx\|_X}{\|x\|_X} \leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|A\|\|B\|\|x\|_X}{\|x\|_X} = \|A\|\|B\|.$$

7. Интегральный оператор Фредгольма

Интегральным оператором Фредгольма называется оператор

$$Jx(t) = \int_a^b K(s,t)x(s)\,ds,$$

функция $K(s,t)$ называется ядром интегрального оператора J.

Оператор Фредгольма – линейный оператор, то есть

$$J(\lambda x+\mu y) = \lambda J(x)+\mu J(y),$$

в самом деле,

$$J(\lambda x+\mu y) = \int_a^b K(s,t)\big(\lambda x(s)+\mu y(s)\big)ds = \lambda J(x)+\mu J(y).$$

Кроме того, очевидно, что если $K(s,t)$ - непрерывная функция двух переменных на квадрате $[a;b]\times[a;b]$, то оператор J будет действовать из $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Теорема. Пусть $K(s,t)$ - непрерывна на квадрате $[a;b]\times[a;b]$. Тогда **для нормы оператора Фредгольма** J с ядром $K(s,t)$ **справедлива оценка**

$$\|J\| \le \max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(s,t)|\,ds. \qquad (7.1)$$

Доказательство.
Имеем

$$\|J\|_{Op(C)} = \sup_{\|x\|_C=1} \|Jx\|_C = \sup_{\|x\|_C=1} \max_{a\le t\le b} \left| \int_a^b K(s,t)\,x(s)\,ds \right| \le \max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(s,t)|\,ds.$$

Теорема. Пусть в $C[a,b]$ действуют два интегральных оператора: J_1 с ядром $K_1(s,t)$ и J_2 с ядром $K_2(s,t)$. Тогда J_2J_1 есть интегральный оператор с ядром

$$K(s,t) = \int_a^b K_1(s,\tau)\,K_2(\tau,t)\,d\tau. \qquad (7.2)$$

Доказательство. В самом деле,

$$J_2J_1(x) = \int_a^b K_2(s,t)\,J_1x(s)\,ds = \int_a^b K_2(s,t) \int_a^b K_1(\tau,s)x(\tau)\,d\tau ds =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K_2(s,t)\,K_1(\tau,s)\,x(\tau)\,d\tau ds =$$

$$= \int_a^b x(\tau) \int_a^b K_2(s,t) K_1(\tau,s)\,ds d\tau \overset{\tau\leftrightarrow s}{=} \int_a^b x(s) \left(\int_a^b K_2(\tau,t) K_1(s,\tau)\,d\tau \right) ds.$$

Определение. Ядро $K(s,t)$ из (7.2) называется сверткой ядер $K_1(s,t)$ и $K_2(s,t)$ (порядок важен): $K = K_1 * K_2$.

Определение. Ядро степени интегрального оператора называется **итерированным ядром**.

Интегральное уравнение Фредгольма

Интегральным уравнением Фредгольма называется уравнение

$$\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,ds = \lambda x(t) + y(t),$$

то есть уравнение

$$Jx(t) = \lambda x(t) + y(t), \qquad (7.3)$$

где J - оператор Фредгольма.

Теорема. Пусть J - интегральный оператор Фредгольма с ядром $K(s,t)$, непрерывным на квадрате $\left[a;b\right]\times\left[a;b\right]$, функция $y(t)\in C\left[a,b\right]$, а $|\lambda|>\max\limits_{a\le t\le b}\int\limits_a^b\left|K(s,t)\right|ds$.

Тогда интегральное уравнение (7.3) имеет единственное решение в пространстве $C\left[a,b\right]$.

Доказательство. Запишем уравнение (7.3) в виде

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}\left(Jx(t)-y(t)\right). \qquad (7.4)$$

Обозначим $f(x)=\frac{1}{\lambda}(Jx-y)$. Из (7.1) вытекает, что при соблюдении условий теоремы $|\lambda|>\|J\|$. Покажем, что отображение f является сжимающим отображением пространства $C\left[a,b\right]$. В самом деле,

$$\rho\left(f(x_1),f(x_2)\right)=\left\|f(x_1)-f(x_2)\right\|=\left\|\frac{1}{\lambda}(Jx_1-y)-\frac{1}{\lambda}(Jx_2-y)\right\|=$$

$$=\left\|\frac{1}{\lambda}J(x_1-x_2)\right\|\le\left|\frac{1}{\lambda}\right|\|J\|\cdot\|x_1-x_2\|=\frac{\|J\|}{|\lambda|}\rho(x_1,x_2),$$

а так как $\frac{\|J\|}{|\lambda|}<1$, то отображение f в самом деле сжимающее и у него есть единственная неподвижная точка – решение уравнения (7.4), а следовательно, и (7.3).

Разложение решения интегрального оператора в ряд

По предыдущей теореме решение интегрального уравнения Фредгольма есть $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x_0)$, где x_0 - произвольная точка пространства, а $f(x)=\frac{1}{\lambda}Jx-\frac{1}{\lambda}y$. Положим $x_0(t)\equiv 0$ и воспользуемся линейностью интегрального оператора Фредгольма. Для решения $x(t)$ уравнения (7.3) получаем формулу: $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, где $x_1=f(x_0)=-\frac{1}{\lambda}y$,

$$x_2=f(x_1)=\frac{1}{\lambda}J\left(-\frac{1}{\lambda}y\right)-\frac{1}{\lambda}y=-\frac{1}{\lambda^2}Jy-\frac{1}{\lambda}y,$$

$$x_3=f(x_2)=\frac{1}{\lambda}J\left(-\frac{1}{\lambda^2}Jy-\frac{1}{\lambda}y\right)-\frac{1}{\lambda}y=-\frac{1}{\lambda^3}J^2y-\frac{1}{\lambda^2}Jy-\frac{1}{\lambda}y,$$

$$x_{n+1}=f(x_n)=\frac{1}{\lambda}J\left(-\frac{1}{\lambda^n}J^{n-1}y-\frac{1}{\lambda^{n-1}}J^{n-2}y-\ldots-\frac{1}{\lambda}y\right)-\frac{1}{\lambda}y=-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{J^ny}{\lambda^n}+\frac{Jy}{\lambda}+\ldots+y\right),$$

то есть (**формула для разложения решения уравнения в ряд**)

$$x = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^n y}{\lambda^n}.$$

Оценка погрешности при приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма

Если принять за $x_k = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{J^n y}{\lambda^n}$, то

$$\|x_k - x\| = \left\| -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{J^n y}{\lambda^n} \right\| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\|J^n\|\|y\|}{|\lambda|^n}.$$

Воспользуемся теперь тем, что $\|J^n\| \le \|J\|^n$:

$$\|x_k - x\| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\|J\|^n\|y\|}{|\lambda|^n} = \frac{\|J\|^k\|y\|}{|\lambda|^{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|J\|^n}{|\lambda|^n} = \frac{\|J\|^k\|y\|}{|\lambda|^k\left(|\lambda| - \|J\|\right)}. \qquad (7.5)$$

Если точное значение $\|J\|$ нам неизвестно, а есть только оценка сверху $\|J\| \le M$, то из (7.5) можно получить:

$$\|x_k - x\| \le \frac{M^{k+1}\|y\|}{|\lambda|^{k+1}\left(|\lambda| - \|J\|\right)}.$$

8. Интегральный оператор Вольтерра

Интегральным оператором Вольтерра называется оператор

$$Jx(t) = \int_0^t K(s,t)x(s)ds,$$

функция $K(s,t)$ называется ядром интегрального оператора J.

Оператор Вольтерра – частный случай оператора Фредгольма, а именно оператор с так называемым «треугольным» ядром (равным нулю при $t > s$). Оператор Вольтерра - линейный оператор при ядре, непрерывном на треугольнике $a \le t \le b; a \le s \le t$, он отображает $\tilde{N}[a,b]$ в $\tilde{N}[a,b]$, а для нормы оператора справедлива оценка

$$\|J\| \le \max_{a \le t \le b}\int_a^t |K(s,t)|ds. \qquad (8.1)$$

Кроме того, композиция операторов с треугольными ядрами также будет интегральным оператором с треугольным ядром.

Теорема. Пусть в $\tilde{N}[a,b]$ действуют два оператора Вольтерра: J_1 с ядром $K_1(s,t)$ и J_2 с ядром $K_2(s,t)$. Тогда $J = J_2 J_1$ есть интегральный оператор Вольтерра с ядром

$$K(s,t) = \int_s^t K_1(s,\tau) K_2(\tau,t) d\tau . \qquad (8.2)$$

Доказательство. В самом деле, композиция интегральных операторов – интегральный оператор с ядром $K(s,t)$, являющимся сверткой ядер $K_1(s,t)$ и $K_2(s,t)$:

$$K(s,t) = \int_a^b K_1(s,\tau) K_2(\tau,t) d\tau = \int_s^t K_1(s,\tau) K_2(\tau,t) d\tau ,$$

так как $K_1(s,\tau) = 0$ при $\tau < s$, а $K_2(\tau,t) = 0$ при $\tau > t$. То есть J - оператор Вольтерра.

Теорема. Пусть функция $K(s,t)$ непрерывна в треугольнике $T: \{a \le t \le b,\ a \le s \le t\}$ и пусть $M = \max\limits_{(s,t)\in T} |K(s,t)|$.

Тогда для нормы степени интегрального оператора Вольтерра с ядром $K(s,t)$ справедлива оценка

$$\left\| J^k \right\| \le \frac{M^k (b-a)^k}{k!} .$$

Доказательство. Обозначим через $K_k(s,t)$ ядро k-й степени нашего оператора и запишем последовательно несколько оценок для $|K_k(s,t)|$, пользуясь формулой (8.2):

$$|K_1(s,t)| = |K(s,t)| \le M$$

$$|K_2(s,t)| = \left| \int_s^t K_1(s,\tau) K_1(\tau,t) d\tau \right| \le M^2 (t-s)$$

$$|K_3(s,t)| = \left| \int_s^t K_2(s,\tau) K_1(\tau,t) d\tau \right| \le \left| \int_s^t M^2 (\tau - s) M d\tau \right| = M^3 \frac{(t-s)^2}{2}$$

…

$$|K_k(s,t)| = \left| \int_s^t K_{k-1}(s,\tau) K_1(\tau,t) d\tau \right| \le \left| \int_s^t \frac{M^{k-1} (\tau - s)^{k-2}}{(k-2)!} M d\tau \right| =$$

$$= \left| M^k \frac{(\tau - s)^{k-1}}{(k-1)!} \Bigg|_s^t \right| = \frac{M^k (t-s)^{k-1}}{(k-1)!} .$$

Теперь с помощью (8.1) получаем

$$\left\|J^k\right\| \le \max_{a\le t\le b}\int_a^t \left|K_k(s,t)\right| ds \le \max_{a\le t\le b}\int_a^t M^k \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} ds = \max_{a\le t\le b} M^k \frac{(t-a)^k}{k!} = \frac{M^k (b-a)^k}{k!}. \quad (8.3)$$

Интегральное уравнение Вольтерра

Интегральным уравнением Вольтерра называется уравнение

$$\int_a^t K(s,t)x(s)ds = \lambda x(t) + y(t),$$

то есть уравнение

$$Jx(t) = \lambda x(t) + y(t), \quad (8.4)$$

где J - интегральный оператор Вольтерра.

Теорема. Пусть J - интегральный оператор Вольтерра с ядром $K(s,t)$, непрерывным в треугольнике $T:\{a\le t\le b,\ a\le s\le t\}$ и $y(t)\in C[a,b]$. Тогда для любого $\lambda\ne 0$ интегральное уравнение Вольтерра (4) имеет единственное решение в пространстве $C[a,b]$.

Доказательство. Запишем уравнение (8.4) в виде

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}\big(Jx(t) - y(t)\big). \quad (8.5)$$

Обозначим $f(x) = \frac{1}{\lambda}(Jx - y)$. Покажем, что при соблюдении условий теоремы некоторая степень отображения f является сжимающим отображением пространства $C[a,b]$. Для этого выпишем выражения для $f^n(x)$:

$$f(x) = \frac{Jx}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}y,$$

$$f^2(x) = \frac{J^2x}{\lambda^2} - \frac{Jy}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}y,$$

$$f^3(x) = \frac{J^3x}{\lambda^3} - \frac{J^2y}{\lambda^3} - \frac{Jy}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}y,$$

$$f^n(x) = \frac{J^nx}{\lambda^n} - \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{J^ky}{\lambda^k}. \quad (8.6)$$

Тогда

$$\rho\big(f^n(x_1), f^n(x_2)\big) = \left\|f^n(x_1) - f^n(x_2)\right\| = \left\|\frac{J^nx_1}{\lambda^n} - \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{J^ky}{\lambda^k} - \frac{J^nx_2}{\lambda^n} + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{J^ky}{\lambda^k}\right\| =$$

$$\left\|\frac{J^nx_1}{\lambda^n} - \frac{J^nx_2}{\lambda^n}\right\| = \left\|\frac{J^n(x_1 - x_2)}{\lambda^n}\right\| \le \frac{\left\|J^n\right\|}{|\lambda|^n}\left\|x_1 - x_2\right\| \le \frac{M^n(b-a)^n}{|\lambda|^n n!}\rho(x_1, x_2).$$

Для достаточно большого n будет выполнено $\dfrac{M^n (b-a)^n}{|\lambda|^n n!} < 1$, то есть отображение f^n - сжимающее. Тогда по теореме о неподвижной точке отображения, степень которого является сжимающим отображением, у f есть единственная неподвижная точка – решение уравнения (5). Из примечания к этой теореме знаем, что неподвижная точка x является пределом последовательности x_n (x_0- произвольная, а $x_{n+1} = f(x_n)$), а из (6) видим (особенно хорошо видно при $x_0(t) \equiv 0$), что этот предел равен

$$x = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^n y}{\lambda^n}.$$

Оценка погрешности при приближенном решении интегрального уравнения Вольтерра

Пусть $x_k = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{J^n y}{\lambda^n}$, тогда, с учетом (8.3), получаем

$$\|x_k - x\| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\|J^n\|\|y\|}{|\lambda|^n} \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{M^n (b-a)^n}{|\lambda|^n n!}\|y\| = \frac{M^k (b-a)^k}{|\lambda|^{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M^n (b-a)^n}{|\lambda|^n (n+k)!}\|y\| \le$$

$$\le \frac{M^k (b-a)^k}{|\lambda|^{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M^n (b-a)^n}{|\lambda|^n (k)!}\|y\| = e^{\frac{M(b-a)}{|\lambda|}}\frac{M^k (b-a)^k \|y\|}{|\lambda|^{k+1} k!}$$

(мы воспользовались формулой Тейлора-Лагранжа).

9. Интегральный оператор с вырожденным ядром

Ядро $K(s,t)$ интегрального оператора $Jx(t) = \int_a^b K(s,t)x(s)ds$ называется вырожденным, если $K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(s)b_i(t)$. Будем считать, что система функций $b_1(t),...,b_n(t)$ линейно независима (в противном случае ее можно сделать таковой). Если функции a_i , $b_i \in C[a,b]$, то $J : C[a,b] \to L$, где L – подпространство $C[a,b]$ с базисом $b_1(t),...,b_n(t)$. В самом деле:

$$Jx(t) = \int_a^b K(s,t)x(s)ds = \int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(s)b_i(t)\right)x(s)ds = \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\int_a^b a_i(s)x(s)ds = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i(t).$$

Интегральное уравнение с вырожденным ядром

Интегральным уравнением с вырожденным ядром называется уравнение $Jx = \lambda x + y$, где J - интегральный оператор с вырожденным ядром.

Пусть

$$Jx(t)=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)\right)x(s)ds.$$

Введем матрицу $\mathbf{C}=(c_{i,j})$, где $c_{i,j}=\int_a^b a_i(s)b_j(s)ds$ и вектор-столбец $\boldsymbol{\beta}=(\beta_i)$, где $\beta_i=\int_a^b a_i(s)y(s)ds$.

Теорема. Пусть функции $a_i(t),b_i(t),y(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Тогда если λ не является собственным значением матрицы $\mathbf{C}$, то уравнение

$$\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)\right)x(s)ds=\lambda x(t)+y(t). \tag{9.1}$$

имеет единственное решение в $C[a,b]$.

Доказательство. Положим $Jx(t)=\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i(t)$, тогда

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i(t)-y(t)\right). \tag{9.2}$$

Подставим (9.2) в (9.1):

$$\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)\right)\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j b_j(s)-y(s)\right)ds=\lambda\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i(t)-y(t)\right)+y(t),$$

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n b_i(t)\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\int_a^b a_i(s)b_j(s)ds-\int_a^b a_i(s)y(s)ds\right)=\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i(t),$$

$$\sum_{i=1}^n b_i(t)\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j c_{i,j}-\beta_i\right)=\lambda\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i(t).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях $b_i(t)$:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j c_{i,j}-\beta_i=\lambda\alpha_i \qquad (1\le i\le n)$$

или в векторной записи:

$$(\mathbf{C}-\lambda\mathbf{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}, \tag{9.3}$$

где $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_i)$. Если λ не является собственным значением матрицы **C**, то уравнение (9.3) имеет единственное решение. Подставив его в (9.2), определим x.

Пример. Решить интегральное уравнение $\int_0^1 (s+t)x(s)ds = 2x(t)+t^2$.

Решение. Построим матрицу $\mathbf{C}$: $c_{11} = \int_0^1 sds = \frac{1}{2}$, $c_{12} = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}$, $c_{21} = \int_0^1 ds = 1$, $c_{22} = \int_0^1 sds = \frac{1}{2}$ и вектор $\boldsymbol{\beta}$: $\beta_1 = \int_0^1 s^3 = \frac{1}{4}$, $\beta_2 = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}$. Имеем

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}; \qquad (\mathbf{C} - 2\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/3 \\ 1 & -3/2 \end{pmatrix};$$

$$(\mathbf{C} - 2\mathbf{E})^{-1} = \frac{12}{23} \begin{pmatrix} -3/2 & -1/3 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{12}{23} \begin{pmatrix} -3/2 & -1/3 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35/138 \\ -9/23 \end{pmatrix}. \quad \text{Ответ: } x(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{35}{138} + \frac{9}{23} t + t^2 \right).$$

10. Элементы вариационного исчисления

Дифференцируемые функционалы

Пусть X – линейное нормированное пространство, а f – заданный на нем функционал

$$f: \ X \to R .$$

Определение. Функционал f называется дифференцируемым в точке x, если его приращение можно записать в виде

$$f(x+h) - f(x) = l(x,h) + r(x,h),$$

где $l(x,h)$ - линейный непрерывный функционал (по h), а остаток $r(x,h) = o(\|h\|)$ при $h \to 0$. Линейная часть приращения называется дифференциалом: $df(x;h) = l(x,h)$.

В случае, когда X конечномерное евклидово пространство, это – обычное определение дифференциала.

Функционал дифференцируем в X, если он дифференцируем в каждой точке этого пространства.

Если функционал f линеен, то он, очевидно, дифференцируем и $l(h) = f(h)$.

Пример 1.

$f(x)=\int_a^b F\left(t,x(t)\right)dt$ в $C\left[a,b\right]$, где функция $F(t,x)$ непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в полосе Π: $a\le t\le b,\quad -\infty<x<+\infty$.

Докажем дифференцируемость *f*:

$$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)=\int_a^b\Big(F\left(t,x(t)+h(t)\right)-F\left(t,x(t)\right)\Big)dt=$$

$$=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial x}\left(t,x(t)\right)h(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(t,x(t)+\theta(t)h(t)\right)\cdot h^2(t)\,dt\,.$$

Исследуя второе слагаемое, можно считать, что $\|h\|\le 1$ (так как $h\to 0$). Кроме того, из непрерывности вторых частных производных в полосе Π следует ограниченность $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ в некотором прямоугольнике Q, содержащем множество точек $\left(t,x(t)+\theta\cdot h\right)$, где $a\le t\le b,\quad -1<\theta\cdot h<1$. Пусть $M=\max\limits_{(t,x)\in Q}\left|\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|$, тогда

$$\left|\frac{1}{2}\int_a^b\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(t,x(t)+\theta(t)h(t)\right)\cdot h^2(t)\,dt\right|\le\frac{1}{2}\left(b-a\right)M\,\|h\|^2=o\left(\|h\|\right).$$

Таким образом, получаем

$$df\left(x,h\right)=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial x}h(t)\,dt\,.$$

Пример 2. $f\left(x\right)=\int_a^b F\left(t,x(t),x'(t)\right)dt$ в $C^1\left[a,b\right]$,

где $F\left(t,x,x'\right)$ непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в полосе Π: $a\le t\le b,\quad -\infty<x,x'<+\infty$, что мы будем записывать как $F\in C^2(\Pi)$.

Докажем дифференцируемость *f*:

$$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)=\int_a^b\Big(F\left(t,x(t)+h(t),x'(t)+h'(t)\right)-F\left(t,x(t),x'(t)\right)\Big)dt=$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial x}\left(t,x(t),x'(t)\right)h(t)+\frac{\partial F}{\partial x'}\left(t,x(t),x'(t)\right)h'(t)\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\underbrace{t,x(t)+\theta(t)h(t),x'(t)+\theta(t)h(t)}_{*}\right)\cdot h^2(t)+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x'}(*)h(t)h'(t)+\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(*)h'^2(t)\right]dt\,.$$

Исследуя второе слагаемое, можно считать, что $\|h\|_{C^1}\le 1$ (так как $h\to 0$), следовательно, производные $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x'},\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}$ ограничены в прямоугольнике Q, содержащем множество точек $\left(t,x(t)+\theta\cdot h,x'(t)+\theta\cdot h'\right)$, где $a\le t\le b,\quad -1<\theta\cdot h,\theta\cdot h'<1$. Пусть константа M равна максимуму модуля этих производных на Q, тогда

$$\left|\frac{1}{2}\int_a^b\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(*)\cdot h^2(t)+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x'}(*)h(t)h'(t)+\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}(*)h'^2(t)\right]dt\right|\le 2M\,(b-a)\,\|h\|_{C^1}^2=o\left(\|h\|\right).$$

Таким образом, мы доказали:

Теорема. Если $F\in C^2(\Pi)$, то интегральный функционал (1) в $C^1\left[a,b\right]$ дифференцируем и

$$df\left(x,h\right)=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial x}h(t)+\frac{\partial F}{\partial x'}h'(t)\right)dt\,.$$

Частные производные

Пусть даны линейное нормированное пространство X, функционал $f\left(x\right)$ и $h,x_0\in X$. Рассмотрим функцию одного переменного $\varphi(\tau)=f\left(x_0+\tau h\right)$. Ее производная в нуле

$$\frac{d\varphi}{d\tau}(0)=\lim_{\tau\to 0}\frac{f\left(x_0+\tau h\right)-f\left(x_0\right)}{\tau}=\frac{\partial f}{\partial h}\left(x_0\right)$$

называется частной производной функционала f по направлению h.

Теорема. Если функционал f дифференцируем в x_0, то существует частная производная по любому направлению $h\ne 0$ и

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(x_0\right)=df\left(x_0,h\right).$$

Доказательство:

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(x_0\right)=\lim_{\tau\to 0}\frac{f\left(x_0+\tau h\right)-f\left(x_0\right)}{\tau}=\lim_{t\to 0}\frac{df\left(x_0,\tau h\right)+o\left(\|\tau h\|\right)}{\tau}=$$

$$=df\left(x_0,h\right)+\lim_{\tau\to 0}\frac{o\left(\|\tau h\|\right)\|h\|}{\tau\|h\|}=df\left(x_0,h\right).$$

Экстремум функционала; необходимое условие

Пусть X - линейное нормированное пространство, f - функционал в X. Говорят, что x_0 является точкой локального минимума (максимума) функционала f, если существует такая окрестность $O_\delta\left(x_0\right)$, в которой $f\left(x\right)\geq f\left(x_0\right)$ $\left(f\left(x\right)\leq f\left(x_0\right)\right)$ для всех $x\in O_\delta\left(x_0\right)$.

Теорема (о необходимом условии экстремума). Пусть f - дифференцируемый функционал, и пусть x_0 - точка локального экстремума f. Тогда $df\left(x_0,h\right)=0$ для любого направления h.

Доказательство. Пусть x_0 - точка локального минимума. Возьмем любое направление h и рассмотрим значение функционала f на прямой $x_0+\tau h$, то есть функцию $\varphi(\tau)=f\left(x_0+\tau h\right)$. Очевидно, что эта функция имеет в нуле локальный минимум, кроме того, из предыдущего предложения вытекает, что она дифференцируема в нуле и $\frac{d\varphi}{d\tau}(0)=df\left(x_0,h\right)$. Из теоремы о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции действительного переменного вытекает, что $\frac{d\varphi}{d\tau}(0)=0$, но тогда и $df\left(x_0,h\right)=0$.

Замечание. Иногда рассматриваются задачи, когда x_0 - точка экстремума только по некоторым направлениям h. Тогда $df\left(x_0,h\right)=0$ выполнено для соответствующих направлений h.

11. Простейшая задача вариационного исчисления

Пусть $X=C^1\left[a,b\right]$; $f\left(x\right)=\int\limits_a^b F\left(t,x,x'\right)dt$. Надо решить задачу

$$\begin{cases} f\left(x\right)\to extr \\ x(a)=A; \quad x(b)=B \end{cases} \tag{11.1}$$

Для решения задачи будем пользоваться необходимым условием экстремума, но требовать равенства дифференциала по всем направлениям нельзя, так как $x(t)$ не любая функция, то есть рассматриваем не все направления, а только те, для которых справедливо

$$h(a)=h(b)=0. \tag{11.2}$$

Теорема. Если функция $x(t)\in \tilde{N}^2$ и является решением задачи (12.1), то она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0. \tag{11.3}$$

Доказательство. Если x есть решение задачи (11.1), то $df(x,h)=0$ для $h\in C^1[a,b]$; $h(a)=h(b)=0$.

Имеем

$$df(x,h)=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,x')h(t)+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x'}(t,x,x')h'(t)}_{\text{èí òåãð. ïî ÷àñòÿì}}\right]dt=$$

$$=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial x}h(t)\,dt+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x'}h(t)\Big|_a^b}_{=0}-\int_a^b\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)h(t)\,dt=\int_a^b\underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right]}_{\alpha(t)}h(t)\,dt=0.$$

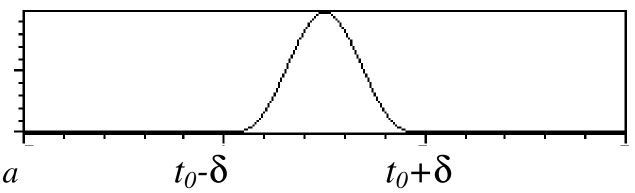
В наших предположениях функция

$$\alpha(t)=\frac{\partial F}{\partial x}\big(t,x(t),x'(t)\big)-\frac{\partial^2 F(*)}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 F(*)}{\partial x'\partial x}x'(t)-\frac{\partial^2 F(*)}{\partial x'^2}x''(t)$$

будет непрерывной на отрезке $[a,b]$, и, кроме того,

$$\int_a^b\alpha(t)h(t)\,dt=0. \qquad (11.4)$$

для $h(t)\in C^1[a,b]$ таких, что $h(a)=h(b)=0$. Покажем, что $\alpha(t)\equiv 0$. В самом деле, допустим, что в некоторой точке t_0 функция $\alpha(t)$, для определенности, положительна: $\alpha(t_0)>0$. Тогда, в силу непрерывности $\alpha(t)$, существует окрестность $O_\delta(t_0)$, где $\alpha(t)>0$. Возьмем дифференцируемую функцию $h(t)$ с графиком



Тогда ясно, что $\int_a^b\alpha(t)h(t)\,dt>0$, а это противоречит условию (11.4). Следовательно,

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0}$$ - уравнение Эйлера.

Теорема доказана.

Определение. Решения уравнения Эйлера называются экстремалями.

Отметим важный частный случай, когда порядок уравнения Эйлера можно понизить (найти первый интеграл).

Пусть $f(x)=\int\limits_a^b F(x,x')\,dt$, тогда имеем

$$x'\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}x'-\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}x''\right]=0,$$

что сводится к

$$\frac{d}{dt}\left(F-x'\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0,$$

то есть

$$\boxed{F-x'\frac{\partial F}{\partial x'}=C}\ \text{—}$$

первый интеграл уравнения Эйлера для случая, когда F не зависит явно от t.

Задача со свободным концом

$$f(x)=\int\limits_a^b F(t,x,x')dt\to extr,\quad x(a)=A.$$

Ясно, что искомая кривая является экстремалью, то есть удовлетворяет уравнению Эйлера (так как искомая кривая дает экстремум в задаче с концом, закрепленным в ее конце). Не хватает граничного условия, надо его найти. Вспомним вывод уравнения Эйлера

$$df(x,h)=\int\limits_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,x')h(t)+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x'}(t,x,x')h'(t)}_{\text{èí òåãð. ïî ÷àñòÿì}}\right]dt$$

$$=\int\limits_a^b\frac{\partial F}{\partial x}h(t)\,dt+\frac{\partial F}{\partial x'}h(t)\Big|_a^b-\int\limits_a^b\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)h(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right)h(t)\,dt+\frac{\partial F}{\partial x'}h(t)\Big|_a^b=0$$

для любого $h\in C^1:\quad h(a)=0$.

$$\int\limits_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right)h(t)\,dt=0$$

в силу уравнения Эйлера, $\left.\frac{\partial F}{\partial x'}h\right|_{t=a}=0$ из-за граничных условий, следовательно, $\left.\frac{\partial F}{\partial x'}h\right|_{t=b}=0$, но так как $h(b)$ - любое, то $\left.\frac{\partial F}{\partial x'}\right|_{t=b}=0$ - второе краевое условие.

Геометрическая задача

Найти кратчайшую кривую, соединяющую две точки на плоскости.

Другими словами, для функционала $f(x)=\int\limits_a^b \sqrt{1+x'^2(t)}dt$ требуется решить задачу с закрепленными концами:

$$\begin{cases} \int\limits_a^b \sqrt{1+x'^2(t)}dt \to \min \\ x(a)=A \\ x(b)=B \end{cases}$$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right)=0,$$

то есть $\dfrac{x''\sqrt{1+x'^2}-x'\dfrac{x'x''}{\sqrt{1+x'^2}}}{1+x'^2}=0,\qquad \dfrac{1+x'^2-x'^2}{\left(1+x'^2\right)^{3/2}}x''=0$ или

$$\frac{x''}{\left(1+x'^2\right)^{3/2}}=0.$$

Следовательно, $x''=0$ и $x(t)=c_1t+c_2$ - прямая.

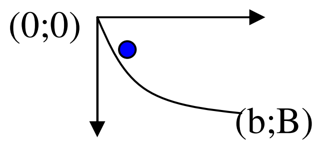
Задача о брахистохроне

В вертикальной плоскости даны точки $\mathbf{A}(0,0)$ и $\mathbf{B}=(b,B)$. Определить путь, спускаясь по которому под действием собственной тяжести тело М, начав двигаться из точки $\mathbf{A}$, достигает точки $\mathbf{B}$ в кратчайшее время.

Найдем время скатывания. По закону сохранения энергии

$\dfrac{mv^2}{2}=mgh;\quad v=\sqrt{2gh};\quad$ тогда $v=\dfrac{ds}{d\tau}=\sqrt{2gx}$

$d\tau=\dfrac{ds}{\sqrt{2gx}};\qquad \tau=\dfrac{1}{\sqrt{2g}}\displaystyle\int\limits_0^b \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{x}}dt.$



Постановка задачи:

$$\int\limits_0^b \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{x}}dt \to \min;\qquad x(0)=0;\quad x(b)=B.$$

Составим уравнение Эйлера, используя 1-й интеграл:

$$\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{x}}-\frac{x'^2}{\sqrt{x\left(1+x'^2\right)}}=C;\qquad \frac{1}{\sqrt{x\left(1+x'^2\right)}}=C;\quad C\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x'^2}};$$

заменим $x' = tg\varphi$, тогда $x = \frac{1}{C^2}\cos^2\varphi$ и $x' = -\frac{1}{C^2}2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$;

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{C^2}{2\cos^2\varphi}; \quad \frac{dt}{d\varphi} = -\frac{2\cos^2\varphi}{C^2};$$

$$t = -\frac{2}{C^2}\int\cos^2\varphi d\varphi = -\frac{1}{C^2}\int(1+\cos 2\varphi)d\varphi = -\frac{1}{C^2}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + C_1\right).$$

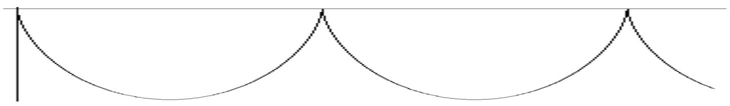
Положим $2\varphi = \pi - \theta$, тогда

$$x = \frac{1}{2C^2}(1+\cos 2\varphi) = \frac{1}{2C^2}(1-\cos\theta),$$

$$t = -\frac{1}{C^2}\left(\frac{\pi-\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{2} + C_1\right) = -\frac{1}{2C^2}(-\theta+\sin\theta) - \frac{C_1}{C^2} - \frac{\pi}{2C^2}.$$

Обозначим $R = \frac{1}{2C^2}$; $\tilde{n} = -\frac{C_1}{C^2} - \frac{\pi}{2C^2}$, тогда

$$\begin{cases} x = R(1-\cos\theta) \\ t = R(\theta - \sin\theta) + c \end{cases}$$ - циклоида.



Задача о минимальной поверхности вращения

Даны 2 точки. Надо провести через них кривую так, чтобы она при вращении имела минимальную боковую поверхность. Из анализа известно, что площадь боковой поверхности выражается формулой $S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+x'^2}dt$.

Рассмотрим «симметричный» вариант: кривая закреплена в точках $(-a, A)$ и (a, A): $\int_{-a}^{a} x\sqrt{1+x'^2}dt \to \min$, $x(-a) = x(a) = A$.

Запишем 1-й интеграл уравнения Эйлера:

$$x\sqrt{1+x'^2} - x'^2\frac{x}{\sqrt{1+x'^2}} = C; \qquad x = C\sqrt{1+x'^2}.$$

Введем замену $x' = sh\theta$, тогда $x = Cch\theta$ и $x'_t = Csh\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = sh\theta$, то есть

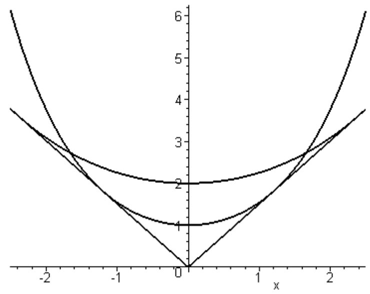
$$\theta = \frac{t}{C} + c_1, \qquad x = Cch\left(\frac{t}{C} + c_1\right).$$

Из условия $x(-a) = x(a)$ следует $c_1 = 0$, или $\frac{x}{\tilde{N}} = ch\frac{t}{C}$.

Семейство экстремалей – кривые, подобные $x = cht$ (подобие с центром в нуле).

Из подобия кривых, составляющих семейство экстремалей, следует, что они имеют общие касательные $x_{\hat{e}\grave{a}\tilde{n}} = kt$, выходящие из 0, найдем их. Пусть θ - точка касания $x_{\hat{e}\grave{a}\tilde{n}} = kt$ и $x = cht$, тогда

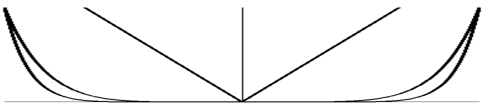
$\begin{cases} k\theta = ch\theta \\ k = sh\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{ch\theta}{sh\theta} = cth\theta$, то есть θ - точка пересечения графиков $x = t$ и $x = ctht$.



Семейство экстремалей располагается между касательными $x_{\hat{e}\grave{a}\tilde{n}} = \theta \cdot t$ и $x_{\hat{e}\grave{a}\tilde{n}} = -\theta \cdot t$:

Через пару точек проходят 2 экстремали. Из геометрических соображений ясно, что решение существует, но необходимы достаточные условия. Ответ – верхняя кривая.

Если точки лежат на касательных, то существует только одна кривая, она и является искомой. Если точки лежат ниже касательных, то решения нет, то есть кривая не является гладкой:



Вариант задачи о брахистохроне

Указать кривую наискорейшего спуска из заданной точки до данной вертикали. Ясно, что решение есть циклоида. Среди всех экстремалей выбираем ту, которая удовлетворяет краевому условию. Имеем

$$F(t, x, x') = \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{x}},$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x'}\right|_{t=b} = \left.\frac{x'}{\sqrt{x\left(1 + x'^2\right)}}\right|_{t=b} = 0 \quad \text{или} \quad x'(b) = 0,$$

то есть касательная к циклоиде в точке b должна быть горизонтальной.

12. Условный экстремум

До сих пор мы решали задачу о нахождении экстремума для функционалов, заданных на всем пространстве, то есть экстремальную задачу без ограничений. Теперь перейдем к задаче с ограничениями.

Пусть в линейном нормированном пространстве X задан функционал f и надо решить задачу: $f(x) \to extr$ при условии $g(x) = 0$, где $g(x)$ - другой заданный функционал.

Для бесконечномерных линейных нормированных пространств справедлива теорема, аналогичная соответствующей теореме из конечномерного анализа:

Теорема. Пусть f, g - дифференцируемые функционалы (g - непрерывно дифференцируем), пусть x_0 - точка условного экстремума, причем она не особая, то есть $dg(x_0, h) \neq 0$.

Тогда существует число λ (множитель Лагранжа) такое, что

$$df(x_0, h) = \lambda dg(x_0 h) \tag{12.1}$$

для всех $h \in X$.
(без доказательства)

Запишем условие (1) по другому:

$$\underbrace{d\left[f - \lambda g\right]}_{\varphi}(x_0, h) = 0 \quad (\varphi \text{ - **функционал Лагранжа**}).$$

Если ограничений несколько, то условие принимает вид

$$d\left[f - \lambda_1 g_1 - \ldots - \lambda_n g_n\right](x_0, h) = 0.$$

Задача для интегрального функционала в C^1

$$\begin{cases} f(x) = \int\limits_a^b F(t, x, x')\,dt \to extr \\ g(x) = \int\limits_a^b G(t, x, x')\,dt = 0 \end{cases} \tag{12.2}$$

Относительно функций F, G предполагаем, что они имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков при $a \le t \le b$ и произвольных значениях x, x'.

Если кривая $x = x_0(t)$ является решением задачи (12.2), не будучи при этом экстремалью функционала g, то по теореме существует число λ такое, что искомая кривая является экстремалью для функционала $\varphi = f - \lambda g$:

$$\varphi(x) = \int\limits_a^b \Phi(t, x, x')\,dt = \int\limits_a^b \left[F - \lambda G\right](t, x, x')\,dt,$$

а следовательно, будет решением уравнения Эйлера для $F - \lambda G$.

Задача Дидоны

Среди замкнутых кривых длины $2l$ найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Заметим, прежде всего, что рассматриваемая кривая должна быть выпуклой. Далее заметим, что всякая прямая, которая делит пополам замкнутую кривую, ограничивающую наибольшую площадь, будет делить пополам и саму эту площадь. Выбирая за ось Ox любую из прямых, делящих кривую пополам, приходим к следующей постановке задачи.

Найти линию $x = x(t)$, которая при заданной длине $l > 2a$ ограничивает вместе с отрезком $-a \le t \le a$ оси Ox наибольшую площадь, то есть

$$\begin{cases} \int\limits_{-a}^{a} x(t)\,dt \to \max \\ \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1+x'^2}\,dt = l \qquad\qquad (12.3) \\ x(-a) = x(a) = 0 \qquad\qquad (12.4) \end{cases}$$

$\Phi = F - \lambda G = x - \lambda\sqrt{1+x'^2}$

1-й интеграл - $\Phi - x'\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = C \Rightarrow x - \lambda\sqrt{1+x'^2} + x'^2\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+x'^2}} = C \Rightarrow x = C + \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+x'^2}}$.

Произведя замену $x' = tg\theta$, получим $x = C + \lambda\cos\theta$, тогда

$$x' = -\lambda\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow -\lambda\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\cos\theta}$$

или $\dfrac{dt}{d\theta} = -\lambda\cos\theta$, и мы приходим к

$\begin{cases} t = -\lambda\sin\theta + C_1 \\ x = \lambda\cos\theta + C \end{cases}$ - окружность радиуса λ с центром в точке (C_1, C).

Из соображений симметрии $\left(x(-a) = x(a) = 0\right)$ заключаем $\tilde{N}_1 = 0$, то есть

$$\begin{cases} t = -\lambda\sin\theta \\ x = \lambda\cos\theta + C \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{\lambda^2 - t^2} + C \Rightarrow x' = -\frac{t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} \Rightarrow \sqrt{1+x'^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}}.$$

Теперь воспользуемся (12.3)

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{\lambda dt}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} = 2\lambda\arcsin\frac{t}{\lambda}\Bigg|_{-a}^{a} = 2\lambda\arcsin\frac{a}{\lambda},$$

откуда получаем

$$\frac{a}{\lambda} = \sin\frac{l}{2\lambda}.$$

Решая это уравнение (а оно всегда имеет решение), находим некоторое значение $\lambda = \lambda_0$, а затем из (12.4) величину $C = -\sqrt{\lambda_0^2 - a^2}$ (правда, при $\dfrac{l}{2\lambda_0} > \dfrac{\pi}{2}$ мы получим больше половины окружности, и кривую нельзя будет рассматривать как элемент C^1).

Задача о провисании цепи

Найти профиль провисания цепи, закрепленной в двух точках: $(-a;0)$ и $(a;0)$. Длина цепи равна $2l \quad (l > a)$:

$$
\begin{cases}
\quad U(x)=\int\limits_{-a}^{a} x\sqrt{1+x'^2}dt \to \min \\
\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1+x'^2}dt = 2l & (12.5) \\
x(-a)=x(a)=0 & (12.6)
\end{cases}
$$

Составляем вспомогательный функционал $\Phi=(x-\lambda)\sqrt{1+x'^2}$, далее почти дословно повторяем выкладки из задачи о минимальной поверхности вращения. Запишем 1-й интеграл уравнения Эйлера:

$$(x-\lambda)\sqrt{1+x'^2}-x'^2\frac{x-\lambda}{\sqrt{1+x'^2}}=C;$$

$$x-\lambda=C\sqrt{1+x'^2}\,. \qquad (12.7)$$

Введем замену $x'=sh\theta$, тогда $x=\lambda+Cch\theta$ и $x'_t=Csh\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=sh\theta$, то есть $\tilde{N}\frac{d\theta}{dt}=1$ или $\frac{dt}{d\theta}=C$, $t=C\theta+c_1$. Выразим отсюда θ и подставим в (12.7), получим: $x=\lambda+Cch\frac{t-c_1}{C}$. Из условия $x(-a)=x(a)$ следует $c_1=0$, или

$$x=\lambda+Cch\frac{t}{C}\,.$$

Семейство экстремалей – кривые, подобные $x=cht$ (подобие с центром в $(0,\lambda)$). Теперь найдем экстремаль нужной длины

$$x'=sh\frac{t}{C} \text{ или } \sqrt{1+x'^2}=ch\frac{t}{C}\,.$$

Подставим полученное выражение в (12.5)

$$\int\limits_{-a}^{a} ch\frac{t}{C}dt=2Csh\frac{a}{C}=2l\,, \qquad sh\frac{a}{C}=\frac{l}{C}\,.$$

Из последнего уравнения (решение которого при условии $l>a$ обязательно существует) находим C, а из (12.6) и λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Вариационное исчисление. М.: УРСС, 2012.
4. Деменко В.Н. Варианты домашней работы по курсу «Функциональный анализ» с разбором типичных задач (для гр. К-41 ФИТ и ВТ). М., МИЭМ НИУ ВШЭ, 2013.

Учебное издание

Элементы функционального анализа

(интегральные уравнения и вариационное исчисление).

Составитель ДЕМЕНКО Виктория Николаевна

Редактор Е.С. Резникова

Технический редактор О.Г.Завьялова

Подписано в печать 14.03.2013. Формат 60×84/16. Бумага офсетная № 2.
Печать – ризография. Усл. печ. л. 2, 25. Уч.-изд.л. 1,87. Тираж 50 экз. Изд.№ 18.
Заказ ____. Бесплатно.

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».
109028, Москва, Б.Трехсвятительский пер., 3.
Редакционно-издательский отдел Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».
Участок МИЭМ типографии НИУ ВШЭ.
113054, Москва, ул. М. Пионерская, 12.