

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А.А. Дородницына**

**Андреев М.Ю., Вржещ В.П., Жукова А.А., Здановская В.С.,
Петров А.А., Пильник Н.П., Пospelов И.Г., Хохлов М.А.**

**ОПЫТ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ
ДИНАМИКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН В ПЕРИОД
МИРОВОГО ФИНАНСОВОГО КРИЗИСА**

**УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А.А. Дородницына
МОСКВА 2010**

УДК 519.8
Ответственный редактор
А.В. Лотов

Аннотация

Монография излагает результаты работы по моделированию экономики Республики Казахстан, прогнозированию и проведению аналитических расчетов на основе модели. Работа выполнялась коллективом авторов по договору с Национальной академией наук Республики Казахстан и представляет новый пример применения информационной технологии моделирования экономики, разработанной в отделе математического моделирования экономических систем ВЦ РАН при моделировании экономики России.

Была разработана концепция математического моделирования Республики Казахстан, собрана и обработана статистика основных экономических показателей, создана динамическая модель экономики, реализован алгоритм расчета ее траекторий, проведена идентификация и верификация модели, а также проведен ряд аналитических и прогнозных расчетов.

Разработанная модель относится к одному из наиболее сложных типов математических моделей экономики – она представляет собой модель межвременного экономического равновесия. Это означает, что экономическая динамика описывается как результат взаимодействия макроагентов: домашних хозяйств, производителей и т. п., рационально планирующих свои действия на будущее. Важнейшим научным результатом работы оказалось то, что такой подход вполне удовлетворительно описывает экономические процессы даже в период кризиса.

Разработанная модель может быть использована для построения прогнозов изменения макроэкономических показателей, а также исследования влияния экономической политики на них.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-13534 офи_ц), ПФИ Президиума РАН № 14 проект 109, ПФИ ОМН РАН № 3 проект 3.14.

Рецензенты: Г.Г. Канторович,
Ю.А. Флеров

Научное издание

© Учреждение Российской Академии Наук Вычислительный центр им.
А.А. Дородницына

Введение

Мы получили предложение заняться моделированием экономики Республики Казахстан (РК) в сложное для нее время, когда период бурного роста сменился резким спадом вследствие мирового финансового кризиса. Было очень интересно проверить, подойдет ли здесь наш новый теоретический подход к моделированию экономики, оправдавший себя в случае российской экономики периода «нефтяного процветания» [1, 9, 16].

Математическое моделирование в настоящее время служит основным инструментом анализа экономических процессов. Диапазон моделей варьируется от простейших статических макроэкономических моделей «совокупный спрос – совокупное предложение» до сложнейших динамических систем, учитывающих оборот сотен продуктов в десятках регионов. Тем не менее, пока ни одна модель не способна охватить всех аспектов экономической жизни. Прикладные модели строятся для ответов на определенные вопросы о развитии экономики определенного общества в определенное время [13].

В 1975 году в Вычислительном центре АН СССР (с 1992 г. – Вычислительном центре РАН, с 2001 г. – Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН) возникло направление исследований, названное Системный анализ развивающейся экономики (САРЭ). Создал это направление исследований и возглавляет его академик РАН А.А. Петров. Системный анализ развивающейся экономики – общий подход к разработке математических моделей национальной и региональной экономики, предназначенных для анализа состояния экономики и оценки последствий экономической политики государства [1, 12, 9, 11]. Главная особенность подхода в том, что в моделях явным образом описаны внутренние механизмы самоорганизации экономики, которые определяют эволюцию экономики во времени и структурные сдвиги в ней. Государственная экономическая политика описана как воздействия на параметры этих механизмов. Поэтому с помощью моделей системного анализа развивающейся экономики можно анализировать эффективность механизмов и последствия государственных экономических решений, возможные при данных механизмах. При разработке модели

- ✓ проводится системный анализ состояния экономики по данным экономической статистики и экспертным оценкам;
- ✓ выявляются сложившихся в данный период времени экономические структуры – экономические агенты и их отношения;
- ✓ выделяется множество материальных и финансовых активов и пассивов агентов, которое с необходимой полнотой задает состояние экономики;
- ✓ выписывается полная система уравнений материальных и финансовых балансов, которая описывает изменение активов и пассивов агентов в зависимости от активностей агентов;
- ✓ активности экономических агентов описываются как их поведение и взаимодействия, отражающие существенные особенности сложившихся экономических отношений;
- ✓ система уравнений и балансов замыкается описаниями активностей экономических агентов и сценарием государственной экономической политики и внешнеэкономической конъюнктуры;

- ✓ проводится аналитическое исследование модели, цель которого – оценить качественное согласие модели с экономической действительностью и выяснить качественные особенности взаимосвязей макроэкономических показателей в конкретных условиях;
- ✓ разрабатывается эффективный численный метод исследования модели для проведения вычислительных экспериментов и выполнения массовых расчетов;
- ✓ по данным экономической статистики проводится идентификация и верификация модели;
- ✓ с помощью модели проводится анализ состояния экономики, прогнозируется ее развитие при разных вариантах государственной экономической политики, оценивается эффективность вариантов экономической политики.

Системный анализ развивающейся экономики в течение двадцати лет применяется для анализа эволюции экономики СССР и России. В 1988 г. была построена модель, которая воспроизводила основные качественные особенности эволюции плановой экономики. Поэтому к моменту начала экономических преобразований в СССР, а затем в России уже был разработан подход к анализу происходивших в экономике изменений. В частности, за два года до радикальной реформы 1992 г. были правильно предсказаны краткосрочные ее последствия. Были построены: модель экономики периода высокой инфляции 1992–1995 гг.; модель экономики периода «финансовой стабилизации» 1995–1998 гг., где предсказывался кризис 1998 г.; модель для оценки перспектив развития экономики после кризиса 1998 г., основанная на системе гипотез относительно характера тех экономических отношений, которые складывались в соответствующий период в России.

С помощью моделей удалось понять внутреннюю логику развития экономических процессов, скрывшуюся за видимой, часто, казалось бы, парадоксальной, картиной экономических явлений, которая не укладывалась в известные теоретические схемы. Опыт применения моделей показал, что они служат надежным инструментом анализа макроэкономических закономерностей, а также прогноза последствий макроэкономических решений при условии сохранения сложившихся отношений. Можно сказать, получилась целая «летопись» российских экономических реформ, написанная на языке математических моделей [9].

Главная трудность моделирования советской и российской экономики в период 1986–2004 гг. была в том, что каждую следующую модель приходилось создавать заново, начиная с системного анализа изменившихся экономических отношений. Создание новой модели – очень трудоемкое дело, оно занимает примерно год работы коллектива квалифицированных специалистов. Но даже не в этом главное. Новые экономические отношения описываются новыми переменными, другими соотношениями, часто требуют использования новых математических методов. Поэтому нельзя сказать, что в итоге почти тридцатилетних исследований эволюции советской и российской экономики мы создали систему моделей. Перечисленные выше модели трудно сопоставить друг с другом, так же как трудно сопоставлять модели, созданные разными исследовательскими группами. Такое положение дел, увы, типично для моделирования сложных систем [16].

Если говорить о мировой практике моделирования экономики, То модели САРЭ, разработанные до 2004г. можно отнести к классу, так называемых «вычислимых моделей общего экономического равновесия» (CGE, см., например, [17, 19, 15]), хотя наши работы начались лет за 15 до появления термина «CGE». Основное отличие моделей САРЭ от основного потока CGE моделей состоит в том, что

мы всегда стараемся учесть специфику сложившихся экономических отношений, а не брать их описание из стандартной экономической теории.

В 2004 г. мы несколько изменили подход к моделированию экономики, а именно, отказались от характерного для CGE моделей и ранних моделей САРЭ упрощения динамических связей и обратились к теоретически более последовательной, но технически и концептуально гораздо более сложной конструкции межвременного равновесия с управлением капиталом (МРК) [15]. Такая модель с формальной точки зрения представляет собой связку неавтономных задач оптимального управления, описывающих поведение отдельных (макро)агентов (подробнее см. разд. 3.3). Вручную написать и запрограммировать такую модель без ошибок за обозримое время практически невозможно. К счастью к этому времени уже была реализована оригинальная система поддержки математического моделирования экономики – ЭКОМОД [5, 5, 1], которая контролирует правильность уравнений и ограничений создаваемой модели, автоматизирует трудоемкие преобразования модели в режиме диалога и обеспечивает удобство и эффективность работы с моделью на всех этапах от идентификации и верификации модели до интерпретации результатов расчетов, (подробнее, см. разд. 3.3)

В 2005г. на новой теоретической баз (МРК) и с использованием новой технологии (ЭКОМОД) по заказу Федерального агентства по налогам и сборам была создана модель экономики России [1]. Эта модель лучше, чем предыдущие модели САРЭ воспроизводила динамику основных макроэкономических показателей и давала разумные оценки размеров теневого оборота. Она выдержала несколько модификаций [9] и была успешно адаптирована для описания экономики Кировской области [17]. Эту модель и технологию мы и взяли за основу при реализации проекта моделирования экономики Республики Казахстан в период кризиса.

В тексте ниже формулы нумеруются по главам и содержащим их разделам. Ссылка вида (4.1.10) - (4.1.11) имеет в виду **все** вынесенные в отдельную строку формулы в отрывке текста между формулой (4.1.10) и формулой (4.1.11), в том числе и не пронумерованные. Рисунки и таблицы, чтобы их можно было легче найти, нумеруются заново внутри каждого раздела. Если отбросить последнюю цифру в ссылке на рисунок или таблицу, то получится номер самого мелкого подразделения текста, содержащего этот рисунок или таблицу.

1 Концепция математического моделирования экономики республики Казахстан

1.1 Характер развития экономики Республики Казахстан 1990-2008гг. и его отражение в статистике

1.1.1 КАЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН 1990-2008гг.

Изучение показало, что тенденции развития экономики Республики Казахстан похожи на изучавшиеся нами на моделях российские тенденции, но более ярко выраженные.

В Казахстане в 1990-1995 годах наблюдалось резкое снижение объема ВВП – за пять лет практически в два раза. В 1996 году падение объема ВВП было приостановлено. В 1997 году в Казахстане отмечен рост ВВП на 1,7%. В результате влияния внешнего фактора реальный объем ВВП в 1998 году по сравнению с 1997 годом снизился на 2,6%. В середине 90-х годов обозначились негативные тенденции в формировании социальной структуры в связи с падением социальной сферы, ростом безработицы, высоким уровнем социальной поляризации, сужением поля социальной мобильности, резко возросшими миграционными потоками "село-город".

В 2000 году отмечен рост объема ВВП - 9,5%, и в дальнейшем до 2007 Казахстан переживал экономический бум. Среднегодовой рост превышал 10%, а инфляция удерживалась в пределах 10%. Плоды этого достаточно продолжительного периода бума позволили значительной части населения улучшить свое благосостояние и социальное положение.

Казахстан одним из первых среди стран СНГ ощутил на своей экономике надвигающийся мировой кризис и одним из первых взялся за разработку антикризисных мер. Уже осенью 2007 года правительство РК отметило появление проблем в финансовом и строительном секторах. Недостаток ликвидности стал отражаться на темпах промышленного роста, который по итогам 2007 года снизился до 4,5 процента. Но принятые меры, в том числе выделение государством средств на завершение долевого строительства, развитие агропромышленного комплекса, малого и среднего бизнеса, позволили в значительной степени ослабить действие негативных факторов. Стабильность экономического развития была сохранена, а инфляцию удалось удержать на уровне 10,8 процента. Не было утеряно и доверие общества к банкам: депозиты выросли почти на 22 процента. Устояла и жилищная программа. За 2007 год было введено в строй более 8 млн. квадратных метров жилья, что на 31 процент выше, чем за 2006 год. Положительный эффект также был достигнут путём создания стабилизационных фондов по основным продовольственным товарам, что позволило сдержать рост потребительских цен.

Однако вторая волна кризиса ударила уже по реальному сектору, что потребовало более масштабных решений. 25 ноября 2008 года правительство Казахстана утвердило «План действий по стабилизации экономики и финансового сектора на 2009 - 2010 годы», разработанный по поручению президента республики [<http://www.rg.ru/2009/03/27/kazakhstan.html>]. Он выделил пять приоритетных от-

раслей, нуждающихся в государственной поддержке: финансовая система, строительный сектор, малый и средний бизнес, агропромышленный комплекс, инновационные, индустриальные и инфраструктурные проекты. В целом в экономику страны в антикризисных целях за 2009-2010 годы намечено направить свыше 2,7 триллиона тенге.

Осознана необходимость не только противостоять кризису, но и готовиться к последующему экономическому росту. И этот путь, как подчеркивает Нурсултан Назарбаев, Казахстану и России и другим странам Содружества будет легче пройти вместе. "Сейчас я еще тверже убежден в том, что в долгосрочной перспективе евразийской интеграции альтернативы не существует" [<http://www.rg.ru/2009/03/27/kazakhstan.html>]. Наиболее масштабным и перспективным движением в этом направлении стало образование ЕврАзЭС [<http://www.rg.ru/2009/03/27/kazakhstan.html>].

1.1.2 ХАРАКТЕРИСТИКА РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН ПО ИМЕЮЩИМСЯ СТАТИСТИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Исследование статистических данных проводилось в предположении, что модель будет работать с шагом в 1 квартал и, соответственно, верифицироваться и идентифицироваться по квартальным данным. Такой шаг обычно выбирается потому, что в мировой практике реальный ВВП и реальное накопление надежно оцениваются только за квартал.

Мы пользовались статистическими данными, представленными на сайтах Агентства по статистике РК [24] и Национального банка РК [25]. На этих сайтах имеются основные ряды квартальных данных, требующихся для верификации и идентификации модели, но за очень короткий период. Более длинные ряды имеются, но не выставляются на сайте, поскольку считаются неактуальными. Мы получили часть этих данных по особому запросу.

В целом динамика основных макроэкономических показателей республики Казахстан качественно напоминает динамику, наблюдающуюся в России и отличающуюся от динамики западной экономики наличием интенсивных внутригодовых колебаний всех показателей. Таким образом, можно было рассчитывать, что опыт моделирования экономики России, имеющийся у коллектива авторов, будет более полезен, чем копирование западных образцов.

Впрочем, судя по статистическим рядам, экономические процессы в Республике Казахстан, хотя и имеют тот же качественный характер, что и в России, но проходят более интенсивно и во многом опережающими темпами. Например, темпы роста реального ВВП были гораздо выше, чем в России, доля потребительских кредитов во всех кредитных вложениях в экономику в России росла до самого мирового финансового кризиса, а в Казахстане уже успела стабилизироваться. Рост индексов фондового рынка был выше не только по сравнению с российским рынком, но и по сравнению с общемировым. С другой стороны и их спад в связи с началом мирового финансового кризиса тоже оказался рекордным. (Впрочем, в отличие от стран Запада и ЮВА, в странах СНГ фондовый рынок не играет существенной роли в реальных экономических процессах.)

Мы не использовали, как это часто делается, ряды основных фондов (основного капитала). По нашему мнению, совпадающему с мнением многих экспертов, данные по основным фондам не отражают фактического состояния реального сектора экономик стран СНГ. В этих странах до сих пор играют значительную роль

фонды, созданные в советское время, а они, вследствие специфики процесса приватизации, никогда не продавались и не покупались по рыночной цене, и поэтому их формальные оценки по балансовой стоимости не отражают их фактической производительности.

По этой причине в качестве долговременного фактора производства мы использовали суммы рядов валового накопления с некоторым эффективным коэффициентом амортизации, который подбирался эмпирически. Расчеты показали, что, как и в модели России, для модели Казахстана нужно использовать весьма необычную для экономико-математических моделей линейную производственную функцию (см. разд. 2.1.2).

1.1.3 Количественные характеристики развития экономики Республики Казахстан

Изучение показало, что структура экономики Республики Казахстан похожа на структуру изучавшейся нами на моделях российской экономики.

В структуре ВВП за январь-декабрь 2008 года производство товаров составило 45%, производство услуг 52,5%. Основную долю в производстве ВВП занимает промышленность 31,6%, операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг потребителям – 15,4%.

Нефтяной рынок республики имеет экспортно-сырьевую направленность. Поставки нефти осуществляются в основном в Италию (24,3%), Швейцарию (25%), Францию (12%). В общем объеме ресурсов доля экспортных поставок нефти по сравнению с 2007 г. уменьшилась на 0,9 процентных пункта. Потребление угля и газового конденсата в большей степени осуществляется в республике. Внешнеторговый оборот в 2008г. составил 109,1 млрд. долл. США (по сравнению с 2007г. увеличился на 35,5%), в том числе экспорт – 71,2 млрд. долл. США (увеличился на 49,1%) и импорт – 37,9 млрд. долл. США (увеличился на 15,7%).

С 2000г. сложилось положительное сальдо внешнеторгового оборота. В 2008г. чистый экспорт составил 33,3 млрд. долл. США. Доля торговли с традиционными партнерами — странами СНГ и Балтии — велика: на них приходится около 59 % экспорта и до 63 % импорта. При этом основным торговым партнером остаётся Россия. Из государств дальнего зарубежья успешно развиваются торговые связи с Германией, Турцией, Швейцарией, Чехией, Италией, Китаем, США, Великобританией, Южной Кореей и другими странами.

Удельный вес цветной металлургии в общем объеме промышленного производства превышает 12%. Из извлекаемых руд производятся медь, свинец, цинк, титан, магний, редкие и редкоземельные металлы, прокат на основе меди, свинца и т.д. По уровню производства Казахстан входит в число одних из крупнейших в мире производителей и экспортеров рафинированной меди. Доля республики в мировом производстве меди составляет 2,3%. При этом, практически вся производимая в стране медь экспортируется за рубеж. Основными покупателями казахстанской меди являются Италия и Германия. Казахстан является третьим среди новых независимых государств производителем золота, добыча и производство которого увеличивается с каждым годом. В стране зарегистрировано свыше 170 золотonosных месторождений.

По запасам железной руды Казахстан занимает восьмое место в мире. Его доля в мировых запасах составляет 6%. Кроме значительных запасов другим преимуществом казахстанской железной руды является ее довольно высокое каче-

ство. Из 8,7 млрд. тонн железной руды 73,3% запасов являются легко добываемыми. Более 70% добываемой в стране железной руды уходит на экспорт. Доля руд черных металлов, включая хромовые и марганцевые руды, в общем экспорте страны в 1999 году составила около 4%. Черная металлургия Казахстана производит более 12,5 % республиканского объема промышленной продукции. Флагманом индустрии республики является Карагандинский металлургический комбинат "Испат-Кармет". Предприятие имеет полный металлургический цикл и специализируется на выпуске различных видов проката черных металлов — листового, сортового, белой жести, труб и т.д. Металл этого комбината экспортируется в страны СНГ и дальнего зарубежья. В Казахстане имеются большие запасы хромитовых руд, на базе которых работают ферросплавные заводы республики.

В ассортименте предприятий химической и нефтехимической промышленности республики — пластмассы, химические волокна и нити, шины для автомобилей и сельхозмашин, широкий ассортимент резинотехнических изделий, хромовые соединения, карбид кальция, каустическая сода и др. продукция. В республике действуют три нефтеперерабатывающих завода, производящие автобензин, дизельное, котельное топливо, авиационный керосин, нефтебитумы и другие нефтепродукты. Действует крупный комплекс по переработке фосфоритной руды с получением желтого фосфора (более 90 % от общего производства бывшего СССР), минеральных удобрений, синтетических моющих средств. Перспектива развития этой отрасли связана с комплексной переработкой нефти Западного Казахстана и организацией новых видов продукции на основе фосфоритных месторождений.

Продукция машиностроительного комплекса в общем объеме промышленного производства республики составляет около 8%. Машиностроительные предприятия Казахстана выпускают: кузнечнопрессовое оборудование (г. Шымкент), металлорежущие станки (г. Алматы), аккумуляторы (г. Талдыкорган), центробежные насосы (г. Астана), рентгеновское оборудование (г. Актобе) и т.д. В настоящее время в развитие машиностроения привлекаются иностранные инвестиции для организации в республике новых производств, в том числе медицинского оборудования, сельскохозяйственной техники, дизельных двигателей, оборудования для пищевой промышленности, электродвигателей и других изделий производственно-технического назначения.

Продукция промышленности строительных материалов занимает более 5 % в общем объеме промышленного производства Республики. На предприятиях отрасли производятся цемент, шифер, асбестоцементные трубы, мягкие кровельные материалы, линолеум, санитарно-строительный фаянс, облицовочные керамические плитки для полов и отделки зданий, панели и другие конструкции для крупнопанельного домостроения, каолин для бумажной промышленности, радиаторы, конвекторы и ряд других видов строительных материалов и конструкций. Республика располагает достаточными запасами разнообразного сырья для выпуска строительных материалов. Кроме того, в их производстве широкое применение находят отходы промышленности: шлаки металлургических и химических производств, зола теплоэлектростанций и другие вторичные ресурсы.

Географическое расположение Казахстана в центре Евразийского континента предопределяет его значительный транспортный потенциал в области транзитных перевозок. Протяженность наземных транспортных магистралей республики составляет 106 тыс. км. Из них 13,5 тыс. км — магистральные железные

дороги, 87,4 тыс. км — автомобильные магистрали общего пользования с твердым покрытием, 4 тыс. км. — речные пути.

Сельское хозяйство является важным сектором экономики страны. На севере Казахстана климатические условия благоприятны для выращивания яровой пшеницы, овса, ячменя и других зерновых культур, а также позволяют развивать овощеводство и возделывать ряд технических культур. На юге республики, в предгорной полосе и в долинах рек, где много тепла, при искусственном орошении дают высокие урожаи хлопчатник, сахарная свекла, желтые табак, рис, плодоносят сады и виноградники. По производству зерна Казахстан занимает третье место в СНГ после России и Украины. Природные условия Казахстана, их многообразие обуславливают значительные потенциальные возможности для развития животноводства.

В Казахстане уровень ненаблюдаемой (теневой) экономики по системе национальных счетов стали оценивать с 1992 года. Так, в период 1992-1998 гг. доля ненаблюдаемой экономики в составе валового внутреннего продукта (ВВП) оценивалась в интервале 30-38%. Как ни парадоксально звучит, но на кризисном этапе развития высокий уровень теневой экономики оказывал некоторое стабилизирующее воздействие.

Следует отметить, что статистика включает оценки теневого оборота в расчет макроэкономических показателей. После многих пробных расчетов мы пришли к выводу, что этого учета достаточно, и при достигнутой пока точности моделирования можно не выделять особо теневой сектор.

1.2 Структура модели экономики Республики Казахстан

Модель описывает развитие во времени полного цикла общественного воспроизводства (производство — распределение — потребление) в разрезе одного агрегированного продукта — **реального ВВП** — и одного агрегированного ресурса — **однородного труда**. Движение продукта и ресурса в модели сопровождается и регулируется оборотом 5 **финансовых агрегатов**

1. *денежной базы* (наличность + банковские резервы)
2. *безналичных денег* (остатки расчетных счетов)
3. *кредитных вложений в экономику*
4. *сбережений населения*
5. *иностранной валюты*.

Движение продукта и ресурса прослеживается моделью от производства (источника) до потребления (использования), а движение каждого финансового агрегата — от эмиссии до изъятия из обращения.

После многочисленных проб мы убедились, что попытки учесть теневой оборот по образцу модели экономики России, приведенной в [1], не дают существенного улучшения и отказались от описания теневого оборота в модели экономики РК.

Потоки продукта, ресурса и финансовых агрегатов удовлетворяют системе уравнений материальных и финансовых балансов, они образуют основу, над которой надстраивается структура модели. Уравнения балансов соответствуют строкам таблиц основного макроэкономического баланса и системы национальных счетов (СНС). Величины потоков определяются решениями субъектов экономики (физических и юридических лиц) и механизмами согласования этих решений, например, рыночным торгом. Описаны типичные действия экономических агентов

– макроструктур, представляющих в модели множество субъектов, которые выполняют сходные функции.

В модели типичные действия множества реальных субъектов описаны как рациональная деятельность следующих 8 экономических (макро)агентов.

1. **Производитель** представляет все нефинансовые коммерческие предприятия в сфере производства и внутренней торговли.
2. **Население** представляет все домашние хозяйства.
3. **Банк** представляет коммерческие финансовые учреждения, включая страховые компании и пенсионные фонды.
4. **Собственник** представляет индивидуальных владельцев предприятий, топ-менеджеров крупных корпораций, а также компании-холдинги и участников фондового рынка.
5. **Экспортер** и
6. **Импортер** представляют посреднические учреждения в сфере внешней торговли.
7. **Центральный банк** описывает деятельность ЦБ в области обеспечения расчетов, а также монетарного и валютного регулирования.
8. **Государство** представляет экономическую деятельность органов административного и государственного управления.

Учтены три типа отношений агентов (см. разд. 4.6):

- 1) Отношения рыночного обмена (к ним относятся и отношения кредитования - заимствования). Они определяют объемы продаж различных благ, цены и проценты по кредитам и депозитам, а также курсы валют и ценных бумаг.
- 2) Отношения собственности. Они определяют распределение прибыли и движение капитала как между отраслями и секторами экономики, так и через границу страны.
- 3) Отношения власти, которые отражаются в механизмах формирования различных потоков вторичного перераспределения доходов (налоги, субсидии, пособия, отступные рэкетирам, взятки и т. п.) и в установлении обязательных нормативов, например, нормы резервирования пассивов коммерческих банков.

В описаниях поведения экономических агентов (см. разд. 4) отражены содержание деятельности, институциональные ограничения, характерные условия информированности и экономические интересы многочисленных однотипных субъектов экономики. Описание поведения таких агентов выводятся из принципа рациональности. Но некоторые агенты в модели представляют индивидуальных субъектов экономики, как государственная администрация, Центральный банк. Поведение таких агентов задается сценариями.

1.3 Предназначение модели

Модель с формальной точки зрения представляет собой систему динамических и конечных уравнений, которая определяет траекторию изменения **эндогенных переменных** при заданных значениях **параметров** и траекториях изменения **экзогенных переменных**.

Часть параметров (начальные значения фазовых переменных, предельные производительности факторов производства, предельные полезности потребительских благ, темпы выживания, скорости обращения денег в различных секторах экономики и др.) характеризуют сложившиеся в РК экономические отношения. Их

значения определяются в процессе идентификации модели. Остальные параметры (ставки налогов и пошлин, нормы резервирования и амортизации) характеризуют относительно стабильные элементы государственной экономической политики. Они определяются из статистики или *сценарием*.

Сценарий расчета включает значения упомянутых выше регулируемых параметров и предполагаемые значения экзогенных переменных. В имеющейся версии модели он включает:

1. описание **внешних условий**, состоящее из:
 - a. траектории изменения численности занятых;
 - b. траектории изменения реального экспорта;
 - c. притока/оттока иностранных депозитов.
2. описание **государственной экономической политики**, состоящее из:
 - a. траектории реального государственного потребления;
 - b. траектории социальных выплат из бюджета;
 - c. траектории изменения курса национальной валюты;
 - d. нормы налоговой нагрузки на экономику;
 - e. ставок экспортных и импортных пошлин;
 - f. нормы резервирования.

В результате расчета получаются траектории изменения **основных макроэкономических показателей**:

1. составляющие макроэкономического баланса:
 - a. реальный ВВП;
 - b. реальное потребление населения;
 - c. реальное государственное потребление;
 - d. реальное накопление;
 - e. реальный экспорт;
 - f. реальный импорт.
2. составляющие агрегированного банковского баланса:
 - a. кредитные вложения в экономику;
 - b. ликвидные активы;
 - c. резервы в ЦБ;
 - d. бессрочные привлеченные средства;
 - e. срочные привлеченные средства.
3. составляющие баланса ЦБ:
 - a. международные резервы;
 - b. денежная база;
4. основные составляющие государственного бюджета:
 - a. внешний государственный долг;
 - b. внутренний государственный долг;
 - c. расходы на выплаты пособий населению;
 - d. расходы на государственные закупки;
 - e. налоговые поступления.

Обычно расчет ведется от некоторого момента в прошлом до некоторого момента в будущем. На периоде прошлого экзогенные величины задаются в соответствии со статистикой. Результат расчета на этом участке используется для верификации модели. На периоде будущего экзогенные величины задаются незави-

симым прогнозом, результат расчета на этом участке дает прогноз развития экономики.

Модель предназначена для **аналитических и прогнозных** расчетов. Аналитический расчет проводится при изменении *прошлых* значений сценарных переменных. Он позволяет узнать, что было бы с экономикой в других внешних обстоятельствах и при другой экономической политике. Аналитические расчеты позволяют качественно оценить значимость и направление различных внешних факторов и управляющих воздействий на разных этапах развития экономики.

Прогнозный расчет проводится при изменении *будущих* значений сценарных переменных. Он позволяет дать вариантный прогноз развития экономики.

Некоторые сценарии могут оказаться **недопустимыми**, например, приводящими к отрицательным значениям международных резервов. Выявление недопустимых сценариев позволяет обнаружить угрозы экономике и объективные ограничения на возможности регулирования.

2 Результаты сбора и предварительной обработки статистики

2.1 Показатели реального сектора и международной торговли

2.1.1 ДАННЫЕ ПО РЕАЛЬНОМУ СЕКТОРУ И НЕОБХОДИМОСТЬ ИХ КОРРЕКТИРОВКИ

Поскольку модель предполагается однопродуктовой, важнейшим ее соотношением должен быть основной макроэкономический баланс по использованию (ОМБ).

$$ВВП = \text{Валовое накопление} + \text{Частное потребление} + \text{Гос. потребление} + \text{Экспорт} - \text{Импорт} \quad (2.1.1)$$

Первичная информация для ОМБ собирается в деньгах, в текущих ценах¹ (номинальные значения), а затем специальными и во многом неформальными процедурами дефлятирования, разными для разных составляющих, ОМБ приводится к «реальным величинам», т. е. выражается в ценах некоторого базового периода. Отношение номинального значения к реальному называется **базовым дефлятором** соответствующей составляющей ОМБ. Он показывает среднее изменение цен для продуктов данной группы по отношению к базовому периоду.

Для разработки и оценки качества модели нужны последовательные квартальные ряды, как номинальных, так и реальных значений составляющих ОМБ. Однако экспертам, оценивающим развитие экономики, для исключения сезонных колебаний удобнее бывает смотреть не на базовые, а на **цепные** дефляторы, показывающие рост цен не к базовому, а к соответствующему периоду предыдущего года. Аналогично вместо реальных значений эксперты чаще используют **индексы физического объема**, показывающие только рост реального значения по отношению к аналогичному периоду предыдущего года.

¹ В частности экспорт и импорт в ОМБ измеряются не в мировых, а во внутренних ценах, подробнее см. разд. 2.1.3

Из официальной статистики национальных счетов, публикуемой Агентством Республики Казахстан по статистике [24], были извлечены следующие ряды данных за период с 1 квартала 2007 года по 1 квартал 2009 года:

- среднеквартальная **численность занятых**;
- квартальные **номинальные значения**: ВВП, частного потребления, государственного потребления, валового накопления, номинального экспорта, номинального импорта накопленным итогом за период с начала года;
- квартальные цепные **дефляторы**: ВВП, частного потребления, государственного потребления, валового накопления, экспорта, импорта накопленным итогом за период с начала года;
- квартальные **индексы физического объема**: ВВП, частного потребления, государственного потребления, валового накопления, экспорта, импорта накопленным итогом за период с начала года;
- валютный курс (сайт Национального Банка Республики Казахстан, [25]).

Способ обработки этой статистики опишем на примере данных по ВВП. Пусть

$$\begin{aligned} pY_{i,j} & \text{ — номинальный объем ВВП за } i\text{-й квартал } j\text{-го года,} \\ Y_{i,j} & \text{ — реальный объем ВВП за } i\text{-й квартал } j\text{-го года в ценах 2008 г,} \\ pY_{i,j} & = pY_{i,j} / Y_{i,j} \text{ — базовый дефлятор ВВП.} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Приведенные в статистике **цепные** дефляторы можно выразить через базовые (2.1.2). Например, известный из статистики дефлятор ВВП 1 квартала 2008 года по отношению к 1 кварталу 2007 году запишется как $pY_{1,2008} / pY_{1,2007}$. Индекс физического объема 1 квартала 2008 года по отношению к 1 кварталу 2007 году в тех же обозначениях может быть записан как $Y_{1,2008} / Y_{1,2007}$.

Таким образом, в отношении ВВП была доступна следующая статистическая информация:

- номинальные показатели накопленным итогом за 9 кварталов:

$$\begin{aligned} & pY_{1,2007}, pY_{1,2007} + pY_{2,2007}, pY_{1,2007} + pY_{2,2007} + pY_{3,2007} + pY_{4,2007}, pY_{1,2008}, pY_{1,2008} + pY_{2,2008}, \\ & pY_{1,2008} + pY_{2,2008} + pY_{3,2008}, pY_{1,2008} + pY_{2,2008} + pY_{3,2008} + pY_{4,2008}, pY_{1,2009}; \end{aligned}$$

- индексы физических объемов за 9 кварталов по отношению к соответствующим периодам предыдущего года

$$\begin{aligned} & \frac{Y_{1,2007}}{Y_{1,2006}}, \frac{Y_{1,2007} + Y_{2,2007}}{Y_{1,2006} + Y_{2,2006}}, \frac{Y_{1,2007} + Y_{2,2007} + Y_{3,2007}}{Y_{1,2006} + Y_{2,2006} + Y_{3,2006}}, \frac{Y_{1,2007} + Y_{2,2007} + Y_{3,2007} + Y_{4,2007}}{Y_{1,2006} + Y_{2,2006} + Y_{3,2006} + Y_{4,2006}}, \frac{Y_{1,2008}}{Y_{1,2007}}, \frac{Y_{1,2008} + Y_{2,2008}}{Y_{1,2007} + Y_{2,2007}}, \\ & \frac{Y_{1,2008} + Y_{2,2008} + Y_{3,2008}}{Y_{1,2007} + Y_{2,2007} + Y_{3,2007}}, \frac{Y_{1,2008} + Y_{2,2008} + Y_{3,2008} + Y_{4,2008}}{Y_{1,2007} + Y_{2,2007} + Y_{3,2007} + Y_{4,2007}}, \frac{Y_{1,2009}}{Y_{1,2008}}; \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

- дефляторы за 9 кварталов

$$\begin{aligned} & \frac{pY_{1,2007}}{pY_{1,2006}}, \frac{pY_{1+2,2007}}{pY_{1+2,2006}}, \frac{pY_{1+2+3,2007}}{pY_{1+2+3,2006}}, \frac{pY_{1+2+3+4,2007}}{pY_{1+2+3+4,2006}}, \frac{pY_{1,2008}}{pY_{1,2007}}, \frac{pY_{1+2,2008}}{pY_{1+2,2007}}, \frac{pY_{1+2+3,2008}}{pY_{1+2+3,2007}}, \frac{pY_{1+2+3+4,2008}}{pY_{1+2+3+4,2007}}, \end{aligned}$$

$$\frac{py_{1,2009}}{py_{1,2008}}, \quad (2.1.4)$$

где выражения вида, подобного $py_{1+2+3,2007}$, обозначают накопленный дефлятор

$$py_{1+2+3,2007} = \frac{pY_{1,2007} + pY_{2,2007} + pY_{3,2007}}{Y_{1,2007} + Y_{2,2007} + Y_{3,2007}} = \frac{py_{1,2007}Y_{1,2007} + py_{2,2007}Y_{2,2007} + py_{3,2007}Y_{3,2007}}{Y_{1,2007} + Y_{2,2007} + Y_{3,2007}}.$$

Имеющиеся ряды позволяют продлить ряд номинальных значений ВВП накопленным итогом на 4 квартала 2006 года путем деления значений номинального ВВП за 4 квартала 2007 год на произведение известных дефляторов и индексов физических объемов за те же периоды. Например:

$$pY_{1,2006} + pY_{2,2006} + pY_{3,2006} = \frac{pY_{1,2007} + pY_{2,2007} + pY_{3,2007}}{\left(\frac{py_{1+2+3,2007}}{py_{1+2+3,2006}}\right)\left(\frac{Y_{1,2007}+Y_{2,2007}+Y_{3,2007}}{Y_{1,2006}+Y_{2,2006}+Y_{3,2006}}\right)}.$$

После получается последовательный ряд номинальных значений ВВП за 13 кварталов (с 1 квартала 2006 года) отдельно для каждого квартала, а не частичным накопленным итогом, как в статистике:

$$pY_{1,2006}, pY_{2,2006}, pY_{3,2006}, pY_{4,2006}, pY_{1,2007}, pY_{2,2007}, \dots, pY_{1,2009}. \quad (2.1.5)$$

Однако на основании информации вида (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5) **невозможно однозначно восстановить ряд реальных значений ВВП**, необходимый для идентификации и верификации модели. Агентством Республики Казахстан по статистике была предоставлена дополнительная информация о квартальных дефляторах ВВП в течение 2008 года **по отношению к предыдущему кварталу**:

$$\frac{py_{2,2008}}{py_{1,2008}}, \frac{py_{3,2008}}{py_{2,2008}}, \frac{py_{4,2008}}{py_{3,2008}}.$$

С помощью этих данных ряд реального ВВП восстанавливается единственным способом.

Расчеты в модели решено было вести, выбирая в качестве базовых среднегодовые цены 2008 г. Для года, среднегодовые цены которого выбраны базовыми, должно выполняться соотношение:

$$pY_{1,2008} + pY_{2,2008} + pY_{3,2008} + pY_{4,2008} = Y_{1,2008} + Y_{2,2008} + Y_{3,2008} + Y_{4,2008}.$$

Сумма, стоящая в правой части известна и, кроме того выполнены соотношения:

$$\frac{Y_{2,2008}}{Y_{1,2008}} = \frac{pY_{2,2008}}{pY_{1,2008}} / \frac{py_{2,2008}}{py_{1,2008}}, \quad \frac{Y_{3,2008}}{Y_{2,2008}} = \frac{pY_{3,2008}}{pY_{2,2008}} / \frac{py_{3,2008}}{py_{2,2008}}, \quad \frac{Y_{4,2008}}{Y_{3,2008}} = \frac{pY_{4,2008}}{pY_{3,2008}} / \frac{py_{4,2008}}{py_{3,2008}}.$$

Это дает систему из четырех уравнений, решением которых является ряд реальных значений ВВП за 4 квартала 2008 года:

$$Y_{1,2008}, Y_{2,2008}, Y_{3,2008}, Y_{4,2008}.$$

Если теперь перейти к накопленным значениям реального ВВП за 2008 год и воспользоваться известными индексами физического объема за 9 кварталов, то получим ряд, состоящий из 13 значений накопленного реального ВВП, из которого уже получается интересующий нас ряд квартальных значений ВВП за период с 1 квартала 2006 года по 1 квартал 2009 года в среднегодовых ценах 2008г.

$$Y_{1,2006}, Y_{2,2006}, Y_{3,2006}, Y_{4,2006}, Y_{1,2007}, Y_{2,2007}, Y_{3,2007}, \dots, Y_{1,2009}.$$

Аналогичная последовательность вычислений производилась и для каждой компоненты ВВП по использованию, т. е. для частного и государственного потребления, валового накопления, экспорта и импорта. К сожалению, дополнительная информация о дефляторах внутри 2008г. касалась только ВВП, поэтому пришлось сделать предположение, что дефляторы остальных компонент пропорциональны дефлятору ВВП.

В результате были получены ряды реальных (в ценах 2008г) значений квартальных величин частного и государственного потребления, валового накопления, экспорта и импорта.

Увы, при таком восстановлении рядов реальных показателей, естественно возникают расхождения в основном макроэкономическом балансе (2.1.1) в реальном выражении. Поэтому, далее была проведена корректировка полученных рядов с учетом описанных ниже эконометрических соотношений (см. разд. 2.1.4).

2.1.2 ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Обычно вид производственной функции задается формулой Кобба-Дугласа $F(x, y) = Ax^\alpha y^{1-\alpha}$ или ее обобщениями [4]: функцией с постоянной эластичностью замещения (CES) $F(x, y) = A(\sigma x^\rho + (1-\sigma)y^\rho)^{-\frac{1}{\rho}}$, транслогарифмической функцией $F(x, y) = A \exp(\alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y + a \ln^2 x + b \ln^2 y + c \ln x \ln y)$.

Попытки использовать эти формулы для описания динамики производства и накопления в Республике Казахстан даже для коротких рядов и при использовании недостающих начальных данных в качестве настроечных параметров (при определенных ограничениях) оказались неудовлетворительными. Зато вполне успешным оказалось использование следующей схемы, которую мы ранее использовали для описания российской экономики.

$$Y(t) = e^{(bt)} R_s(t) B + AM(t) \quad (2.1.6)$$

В этом уравнении слева стоит реальный объем ВВП, а справа линейная комбинация с коэффициентами A и B «активных фондов» $M(t)$ и численности заня-

того населения $R_s(t)$, скорректированной на рост производительности труда $e^{(bt)}$, где b – некоторый коэффициент. Сами же активные фонды изменяются за счет сделанных инвестиций $J(t)$ и выбывают с темпом κ (оцениваемый коэффициент).

$$\frac{d}{dt}M(t) = J(t) - \kappa M(t) \quad (2.1.7)$$

При численной оценке последнее уравнение заменялось его дискретным аналогом:

$$M(t) - M(t-1) = J(t) - \kappa M(t) \quad (2.1.8)$$

2.1.3 ФУНКЦИЯ СПРОСА НА ИМПОРТ

Вторая обнаруженная взаимосвязь описывает механизм формирования объемов импорта.

Прежде всего, необходимо было сопоставить данные о курсе тенге с данными платежного и макроэкономического баланса. Выяснилось, что с учетом импорта и экспорта услуг данные по экспорту и импорту во внутренних ценах, пересчитанные по текущему курсу, совпадают с данными внешнеторгового баланса. Это означает, что, как и в России, разница внешних и внутренних цен на экспортируемые и импортируемые товары отражается как, соответственно, экспорт и импорт торговых услуг.

Для модели, поэтому, важно было выделить товарные экспорт и импорт и рассчитать их эффективные курсы. После этого по данным бюджета были оценены эффективные величины экспортных и импортных пошлин.

Экспорт Республики Казахстан имеет ярко выраженный сырьевой характер (нефть, газ, уран). Величина такого рода экспорта в значительной степени определяется не требованиями рынка, а возможностями транспорта и межгосударственными соглашениями. Поэтому, экспорт будет в модели задаваться экзогенно в соответствии со сценариями.

В связи с этим, важно было понять, какую из величин – экспорт или чистый экспорт – лучше задавать сценарием. Это зависит от характера изменения импорта. Выяснилось, что чистый и валовой экспорт имеют существенно разные тенденции изменения, поэтому импорт надо описывать отдельно.

Поскольку модель планируется однопродуктовой, внутри нее последовательно определить спрос на импорт не удастся, и нужно искать независимое соотношение. Такое соотношение было найдено в процессе обработки информации о внешнеторговых связях Республики Казахстан после рассмотрения множества различных гипотез. Оно имеет вид

$$\text{Imp}(t) = AI \left(\frac{C(t)}{CI} \right)^{ci} \left(\frac{J(t)}{JI} \right)^{gi} \left(\frac{w_s(t)}{WI} \right)^{(-di)} \quad (2.1.9)$$

Слева в (2.1.9) стоит реальный объем импорта, а справа – основные показатели, влияющие на уровень импорта: потребление домашних хозяйств $C(t)$, валовое накопление $J(t)$ и курс доллара в тенге $w_s(t)$. Коэффициенты в знаменателях необходимы для правильности операций с размерностью используемых величин. Они были рассчитаны как среднее геометрическое наблюдаемых значений величин, стоящих в числителях соответствующих дробей:

$$JI = \left(\prod_{t=1}^{13} J(t) \right)^{(1/13)}, \quad WI = \left(\prod_{t=1}^{13} w_s(t) \right)^{(1/13)}.$$

Коэффициенты оценивались эконометрически с учетом условия неотрицательности каждого из них.

2.1.4 КОРРЕКТИРОВКА РЕАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Данные о численности занятого населения имелись в источниках, только начиная с первого квартала 2007 года, и были продолжены на предыдущий период с сохранением темпа роста.

На основе приближенных соотношений (2.1.6), (2.1.8), (2.1.9) проводился второй этап восстановления рядов реальных величин частного и государственного потребления, валового накопления, экспорта и импорта. Отклонение суммы указанных показателей от общего объема восстановленного реального ВВП было распределено среди них так, чтобы максимально улучшить точность двух найденных закономерностей. После этого уже на новых рядах переоценивались коэффициенты.

В конечном итоге были получены следующие ряды реальных показателей и дефлятора ВВП:

- численность занятых $R_s(t)$,
- реальный ВВП $Y(t)$,
- реальное валовое накопление $J(t)$,
- реальное частное потребление $C(t)$,
- реальное государственное потребление $G_s(t)$,
- реальный экспорт $Exp_s(t)$,
- реальный импорт $Imp(t)$,
- дефлятор ВВП $p(t)$,
- темп инфляции $i(t)$ – темп роста квартального дефлятора ВВП,
- валютный курс $w_s(t)$.

Эти ряды удовлетворяют основному макроэкономическому балансу в реальном выражении

$$Y(t) = J(t) + C(t) + G_s(t) + \text{Exp}_s(t) - \text{Imp}(t) \quad (2.1.10)$$

В рамках однопродуктовой модели нет возможности воспроизвести наблюдаемую разницу дефляторов отдельных составляющих ВВП, поэтому номинальные показатели ОМБ мы при идентификации не использовали и считали дефлятор ВВП $p(t)$ статистическим аналогом единой цены единого модельного продукта. Результаты обработки данных о показателях реального сектора собраны в разд. 2.4.

В процессе корректировки рядов реальных данных заново переоценивались коэффициенты A, B, κ, b производственной функции (2.1.6), (2.1.8) и начальное значение ненаблюдаемой величины активных фондов $M(0)$, а также коэффициенты AI, ci, gi, di функции спроса на импорт (2.1.9).

Точность выполнения соотношений (2.1.6), (2.1.8) при скорректированных рядах составляющих ВВП и при окончательно найденных значениях параметров производственной функции

$$A = 7.54, \quad B = 289.4, \quad \kappa = 5.16, \quad b = 0.00255, \quad M(0) = 40.16 \quad (2.1.11)$$

проиллюстрирована на рисунке 2.1.4.1.

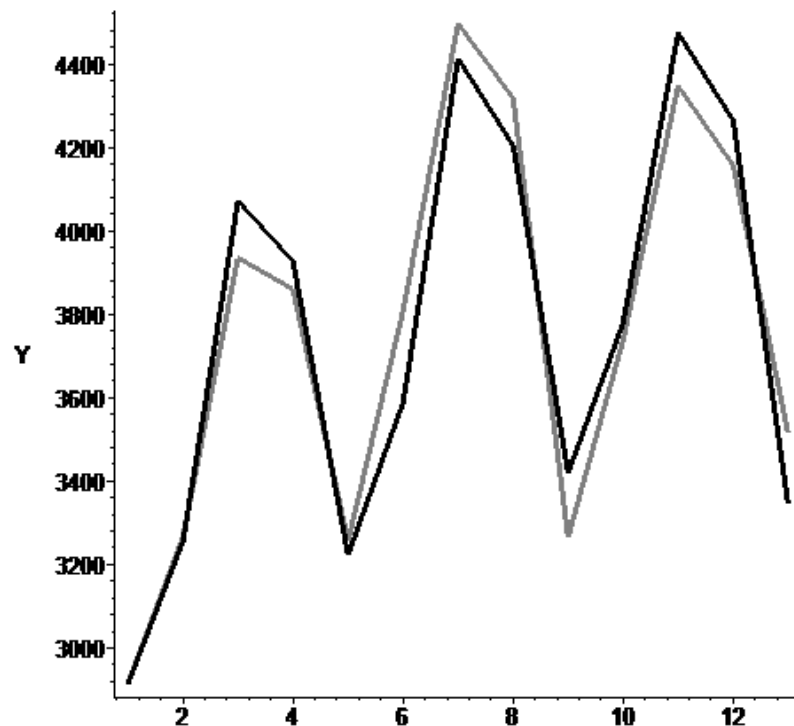


Рисунок 2.1.4.1 – Идентификация производственной функции.

Черной линией показана статистика, серой – модельные значения. Заметим, что данное приближенное соотношение имеет весьма высокий показатель детерминации $R^2=0,96$. (Хотя, в силу нестационарности рядов этот показатель в данном случае решающего значения не имеет).

При идентификации всей модели значения параметров (2.1.11) уже не изменялись.

Точность выполнения соотношения (2.1.9) при скорректированных рядах составляющих ВВП и при окончательно найденных значениях параметров функции спроса на импорт

$$AI=2729.6, \quad ci=0.144, \quad ji=0.446, \quad wi=15.93 \quad (2.1.12)$$

проиллюстрирована на рисунке 2.1.4.2.

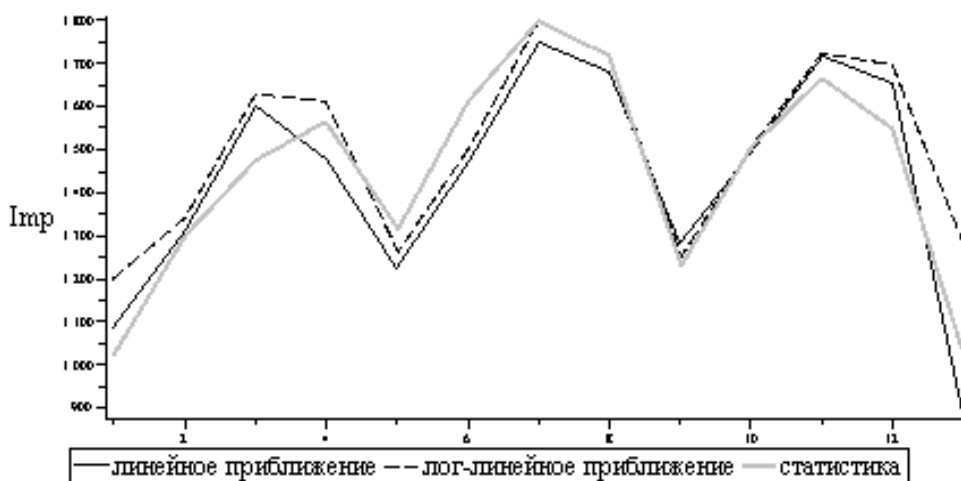


Рисунок 2.1.4.2 – Идентификация функции спроса на импорт.

Серой линией показана статистика, черной – модельные значения, рассчитанные по формуле (2.1.9) при (2.1.12). Это приближенное соотношение имеет показатель детерминации $R^2=0,78$. При идентификации всей модели значения параметров (2.1.12) уже не изменялись.

Приближенное выражение (2.1.9) удобно для аналитического исследования модели, но представляет определенную трудность при расчетах, поэтому при расчетах мы использовали альтернативное линейное выражение функции спроса на импорт, которое дает примерно ту же точность

$$Imp(t) = 2729.58 + 0.144 C(t) + 0.446 J(t) - 15.937 w_s(t) \quad (2.1.13)$$

На рисунке 2.1.4.2 оно показано пунктиром.

2.2 Показатели кредитно-денежной сферы

Важной чертой, отличающей кредитно-денежную систему РК от кредитно-денежной системы РФ, служит структура сбережений населения. Если в РФ сумма потребительских кредитов, даже в пике их популярности, оставалась значительно меньше суммарных депозитов населения в банках, то в РК перед кризисом потребительские кредиты превосходили вклады населения в банках! Тем не менее, более детальное исследование показало, что население РК все же «как и положено» является первичным кредитором экономики (нетто-сберегателем), только форма этих сбережений иная, чем в РФ.

Согласно проведенной в январе 1998 г. в РК Пенсионной реформе, граждане, начавшие трудовую деятельность после января 2000 г., обязаны сами распоряжаться своими пенсионными отчислениями путём вклада их различные частные пенсионные фонды, которые в свою очередь занимаются той или иной инвестиционной деятельностью. Пенсионные накопления к настоящему времени составляют большую величину, и, если прибавить их к банковским депозитам, соотношение сбережений и кредитов у населения окажется примерно таким же, как в РФ.

Чтобы учесть это отличие мы неявно включили в состав модельного блока «Банк» не только собственно банки, но и пенсионные фонды. В конечном счете получилась следующая система агрегированных показателей кредитно-денежной сферы РК, которые в работе использовались либо как входные данные, либо для сравнения с расчетом по модели:

- ссуды производителям $L(t)$. Этот показатель определяется как сумма остатков ссудных счетов небанковских финансовых организаций (фирм) в банках второго уровня и отчислений населения в пенсионные фонды Республики Казахстан.
- сбережения населения $S_H(t)$. Этот показатель определяется как сумма банковских депозитов, депозитов фирм и пенсионных накоплений за вычетом потребительских кредитов.
- депозиты нерезидентов $Sf_s(t)$. Этот показатель определяется как разность между депозитами нерезидентов и ссудами, выданными нерезидентам.
- расчетные счета (безналичные деньги) $N(t)$, Этот показатель определяется как сумма остатков на расчетных счетах небанковских финансовых организаций (фирм), государственных нефинансовых организаций, домашних хозяйств и нерезидентов.

Источником данных о кредитно-денежной сфере служат балансы банков второго уровня, публикуемые в «Статистическом бюллетене НБК» на web-странице Национального Банка Республики Казахстан [26], а также отчеты о текущем состоянии пенсионной системы, публикуемые Агентством Республики Казахстана по регулированию и надзору финансового рынка и финансовых организаций на сайте Агентства [23] в разделе «Информация для субъектов финансового рынка / Накопительная пенсионная система / Статистика / Текущее состояние». Ниже в таблице 2.2.1 приведены конкретные статьи указанных источников данных, входящие в показатели $N(t)$, $Sf_s(t)$, $L(t)$, $S_H(t)$. В столбце «операция» указывается, с каким знаком соответствующий показатель должен входить в финальный показатель – плюсом или минусом. В столбце «Источник» указывается, взят ли показатель из статистики по банкам второго уровня (БВУ) или из статистики по пенсионной системе (ПС). Статистика по банкам второго уровня берется из таблицы «Монетарный обзор банков второго уровня» Статистического бюллетеня НБК, а статистика по пенсионной системе из указанных выше отчетов, раздел «Структура пенсионных накоплений» (показатель «Сумма чистого инвестиционного дохода») и таблица «Совокупный инвестиционный портфель НПФ» (показатель «совокупный инвестиционный портфель НПФ»).

Таблица 2.2.1 – Агрегирование статистики по финансовому сектору.

Переменная	Операция	Источник	Раздел таблицы	Название статьи
$L(t)$	+	БВУ	Внутренние активы - Требования к небанковским финансовым организациям	Ценные бумаги, кроме акций
	+	БВУ	Внутренние активы - Требования к небанковским финансовым организациям	Кредиты
	+	БВУ	Внутренние активы - Требования к негосударственным нефинансовым организациям	Ценные бумаги, кроме акций
	+	БВУ	Внутренние активы - Требования к негосударственным нефинансовым организациям	Кредиты
	+	ПС		Совокупный инвестиционный портфель НПФ
$S_H(t)$	-	ПС		Сумма чистого инвестиционного дохода
	-	БВУ	Внутренние активы - Требования к домашним хозяйствам	Ценные бумаги, кроме акций
	-	БВУ	Внутренние активы - Требования к домашним хозяйствам	Кредиты
	+	БВУ	Пассивы - Другие депозиты	Небанковские финансовые организации
	+	БВУ	Пассивы - Другие депозиты	Негосударственные нефинансовые организации
	+	БВУ	Пассивы - Другие депозиты	Домашние хозяйства
	+	БВУ	Пассивы – Кредиты	Небанковские финансовые организации
	+	БВУ	Пассивы – Кредиты	Негосударственные нефинансовые организации
	+	БВУ	Пассивы – Кредиты	Домашние хозяйства
	+	ПС		Совокупный инвестиционный портфель НПФ
$Sf_s(t)$	-	ПС		Сумма чистого инвестиционного дохода
	-	БВУ	Чистые внешние активы - Требования к нерезидентам	Другие депозиты
	-	БВУ	Чистые внешние активы - Требования к нерезидентам	Ценные бумаги, кроме акций
	-	БВУ	Чистые внешние активы - Требования к нерезидентам	Кредиты
	+	БВУ	Чистые внешние активы - Обязательства перед нерезидентами	Другие депозиты
	+	БВУ	Чистые внешние активы - Обязательства перед нерезидентами	Кредиты
$N(t)$	+	БВУ	Чистые внешние активы - Обязательства перед нерезидентами	Переводимые депозиты
	+	БВУ	Внутренние активы - Чистые требования к Центральному Правительству	Переводимые депозиты
	+	БВУ	Пассивы - Переводимые депозиты	Региональные и местные органы управления
	+	БВУ	Пассивы - Переводимые депозиты	Небанковские финансовые организации
	+	БВУ	Пассивы - Переводимые депозиты	Государственные нефинансовые организации
	+	БВУ	Пассивы - Переводимые депозиты	Негосударственные нефинансовые организации
	+	БВУ	Пассивы - Переводимые депозиты	Домашние хозяйства

Результаты обработки данных о показателях кредитно-денежной сферы собраны в разд. 2.4.

2.3 Показатели бюджетной сферы

В работе использовались как входные данные, задаваемые сценарием государственной экономической политики, следующие показатели деятельности бюджетной сферы:

- государственное потребление $G_s(t)$ (реальные расходы консолидированного бюджета на оплату закупок и зарплаты госслужащих);
- субсидии населению из бюджета $Sub_s(t)$ (государственные пособия, стипендии, гранты, пенсии (граждане РК, начавшие трудовую деятельность до января 2000 г., получают государственную пенсию, рассчитанную в соответствии с их трудовым стажем) и т.п.);
- поступления налогов и пошлин $Tax(t)$.

Государственное потребление уже обсуждалось выше, как показатель реального сектора, см. (2.1.10).

Данные по **субсидиям** в статистике найдены не были, поэтому субсидии $Sub_s(t)$ оценивались по балансу доходов и расходов населения,

$$Sub_s(t) = p(t)C(t) + MS(t) - MS(t-1) - R_s(t)s_r(t) - rS_H(t) \quad (2.3.1)$$

Статьи, стоящие в правой части выражения, были найдены из статистики:

- $p(t)C(t)$ – *расходы на конечное потребление населения*. Источник данных – ВВП методом конечного использования [23],
- $s_r(t) R_s(t)$ – *заработная плата и смешанные доходы*. Источник данных – ВВП методом образования доходов [23],
- *процентные доходы* $rS_H(t)$ мы посчитали малыми и пренебрегли ими,
- $MS(t) - MS(t-1)$ – *прирост чистых сбережений населения*. Чистые сбережения рассчитывались как сумма депозитов и расчетных счетов населения в банках второго уровня, пенсий населения минус потребительские кредиты и кредиты на жильё населению. Ниже в таблице 2.3.1 более подробно указан способ расчета соответствующих компонент. В столбце «операция» указывается, с каким знаком соответствующий показатель должен входить в чистые сбережения – плюсом или минусом. В столбце «Источник» указывается, взят ли показатель из Статистического бюллетеня НБК (СБ НБК) или из «отчетов о текущем состоянии пенсионной системы» (ПС), публикуемые Агентством Республики Казахстана по регулированию и надзору финансового рынка и финансовых организаций (www.afn.kz).

Таблица 2.3.1 – Порядок оценки чистых сбережений населения.

Составляющие чистых сбережений	Операция	Источник	Название таблицы	Название статьи
Расчетные счета и депозиты населения в БВУ	+	СБ НБК	Монетарный обзор банков второго уровня	Пассивы - Другие депозиты - Домашние хозяйства
	+	«Тот же»	«Тот же»	Пассивы - Переводимые депозиты - Домашние хозяйства
	+	«Тот же»	«Тот же»	Пассивы - Ценные бумаги - Домашние хозяйства

Составляющие чистых сбережений	Операция	Источник	Название таблицы	Название статьи
	+	«Тот же»	«Тот же»	Пассивы – Другие счета к оплате - Домашние хозяйства
Пенсии	-	ПС	Совокупный инвестиционный портфель НПФ	Совокупный инвестиционный портфель НПФ
	+	«Тот же»	Структура пенсионных накоплений	Сумма чистого инвестиционного дохода
Потребительские кредиты и кредиты на жильё	-	СБ НБК	Кредиты банков по объектам кредитования	Строительство и приобретение жилья гражданами
	-	«Тот же»	«Тот же»	Потребительские цели граждан

Так как квартальные данные о заработной плате были доступны только с 2008 года, субсидии из баланса (2.3.1) удалось вычислить только для 2008 и 2009 годов. На более ранние периоды субсидии было решено продолжить линейной функцией от времени. Полученные значения приведены ниже в таблице 2.4.1.

В модели **налоговые поступления** $Tax(t)$ описываются как налоговая нагрузка на ВВП.

Норма налоговой нагрузки на ВВП η_y по порядку величины должна совпадать с отношением собранных налогов к ВВП. Суммарные налоговые поступления в бюджет Республики Казахстан, взятые из [23], ВВП и их отношение приведены в табл. 2.3.2.

Таблица 2.3.2 – Доля налоговых поступлений в ВВП.

Период	Налоговые поступления в государственный бюджет, млрд. тенге	ВВП в текущих ценах, млрд. тенге	Налоги / ВВП
1кв 2006	533.94	2041.9946	0.26
2кв 2006	663.39	2365.2419	0.28
3кв 2006	435.28	2650.3056	0.16
4кв 2006	576.49	3158.5853	0.18
1кв 2007	492.02	2536.2349	0.19
2кв 2007	551.85	3059.1926	0.18
3кв 2007	566.39	3400.4545	0.17
4кв 2007	745.78	3853.912	0.19
1кв 2008	568.07	3207.2444	0.18
2кв 2008	625.58	3988.3542	0.16
3кв 2008	777.35	4607.9823	0.17
4кв 2008	848.51	4132.9471	0.21
1кв 2009	839.31	3055.2638	0.27
2кв 2009	851.12	3654.5171	0.23
3кв 2009	741.95	4492.798	0.17

Основываясь на данных таблицы 2.3.2, мы использовали в модели следующее значение нормы налоговой нагрузки:

$$\eta_y = 0.3$$

Эта величина является верхней гранью приведенных в таблице оценок доли налогов в ВВП, так как, помимо республиканского бюджета, нужно принять во внимание дополнительные налоги регионального и локального уровня. Это и даст налоговую нагрузку порядка 30 процентов ВВП.

2.4 Сводная таблица использованных статистических данных

Итак, мы использовали при моделировании временные ряды следующих показателей (таблица 2.4.1):

Таблица 2.4.1 – Наблюдаемые переменные.

Имя	Название	Единица измерения
РЕАЛЬНЫЙ СЕКТОР		
$R_s(t)$	Численность занятых	Млн. чел
$Y(t)$	Реальный ВВП	Млрд. тенге 2008 года
$J(t)$	Реальные инвестиции в основной капитал	Млрд. тенге 2008 года
$C(t)$	Реальное частное потребление	Млрд. тенге 2008 года
$G_s(t)$	Реальное государственное потребление	Млрд. тенге 2008 года
$Exp_s(t)$	Реальный экспорт	Млрд. тенге 2008 года
$Imp(t)$	Реальный импорт	Млрд. тенге 2008 года
$p(t)$	Дефлятор ВВП	Разы (безразмерный)
$\iota(t)$	Инфляция	1 / квартал
$w_s(t)$	Валютный курс	Тенге / USD
КРЕДИТНО-ДЕНЕЖНАЯ СФЕРА		
$L(t)$	Ссуды производителям	Млрд. тенге
$S(t)$	Суммарные сбережения в экономике	Млрд. тенге
$Sf_s(t)$	Депозиты нерезидентов	Млрд. тенге
$N(t)$	Расчетные счета	Млрд. тенге
БЮДЖЕТНАЯ СФЕРА		
$Sub_s(t)$	Дотации населению из бюджета	Млрд. тенге

Значения этих показателей по кварталам, начиная с первого квартала 2006 года, приведены в таблице 2.4.2.

Таблица 2.4.2 – Значения наблюдаемых переменных (статистика).

	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10	t=11	t=12	t=13
$R_s(t)$	7,368	7,379	7,39	7,404	7,491	7,6421	7,7135	7,6804	7,76294	7,8684	7,9254	7,8621	7,8304
$Y(t)$	2913,64	3255,04	4071,60	3926,32	3222,49	3587,73	4413,12	4204,08	3419,06	3779,34	4473,87	4264,25	3343,84
$J(t)$	595,50	812,93	1381,18	1170,29	628,15	1063,19	1610,27	1380,07	562,03	1052,91	1489,26	1228,76	715,79

	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10	t=11	t=12	t=13
$C(t)$	1274,54	1268,76	1416,78	1824,19	1413,47	1414,68	1817,36	1797,77	1557,64	1451,51	1628,11	2014,85	1562,31
$G_s(t)$	322,576	336,22	336,47	446,95	352,19	384,707	396,009	520,538	360,994	418,136	392,691	518,377	344,028
$Exp_s(t)$	1738,98	2138,43	2410,33	2047,01	2145,92	2338,26	2389,7	2223,19	2167,38	2361,81	2627,12	2053,09	1757,74
$Imp(t)$	1017,96	1301,30	1473,17	1562,12	1317,24	1613,11	1800,22	1717,49	1228,98	1505,03	1663,30	1550,82	1036,03
$p(t)$	0,70	0,73	0,65	0,80	0,79	0,85	0,77	0,92	0,94	1,06	1,03	0,97	0,91
$w_s(t)$	131,4	123,11	122,32	127,83	124,85	121,46	123,13	120,77	120,45	120,59	120	120,16	150
$L(t)$	2662,97	2960,12	3408,44	4210,91	4503,79	5462,10	5748,94	5941,12	6076,64	6208,13	6480,82	6791,17	7528,20
$S(t)$	953,59	944,77	853,43	1166,88	876,10	707,82	529,45	765,78	1028,53	1144,24	1497,40	1480,70	1771,62
$Sf_s(t)$	868,387	982,453	1351,96	1708,16	2142,9	2597,92	2773,57	2651,03	2563,38	2459,78	1837,78	1795,76	1488,04
$N(t)$	599,55	640,49	785,46	918,01	875,31	1030,41	1078,48	923,69	1035,41	1183,93	1327,06	1154,05	1521,80
$Sub_s(t)$	325	350	375	400	425	450	475	500	566,372	324,726	456,821	597,83	663,22

3 Методика и технология построения модели

3.1 Принцип рациональных ожиданий и модели межвременного равновесия

Методику здесь описываем очень кратко – подробно она изложена и обоснована в [1].

Поведение экономических агентов в модели выражается в их текущих планах на некоторый период времени, которые зависят от прогнозов изменения *информационных переменных*. С экономической точки зрения эти планы представляют собой **функции спроса / предложения** [4].

Информационные переменные делятся на две группы. В первую входят параметры, характеризующие макроэкономическую политику Центрального банка и государства. Они задаются сценарием. Сценарием задаются также внешнеэкономические и природные факторы. Во вторую группу входят информационные переменные, характеризующие экономическую конъюнктуру: цена продукта, процент по кредиту, процент по депозиту и т.п. Они, в конечном счете, определяются внутри модели.

Существенно, что функции спроса и предложения зависят не только от текущих, но и от ожидаемых в будущем значений информационных переменных. Модель строится на предположении, что все агенты имеют точный прогноз всех нужных им информационных переменных на тот период, на который они планируют свои действия. В этом состоит принимаемый нами безоговорочно **принцип рациональных ожиданий**² (*Rational Expectations*) [19, 2]. Согласованные планы выражают равновесие ожиданий агентов, а равновесием в данном классе моделей будет целая траектория показателей экономического развития во времени. В результате модель описывает эволюцию экономики во времени как результат пове-

² Хотя он часто подвергается критике, следует заметить, что любая альтернатива принципу рациональных ожиданий требует отдельно описывать, как экономика развивается на самом деле, и отдельно, – что думают о ней агенты. А способен ли автор модели «думать за всех лучше всех» и вправе ли он считать всех остальных неспособными на те же рассуждения? Принцип рациональных ожиданий уравнивает автора модели с людьми, поведение которых он исследует.

дения и взаимодействия агентов в зависимости от параметров экономической политики.

Использование указанных функции спроса / предложения позволяет получить подлинно динамическое описание экономики, а не последовательность статических равновесий, которые получаются в стандартных макроэкономических моделях (например, в т.н. «IS-LM» модели) или даже в более сложных и совершенных моделях класса CGE. Поэтому мы получаем функции спроса /и предложения, которые по большей части

- не постулируются независимо друг от друга, а *вычисляются* согласованно с интересами агентов³;
- зависят не только от текущих, но и от *ожидаемых* в будущем значений информационных переменных, а также от *состояния* агента.

Модель указанного типа очень сложна. Она требует серьезных аналитических преобразований и сложных алгоритмов решения. Но мы полагаем ее применение оправданным, поскольку экономические процессы в Казахстане в последние годы протекают исключительно бурно, даже по сравнению с Россией.

С другой стороны, если рассмотреть стационарные решения модели, предположив, что производство, потребление и цены растут с постоянными темпами, из модели межвременного равновесия можно получить статическую модель, наподобие IS-LM, но несколько более сложную. Результаты исследования такой модели приведены в разделе 8.3.2. Они могут быть полезны как пример применения динамической модели к исследованию статического равновесия, а также для выявления качественных особенностей экономики.

3.2 Модель межвременного равновесия с управлением капиталом

Детерминированные динамические модели экономики, основанные на принципе рациональных ожиданий, называются моделями межвременного равновесия (Intertemporal equilibrium) [19]. Они известны давно, однако, используются в основном для анализа стационарных состояний экономики [21]. Мы рискнули применить этот подход к описанию наблюдаемой нестационарной динамики. Кроме того, мы используем иное, нежели в [21] описание взаимодействия собственника и находящегося в его собственности юридического лица (фирмы или банка). Это описание мы назвали моделью межвременного равновесия с управлением капиталом (МРК). Теория моделей МРК рассматривается в [15, 1].

В модели экономики Казахстана функции спроса / предложения агентов Производителя, Банка, Населения и Собственника вычисляются в результате решения задач оптимального управления⁴. Задача у каждого агента своя: Производитель, Банк и Собственник максимизируют каждый свою капитализацию, а Населе-

³ Например, спрос производителя на инвестиции согласуется со спросом на труд.

⁴ Функции спроса / предложения Экспортера и Импортера задаются эмпирически, а Государства и ЦБ – сценарием.

ние в свою очередь – ожидаемую полезность своего потребления на некотором периоде времени:

$$t \in [t_0, T] \quad (3.2.1)$$

В этих задачах балансы, описания технологических возможностей и сложившихся институтов (например, условия резервирования для Банка или соотношения количественной теории денег для Производителя и Населения) выступают в качестве *ограничений*. Информационные переменные при решении задачи отдельного агента считаются экзогенными. Они определяются из условий равновесия после сборки модели.

Как ясно уже из названия, ключевую роль в модели играет величина **капитала** $\Omega_a(t)$ **агента** a , которая определяется единообразно для всех «оптимизирующих» агентов и по экономическому смыслу действительно похожа на бухгалтерский показатель собственного капитала (чистых активов). Однако в модели величина капитала определяется не эмпирическими бухгалтерскими правилами, а условиями оптимальности поведения агента, благодаря тому, что задачи оптимального управления, которые решают агенты, при всем их различии, обладают двумя общими естественными с экономической точки зрения свойствами:

1. из всех планируемых (фазовых и управляющих) переменных агента в функционал его задачи входит только один финансовый поток $Z_a(t)$, который мы называем **потоком полезных расходов**. Для фирмы и банка – это потоки дивидендов, а для потребителя – поток потребительских расходов. Финансовый актив, которым выплачивается поток полезных расходов, мы называем **основными деньгами** агента;
2. планируемые агентом переменные – экстенсивные (потоки и запасы), а экзогенные для агента переменные – в основном интенсивные (цены, проценты, нормы). В результате задача агента обладает несколько нарушенной масштабной симметрией относительно планируемых переменных.

Величина капитала $\Omega_a(t)$ определяется как перенормированный аналог первого интеграла поля экстремалей, отвечающего, согласно теореме Нетер, масштабной симметрии задачи [1]. Вследствие этого капитал агента всегда является *линейной формой фазовых переменных* задачи и удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{d}{dt}\Omega_a(t) = \rho_a(t)\Omega_a(t) - v_a(t)Z_a(t) + f_a(t), \quad (3.2.2)$$

коэффициенты которого, как и коэффициенты самой линейной формы капитала, составляются для каждого агента по-своему из двойственных и экзогенных переменных задачи. Коэффициенты (3.2.2) имеют вполне определенный экономический смысл: $\rho_a(t) \geq 0$ – **доходность капитала** агента a , которая комбинируется из показателей доходности отдельных операций и оказывается равной темпу падения двойственной оценки основных денег агента; $v_a(t) - 1 \geq 0$ – **эффективный налог** для агента a , который складывается из фактических норм обложения доходов и различных задержек в системе обращения. Знаконеопределенная вели-

чина косвенных доходов / убытков $f_a(t)$ является линейной формой от экстенсивных экзогенных переменных (если они есть в задаче).

Капитал агента в модели МРК используется двояко: Во-первых, при описании взаимодействия Собственника с агентом, находящихся в его собственности (Производитель и Банк) предполагается, что последние сообщают только прогнозы своих доходностей, эффективных налогов и косвенных доходов. На основании этой информации Собственник, не вмешиваясь в оперативное управление фирмой, определяет свои требования на дивиденды (см. разд. 4.6.9, 4.6.10)⁵.

Во-вторых, чтобы исключить краевые эффекты от произвольно заданного в модели горизонта планирования агентов (3.2.1), мы включаем в задачи агентов единственное единообразное терминальное условие роста капитала.

$$\Omega_a(T) \geq \Omega_a(t_0)e^{\gamma(T-t_0)} \quad (3.2.3)$$

Свойства такого граничного условия рассмотрены в [13]. Величину γ считаем **одинаковой для всех агентов**, несмотря на то, что выражения капитала для разных агентов различны.

Задачи оптимального управления, которые решают модельные агенты, содержат фазовые и смешанные ограничения, поэтому использовать для их решения необходимые условия оптимальности затруднительно. Однако эти задачи выпуклы, и решать их надо не при произвольно заданных траекториях экзогенных величин, а при траекториях, которые в конечном счете будут согласованы с планами агентов условиями равенства спроса и предложения. По этим причинам мы считаем возможным использовать простые **достаточные условия оптимальности**: условия седловой точки функционала Лагранжа в предположении, что двойственные переменные являются достаточно регулярными функциями времени.

Как известно, условия седловой точки по фазовым переменным получаются после интегрирования по частям соответствующих членов функционала Лагранжа. Оказывается, что [1] при этом преобразовании функционала Лагранжа получается и требуемое выражение для капитала агента.

$$\Omega_a(T) = \text{внеинтегральный член преобразованного функционала Лагранжа} \quad (3.2.4)$$

3.3 Каноническая форма модели и система ЭКОМОД

Соотношения, составляющие модель, по их экономическому смыслу группируются в блоки двух типов: «экономический агент» ЭА и «взаимодействие» ВД. Такую классификацию соотношений мы называем **канонической формой модели** [5, 1].

Основными являются блоки ЭА, они содержат описания поведения экономических агентов. Каждому из перечисленных в разд. 1.2 агентов соответствует свой блок ЭА. Внутри блоков ЭА выделяются определенные структурные группы соотношений: во-первых, это материальные и финансовые балансы, каждый из

⁵ Тем самым, Собственник исполняет свою основную функцию в экономике – определяет движение капитала между ее секторами (подробнее см. разд. 4.4.1).

которых образует свою группу, во-вторых, это группы внутренних (технологических) ограничений, часто связанные с материальными балансами и, в-третьих, группы институциональных ограничений, каждая из которых описывает роль агента (покупатель, продавец, кредитор и т. п.) в том или ином взаимодействии (подробнее – см. [1]) . Особую группу образуют условия оптимальности поведения агента.

Значения информационных переменных определяются в блоках ВД, описывающих взаимодействия агентов. Блоки ВД содержат балансовые уравнения, выражающие факт сохранения материальных благ и финансовых инструментов при их передачах от одного агента к другому. Подстановка в эти балансы значений функций спроса и предложения, найденных в блоках ЭА, дает уравнения для определения значений *информационных переменных*, согласующих планы агентов.

Запись модели в канонической форме накладывает определенные ограничения на форму используемых соотношений и их распределение по блокам, но зато позволяет автоматизировать проверку корректности модели.

Для разработки и исследования моделей в канонической форме нами была создана система поддержки моделирования ЭКОМОД [1]. Система ЭКОМОД, реализованная в среде компьютерной алгебры Maple [21], поддерживает все этапы разработки и использования модели в канонической форме⁶.

• **На этапе описания блоков** ЭКОМОД обеспечивает

- *синтаксический контроль* – проверка выполнения обычных правил математической нотации: соответствие скобок, наличие операндов у бинарных операций и отношений, постоянство числа аргументов у функций и т. п.;
- *алгебраический контроль* – проверка обозначений, практически исключающая ошибки: разные обозначения одной и той же величины в разных частях модели или одинаковое обозначение разных величин;
- *контроль формы балансов* – проверка имеет ли уравнение, объявленное балансовым, вид:

скорость изменения запаса = алгебраическая сумма потоков;

- *контроль размерности* переменных в соотношениях модели основан на простом соображении, что складывать или сравнивать величины разных размерностей, (например, вес и стоимость) бессмысленно, потому как это приводит к зависимости результата от произвольно выбранных единиц измерения (граммы или тонны, рубли или копейки). С общей, математической точки зрения, правильная размерность системы соотношений означает ее инвариантность относительно определенной группы преобразований подобия.
- *автоматическая генерация условий оптимальности;*
- *использование упрощенных обозначений* при написании отдельных блоков.

• **На этапе сборки модели** ЭКОМОД обеспечивает

⁶ Система ЭКОМОД создана на некоммерческой основе и предоставляется пользователям безвозмездно вместе с моделью. Но Maple пользователь должен приобрести сам.

- *контроль системы балансов*. Особенность подсистемы уравнений балансов модели в том, что поток, описывающий передачу блага или денег, должен содержаться только в двух уравнениях, причем с противоположными знаками.
- *контроль информационных связей* основан на том, что в канонической форме модели экономический агент представлен как лицо, принимающее решения на основе определенной ограниченной информации. Как правило, один агент не знает плана другого. Если же агент знает план другого агента, то каноническая форма требует явно описать передачу этой информации, при помощи соответствующей информационной переменной. В системе ЭКОМОД контроль таких информационных связей осуществляется специальным соглашением об индексации переменных.
- *некоторые гарантии от смешения обозначений*.
- **На этапе аналитического исследования модели ЭКОМОД** обеспечивает
 - *автоматическое упрощение системы соотношений* на основе их семантики,
 - *возможность узнать исходный вид и смысл соотношений* после любых преобразований,
 - *контроль корректности переобозначений*,
 - *возможность быстро повторить все преобразования* при модификации исходных гипотез,
 - *сохранение стандартной математической нотации до самого расчета*.
- **На этапе расчетов** в рамках и средствами ЭКОМОД проводится (не автоматически)
 - идентификация,
 - верификация,
 - численные эксперименты,
 - представление и хранение результатов расчетов.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая модель ни в целом, ни по частям, никогда не записывалась ни на бумаге, ни на каком-либо языке программирования. Описание блоков модели в следующем разделе – формулы вместе с текстом – в значительной степени позаимствовано непосредственно из рабочих файлов системы ЭКОМОД. Это, в частности объясняет специфический стиль написания формул – так их komponует и отображает система Maple.

4 Описание модели по блокам

4.1 Блок «Банк»

4.1.1 Функции Банка в модели

Содержательно данный блок модели описывает в агрегированном виде деятельность **коммерческих финансовых организаций** (в основном банков и пенсионных фондов) как *чистой отрасли*. В связи с тем, что мы включаем в сбережения населения пенсионные накопления и страховки, модельный Банк объединяет собственно банки с пенсионными фондами и страховыми компаниями. Материальные затраты на финансовые операции считаются несущественными. По-

этому в модели отражены лишь следующие аспекты деятельности реальных банков:

- выдача ссуд производителям,
- прием депозитов населения,
- проведение безналичных расчетов через расчетные счета производителей и корреспондентские счета в ЦБ,
- уплата налогов государству,
- выплата доходов собственникам.

4.1.2 ОГРАНИЧЕНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БАНКА

В модели система ограничений выражает все предположения об условиях деятельности и возможностях банка. При описании агента планируемые переменные обозначаются как переменные величины без индексов, например, $L(t)$, а информационные переменные – как переменные с индексами, например, $r_l(t)$. Величины, не зависящие от времени, – это постоянные параметры модели.

4.1.2.1 Выдача ссуд

Предполагается, что банк предоставляет кредит только инвесторам. Кредит выдается на срок β_k^{-1} под сложный процент $r_l(t)$. Общий объем подлежащих возврату ссуд, который банк планирует иметь в момент времени t , обозначаем через $L(t)$. Обозначая через $LdL(t)$ разность новых кредитов и погашений (нетто-кредиты), получаем дифференциальное уравнение изменения $L(t)$ и неравенство на $LdL(t)$, выражающее неотрицательность вновь выданных кредитов:

$$\frac{d}{dt} L(t) = LdL(t), \quad -\beta_k L(t) \leq LdL(t). \quad (4.1.1)$$

Выдачу ссуд мы описываем как обмен «расписок» $LdL(t)$ на деньги. Правила этого обмена образуют описание роли банка, в качестве кредитора:

$$KdL(t) = LdL(t), \quad rL(t) = r_l(t) L(t). \quad (4.1.2)$$

Второе из равенств (4.1.2) выражает предположение о том, что банк не является монополистом на рынке кредитов, а ориентируется на сложившийся на этом рынке процент $r_l(t)$. В тоже время банк считает возможным выдать под этот процент столько ссуд, сколько захочет, и поток процентных платежей $rL(t)$ будет пропорционален величине ссуд.

4.1.2.2 Привлечение депозитов

Эта операция симметрична выдаче ссуд. Считаем, что банк планирует привлечь депозиты в размере $S(t)$ на срок β_s^{-1} под складывающийся на рынке сложный процент $r_s(t)$. Обозначая через $SdS(t)$ чистый приток вкладов, получаем, как и выше, балансовое уравнение с ограничением:

$$\frac{d}{dt} S(t) = SdS(t), \quad -\beta_s S(t) \leq SdS(t). \quad (4.1.3)$$

Расписки банка (например, записи в сберкнижке) $SdS(t)$ обмениваются на равную сумму денег клиента $KdS(t)$. Кроме этого, клиенту надо выплачивать процентные платежи $rS(t)$, пропорциональные сумме вклада:

$$KdS(t) = SdS(t), \quad rS(t) = r_s(t) S(t). \quad (4.1.4)$$

Здесь снова принято предположение о совершенной конкуренции банков на рынке депозитов.

4.1.2.3 Проведение безналичных расчетов

Кроме депозитов населения, банк привлекает средства в виде остатков расчетных счетов производителей $N(t)$. Поскольку для этих сбережений нет регулирующей переменной типа процента, банк, планируя свои операции, должен полагаться на прогноз размера средств, которые клиенты готовы оставить на счетах $NJ_n(t)$. Поэтому для планируемых банком остатков расчетных счетов $N(t)$ получаем балансовые соотношения

$$\frac{d}{dt} N(t) = NdN(t), \quad N(t) \leq NJ_n(t), \quad (4.1.5)$$

где $NdN(t)$ – изменение суммарного остатка расчетных счетов.

В совокупном балансе банков против величины $NdN(t)$ остается величина сальдо $KdN(t)$ операций инкассации, обналичивания и безналичных переводов от производителей другим агентам (например, налоговых платежей государству):

$$KdN(t) = NdN(t).$$

Сальдо $KdN(t)$ изменяет остатки корреспондентских счетов в ЦБ.

4.1.2.4 Динамика резервов банка и резервные требования

В модели платежным средством банка служат остатки корреспондентских счетов в ЦБ $K(t)$. Именно из этой суммы делаются платежи и начисляются поступления, описываемые введенными выше величинами $KdN(t)$, $KdS(t)$, $rS(t)$, $KdL(t)$, $rL(t)$. Кроме этого, из той же суммы вычитаются налоговые платежи банков $Tax(t)$ и доходы (дивиденды) собственников банка $Z(t)$.

Банк обязан выполнять **резервные требования**: остатки $K(t)$ должны превосходить определенную, установленную нормативно, долю ζ_s привлеченных средств (**фонд обязательного резервирования**). В рамках модели рассматриваются два вида привлеченных средств банка: депозиты $S(t)$ и остатки расчетных счетов $N(t)$. Тогда фактические резервные требования запишутся в виде

$$\zeta_n N(t) + \zeta_s S(t) \leq K(t), \quad \{\zeta_n < 1\}, \{\zeta_s < 1\}, \{\zeta_s < \zeta_n\} \{\zeta_s < \zeta_n\}, \quad (4.1.6)$$

а динамика резервов $K(t)$ определится балансовым уравнением

$$\frac{d}{dt} K(t) = KdS(t) - rS(t) - KdL(t) + rL(t) + KdN(t) - Z(t) - \text{Tax}(t) . \quad (4.1.7)$$

4.1.2.5 Уплата налогов и выплата дивидендов

В рамках модели мы все налоги описываем как единую «налоговую нагрузку» ny на добавленную стоимость. Поскольку мы не учитываем материальных затрат банка, его добавленная стоимость совпадает с прибылью и равна разнице полученных и уплаченных процентов.

$$\text{Tax}(t) = ny (rL(t) - rS(t))$$

В соответствии с теорией межвременного равновесия с управлением капиталом, лежащей в основе модели [1], предполагаем, что собственники задают **пропорцию поступления дивидендов во времени**, ее мы обозначаем как $Ub_b(t)$. Если временная пропорция поступления дивидендов задана, то

$$Z(t) = Ub_b(t) \theta , \quad (4.1.8)$$

где θ – **курс капитала банка**.

Этим завершается описание ограничений банка, среди которых выделяются четыре балансовых группы: (4.1.1), (4.1.3), (4.1.5), (4.1.7). Все балансы – финансовые: в них $L(t), K(t)$ – активы, а $S(t), N(t)$ – пассивы банка. Первое из неравенств (4.1.6) включено в балансовую группу уравнения (4.1.7), а остальные являются условиями на параметры. Все ограничения-равенства, кроме балансов, представляют описание *ролей* банка. Мы считаем банк частной коммерческой организацией, действующей в интересах своих хозяев, поэтому *дивиденды* $Z(t)$ образуют *поток полезных расходов* банка, а *основными деньгами* для банка служат резервы $K(t)$ (см. разд. 3.2).

4.1.3 ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИОНАЛ И ТЕРМИНАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

4.1.3.1 Максимизация капитализации

В соответствии с теорией межвременного равновесия с управлением капиталом, лежащей в основе модели, целью деятельности банка считаем максимизацию капитализации $\theta K(t0)$. Мы не будем сопоставлять $K(t0)$ и θ с какими-либо наблюдаемыми величинами, а просто после решения задачи банка выберем величину $K(t0)$ так, чтобы максимальное значение **курса капитала банка** θ оказалось равным 1.

Технически удобно представить целевой функционал интегралом по времени в пределах отрезка планирования $[t0, T]$. Поэтому выражение $\theta K(t0)$ мы пере-

пишем в виде $\theta K(t0) = \int_{t0}^T \frac{\theta K(t0)}{T - t0} dt$ и получим выражение интересов агента:

максимизировать величину
$$\int_{t_0}^T \frac{\theta K(t_0)}{T - t_0} dt . \quad (4.1.9)$$

4.1.3.2 Упрощение ограничений и условие роста капитала

Вообще говоря, максимум функционала капитализации банка надо искать по постоянной θ и всем неиндексированным переменным, входящим в ограничения (4.1.1) - (4.1.8). Но систему ограничений можно автоматически упростить средствами системы ЭКОМОД, исключив «лишние» переменные из ограничений-равенств. В данном случае применение этой процедуры дает ядро из десяти существенных ограничений:

$$0 = LdL(t) - \left(\frac{d}{dt} L(t) \right), \quad \{ 0 \leq LdL(t) + \beta_k L(t) \}, \quad (4.1.10)$$

$$0 = SdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t) \right), \quad \{ 0 \leq SdS(t) + \beta_s S(t) \},$$

$$\{ 0 \leq NJ_n(t) - N(t) \}, \quad \{ 0 \leq K(t) - \zeta_n N(t) - \zeta_s S(t) \},$$

$$0 = SdS(t) - r_s(t) S(t) - LdL(t) + r_l(t) L(t) + \left(\frac{d}{dt} N(t) \right) - Z(t)$$

$$- ny (r_l(t) L(t) - r_s(t) S(t)) - \left(\frac{d}{dt} K(t) \right)$$

$$\{ 0 \leq NJ_n(t) - N(t) \}, \quad \{ 0 \leq K(t) - \zeta_n N(t) - \zeta_s S(t) \}, \quad (4.1.11)$$

на существенные планируемые переменные

$$LdL(t), L(t), S(t), SdS(t), N(t), K(t), \quad (4.1.12)$$

среди которых переменные $L(t), S(t), N(t), K(t)$ являются фазовыми. Выражения для исключенных переменных понадобятся только при сборке модели, поэтому мы приведем их в конце раздела.

Как указано в разд. 3.2, к ограничениям (4.1.10) - (4.1.11) добавляется граничное условие вида (3.2.3). Однако мы пока не знаем выражения капитала для банка, поэтому пока ставим просто условие роста линейной формы от фазовых переменных с единичным коэффициентом при основных деньгах $K(t)$:

$$(aL(t_0) L(t_0) + aS(t_0) S(t_0) + aN(t_0) N(t_0) + K(t_0)) e^{(\gamma(T-t_0))} \leq$$

$$aL(T) L(T) + aS(T) S(T) + aN(T) N(T) + K(T) \quad (4.1.13)$$

4.1.4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БАНКА

4.1.4.1 Условия оптимальности

Система ЭКОМОД позволяет автоматически провести преобразования: ввести набор двойственных переменных, составить условия дополняющей нежесткости (УДН) для неравенств, выписать функционал Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^T \frac{\theta K(t_0)}{T-t_0} + \psi_1(t) \left(LdL(t) - \left(\frac{d}{dt} L(t) \right) \right) + \phi_2(t) (LdL(t) + \beta_k L(t)) \\
 & + \psi_3(t) \left(SdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t) \right) \right) + \phi_4(t) (SdS(t) + \beta_s S(t)) \\
 & + \phi_5(t) (NJ_n(t) - N(t)) + \psi_6(t) \left(SdS(t) - r_s(t) S(t) - LdL(t) \right. \\
 & + r_l(t) L(t) + \left(\frac{d}{dt} N(t) \right) - Z(t) - ny(r_l(t) L(t) - r_s(t) S(t)) \\
 & - \left(\frac{d}{dt} K(t) \right) \left. \right) + \phi_7(t) (K(t) - \zeta_n N(t) - \zeta_s S(t)) dt + \Phi_1(aL(T) L(T) \\
 & + aN(T) N(T) + aS(T) S(T) + K(T) \\
 & - (aL(t_0) L(t_0) + aN(t_0) N(t_0) + aS(t_0) S(t_0) + K(t_0)) e^{(\gamma(T-t_0))} \Big)
 \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

исключить производные фазовых переменных интегрированием функционала по частям и, наконец, приравняв нулю вариацию функционала Лагранжа, составить систему достаточных условий оптимальности поведения банка. Эта система состоит из

- 5 условий дополняющей нежесткости (УДН), отвечающих терминальному ограничению и неравенствам на текущие значения планируемых переменных (здесь и далее условная запись $[a] \cdot [b]$ обозначает систему из трех соотношений $a \geq 0, b \geq 0, a \cdot b = 0$) :

$$\begin{aligned}
 & [\Phi_1] [aL(T) L(T) + aS(T) S(T) + aN(T) N(T) + K(T) \\
 & - (aL(t_0) L(t_0) + aS(t_0) S(t_0) + aN(t_0) N(t_0) + K(t_0)) e^{(\gamma(T-t_0))}] ,
 \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

$$\begin{aligned}
 & [\phi_7(t)] [K(t) - \zeta_n N(t) - \zeta_s S(t)] , \quad [\phi_5(t)] [NJ_n(t) - N(t)] , \\
 & [\phi_4(t)] [SdS(t) + \beta_s S(t)] , \quad [\phi_2(t)] [LdL(t) + \beta_k L(t)] ;
 \end{aligned}$$

- трех динамических уравнений исходной системы:

$$\begin{aligned}
 & 0 = LdL(t) - \left(\frac{d}{dt} L(t) \right) , \quad 0 = SdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t) \right) , \\
 & 0 = SdS(t) - r_s(t) S(t) - LdL(t) + r_l(t) L(t) + \left(\frac{d}{dt} N(t) \right) - Z(t) \\
 & - ny(r_l(t) L(t) - r_s(t) S(t)) - \left(\frac{d}{dt} K(t) \right)
 \end{aligned}$$

;

- шести условий оптимальности, полученных вариацией текущих значений планируемых переменных:

$$0 = \left(\left(\frac{d}{dt} \psi_6(t) \right) + \phi_7(t) \right) dK, \quad (4.1.16)$$

$$0 = (\psi_3(t) + \phi_4(t) + \psi_6(t)) dS dS, \quad 0 = \left(- \left(\frac{d}{dt} \psi_6(t) \right) - \phi_5(t) - \phi_7(t) \zeta_n \right) dN$$

$$0 = \left(\phi_4(t) \beta_s - \phi_7(t) \zeta_s + \psi_6(t) n y r_s(t) - \psi_6(t) r_s(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi_3(t) \right) \right) dS$$

$$0 = (\psi_1(t) + \phi_2(t) - \psi_6(t)) dL dL,$$

$$0 = \left(\phi_2(t) \beta_k + \psi_6(t) r_l(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t) \right) - \psi_6(t) n y r_l(t) \right) dL \quad (4.1.17)$$

- четырех условий оптимальности, полученных вариацией терминальных значений фазовых переменных:

$$0 = (-\psi_1(T) + \Phi_1 aL(T)) dL(T), \quad 0 = (-\psi_3(T) + \Phi_1 aS(T)) dS(T), \quad (4.1.18)$$

$$0 = (\psi_6(T) + \Phi_1 aN(T)) dN(T), \quad 0 = (-\psi_6(T) + \Phi_1) dK(T). \quad (4.1.19)$$

Для наглядности в условия оптимальности автоматически добавляются формальные множители типа dK , $dL(T)$ и т.п., показывающие, вариацией какой величины получено то или иное условие.

В задаче еще остается неизвестная постоянная θ . Чтобы ее найти, надо учесть выражение $Z(t) = U b_p(t) \theta$ для дивидендов и добавить к (4.1.15)-(4.1.19) условие равенства нулю производной функционала Лагранжа по θ . Однако без этого громоздкого условия удается обойтись

4.1.4.2 Капитал банка и регулярное решение задачи банка

Формула (3.2.4), примененная к (4.1.14), дает выражение для капитала банка

$$\Omega(t) = \frac{\psi_3(t) S(t)}{\psi_6(t)} - N(t) + \frac{\psi_1(t) L(t)}{\psi_6(t)} + K(t), \quad (4.1.20)$$

а из условий (4.1.15) - (4.1.17) стандартными преобразованиями получается уравнение вида (3.2.2) для этого капитала

$$\frac{d}{dt} \Omega(t) = \frac{\phi_5(t) N J_n(t)}{\psi_6(t)} - Z(t) - \frac{\Omega(t) \left(\frac{d}{dt} \psi_6(t) \right)}{\psi_6(t)}. \quad (4.1.21)$$

Из (4.1.18), (4.1.19), (4.1.20) следует, что задача банка разрешима, только если граничное условие (4.1.13) имеет вид (3.2.3). Как показано в [1] имеет смысл рассматривать только такие решения задачи агента, на которых терминальное ограничение активно (регулярные решения). Поэтому вместо (4.1.15) записываем

$$0 = \Omega(T) - \Omega(t_0) e^{(\gamma(T-t_0))}.$$

4.1.4.3 Нормировка двойственных переменных

Из условий $\Phi_1 > 0$, (4.1.16) и второго соотношения (4.1.19) следует, что двойственная переменная $\psi_6(t)$ к балансу основных денег банка строго положительна, как и должно быть согласно общей теории МРК. Полагая

$$\psi_6(t) = \xi(t), \quad \rho(t) = -\frac{1}{\xi(t)} \frac{d}{dt} \xi(t) \quad (4.1.22)$$

и, нормируя остальные двойственные переменные на $\xi(t)$, обнаруживаем, что соотношения, содержащие $\xi(t)$ и Φ_1 , отщепляются. Поскольку сами по себе двойственные переменные нам не нужны, эти соотношения можно отбросить. Это, как оказывается, позволяет не выписывать сложное условие оптимальности по θ .

Сохраняя для нормированных переменных прежние обозначения и подставляя в (4.1.15)-(4.1.20) выражение для $Z(t)$, приходим к более простой системе условий оптимальности:

$$aL(t) = \psi_1(t), \quad aS(t) = \psi_3(t), \quad aN(t) = -1, \quad 0 = \Omega(T) - \Omega(t_0) e^{(\gamma(T-t_0))}, \quad (4.1.23)$$

$$[\rho(t)] [K(t) - \zeta_n N(t) - \zeta_s S(t)], \quad [-\rho(t) (\zeta_n - 1)] [NJ_n(t) - N(t)], \quad (4.1.24)$$

$$[-1 - \psi_3(t)] [SdS(t) + \beta_s S(t)], \quad [-\psi_1(t) + 1] [LdL(t) + \beta_k L(t)], \quad (4.1.25)$$

$$\frac{d}{dt} L(t) = LdL(t), \quad \frac{d}{dt} S(t) = SdS(t),$$

$$\frac{d}{dt} K(t) = SdS(t) - LdL(t) - Z(t) + r_s(t) (ny - 1) S(t) + \left(\frac{d}{dt} N(t) \right) - r_l(t) (ny - 1) L(t),$$

$$\frac{d}{dt} \psi_3(t) = (\beta_s + \rho(t)) \psi_3(t) + r_s(t) + \beta_s + \rho(t) \zeta_s - r_s(t) ny,$$

$$\frac{d}{dt} \psi_1(t) = (\rho(t) + \beta_k) \psi_1(t) + ny r_l(t) - \beta_k - r_l(t)$$

$$\Omega(t) = \psi_3(t) S(t) + \psi_1(t) L(t) - N(t) + K(t).$$

Уравнению для капитала (4.1.21) придаем вид (3.2.2)

$$\frac{d}{dt} \Omega(t) = \rho(t) \Omega(t) - v(t) Z(t) + f(t), \quad (4.1.26)$$

где

$$v(t) = 1, \quad f(t) = -NJ_n(t) \rho(t) (\zeta_n - 1) \quad (4.1.27)$$

Информацию о коэффициентах уравнения для капитала банка собственник банка получает в рамках взаимодействия b – «Управление капиталом банка» (см. ниже разд. 4.6.9).

4.1.4.4 Режимы

Первое из УДН (4.1.24) говорит о том, что либо доходность $\rho(t)$ капитала банка нулевая, либо резервы находятся на минимальном уровне. Считая, что реализуется только второй режим со строго положительной доходностью, мы разрешаем это УДН и получаем вместо него неравенство на доходность и уравнение на резервы.

Неравенство $0 < \rho(t)$ позволяет разрешить второй сомножитель из УДН (4.1.24). Полученное выражение показывает, что, по крайней мере, в режиме с минимальными резервами банку выгодно привлекать как можно больше расчетных счетов – факт, на который мы уже ссылались при формулировке системы ограничений.

4.1.5 ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ БАНКА

На последнем шаге работы с описанием банка система ЭКОМОД приписывает всем планируемым переменным банка, а также постоянной θ индекс B . Окончательно поведение банка описывается в модели системой соотношений, состоящей из двух частей. Первая часть – выражения «лишних» переменных, исключенных при упрощении системы ограничений и полученные выражения коэффициентов уравнения для капитала:

$$Z_B(t) = Ub_b(t) \theta_B, \quad NdN_B(t) = \frac{d}{dt} N_B(t), \quad KdN_B(t) = NdN_B(t), \quad (4.1.28)$$

$$Tax_B(t) = ny (r_l(t) L_B(t) - r_s(t) S_B(t))$$

$$rS_B(t) = r_s(t) S_B(t) \quad KdS_B(t) = SdS_B(t), \quad KdL_B(t) = LdL_B(t). \quad (4.1.29)$$

$$v(t) = 1, \quad f(t) = -NJ_n(t) \rho(t) (\zeta_n - 1). \quad (4.1.30)$$

Вторая часть – это системы условий (4.1.24) – (4.1.26) с учетом частичного разрешения УДН:

$$\{0 < \rho_B(t)\}, \quad 0 = \Omega_B(T) - \Omega_B(t0) e^{(\gamma(T-t0))}$$

$$[-\psi_3(t) - 1] [SdS_B(t) + \beta_s S_B(t)], \quad [-\psi_1'(t) + 1] [LdL_B(t) + \beta_k L_B(t)], \quad (4.1.31)$$

$$0 = K_B(t) - \zeta_n N_B(t) - \zeta_s S_B(t), \quad 0 = NJ_n(t) - N_B(t)$$

$$\frac{d}{dt} L_B(t) = LdL_B(t), \quad \frac{d}{dt} S_B(t) = SdS_B(t)$$

$$\frac{d}{dt} K_B(t) = SdS_B(t) - LdL_B(t) - Ub_b(t) \theta_B + r_s(t) (ny - 1) S_B(t)$$

$$+ \left(\frac{d}{dt} N_B(t) \right) - r_l(t) (ny - 1) L_B(t)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_3(t) = (\beta_s + \rho_B(t)) \psi_3(t) + \rho_B(t) \zeta_s + \beta_s + r_s(t) - ny r_s(t)$$

$$\frac{d}{dt} \psi 1_B(t) = (\beta_k + \rho_B(t)) \psi 1_B(t) - \beta_k - r_l(t) + n y r_l(t) \quad (4.1.32)$$

$$\Omega_B(t) = \psi 3_B(t) S_B(t) - N_B(t) + \psi 1_B(t) L_B(t) + K_B(t) \quad (4.1.33)$$

Таблица 4.1.5.1 – список планируемых переменных агента «Банк».

Имя планируемой переменной	Размерность	Смысл
$L_B(t)$	деньги	срочный кредит
$LdL_B(t)$	деньги/время	нетто-кредиты
$KdL_B(t)$	деньги/время	нетто-кредиты
$rL_B(t)$	деньги/время	процентные платежи по кредитам
$S_B(t)$	деньги	депозиты
$SdS_B(t)$	деньги/время	поток вкладов
$KdS_B(t)$	деньги/время	поток вкладов
$rS_B(t)$	деньги/время	процентные платежи по депозитам
$N_B(t)$	деньги	остатки расчетных счетов инвестора
$NdN_B(t)$	деньги/время	поток расчетных счетов
$KdN_B(t)$	деньги/время	поток расчетных счетов
$Z_B(t)$	деньги/время	Дивиденды
$K_B(t)$	деньги	остатки корреспондентских счетов в ЦБ
$Tax_B(t)$	деньги/время	уплата налогов
$\psi 1_B(t), \psi 3_B(t)$	двойственные переменные	
$\rho_B(t), v_B(t), f_B(t)$	коэффициенты уравнения капитала банка	

Заметим, что в нормальной экономической ситуации, когда банк предлагает кредиты ($LdL_B(t) + \beta_l L_B(t) > 0$) и привлекает депозиты ($SdS_B(t) + \beta_s S_B(t) > 0$) из УДН (4.1.31) следует, что $\psi 1_B(t) = 1$, $\psi 3_B(t) = -1$ и введенное формально выражение для капитала (4.1.33) превращается в стандартное бухгалтерское выражение собственного капитала в виде разницы активов $K_B(t) + L_B(t)$ и пассивов $N_B(t) + S_B(t)$.

4.2 Блок «Производитель»

4.2.1 Функции Производителя в модели

Содержательно данный блок модели описывает в агрегированном виде деятельность **коммерческих нефинансовых организаций**. Описание поведения Производителя охватывает следующие аспекты его деятельности:

- наем рабочей силы у агента «Население»,
- инвестирование в восстановление и расширение основных фондов,
- производство и реализация продукции по легальным и теневым каналам,
- получение и возврат срочных банковских ссуд,
- уплата налогов государству,
- выплата доходов собственнику.

4.2.2 ОГРАНИЧЕНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ

4.2.2.1 Производство

Приведенные в разд. 2.1.2 результаты анализа статистических данных позволяют описать производственную деятельность Производителя соотношением (2.1.6)

$$Y(t) = A M(t) + B e^{(b(t-t_0))} R(t), \quad (5.1.1)$$

где $Y(t)$ - реальный ВВП, $R(t)$ - численность занятых, а $M(t)$ – эффективные фонды, динамика которых описывается уравнением (2.1.7)

$$\frac{d}{dt} M(t) = J(t) - \kappa M(t), \quad (5.1.2)$$

К соотношениям (5.1.1), (5.1.2) мы добавляем определение **балансовой стоимости основных фондов** $FC(t)$:

$$\frac{d}{dt} FC(t) = pJ(t) - \beta_a FC(t), \quad (5.1.3)$$

где $pJ(t)$ – **валовые инвестиции в текущих ценах**. Величина $FC(t)$ вводится для того, чтобы учесть амортизацию при определении кредитоспособности и налоговой базы производителя.

Соотношения (5.1.1) - (5.1.3) образуют группу внутренних ограничений производителя, которые в рамках системы материальных балансов модели «поглощают» потоки труда $R(t)$ и инвестиций $J(t)$ и порождают продукт $Y(t)$.

4.2.2.2 Получение ссуд

Считаем, что Производитель может брать срочные ссуды только у банка. Изменение задолженности Производителя описывается аналогично привлечению депозитов банком (см. разд. 4.1.2.2)

$$\frac{d}{dt} L(t) = LdL(t), \quad -\beta_k L(t) \leq LdL(t), \quad (5.1.4)$$

$$LdL(t) = KdL(t), \quad rL(t) = r_f(t) L(t).$$

Здесь $L(t)$ – величина задолженности, $LdL(t)$ – нетто-кредиты, $rL(t)$ – процентные платежи, $r_f(t)$ – норма процента, β_k – величина, обратная сроку ссуд.

Предполагается, что ссуды банка Производителю обеспечиваются балансовой стоимостью его основных фондов (5.1.3).

$$L(t) \leq FC(t).$$

Планируемые переменные Производителя $L(t)$, $LdL(t)$, $rL(t)$ обозначены здесь так же, как и родственные им планируемые переменные банка (см. разд. 4.1.2.1), но имеют другой смысл и в модели выступают как **другие перемен-**

ные. Переменные $L(t)$, $LdL(t)$, $rL(t)$ банка описывали **предложение ссуд** и при сборке модели получают обозначения $L_B(t)$, $LdL_B(t)$, $rL_B(t)$. Введенные здесь величины $L(t)$, $LdL(t)$, $rL(t)$ описывают **спрос** Производителя на те же ссуды и при сборке после индексации получают обозначения $L_J(t)$, $LdL_J(t)$, $rL_J(t)$.

Что же касается индексированных информационных переменных, например, $r_I(t)$ и параметров, например, β_k , то они **имеют одинаковый смысл и значение для всех агентов.**

4.2.2.3 Расчеты производителя и ограничения ликвидности

Предполагается, что для расчетов Производитель использует исключительно остатки расчетных счетов $N(t)$. Имея средства на расчетном счете, Производитель может дать указание банку о переводе средств тому или иному контрагенту или обналичить определенную сумму. Расчетный счет Производителя пополняется вследствие инкассации и переводов от других агентов. Результирующее изменение остатка расчетного счета обозначаем через $NdN(t)$.

В модели платежи описываются непрерывными потоками, но в реальности субъекты экономики осуществляют платежи дискретными порциями, и чтобы выплатить такую порцию, ее надо иметь в запасе на расчетном счете. В результате появляется потребность иметь определенную величину среднего запаса денег для обеспечения заданной средней интенсивности платежа. Она зависит от типичного размера и частоты платежей. При суммировании финансовых потоков по субъектам эта связь должна проявиться как связь суммарного запаса и суммарных затрат. Ее мы и вводим в модель. На этом соображении основана «количественная теория денег» а сама связь между потоками и запасами называется **ограничением ликвидности.**

Мы учтем ограничение ликвидности, связанное с **инвестиционными расходами** $pJ(t)$ и **выплатой зарплаты** $sR(t)$, записывая его как дополнительное ограничение к балансу остатков расчетных счетов:

$$\frac{d}{dt} N(t) = NdN(t), \quad \tau_y pJ(t) + \tau_s sR(t) \leq N(t). \quad (5.1.5)$$

Ограничение ликвидности выражено последним неравенством. Постоянные времени τ_y и τ_s задают характерные времена оборота денег в соответствующих сегментах системы денежного обращения. Мы относим их к настроечным параметрам модели.

Для финансовой системы в целом остатки расчетных счетов являются сбережениями. Банк производит реальные операции с деньгами (наличностью и остатками корреспондентских счетов) $KdN(t)$ по распоряжению Производителя:

$$NdN(t) = KdN(t).$$

Поток денег $KdN(t)$ – это сальдо поступлений от выручки $pY(t)$ и нетто-кредитов $KdL(t)$, а также расходов на зарплату $sR(t)$, процентные платежи $rL(t)$, налоговые платежи $Tax(t)$, инвестиционные расходы $pJ(t)$ и дивиденды $Z(t)$. Поскольку сам производитель остатков корсчетов не имеет, мы записываем ука-

занное равенство как баланс с нулевым запасом в системе балансов актива «корсчет»

$$0 = pY(t) - sR(t) - rL(t) + KdL(t) - Z(t) - \text{Tax}(t) - pJ(t) - KdN(t). \quad (5.1.6)$$

Мы считаем, что все покупатели и продавцы продукта ориентируются на одну и ту же рыночную цену $p_y(t)$. Рассматривая цену как информационную переменную Производителя, мы тем самым предполагаем, что **в среде производителей и торговцев**, представленных в модели агентом «Производитель», **доминируют отношения конкуренции, а не сговора о ценах**.

При оплате фондообразующего продукта $J(t)$ Производитель играет роль покупателя на рынке продукта y , поэтому

$$pJ(t) = p_y(t) J(t).$$

Когда Производитель продает товар $Y(t)$, он играет роль продавца на рынке продукта y и получает выручку

$$pY(t) = p_y(t) Y(t).$$

Когда Производитель оплачивает труд, он играет роль покупателя на рынке труда s и несет затраты

$$sR(t) = s_r(t) R(t).$$

где $s_r(t)$ – ставка заработной платы.

4.2.2.4 Уплата налогов и выплата дивидендов

Как и в случае банка (см. разд. 4.1.2.5), учитываем только налог на добавленную стоимость

$$\text{Tax}(t) = \nu_y pY(t).$$

и полагаем, что Производитель выплачивает собственнику дивиденды $Z(t)$ в заданной собственником временной пропорции $Ub_p(t)$, которую Производитель узнает в процессе взаимодействия p :

$$Z(t) = Ub_p(t)\theta, \quad (5.1.7)$$

где θ – курс капитала Производителя.

4.2.3 ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИОНАЛ И УСЛОВИЕ РОСТА КАПИТАЛА

Так же, как и задача банка (см. разд. 4.1.3), задача производителя ставится как задача максимизации капитализации

$$\int_{t0}^T \frac{\theta K(t0)}{T - t0} dt . \quad (5.1.8)$$

Полезным потоком для производителя служат дивиденды $Z(t)$, а основными деньгами – остатки расчетных счетов $N(t)$. Как и в задаче Банка к ограничениям задачи Производителя добавляется терминальное ограничение на рост линейной формы существенных фазовых переменных, подобное (4.1.13). Автоматизированное решение задачи Производителя происходит по той же схеме, что и приведенное в разд. 4.1.4 решение задачи Банка.

4.2.4 ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ

После вывода условий оптимальности, получения уравнения для капитала и исключения, по возможности, нормированных двойственных переменных и других упрощений и после присвоения планируемому переменным производителя и постоянной θ индекса J , получается систему соотношений, описывающих поведение производителя в модели. Эта система состоит из

- выражений «лишних» переменных:
 $pJ_J(t) = p_y(t) J_J(t)$, $NdN_J(t) = KdN_J(t)$, $rL_J(t) = r_l(t) L_J(t)$,
 $LdL_J(t) = KdL_J(t)$, $Z_J(t) = Ub_p(t) \theta_J$,
 $Tax_J(t) = ny p_y(t) Y_J(t)$, $pY_J(t) = p_y(t) \dot{Y}_J(t)$, $sR_J(t) = s_r(t) R_J(t)$,
 $v_J(t) = 1$, $f_J(t) = 0$,
- выражений коэффициентов уравнения капитала производителя:
 $v_J(t) = 1$, $f_J(t) = 0$,
- УДН:

$$\begin{aligned} & [\rho_J(t)] [N_J(t) - \tau_y p_y(t) J_J(t) - \tau_s s_r(t) R_J(t)], \\ & [\phi_J(t)] [FC_J(t) - L_J(t)], \\ & [-\psi_4 J_J(t) - 1] [KdL_J(t) + \beta_k L_J(t)], \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

определения **темпа инфляции** $\imath(t)$:

$$\frac{d}{dt} p_y(t) = \imath(t) p_y(t), \quad (5.1.11)$$

- преобразованных оставшихся после автоматического исключения ограничений-равенств:

$$\begin{aligned} Y_J(t) &= A M_J(t) + R_J(t) B e^{(b t - b t0)}, \\ 0 &= J_J(t) - \kappa M_J(t) - \left(\frac{d}{dt} M_J(t) \right), \\ 0 &= p_y(t) J_J(t) - \beta_a FC_J(t) - \left(\frac{d}{dt} FC_J(t) \right), \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

$$0 = KdL_f(t) - \left(\frac{d}{dt} L_f(t) \right),$$

$$0 = (Y_f(t) - ny Y_f(t) - J_f(t)) p_y(t) - Z_f(t) - s_r(t) R_f(t) - r_l(t) L_f(t) + KdL_f(t) - \left(\frac{d}{dt} N_f(t) \right), \quad (5.1.13)$$

- оставшихся условий обращения в ноль вариации функционала Лагранжа:

$$\rho_f(t) = -\frac{1}{\tau_s} - \frac{B(-1 + ny) e^{(b t - b t_0)} p_y(t)}{\tau_s s_r(t)}, \quad (5.1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_f(t) = & \frac{-A - \phi_6(t) + A ny + \kappa - \kappa \psi_3(t) + \psi_3(t) \beta_a - \iota(t) + \psi_3(t) \iota(t)}{\tau_y} \\ & + \rho_f(t)^2 - \frac{(-1 + \iota(t) \tau_y - \kappa \tau_y) \rho_f(t)}{\tau_y}, \\ \frac{d}{dt} \psi_4(t) = & \beta_k \psi_4(t) + \beta_k + r_l(t) + \phi_6(t) + \psi_4(t) \rho_f(t), \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_3(t) = \psi_3(t) \beta_a - \phi_6(t) + \psi_3(t) \rho_f(t),$$

- граничного условия роста капитала

$$0 = -\Omega_f(t_0) e^{(\gamma(T-t_0))} + \Omega_f(T), \quad (5.1.16)$$

- определения величины капитала производителя

$$\begin{aligned} \Omega_f(t) = & N_f(t) + \psi_3(t) FC_f(t) + \psi_4(t) L_f(t) \\ & + ((1 - \psi_3(t)) M_f(t) + \rho_f(t) \tau_y M_f(t)) p_y(t), \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Таблица 4.2.4.1 – список планируемых переменных агента «Производитель».

Имя планируемой переменной	Размерность	Смысл
$R_f(t)$	труд/время	поток труда
$J_f(t)$	продукт/время	инвестиции
$Y_f(t)$	продукт/время	выпуск
$FC_f(t)$	деньги	балансовая стоимость основных фондов
$pJ_f(t)$	деньги/время	затраты на инвестиции

Имя планируемой переменной	Размерность	Смысл
$M_j(t)$	продукт	основные фонды
$LdL_j(t)$	деньги/время	поток кредитов
$KdL_j(t)$	деньги/время	поток кредитов
$L_j(t)$	деньги	объем кредитов
$rL_j(t)$	деньги/время	процентные платежи по кредитам
$N_j(t)$	деньги	остатки расчетных счетов производителя
$NdN_j(t)$	деньги/время	поток расчетных счетов
$KdN_j(t)$	деньги/время	поток расчетных счетов
$sR_j(t)$	деньги/время	фонд заработной платы
$Z_j(t)$	деньги/время	дивиденды
$pY_j(t)$	деньги/время	выручка от продаж
$Tax_j(t)$	деньги/время	уплата налогов
$\psi^4_j(t)$ $\psi^2_j(t)$		двойственные переменные
$\rho_j(t), v_j(t), f_j(t)$		коэффициенты уравнения капитала производителя

4.3 Блок «Население»

4.3.1 ФУНКЦИИ НАСЕЛЕНИЯ И ОСОБЕННОСТИ ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ

Блок Население описывает в агрегированном виде деятельность **домашних хозяйств**. В модели описаны следующие функции домашних хозяйств:

- потребление части произведенного ВВП,
- сбережение в виде банковских депозитов,
- получение доходов в виде заработной платы, государственных пособий и процента по депозитам,
- предложение труда Производителю.

4.3.1.1 Предложение труда населением

В блоке «Население» численность занятых $R_r(t)$ задается как информационная, а не как планируемая переменная. Такое описание одинаково подходит к двум различным моделям взаимодействия производителей и домашних хозяйств на рынке труда. Можно считать, что имеется безработица, но домашние хозяйства не пытаются уменьшить ее, предлагая труд по меньшей цене, чем сложившаяся ставка зарплаты. Население заполняет рабочие места, ориентируясь на информацию $R_r(t)$ с рынка труда о спросе на труд. Напротив, можно считать, что все имеющиеся трудовые ресурсы заняты, а ставка заработной платы балансирует величину наличных трудовых ресурсов и спрос на труд со стороны инвестора. В этом случае $R_r(t)$ – это экзогенная переменная, описывающая независимую от

других переменных модели динамику трудовых ресурсов. Ниже используется вторая схема описания рынка труда.

4.3.1.2 Спрос на потребительский продукт

В отличие от классических моделей оптимизации сбережений [4], предлагаемая модель НЕ описывает ожидаемую полезность потребителя аддитивно-однородным функционалом, зависящим от потока покупок продукта. Причина этого в том, что использование классической формулы при верификации модели дало соотношение фаз колебаний потребления и инфляции, противоположному тому, которое наблюдается.

Оказалось, что этот дефект модели можно устранить, если предположить, что купленный продукт накапливается в виде запаса $Q_H(t)$, а потребляется в количестве $V_H(t)$, пропорциональном этому запасу с коэффициентом μ :

$$\frac{d}{dt}Q(t) = C(t) - V(t), \quad V(t) = \mu Q(t).$$

Покупки продукта $C(t)$ оплачиваются по цене $p_y(t)$, и в результате определяется поток потребительских расходов $pC(t)$

$$C(t) = \frac{pC(t)}{p_y(t)}.$$

4.3.1.3 Сбережения населения

С точки зрения финансовой системы процесс сбережения представляет собой кредитование банка населением и описывается он, с точностью до обозначений, так же, как кредитование производителя банком: депозиты $S(t)$ помещаются в банк на срок $\frac{1}{\beta_s}$ под процент $r_s(t)$. Депозиты растут за счет нетто-вкладов $SdS(t)$.

$$\frac{d}{dt}S(t) = SdS(t), \quad -\beta_s S(t) \leq SdS(t).$$

Депозиты $S(t)$ - это записи в сберкнижке или дебитной карте. Чтобы увеличить их на $SdS(t)$ надо внести деньги $NdS(t)$. Имея депозит, можно получить процентные платежи $NrS(t)$

$$SdS(t) = NdS(t), \quad NrS(t) = r_s(t) S(t).$$

4.3.1.4 Баланс доходов и расходов населения

Считаем, что население пользуется наличностью $A(t)$, которая, напомним, не отличается в модели от остатков корреспондентских счетов в ЦБ. Запас наличности убывает за счет потребительских расходов $pC(t)$ и нетто-вкладов $SdS(t)$, а растет – за счет доходов. Кроме упомянутых выше процентных платежей $NrS(t)$, в мо-

дели учитываются доходы за счет зарплаты $sR(t)$ и **трансфертов от государства** $SB_x(t)$

$$\frac{d}{dt} A(t) = -NdS(t) - pC(t) + sR(t) + NrS(t) + SB_x(t), \quad 0 \leq A(t).$$

Трансферты $SB_x(t)$ не планируются населением, а задаются государством. Содержательно этой модельной величине отвечает сумма государственных субсидий населению (пенсий, пособий, стипендий).

4.3.1.5 Предложение труда

Население служит источником трудовых ресурсов $R(t)$. Продавая их на рынке труда по ставке заработной платы $s_r(t)$, оно получает поток доходов $sR(t)$ (фонд заработной платы)

$$sR(t) = s_r(t) R(t), \quad R(t) = R_r(t).$$

Полезность потребления оценивается аддитивно-однородным функционалом. В результате получается задача максимизации ожидаемой полезности запаса

$$\int_{t0}^T \left(\frac{Q_H(t)}{Q0_H} \right)^{1-\eta} \frac{e^{-\Delta t}}{1-\eta} dt.$$

4.3.2 УПРОЩЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ, ТЕРМИНАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Упрощение ограничений на деятельность населения, средствами системы ЭКОМОД приводит к системе соотношений

$$0 = \frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right), \quad 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t)\right),$$

$$\{0 \leq NdS(t) + \beta_s S(t)\}, \{0 \leq A(t)\}$$

которые дополняются стандартными граничными условиями на рост капитала

$$\left(aQ(t0) Q(t0) + aS(t0) S(t0) + A(t0) \right) e^{(\gamma(T-t0))} \leq aQ(T) Q(T) + aS(T) S(T) + A(T) \quad (5.1.18)$$

Вариация функционала Лагранжа

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^T \frac{Q(t) \left(\frac{Q(t)}{Q_0} \right)^{(-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{Q_0 (1 - \eta)} \\
& + \psi_1(t) \left(\frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t) \right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right) \right) \\
& + \psi_2(t) \left(NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t) \right) \right) + \phi_3(t) (NdS(t) + \beta_s S(t)) + \phi_4(t) A(t) dt \\
& + \Phi_1 (aS(T) S(T) + aQ(T) Q(T) + A(T) - (aS(t_0) S(t_0) + aQ(t_0) Q(t_0) + A(t_0))) e^{(\gamma(T-t_0))}
\end{aligned}$$

дает достаточные условия оптимальности

$$\begin{aligned}
& \left[\Phi_1 [aS(T) S(T) + aQ(T) Q(T) + A(T) - (aS(t_0) S(t_0) + aQ(t_0) Q(t_0) + A(t_0))] e^{(\gamma(T-t_0))}, \right. \\
& \quad [\phi_4(t)] [A(t)], [\phi_3(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)], \\
& \quad 0 = \frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t) \right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right), 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t) \right), \\
& \quad 0 = \left(\frac{\left(\frac{Q(t)}{Q_0} \right)^{(-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{Q_0 (1 - \eta)} - \frac{\left(\frac{Q(t)}{Q_0} \right)^{(-\eta)} \eta e^{(-\Delta t)}}{Q_0 (1 - \eta)} - \psi_1(t) \mu + \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t) \right) \right] dQ, \\
& \quad 0 = \left(\frac{\psi_1(t) r_s(t)}{p_y(t)} + \left(\frac{d}{dt} \psi_2(t) \right) + \phi_3(t) \beta_s \right) dS, 0 = \left(-\frac{\psi_1(t)}{p_y(t)} + \psi_2(t) + \phi_3(t) \right) dNdS, \\
& \quad 0 = \left(-\frac{\psi_1(t) \left(\frac{d}{dt} p_y(t) \right)}{p_y(t)^2} + \frac{\frac{d}{dt} \psi_1(t)}{p_y(t)} + \phi_4(t) \right) dA, 0 = \left(-\frac{\psi_1(T)}{p_y(T)} + \Phi_1 \right) dA(T), \\
& \quad \left. 0 = (-\psi_2(T) + \Phi_1 aS(T)) dS(T), 0 = (-\psi_1(T) + \Phi_1 aQ(T)) dQ(T) \right].
\end{aligned}$$

Задача, описывающая поведение населения остается однородной, поэтому, для нее можно определить выражение капитала

$$\Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \frac{p_y(t) \psi_2(t) S(t)}{\psi_1(t)}.$$

и граничное условие (5.1.18) сведется к требованию роста этой величины в заданное число раз. Коэффициенты уравнения для капитала в данном случае не нужны, поскольку капиталом населения собственник не управляет.

4.3.3 ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ

После нормировки и исключения двойственных переменных, введения новой переменной $q(t)$ вместо доходности капитала $\rho(t)$: $\rho(t) = \frac{1}{q(t)} - \mu + \iota(t)$ и индексации планируемых переменных система условий оптимальности вместе с исключенными

ми на первом этапе явными выражениями приобретает вид следующей системы соотношений, описывающей поведение населения

$$\rho_H(t) = \frac{1}{q_H(t)} + \imath(t) - \mu, \quad C_H(t) = \frac{pC_H(t)}{p_y(t)}, \quad V_H(t) = \mu Q_H(t), \quad (5.1.19)$$

$$pC_H(t) = -\left(\frac{d}{dt} A_H(t)\right) - NdS_H(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S_H(t) + SB_x(t),$$

$$sR_H(t) = s_r(t) R_r(t), \quad NrS_H(t) = r_s(t) S_H(t), \quad SdS_H(t) = NdS_H(t).$$

$$\frac{d}{dt} p_y(t) = \imath(t) p_y(t),$$

$$0 = \Omega_H(T) - \Omega_H(t0) e^{(\gamma(T-t0))},$$

$$\left[\frac{1}{q_H(t)} + \imath(t) - \mu \right] [A_H(t)],$$

$$[1 - \psi_{2H}(t)] [NdS_H(t) + \beta_s S_H(t)],$$

$$\frac{d}{dt} A_H(t) = -\mu Q_H(t) p_y(t) - \left(\frac{d}{dt} Q_H(t)\right) p_y(t) - NdS_H(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S_H(t) + SB_x(t),$$

$$\frac{d}{dt} S_H(t) = NdS_H(t),$$

$$\frac{d}{dt} \psi_{2H}(t) = \left(\frac{1}{q_H(t)} + \imath(t) - \mu + \beta_s \right) \psi_{2H}(t) - r_s(t) - \beta_s,$$

$$\frac{d}{dt} q_H(t) = -1 + \left(\frac{\eta \left(\frac{d}{dt} Q_H(t) \right)}{Q_H(t)} + \Delta + \mu \right) q_H(t),$$

$$\Omega_H(t) = A_H(t) + p_y(t) Q_H(t) + \psi_{2H}(t) S_H(t). \quad (5.1.20)$$

Таблица 4.3.3.1 – Список планируемых переменных агента «Население».

Имя планируемой переменной	Размерность	Смысл
$C_H(t)$	продукт/время	покупки продукта
$pC_H(t)$	деньги/время	потребительские расходы
$V_H(t)$	продукт/время	потребление
$Q_H(t)$	продукт	запас продукта
$R_H(t)$	труд/время	поток труда
$NdS_H(t)$	деньги/время	прирост депозитов
$SdS_H(t)$	деньги/время	прирост депозитов
$NrS_H(t)$	деньги/время	процентные платежи по депозитам
$S_H(t)$	деньги	депозиты

Имя планируемой переменной	Размерность	Смысл
$sR_H(t)$	деньги/время	заработная плата
$A_H(t)$	деньги	корсчет
$q_H(t)$, $\psi_{2H}(t)$, $\rho_H(t)$		двойственные переменные

4.4 Блок «Собственник»

4.4.1 ФУНКЦИИ СОБСТВЕННИКА В МОДЕЛИ

Обычно в моделях межвременного равновесия собственность ассоциируется с собственностью на факторы производства – труд и основные производственные фонды [21]. Мы считаем, что **основные фонды находятся в собственности фирм-производителей, а сбережения домохозяйств отличаются от капитала собственников. Капитал определяется как приведенная величина будущих доходов**, которые собственники ожидают получить от принадлежащих им фирм.

Для моделирования такого разделения функций в моделях МРК выделяется особый макроагент – **Собственник**.

Функция экономического агента «Собственник» качественно отличается от функций других экономических агентов. В агрегированном виде блок модели «Собственник» описывает деятельность совокупности физических и юридических лиц, управляющих движением капитала между секторами и за пределы страны. В известных нам макромоделях других авторов, такого экономического агента не было.

На фоне повышенного интереса к фондовому рынку может показаться странным, что мы описываем движение капитала, не описывая этого рынка. На это следует заметить, что даже в развитых странах фондовый рынок служит, в основном, «барометром», оценивающим курсы акций. Курсы влияют на масштабное движение капитала, но оно происходит помимо фондового рынка, путем прямых инвестиций, слияний и выделений крупных корпораций. А в российской экономике фондовый рынок пока не играет даже роли барометра, в то же время периодически случаются массированные и быстрые перемещения капитала.

Мы предполагаем, что в настоящее время механизмы, определяющие перемещение капитала в масштабе секторов национальной экономики, в значительной степени транснациональны и индифферентны к обществу данной страны. Если рассматривать эти механизмы со стороны экономики Казахстана, то в теперешнем состоянии экономики они проявятся как увеличение иностранных активов собственников за счет доходов от капиталовложений внутри страны. В другом состоянии экономики, возможно, они проявились бы как увеличение вложений внутри страны за счет уменьшения иностранных активов. Короче говоря, это – механизмы вывоза или ввоза капитала.

В модели мы характеризуем иностранные активы суммой валюты, купленной за счет доходов от капитала, включая невозвращенную экспортную выручку. Начальное значение запаса валюты собственников для модели несущественно. В принципе мы допускаем уменьшение этого запаса, и даже отрицательные его зна-

чения. Содержательно это соответствует притоку иностранных инвестиций в Республику Казахстан.

В конечном счете, система ограничений блока «Собственник» описывает три функции собственника:

- определение объема вложений в капитал банка, которые определяют темп выплаты дивидендов банком;
- определение объема вложений в капитал инвестора, которые определяют темп выплаты дивидендов инвестором;
- определение величины чистых иностранных активов.

4.4.2 ОГРАНИЧЕНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СОБСТВЕННИКА

4.4.2.1 Управление капиталом банка

В модели банк принадлежит собственнику. Капитал банка $\Omega_B(t)$ образуется за счет прибыли, не распределенной в виде дивидендов $Z_B(t)$ и налогов $Tax_B(t)$. Предполагается, что собственник определяет величину капитала банка и дивидендов, но не управляет конкретными операциями банка. Принимая решения, он использует только информацию о доходности $\rho_B(t)$ капитала, эффективном налоге $v_B(t) - 1$ и косвенных доходах $f_B(t)$ (см. (4.1.22), (4.1.27)).

Следуя теоретической схеме межвременного равновесия с управлением капиталом, мы вводим величину накопленных вложений в капитал банка $Kb(t) = \frac{\Omega_B(t)}{\theta_B}$. Можно считать, что $Kb(t)$ – это количество «паев» или «акций» банка, а θ_B – цена одной акции. Впрочем, особого значения величина $Kb(t)$ в модели не имеет. Единственное содержательное требование, которое мы накладываем, исходя из смысла $Kb(t)$, состоит в том, что эта величина должна оставаться неотрицательной.

Поскольку θ_B – постоянная, величина $Kb(t)$ должна удовлетворять уравнению (см. (4.1.26))

$$\frac{d}{dt} Kb(t) = \rho_b(t) Kb(t) - zb(t) v_b(t) + \frac{f_b(t)}{\theta_b}, \quad 0 \leq Kb(t). \quad (5.2.1)$$

В модели нет рынка актива $Kb(t)$, так как собственники агрегированы в одного экономического агента. Поэтому мы не рассматриваем величину $Kb(t)$ как финансовый инструмент, и уравнение для этой величины относим не к балансовым, а к технологическим ограничениям.

В уравнении (5.2.1) вместо $\rho_B(t)$, $v_B(t)$, $f_B(t)$ мы используем сообщения о них: $\rho_b(t)$, $v_b(t)$, $f_b(t)$, которые собственник получает в процессе взаимодействия с банком, которое будет описано позже вместе с другими взаимодействиями. В том же процессе взаимодействия собственника и банка планируемая переменная собственника $zb(t)$ становится информационной переменной $Ub_b(t)$, задающей временную пропорцию выплаты дивидендов банком. Поэтому дивиденды банка, полученные собственником, определяются выражением

$$Zb(t) = \theta_b zb(t) .$$

4.4.2.2 Управление капиталом производителя

Описывается так же, как управление капиталом банка, с точностью до очевидной замены обозначений:

$$\frac{d}{dt} Kp(t) = \rho_p(t) Kp(t) - zp(t) v_p(t) + \frac{f_p(t)}{\theta_p} , \quad 0 \leq Kp(t) ,$$

$$Zp(t) = \theta_p zp(t) .$$

4.4.2.3 Балансы денег и валюты (иностранных активов)

Собственник расходует дивиденды на покупку валюты $V(t)$ по курсу $w_w(t)$:

$$wV(t) = w_w(t) V(t) ,$$

а купленную валюту запасет, образуя **чистые иностранные активы** $Q(t)$:

$$\frac{d}{dt} Q(t) = V(t) . \quad (5.2.2)$$

Мы **не накладываем на этот запас условия неотрицательности**. Содержательно отрицательные иностранные активы будут отвечать долгосрочным иностранным инвестициям в экономику РК.

Формально считаем, что дивиденды поступают на счет собственника $A(t)$ и оттуда расходуются:

$$\frac{d}{dt} A(t) = Zp(t) + Zb(t) - wV(t) , \quad 0 \leq A(t) . \quad (5.2.3)$$

В выписанных балансах нет потребительских расходов собственника. По нашему мнению, эти расходы слабо влияют на поведение собственника и на возможности вложения капитала. Как мы уже говорили, механизмы движения капитала не замыкаются в границах страны: извлеченную в разных странах прибыль используют не на потребительские расходы, если судить по огромным суммам, мгновенно перемещающимся по мировым финансовым рынкам.

Потребительские расходы собственников, однако, могут повлиять на внутренний рынок. Однако, эти потребительские расходы богатых, в основном, направлены на импортные товары, поэтому могут быть отнесены тоже к покупке валюты. Но остаются еще расходы на услуги внутри страны. Их мы действительно **не учитываем**.

4.4.2.4 Целевой функционал собственника

После нескольких проб в качестве целевого функционала собственника была выбрана величина

$$\int_{t0}^T \frac{Q(t) e^{(-\delta (t - t0))}}{Q0} dt . \quad (5.2.4)$$

Здесь $Q0$ – нормировочная постоянная, введенная из соображений размерности. Ее численное значение не влияет на решение задачи собственника и траекторию модели.

Более существенное значение имеет параметр δ , который обычно (и не очень удачно) называется *коэффициентом дисконтирования*. Традиционная трактовка коэффициента дисконтирования, как доходности альтернативных вложений, естественна, когда дисконтируется поток доходов или расходов. Здесь мы дисконтируем запас, и естественной трактовкой величины δ будет **мера риска**. При большом горизонте планирования $T - t0$ величину (5.2.4) можно рассматривать как ожидаемое значение запаса валюты $E_u \{Q(u)\}$ в случайный момент времени $u > t0$, имеющий плотность распределения вероятности $\delta e^{-\delta(u-t0)} du$. Задачу собственника можно, таким образом, рассматривать, как задачу об оптимизации рискованных капиталовложений $Kb(t)$, $Kp(t)$, которые имеют достаточно высокую доходность, но могут пропасть в случайный момент u . Форма распределения показывает, что u – это пуассоновский момент, а δ^{-1} – среднее время ожидания момента u . (В пуассоновском процессе оно не зависит от $t0$). Таким образом, чем больше δ , тем больше риск и тем раньше, при прочих равных условиях, собственник захочет получить запас Q .

Заметим, что задача собственника, как и задача производителя, оказывается *однородной* (масштабно инвариантной).

Чтобы использовать при решении задачи собственника ту же последовательность рассуждений, которые использованы при решении задач банка и производителя, выразим функционал собственника (5.2.4) через *поток полезных расходов*. Проинтегрировав (5.2.4) по частям, выразим производную $\frac{d}{dt} Q(t)$ и терминальное значение $Q(T)$ из баланса иностранных активов, тогда вместо (5.2.4) получится выражение

$$\int_{t0}^T \frac{(-e^{(-\delta T + \delta t0)} + e^{(-\delta t + \delta t0)}) V(t)}{\delta Q0} dt . \quad (5.2.5)$$

Теперь по аналогии с задачами банка и производителя приток валюты $V(t)$ можно считать потоком полезных расходов собственника.

4.4.3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОБСТВЕННИКА

Автоматическое упрощение ограничений (5.2.1) - (5.2.3), приводит к системе:

$$\{0 \leq Kb(t)\}, \quad \{0 \leq Kp(t)\}, \quad \{0 \leq A(t)\}, \quad (5.2.6)$$

$$0 = V(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right), \quad (5.2.7)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_b(t) Kb(t) - zb(t) v_b(t) + \frac{f_b(t)}{\theta_b} - \left(\frac{d}{dt} Kb(t) \right), \\ 0 &= \rho_p(t) Kp(t) - zp(t) v_p(t) + \frac{f_p(t)}{\theta_p} - \left(\frac{d}{dt} Kp(t) \right), \\ 0 &= \theta_p zp(t) + \theta_b zb(t) - w_w(t) V(t) - \left(\frac{d}{dt} A(t) \right) \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

на прямые переменные $Kp(t)$, $zp(t)$, $zb(t)$, $Kb(t)$, $Q(t)$, $A(t)$, $V(t)$, по которым надо максимизировать функционал (5.2.5). К этим ограничениям добавляется терминальное:

$$\begin{aligned} &(aKp(t0) Kp(t0) + aKb(t0) Kb(t0) + aQ(t0) Q(t0) + A(t0)) e^{(\gamma(T-t0))} \\ &\leq aKp(T) Kp(T) + aKb(T) Kb(T) + aQ(T) Q(T) + A(T) \end{aligned}$$

Выражение для капитала получается из члена, стоящего вне интеграла в проинтегрированном по частям функционале Лагранжа. Дифференциальное уравнение для капитала собственника в модели не используется, потому что собственник не должен передавать информацию о своей доходности. Как обычно, необходимые и достаточные условия регулярной оптимальности составляются из исходных уравнений, УДН к исходным неравенствам и условий максимума функционала Лагранжа. После исключения коэффициентов терминального условия и нормировки двойственных переменных они приобретают следующий вид:

$$0 = \left(AQ - \frac{e^{(-\delta T + \delta t0)}}{\delta Q0} + \frac{e^{(\delta t0)} e^{(-\delta t)}}{\delta Q0} - \xi(t) \right) dV, \quad (5.2.9)$$

$$[\phi6(t)] [A(t)], \quad [\phi4(t)] [Kp(t)], \quad [\phi2(t)] [Kb(t)], \quad (5.2.10)$$

$$\{0 < \xi(T)\}, \quad 0 = \Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))}, \quad \text{уравнения (5.2.7) - (5.2.8),}$$

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= w_w(t) \psi3(t) Kp(t) + A(t) + \frac{w_w(t) AQ Q(t)}{\xi(t)} + w_w(t) \psi1(t) Kb(t) \\ 0 &= \left(\phi6(t) - \frac{\rho(t)}{w_w(t)} \right) dA, \quad 0 = \left(\frac{\theta_p}{w_w(t)} - \psi3(t) v_p(t) \right) dzp, \\ 0 &= \left(\left(\frac{d}{dt} \psi3(t) \right) + \psi3(t) \left(-\frac{\rho(t)}{w_w(t)} + \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)^2} \right) w_w(t) + \psi3(t) \rho_p(t) + \phi4(t) \right) dKp \\ 0 &= \left(\frac{\theta_b}{w_w(t)} - \psi1(t) v_b(t) \right) dzb \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

$$0 = \left(\phi_2(t) + \psi_1(t) \rho_b(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t) \right) + \psi_1(t) \left(-\frac{\rho(t)}{w_w(t)} + \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)^2} \right) w_w(t) \right) dKb$$

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = \left(-\frac{\rho(t) \xi(t)}{w_w(t)} + \frac{\xi(t) \left(\frac{d}{dt} w_w(t) \right)}{w_w(t)^2} \right) w_w(t). \quad (5.2.12)$$

В данном случае нормировка двойственных переменных имеет особенности. Во-первых, в ограничения (5.2.6)-(5.2.8) входит только производная переменной $Q(t)$, поэтому двойственная переменная k (5.2.7) не меняется со временем. Она обозначается как AQ еще до нормировки. Во-вторых, уравнения упрощаются, если двойственную переменную k балансу денег (5.2.8) обозначить не через $\xi(t)$, как в предыдущих блоках, а через $\frac{\xi(t)}{w_w(t)}$.

Система условий оптимальности здесь позволяет исключить все двойственные переменные, включая доходность капитала собственника $\rho(t)$. Для этого достаточно выразить $\xi(t)$ из (5.2.9) и подставить в (5.2.12). В результате получается, что

$$\rho(t) = \delta - E(t) + \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)}, \quad E(t) = \frac{\delta (-e^{(-\delta(T-t))}) + \delta aa}{e^{(-\delta(t-t))} - e^{(-\delta(T-t))} + \delta aa}, \quad aa = AQQ0.$$

В случае общего положения должно выполняться строгое неравенство $\rho(t) > 0$, и первое УДН в (5.2.10) разрешается, превращаясь в равенство $A(t) = 0$.

4.4.4 ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СОБСТВЕННИКА

Исключая из системы (5.2.9) - (5.2.12) двойственные переменные, добавляя выражения переменных, исключенных на этапе упрощения ограничений и помечая (автоматически) планируемые переменные собственника индексом C , приходим к следующим соотношениям, описывающим поведение собственника в модели:

$$wV_C(t) = w_w(t) V_C(t), \quad Zp_C(t) = \theta_p zp_C(t), \quad Zb_C(t) = \theta_b zb_C(t), \quad (5.2.13)$$

$$\{ 0 < -e^{(-\delta T + \delta t)} + \delta aa \}, \quad \left\{ 0 < \delta - E(t) + \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)} \right\}$$

$$\left[\delta - E(t) + \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)} - \rho_b(t) + \frac{\frac{d}{dt} v_b(t)}{v_b(t)} \right] [Kb_C(t)], \quad (5.2.14)$$

$$\left[\delta - E(t) + \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)} - \rho_p(t) + \frac{\frac{d}{dt} v_p(t)}{v_p(t)} \right] [Kp_C(t)], \quad (5.2.15)$$

$$E(t) = \frac{\delta (-e^{(-\delta(T-t))}) + \delta aa}{e^{(-\delta(t-t))} - e^{(-\delta(T-t))} + \delta aa},$$

$$\frac{d}{dt} Kb_C(t) = \rho_b(t) Kb_C(t) - zb_C(t) v_b(t) + \frac{f_b(t)}{\theta_b}, \quad (5.2.16)$$

$$\frac{d}{dt} Kp_C(t) = \rho_p(t) Kp_C(t) - zp_C(t) v_p(t) + \frac{f_p(t)}{\theta_p}, \quad (5.2.17)$$

$$0 = \Omega_C(T) - \Omega_C(t0) e^{(\gamma(T-t0))}$$

$$\Omega_C(t) = \frac{w_w(t) aa Q_C(t) E(t)}{-e^{(-\delta T + \delta t0)} + \delta aa} + \frac{\theta_b Kb_C(t)}{v_b(t)} + \frac{\theta_p Kp_C(t)}{v_p(t)} \quad (5.2.18)$$

$$0 = \theta_p zp_C(t) + \theta_b zb_C(t) - w_w(t) V_C(t), \quad \frac{d}{dt} Q_C(t) = V_C(t), \quad A_C(t) = 0. \quad (5.2.19)$$

Таблица 4.4.4.1 – Список планируемых переменных агента «Собственник».

Имя планируемой переменной	Размерность	Смысл
$Kp_C(t)$	деньги	капиталовложения в производство
$Kb_C(t)$	деньги	капиталовложения в банк
$zp_C(t)$	деньги/время	программа выплаты дивидендов инвестора
$Zp_C(t)$	деньги/время	дивиденды от инвестора
$zb_C(t)$	деньги/время	программа выплаты дивидендов банка
$Zb_C(t)$	деньги/время	дивиденды от банка
$wV_C(t)$	деньги/время	расходы на покупку валюты
$A_C(t)$	деньги	остатки корреспондентских счетов
$Q_C(t)$	валюта	запас валюты
$V_C(t)$	валюта/время	покупка валюты

Капитал собственника (5.2.18) – это оценка его активов $Q_C(t)$, $Kb_C(t)$, $Kp_C(t)$. УДН (5.2.14), (5.2.15) задают бесконечно эластичные «функции предложения» $\tilde{B}_C(\cdot)$, $\tilde{P}_C(\cdot)$ капиталовложений $Kb_C(t) = \tilde{B}_C(\varphi 2_C(t))$, $Kp_C(t) = \tilde{P}_C(\varphi 4_C(t))$ в финансовый и реальный секторы экономики в зависимости от доходностей $\rho_p(t)$, $\rho_b(t)$ и эффективных налогов $v_p(t) - 1$, $v_b(t) - 1$ в секторах:

$$\varphi 2_C(t) = \delta - E(t) + \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)} - \rho_b(t) + \frac{\frac{d}{dt} v_b(t)}{v_b(t)}, \quad \varphi 4_C(t) = \delta - E(t) + \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)} - \rho_p(t) + \frac{\frac{d}{dt} v_p(t)}{v_p(t)}.$$

1. Если $\varphi 2_C(t) = 0$, $\varphi 4_C(t) = 0$, то доходности $\rho_p(t)$ и $\rho_b(t)$ достаточно велики и сбалансированы так, что собственнику безразлично распределение капитала между секторами. Заметим, что безразличие собственника еще не означает неопределенности распределения капиталов в модели. Условие сбалансиро-

ванности доходностей в силу полной системы соотношений модели может потребовать вполне определенных пропорций распределения капитала по отраслям.

2. Если $\varphi_{2c}(t) = 0$, $\varphi_{4c}(t) > 0$, то доходность производителя мала, и капитал сосредоточен в финансовом секторе.
3. Если $\varphi_{2c}(t) > 0$, $\varphi_{4c}(t) = 0$, то, наоборот, доходность банка мала, и капитал сосредоточен в реальном секторе.
4. Если $\varphi_{2c}(t) > 0$ и $\varphi_{4c}(t) > 0$, то доходности обоих секторов слишком малы по сравнению с риском δ , и капитал вывозится из страны. (Вывоз капитала с меньшей интенсивностью может происходить и в предыдущих случаях.)

4.5 Описания механизмов государственного управления, внешней торговли и международного сотрудничества

4.5.1 Принципы описания механизмов управления в модели

Механизмы государственного управления экономикой описываются в модели двумя способами: прямо и косвенно. Косвенное (с точки зрения структуры модели) воздействие состоит в установлении различных нормативов: ставок налогов и пошлин, нормы резервирования, нормы амортизации и т.д. Прямое – в реализации планов государственных закупок, выплат населению из бюджета, накоплению валютных резервов, финансированию дефицита бюджета. Эти функции в модели описываются в двух разных блоках модели, именуемых «Государство» и «Центральный банк». Во всех случаях государство в модели выступает как индивидуальный агент и его управляющая деятельность, как прямая, так и косвенная, описывается **сценарием государственной экономической политики**.

Международная торговля в модели описывается двумя сравнительно простыми блоками: «Экспортер» и «Импортер».

4.5.2 Блок «Государство»

В блоке «Государство», по существу, описывается деятельность министерства финансов по исполнению **широкого бюджета**. Его баланс объединяет балансы национального, региональных и местных бюджетов, а также внебюджетных фондов.

Часть сценария государственной экономической политики, относящаяся к блоку «Государство» включает в себя описания:

- программы закупки продуктов государственного потребления;
- программы трансфертов населению – выплат пособий населению и зарплаты бюджетникам за вычетом подоходного налога с этих выплат $Sub_c(t)$;
- программы выплат внешнего долга (или поступлений от внешних займов) По смыслу сценарий включает и задание величин налоговых ставок, но пока мы считаем их постоянными, поэтому формально они рассматриваются как параметры, а не планируемые переменные.

По сути, этот традиционный набор управлений государства описывает его как «лишнего потребителя». В таком описании положительное воздействие государственного потребления на уровень жизни и рост экономики может быть только косвенным, через эффект мультипликатора. Однако по существу в экономике гос-

ударство играет роль не потребителя, а **производителя общественных благ**, таких как порядок, справедливость, безопасность, гарантированный уровень жизни и т. п., а расходы на государственное потребление и зарплата государственных служащих являются оплатой факторов этого производства. В современной системе национальных счетов это отражается введением особой отрасли «Управление», выпускающей некий обобщенный общественный продукт. В некоторых моделях, например, в популярной модели Сидравского [21] государственное потребление включается как дополнительный к личному потреблению аргумент в функцию полезности потребителя.

Такое описание мы считаем в принципе правильным, но оно сильно усложняет модель, поэтому пока мы **не будем описывать явно в модели результат производственной деятельности государства, а учтем только его расходы на эту деятельность.**

Поскольку «Государство» в модели – индивидуальный агент, и его поведение описывается не решением оптимизационной задачи, а **сценарием** мы опустим его каноническую форму и просто прокомментируем упрощенную проиндексированную систему соотношений.

Доход широкого бюджета формируется за счет поступлений налогов. Государство назначает ставки налогов, а поступления оно прогнозирует, поэтому величина налоговых поступлений является информационной переменной $Tax_x(t)$.

Она определяется как сумма налоговых платежей всех агентов в соответствующем блоке взаимодействия, который будет разработан позже.

Расходы широкого бюджета состоят из выплат населению $Sub_G(t)$, расходов $py_G(t)$ на покупку продукта $G_G(t)$ и расходов (в рублях) на внешние выплаты $NdWr_G(t)$. Продукт $G_G(t)$ покупается по рыночной цене, поэтому

$$pG_G(t) = p_y(t) G_G(t). \quad (5.3.1)$$

Валюта для внешних выплат должна быть куплена на бирже по курсу $w_w(t)$, поскольку бюджет получает доход в рублях:

$$NdWr_G(t) = w_w(t) LdW_G(t).$$

Величины $LdW(t)$ и $NdWr(t)$ могут быть отрицательными, что отвечает поступлениям в бюджет потока денег $-NdWr(t)$ за счет внешних заимствований с последующей продажей полученной валюты на бирже. Купленная валюта $LdW(t)$ уходит за пределы страны, что в системе балансов описывается пустой группой технологических ограничений, потому что в канонической форме модели национальной экономики иностранная валюта формально рассматривается не как финансовый инструмент, а как **материальный актив**.

Положительная разница между доходами и расходами бюджета $NdB_G(t)$, так или иначе, покрывается **внутренними заимствованиями**:

$$NdB_G(t) = LdB_G(t),$$

накопление которых образует внутренний государственный долг $B_G(t)$:

$$\frac{d}{dt} B_G(t) = LdB_G(t), \{0 \leq B_G(t)\}.$$

Мы предполагаем, что кредитором выступает только Центральный банк, поэтому кредиты можно считать беспроцентными.

Перечисленные выше статьи доходов, расходов и заимствований изменяют остаток счетов государства $A_G(t)$:

$$\frac{d}{dt} A_G(t) = Tax_x(t) + LdB_G(t) - p_y(t) G_G(t) - w_w(t) LdW_G(t) - Sub_G(t), \{0 \leq A_G(t)\} \quad (5.3.2)$$

Эти счета ведет ЦБ, и их можно отнести к активу, который в модели называется «корсчет».

Здесь

Таблица 4.5.2.1 – Список планируемых переменных агента «Государство»⁷.

Имя планируемой переменной	Размерность	Смысл
$NdB_G(t)$	деньги/время	поток кредитов ЦБ
$LdB_G(t)$	деньги/время	поток кредитов ЦБ
$B_G(t)$	деньги	кредиты ЦБ
$NdWr_G(t)$	деньги/время	затраты на покупку валюты
$LdW_G(t)$	валюта/время	покупка валюты
$W_G(t)$	Валюта	запас валюты
$pG_G(t)$	деньги/время	затраты на покупку продукта
$G_G(t)$	продукт/время	покупка продукта
$Tax_G(t)$	деньги/время	поток налогов
$Sub_G(t)$	деньги/время	субсидии населению
$A_G(t)$	Деньги	корсчет

4.5.3 Блок «ЦЕНТРАЛЬНЫЙ БАНК» (ЦБ)

4.5.3.1 Функции ЦБ в модели

Теперь обсудим специфику описания ЦБ, как части системы государственно-го управления. В Казахстане и, как и в большинстве стран мира, ЦБ – это государственный орган, отвечающий за работу кредитно-денежной системы. ЦБ должен обеспечить:

- возможность проводить расчеты в национальной валюте при одновременном удержании инфляции в границах, заданных при составлении бюджета;

⁷ Для Государства, как и для других «не оптимизирующих» агентом, чье поведение задается сценарием, разделение переменных на планируемые и информационные достаточно условно.

- поддержание валютного курса в границах, заданных при составлении бюджета;
- устойчивость банковской системы и доступность кредитов.

Особенность ЦБ в том, что, кроме административных рычагов, таких, как лицензирование банков и привлечение в обязательном порядке банковских резервов, ЦБ располагает экономическими рычагами управления:

- держит валютные резервы и расчетные счета государства;
- может выдавать кредиты банкам и государству;
- выпускает собственные обязательства – эмитирует деньги.

Как коммерческая организация, ЦБ обязан обеспечивать собственную безубыточность и по закону обладает большой самостоятельностью маневрирования валютными резервами и кредитами, почему мы и выделяем в модели его описание в отдельный блок. Конечно, коммерческая деятельность ЦБ строится по особым правилам. ЦБ часто выступает как монополист – назначает ставки процентов по своим кредитам (учетные ставки), причем для разных категорий агентов эти ставки могут быть различны. Обязательства ЦБ – наличные деньги – обязательны к приему всеми субъектами как единственное законное средство платежа. На ЦБ не распространяются нормативы ликвидности, собственных средств и резервирования, которые обязательны для коммерческих банков. В то же время ЦБ не преследует коммерческой выгоды – не копит капитал, а прибыль перечисляет в бюджет.

Следует подробнее обсудить кредитование государства. Вообще говоря, государство платит процент по этим кредитам и должно было бы учитывать это при составлении бюджета. Однако процентные платежи образуют прибыль ЦБ, которая перечисляется обратно в бюджет. Именно поэтому мы считали кредиты ЦБ государству беспроцентными.

В реальности этот эффект сводит на нет идею «разделения финансовой власти», выраженную в выделении ЦБ как частично коммерческой организации. Через беспроцентные заимствования у ЦБ министерство финансов, исполняющее бюджет, получает фактическое право неограниченной эмиссии, оставляя на ЦБ формальную ответственность за стабильность системы денежного обращения⁸. По этой причине систематическое кредитование бюджета Центральным банком запрещено правилами МВФ. В модели мы формально ввели его, имея в виду, что до кризиса потребность в таких кредитах не возникала, а во время кризиса это правило нарушили сами США, которые раньше больше всех требовали его соблюдения.

В модели «Центральный банк» – это индивидуальный агент. Его поведение описывается не решением оптимизационной задачи, а **сценарием**

- изменения обменного курса тенге $w_w(t)$.

Динамика остальных операций определяется сценарием и спросом государства на кредиты.

⁸ Заметим, что такой проблемы, видимо, не возникает в США и Великобритании, где функции центральных банков исполняют *частные* банки с особым статусом – Федеральная резервная система США и Национальный банк Англии, которые не перечисляют свою прибыль в бюджет.

4.5.3.2 Описание операций ЦБ

ЦБ покупает валюту в объеме $V(t)$ по заданному сценарию курса $w_w(t)$, что требует расходов

$$wV(t) = w_w(t) V(t)$$

При $V(t) < 0$ это соотношение описывает продажу валюты (валютную интервенцию) на бирже. Купленная валюта накапливается в **золотовалютных резервах** $R(t)$:

$$\frac{d}{dt} R(t) = V(t)$$

Считаем, что ЦБ дает государству беспроцентный кредит по его запросу. Эту величину ЦБ узнает во взаимодействии «Кредитование государства», (см. ниже), поэтому величина кредита $KGL_g(t)$ – информационная переменная ЦБ. Кредит выдается деньгами $KG(t)$:

$$KG(t) = KGL_g(t)$$

Сумма выданных кредитов накапливается в виде внутреннего долга $L(t)$:

$$\frac{d}{dt} L(t) = KGL_g(t)$$

Расходы ЦБ на покупку валюты и кредитование государства покрываются эмиссией $E(t)$, что описывается формальным балансом «расчетного счета ЦБ в себе самом», остаток которого по определению равен 0:

$$0 = E(t) - KG(t) - wV(t)$$

Правильность этого соотношения для эмиссии будет доказана после сборки модели, когда окажется, что $E(t)$ равна суммарному приросту денег у всех остальных агентов. Это и означает, что ЦБ является единственным эмитентом денег в экономике.

В качестве денег мы рассматриваем денежную базу (сумму наличности и банковских резервов). Ее величина $MB(t)$ равна накопленной эмиссии:

$$\frac{d}{dt} MB(t) = E(t)$$

Величина эмиссии $E(t)$ может быть и отрицательной, если деньги изымаются из обращения и денежная база сокращается. ♦

4.5.3.3 Упрощение модели ЦБ и баланс ЦБ в остатках

Проведем некоторые упрощения, чтобы выделить интересные соотношения. После исключения «лишних» переменных остаются три уравнения

$$\frac{d}{dt} R(t) = V(t), \quad \frac{d}{dt} L(t) = KGL_g(t), \quad \frac{d}{dt} MB(t) = KGL_g(t) + w_w(t) V(t), \quad (5.3.3)$$

которые определяют объем золотовалютных резервов $R(t)$, внутреннего долга $L(t)$ и выпущенной ЦБ в обращение денежной базы $MB(t)$, по заданным начальным условиям – заданному спросу государства на кредиты $KGL_g(t)$ и заданному курсу валюты $w_w(t)$. Формально неопределенной остается величина $V(t)$, но фактически она определяется предложением валюты на бирже со стороны экспортеров (см. отчет Андреева М.Ю.).

Если исключить из (5.3.3) величину $V(t)$ и проинтегрировать последнее соотношение, то получится баланс ЦБ:

$$\int KGL_g(t) dt + \int w_w(t) \left(\frac{d}{dt} R(t) \right) dt = MB(t),$$

в котором слева стоят активы: внутренний долг и золотовалютные резервы, оцененные в рублях по затратам на их создание, а справа – пассив: деньги, выпущенные в обращение. Чтобы привести этот баланс к стандартному виду [4], надо перейти от оценки резервов по затратам к их оценке по текущему курсу, что можно сделать, проинтегрировав по частям второе слагаемое в левой части. В результате баланс ЦБ примет вид

$$\int KGL_g(t) dt + w_w(t) R(t) = MB(t) + \int \left(\frac{d}{dt} w_w(t) \right) R(t) dt.$$

Теперь на стороне активов мы видим оценку резервов по текущему курсу $w_w(t) R(t)$, а на стороне пассивов появляется составляющая капитала – нерас-

пределенная прибыль от переоценки резервов $\int \left(\frac{d}{dt} w_w(t) \right) R(t) dt$.

Если бы мы ставили задачу детально описать деятельность ЦБ, то надо было бы учесть на стороне пассивов резервы банков и счета бюджета, а также прибыль от кредитования государства и расходование этой прибыли на собственные нужды ЦБ как юридического лица и на перечисления в бюджет. Но поскольку детальное описание ЦБ и вообще государственных финансов не входит в наши цели, мы ограничиваемся приведенным упрощенным балансом. ♦

4.5.3.4 Описание деятельности ЦБ

После индексации получается следующая система соотношений, описывающая деятельность ЦБ в модели:

$$E_{CB}(t) = KGL_g(t) + w_w(t) V_{CB}(t), \quad KG_{CB}(t) = KGL_g(t), \quad wV_{CB}(t) = w_w(t) V_{CB}(t), \quad (5.3.4)$$

$$\frac{d}{dt} R_{CB}(t) = V_{CB}(t), \quad \frac{d}{dt} L_{CB}(t) = KGL_g(t), \quad \frac{d}{dt} MB_{CB}(t) = KGL_g(t) + w_w(t) V_{CB}(t). \quad (5.3.5)$$

Здесь использованы обозначения, описанные в таблице 4.5.3.4.1.

Таблица 4.5.3.4.1 – Список планируемых переменных агента «Центральный банк».

Имя планируемой переменной	Размерность	Смысл
$V_{CB}(t)$	валюта/время	покупка валюты
$wV_{CB}(t)$	деньги/время	затраты на покупку валюты
$R_{CB}(t)$	валюта	запас валюты
$L_{CB}(t)$	деньги	кредиты государству
$KGL_{CB}(t)$	деньги/время	поток кредитов государству
$KG_{CB}(t)$	деньги/время	поток кредитов государству
$E_{CB}(t)$	деньги/время	эмиссия
$MI_{CB}(t)$	деньги	объем денежной массы

4.5.4 Блок «ЭКСПОРТЕР»

4.5.4.1 Функции экспортера в модели

Экспорт Республики Казахстан в основном представляет собой сырье. Мировой рынок сырья регулируется контрактами и картельными соглашениями. Кроме того, сырьевой экспорт отличают большие физические объемы, поэтому его реализация требует специализированных транспортных систем. В силу этого для сырьевого экспорта всегда оказываются существенными **спрос и транспортные ограничения**. По этим причинам мы сочли возможным считать в модели и объем, и цену экспорта (в иностранной валюте) величинами заданными сценарием. При прогнозных расчетах этот сценарий должен включать независимый от модели экспертный прогноз изменения цены и объема экспорта.

Формально можно представлять себе индивидуального агента «Экспортер», который реализует заданную сценарием программу экспорта и продает на валютной бирже вырученную валюту. Регулирование этого рынка осуществляется установлением **экспортной пошлины**.

Мы приняли существенное предположение, что **валюты ввозится ровно столько, сколько нужно, чтобы оплатить экспортный продукт на внутреннем рынке**.

В модели экспортер выполняет следующие функции:

- покупает экспорт по внутренним ценам
- продает экспорт по внешним ценам
- продает валюту
- платит экспортную пошлину

кроме этого оказалось технически удобным формально приписать экспортеру еще функцию

- конвертации валюты, привлекаемой банками в качестве депозитов нерезидентов.

4.5.4.2 Описание деятельности Экспортера

Покупка экспортного продукта для экспорта $\text{Exp}(t)$ на внутреннем рынке (т.е. по внутренней цене $p_y(t)$) требует затрат

$$p\text{Exp}(t) = p_y(t) \text{Exp}(t) .$$

И уплаты пошлины по ставке ne в размере

$$\text{Tax}(t) = ne \, p\text{Exp}(t) .$$

При продаже на мировом рынке по сложившейся там цене $pex(t)$ экспортный продукт приносит валютную выручку

$$w\text{Exp}(t) = pex(t) \text{Exp}(t) .$$

Как уже говорилось, мы приписываем экспортеру деятельность по конверсии иностранных депозитов. Приток/отток иностранных депозитов $\text{VF}(t)$ будем считать экзогенно заданной величиной. Процентную ставку $r_s(t)$ и обратную дюрацию $\beta_s(t)$ приравниваем внутренним. Тогда баланс иностранных депозитов, выраженный в национальной валюте, выглядит как

$$\frac{d}{dt} S(t) = \text{VF}(t) - \text{HF}(t) .$$

Чистый приток национальной валюты связанный с депозитами и подлежащей конверсии в валюту $\text{WdS}(t)$ задается как

$$\text{WdS}(t) = \text{VF}(t) - \text{HF}(t) ,$$

$$rS(t) = r_s(t) S(t) ,$$

$$\text{HF}(t) = \beta_f S(t) .$$

Этот поток национальной валюты возникает за счет продажи на бирже по курсу $w_w(t)$ иностранной валюты $V(t)$

$$wV(t) = w_w(t) V(t) ,$$

$$0 = wV(t) - \text{WdS}(t) + rS(t) - \text{Tax}(t) - p\text{Exp}(t) .$$

После упрощения ограничений и индексации получаем следующую систему уравнений, описывающую деятельность экспортера

$$V_{EX}(t) = \frac{-\left(\frac{d}{dt} S_{EX}(t)\right) + r_s(t) S_{EX}(t) - ne p_y(t) Exp_{EX}(t) - p_y(t) Exp_{EX}(t)}{w_w(t)}, \quad (5.3.6)$$

$$VF_{EX}(t) = \beta_f S_{EX}(t) + \left(\frac{d}{dt} S_{EX}(t)\right), \quad WdS_{EX}(t) = \frac{d}{dt} S_{EX}(t), \quad wV_{EX}(t) = w_w(t) V_{EX}(t),$$

$$\begin{aligned} Tax_{EX}(t) &= ne p_y(t) Exp_{EX}(t), \quad wExp_{EX}(t) = pex_{EX}(t) Exp_{EX}(t), \\ pExp_{EX}(t) &= p_y(t) Exp_{EX}(t), \quad rS_{EX}(t) = r_s(t) S_{EX}(t), \\ HF_{EX}(t) &= -\left(\frac{d}{dt} S_{EX}(t)\right) + VF_{EX}(t), \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Таблица 4.5.4.2.1 – Список планируемых переменных агента «Экспортер».

Имя планируемой переменной	Размерность	Смысл
$V_{EX}(t)$	валюта/время	предложение валюты экспортером
$VF_{EX}(t)$	валюта /время	предложение валюты нерезидентами
$S_{EX}(t)$	деньги	депозиты нерезидентов
$wV_{EX}(t)$	деньги/время	выручка экспортера от продажи валюты
$w_w(t)$	деньги/валюта	курс валюты
$Exp_{EX}(t)$	продукт	экспорт
ne	б/р	ставка экспортной пошлины
$Tax_{EX}(t)$	деньги /время	платежи экспортной пошлины
$pExp_{EX}(t)$	деньги/время	затраты на покупку экспортного продукта
$rS_{EX}(t)$	деньги/время	процентные платежи по депозитам
$HF_{EX}(t)$	деньги/время	возврат депозитов

4.5.5 Блок «ИМПОРТЕР»

В рамках модели агент «Импортер» выполняет следующие функции:

- покупает продукт (импорт) по внешним ценам,
- продает этот импорт по внутренним ценам,
- покупает валюту,
- платит пошлины,
- вывозит валютную прибыль за границу.

Объем импорта $\text{Imp}(t)$ задается эконометрическим соотношением (2.1.9)

$$\text{Imp}(t) = AI \left(\frac{CH_y(t)}{CI} \right)^{ci} \left(\frac{J_y(t)}{JI} \right)^{gi} \left(\frac{w_w(t)}{WI} \right)^{di}$$

где $CH_y(t)$ – объем потребления, $J_y(t)$ – объем накопления, а $w_w(t)$ – курс национальной валюты, AI, CI, JI, WI – постоянные, определенные эконометрическим оцениванием.

В принципе величины накопления и потребления в приведенной выше формуле совпадают с теми, которые определяются в блоках «Производитель» и «Население», но по правилам записи канонической формы один агент не может использовать непосредственно планируемые переменные другого агента. Он должен ссылаться на «наблюдения» этих переменных $CH_y(t) = C_H(t)$, $J_y(t) = J_J(t)$. Эти тривиальные соотношения для структурной четкости включаются в описания блоков взаимодействий, а после сборки и проверки корректности модели автоматически исключаются.

Продажа продукта по внутренней цене $p_y(t)$ приносит импортеру валовую выручку

$$p\text{Imp}(t) = p_y(t) \text{Imp}(t)$$

в национальной валюте.

Из этой суммы оплачивается импортная пошлина в объеме $\text{Tax}(t)$ по ставке ni (ставку надо брать не номинальную, а эффективную – см. отчет Жуковой А.А.) :

$$\text{Tax}(t) = ni \, p\text{Imp}(t) .$$

Чистая выручка импортера в национальной валюте $wV(t)$ определяется из баланса

$$0 = p\text{Imp}(t) - \text{Tax}(t) - wV(t) .$$

Эта выручка целиком конвертируется в иностранную валюту $V(t)$ по курсу $w_w(t)$

$$wV(t) = w_w(t) V(t) .$$

Из баланса валюты

$$0 = V(t) - w\text{Imp}(t) - PV(t)$$

определяется чистый вывоз капитала импортером $PV(t)$.

После упрощения и индексации планируемых переменных, соотношения блока «Импортёр» приобретают вид:

$$Tax_{IM}(t) = ni \, p_y(t) \, Imp_{IM}(t), \quad (5.3.8)$$

$$PV_{IM}(t) = - \frac{-p_y(t) \, Imp_{IM}(t) + Tax_{IM}(t)}{w_w(t)} - pim_{IM}(t) \, Imp_{IM}(t),$$

$$V_{IM}(t) = pim_{IM}(t) \, Imp_{IM}(t) + PV_{IM}(t), \quad wV_{IM}(t) = p_y(t) \, Imp_{IM}(t) - Tax_{IM}(t),$$

$$pImp_{IM}(t) = p_y(t) \, Imp_{IM}(t), \quad wImp_{IM}(t) = pim_{IM}(t) \, Imp_{IM}(t),$$

$$Imp_{IM}(t) = AI \left(\frac{CH_y(t)}{CI} \right)^{ci} \left(\frac{J_y(t)}{JI} \right)^{gi} \left(\frac{w_w(t)}{WI} \right)^{di}. \quad (5.3.9)$$

Здесь использованы обозначения, описанные в таблице 4.5.5.1.

Таблица 4.5.5.1 – Список планируемых переменных агента «Импортёр».

Имя планируемой переменной	Размерность	Смысл
$wV_{IM}(t)$	валюта/время	спрос импортёра на валюту
$pim_{IM}(t)$	валюта /продукт	мировая цена импорта
$wImp_{IM}(t)$	валюта	затраты на импорт
$pImp_{IM}(t)$	деньги/время	выручка от импорта
$w_w(t)$	деньги/валюта	курс валюты
$Imp_{IM}(t)$	продукт	импорт
ni	б/р	ставка импортной пошлины
$Tax_{IM}(t)$	деньги /время	платежи импортной пошлины
$PV_{IM}(t)$	валюта /время	прибыль импортёра

4.6 Описание взаимодействий агентов

Связь блоков агентов описывается следующими условиями передачи информации и условиями равновесия отдельных рынков. Новых переменных при этом по сути не появляется, но наиболее важным переменным присваиваются обозначения без индексов. **Экзогенные переменные и только они получают имена без индексов, но с аффиксом «_s».**

4.6.1 Рынок продукта y

Балансируются предложение продукта Производителем $Y_J(t)$ и Импортёром $Imp_{IM}(t)$ и спрос со стороны тех же производителей $J_J(t)$, государства $G_G(t)$, экспортёров $Exp_{EX}(t)$ $Exp_{EX}(t)$

$$0 = Y_J(t) - J_J(t) - G_G(t) - Exp_{EX}(T) + Imp_{IM}(t) - C_H(t) \quad (5.4.1)$$

Балансируются и идущие в противоположном направлении платежи

$$0 = pJ_J(t) + pG_G(t) + pC_H(t) - pImp_{IM}(t) - pY_J(t) \quad (5.4.2)$$

Составляющим макроэкономического баланса и индексам цен присваиваются обозначения без индексов

$$Y_J(t) = Y(t), \quad J_J(t) = J(t), \quad G_G(t) = G_s(t), \quad Exp_{EX}(t) = Exp_s(t), \\ C_H(t) = C(t), \quad M_J(t) = M(t), \quad Imp_{IM}(t) = Imp(t), \quad p_y(t) = p(t), \quad pim_{IM}(t) = pim_s(t)$$

Таким образом, в рассматриваемой модели объем экспорта считается заданным экзогенно и не зависит от усилий экономических агентов страны. Такое предположение можно считать адекватным для **сырьевой экономики**, какими, к сожалению, до сих пор являются экономики Казахстана и России.

4.6.2 Рынок труда r

Для Казахстана (как и ранее для России) нам не удалось найти удовлетворительного замкнутого описания этого рынка. Отчасти это связано с его явной неразвитостью (ставки зарплаты заведомо сильно различаются по отраслям и регионам), отчасти – с отсутствием надежных данных о фактически выплаченной заработной плате. Можно лишь отметить, что общепринятое в мировой практике описание этого рынка с помощью представлений об «отвращении к труду» и «человеческом капитале» для РК определенно не подходит.

В связи с этим в модели нам пришлось считать труд экзогенной величиной $R_s(t)$. Выше в разд. 4.3.1.1 мы уже считали труд информационной переменной $R_r(t)$. Осталось приравнять их друг другу и спросу на труд со стороны производителя

$$0 = -R_r(t) + R_r(t), \\ R_r(t) = R_s(t)$$

Навстречу потоку труда от Населения к Производителю идет поток заработной платы

$$0 = -sR_H(t) + sR_J(t)$$

4.6.3 РЫНОК КРЕДИТОВ l

Выполняется баланс между спросом на банковские ссуды со стороны производителей $L_P(t)$ и предложением ссуд банками $L_B(t)$. Общее значение этих величин обозначается через $L(t)$, а кредитный процент обозначается как $r(t)$

$$L_B(t) = L_J(t) = L(t), \quad r_l(t) = r(t).$$

Условие равновесия на рынке кредитов выражается в потоках и имеет вид

$$0 = -LdL_B(t) + LdL_J(t). \quad (5.4.3)$$

Когда кредитное соглашение достигнуто, производитель велит списать с его расчетного счета проценты и начислить кредиты

$$\begin{aligned} 0 &= -rL_B(t) + rL_J(t), \\ 0 &= -KdL_J(t) + KdL_B(t). \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

4.6.4 РЫНОК ДЕПОЗИТОВ s

Выполняется баланс между спросом банков на депозиты $S_B(t)$ и предложением депозитов населением $S_H(t)$ и нерезидентами $S_{EX}(t)$. Общее значение этих величин обозначается через $S(t)$, а депозиты нерезидентов – через $Sf_s(t)$. Эта величина в модели экзогенная.

$$S_B(t) = S(t), \quad S_{EX}(t) = Sf_s(t).$$

Условие равновесия на рынке депозитов выражается в потоках и имеет вид

$$0 = SdS_B(t) - SdS_H(t) - VF_{EX}(t) + HF_{EX}(t).$$

Внося вклады, клиенты приносят в банк деньги и извлекают проценты

$$0 = -KdS_B(t) + NdS_H(t) + WdS_{EX}(t), \quad 0 = rS_B(t) - rS_{EX}(t) - NrS_H(t).$$

4.6.5 РЫНОК ВАЛЮТЫ w

Выполняется баланс между спросом на иностранную валюту со стороны собственников $V_C(t)$, импортеров $V_{IM}(t)$ и ЦБ $V_{CB}(t)$ и предложением иностранной валюты экспортерами $V_{EX}(t)$ и вкладчиками-нерезидентами $V_C(t)$ и правительством, делающим внешние займы $LdW_G(t)$

$$0 = V_{EX}(t) - V_C(t) - V_{CB}(t) - LdW_G(t) - V_{IM}(t).$$

Навстречу идут соответствующие потоки национальной валюты

$$0 = wV_C(t) + wV_{CB}(t) - wV_{EX}(t) + wV_{IM}(t) + NdWr_G(t).$$

Иностранные займы $LdW_G(t)$ и курс национальной валюты $w_w(t)$ являются в модели экзогенными переменными, задаваемыми в рамках сценария государственной экономической политики

$$LdW_G(t) = VG_s(t), \quad w_w(t) = w_s(t).$$

Накапливаемым ЦБ международным резервам присваивается безындексное обозначение

$$R_{CB}(t) = ZVR(t).$$

4.6.6 РАЗМЕЩЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ДОЛГА g

Предполагается, что внутренний государственный долг размещается в ЦБ

$$0 = -KGL_{CB}(t) + LdB_G(t).$$

В результате в бюджет поступают вновь выпущенные ЦБ деньги

$$0 = -NdB_G(t) + KG_{CB}(t).$$

Объем внутреннего государственного долга $L_{CB}(t)$ и остатки счетов бюджета $A_G(t)$ являются в модели экзогенными переменными, задаваемыми в рамках сценария государственной экономической политики

$$L_{CB}(t) = B_s(t), \quad A_G(t) = AG_s(t).$$

4.6.7 УПЛАТА НАЛОГОВ И ВЫПЛАТА СУБСИДИЙ x

Взаимодействие описывает передачу в бюджет собранных налогов

$$0 = -Tax_x(t) + Tax_f(t) + Tax_B(t) + Tax_{EX}(t) + Tax_{IM}(t) \quad (5.4.5)$$

и выплату бюджетом запланированных субсидий

$$0 = Sub_G(t) - SB_x(t).$$

Субсидии $Sub_G(t)$ являются в модели экзогенной переменной, задаваемой в рамках сценария государственной экономической политики

$$Sub_G(t) = Sub_s(t).$$

Сумме налоговых поступлений присваивается безындексное обозначение

$$Tax_x(t) = Tax(t). \quad (5.4.6)$$

4.6.8 ПРОВЕДЕНИЕ ПЛАТЕЖЕЙ И РАСЧЕТОВ n

Изменение расчетных счетов происходит одинаково с точки зрения банка и с точки зрения производителя

$$0 = -NdN_J(t) + NdN_B(t)$$

и реализуется соответствующим движением корсчетов в ЦБ

$$0 = -KdN_B(t) + KdN_J(t)$$

Ожидания банков относительно остатков расчетных счетов в соответствии с принципом рациональных ожиданий реализуются

$$NJ_n(t) = N_J(t)$$

Остаткам расчетных счетов присваивается безындексное обозначение

$$N_J(t) = N(t)$$

4.6.9 УПРАВЛЕНИЕ КАПИТАЛОМ БАНКА b

Оставшиеся два взаимодействия описывают отношения собственности. Это описание составляет отличительную черту модели межвременного равновесия с управлением капиталом.

Собственник получает информацию о курсе и коэффициентах уравнения капитала банка, вычисляемые в результате решения задачи Банка

$$\theta_b = \theta_B, \quad v_b(t) = v_B(t), \quad \rho_b(t) = \rho_B(t), \quad f_b(t) = f_B(t)$$

Банк получает указания от собственника о темпе выплаты дивидендов

$$Ub_b(t) = zb_C(t)$$

Дивиденды банка передаются собственнику

$$0 = -Zb_C(t) + Z_B(t)$$

4.6.10 УПРАВЛЕНИЕ КАПИТАЛОМ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ p

По форме и смыслу совпадает с предыдущим с точностью до индексации переменных

$$\theta_p = \theta_J, \quad v_p(t) = v_J(t), \quad \rho_p(t) = \rho_J(t), \quad f_p(t) = f_J(t)$$

$$Ub_p(t) = zp_C(t)$$

$$0 = -Zp_C(t) + Z_J(t) \quad (5.4.7)$$

5 Результирующее описание модели

5.1 Сборка и аналитические преобразования модели

Полная система соотношений модели состоит из подсистем (4.1.28)-(4.1.33)⁹, (5.1.9) - (5.1.17), (5.1.19) - (5.1.20), (5.2.13) - (5.2.19), (5.3.1) - (5.3.2), (5.3.4), (5.3.5), (5.3.6) - (5.3.7), (5.3.8) - (5.3.9), (5.4.1) - (5.4.7) – всего 153 соотношения. Средствами системы ЭКОМОД эта система была проверена на предмет выполнения материальных и финансовых балансов и на предмет правильности размерности, что дает **серьезные гарантии отсутствия случайных ошибок в записи отдельных соотношений**.

С математической точки зрения соотношения модели разделяются на следующие типы:

1. **динамические уравнения на фазовые переменные агентов (запасы и остатки)**, например (5.1.13). При постановке и решении задач агентов подразумевалось, что начальные значения этих переменных заданы. Фазовые переменные, кроме $Kp_C(t), Kb_C(t), Q_H(t)$ имеют прямые либо восстанавливаемые эконометрическими методами статистические аналоги (см. разд. 2).
2. **конечные уравнения, связывающие управления агентов (потоки) с фазовыми, информационными (цены, проценты) и вспомогательными двойственными переменными**, например, (5.1.12), (5.1.14). В принципе именно аналоги этих потоков представляют собой первичную статистическую информацию, но она по большей части не публикуется.
3. **условия дополняющей нежесткости**, например (4.1.31). Они также представляют собой конечные связи между управляющими, фазовыми, информационными и двойственными переменными, но эти связи с алгебраической точки зрения — вырожденные.
4. **динамические уравнения на двойственные переменные агентов**, например, (5.1.15). Двойственные переменные не наблюдаемы, так что начальных условий для них нет, а динамические уравнения для них, как правило, неустойчивы в прямом времени (*магистральное свойство*). Двойственные переменные агрегируют информацию об ожидаемых в будущем изменениях информационных переменных и об ожидаемом выходе на фазовые ограничения. Поэтому динамические уравнения для двойственных переменных, строго говоря, надо решать исходя из *терминальных условий*.
5. **терминальные условия роста капитала агентов**, например, (5.1.16).
6. **неравенства**, ограничивающие экономически осмысленные траектории модели.

Таким образом, рассматриваемая модель исходно представляет собой чрезвычайно большую и сложную сильно нелинейную систему дифференциальных уравнений и частично вырожденных конечных связей, для которой надо решать

⁹ Здесь и далее при ссылках на подсистемы имеются в виду все вынесенные в отдельную строку соотношения между указанными номерами, как пронумерованные, так и пронумерованные.

краевую задачу (часть условий задана в начале, а часть – в конце траектории). Напомним, что для краевой задачи теория не гарантирует ни существования, ни единственности решения.

Однако система может быть значительно упрощена и регуляризирована предварительными аналитическими преобразованиями.

- Большая часть конечных связей, например, (4.1.28) - (4.1.30) представляет собой явные выражения, которые позволяют исключить из систем большую часть неизвестных. Такие исключения система ЭКОМОД проводит автоматически, причем сохраняющаяся в базе данных системы содержательная информация о переменных и принятая система обозначений гарантирует, что наиболее важные для исследователя переменные не будут исключены, а оставшиеся уравнения сильно не усложнятся. После этой операции в системе из исходных 153 соотношений остается 63 соотношения.

- Начальные значения для не имеющих прямых статистических аналогов фазовых переменных $Kp_C(t), Kb_C(t)$ можно выбрать так, что будут выполнены равенства $Kp_C(t) = \Omega_J(t), Kb_C(t) = \Omega_B(t)$ и при этом неизвестные постоянные «курсы» θ_J, θ_B обратятся в единицу. Поэтому уравнения (5.2.16), (5.2.17) можно отбросить и неизвестными останутся только переменные величины.

- Исходная система содержит много зависимых уравнений. Например, три равенства (5.4.3) - (5.4.4) сведутся к одному, если учесть (4.1.29), (5.1.9). Причиной появления этих тождеств служит закон Вальраса (замкнутость финансовых потоков), в силу которого один из балансов в системе обмена следует из остальных. Система ЭКОМОД позволяет частично автоматизировать поиск этих зависимостей. После исключения зависимых соотношений, отбрасывания неравенств и достаточно сложных упрощающих преобразований, проводимых вручную средствами компьютерной алгебры Maple, в системе остается 17 уравнений и УДН, а также 4 терминальных условия.

- Условия дополняющей нежесткости (УДН) с экономической точки зрения представляют собой бесконечно эластичные функции спроса / предложения. Первый сомножитель УДН задает аргумент функции спроса / предложения, а второй – ее значение. Конкурирующие экономические доктрины различаются гипотезами об аргументе функции спроса / предложения и не спорят об их форме, предлагая определять ее эконометрическим путем. Мы поступим аналогично. Будем считать, что решения оптимизационных задач агентов определили нам главное – аргументы функций спроса / предложения, а форму этих функций будем подбирать в процессе идентификации модели. Итак, мы **регуляризуем УДН**, заменяя их убывающими линейными или экспоненциальными зависимостями второго множителя от первого с неизвестными заранее коэффициентами. Заметим, что построенные таким способом функции спроса / предложения **автоматически учитывают косвенные зависимости**, которые в учебниках экономики обозначаются как «сдвиги» функций спроса / предложения вследствие изменения объема производства, налогов, сальдо торгового баланса и т. п. В результате проведенной регуляризации модель межвременного равновесия приобретает дополнительные настроечные параметры и сближается по форме с эконометрическими моделями.

5.2 Описание переменных и уравнений модели

В результате описанных выше аналитических преобразований и регуляризаций модель становится системой из 17 уравнений, представленных в таблице 5.2.2. Перед этим в таблице 5.2.1 приводится описание оставшихся переменных. В этих таблицах приведены только переменные, которые нужно определять совместно. Кроме этого остаются соотношения, которые по значениям переменных в таблице 5.2.1 позволяют вычислить траектории изменения других выходных показателей, например, дефицита бюджета или объема международных резервов.

Таблица 5.2.1 – Список переменных модели.

Имя	Смысл в модели	Статистический аналог	Источник прогноза	Размерность
ЭНДОГЕННЫЕ потоки и запасы				
$Y(t)$	Реальный ВВП	Реальный ВВП	Модель	$\frac{\text{продукт}}{\text{время}}$
$C(t)$	Реальное потребление населения	реальное потребление домохозяйств	Модель	$\frac{\text{продукт}}{\text{время}}$
$J(t)$	Реальные инвестиции в основной капитал	Валовое накопление	Модель	$\frac{\text{продукт}}{\text{время}}$
$Imp(t)$	Реальный импорт	Реальный импорт	Модель	$\frac{\text{продукт}}{\text{время}}$
$N(t)$	Остатки расчетных счетов производителя	Остатки расчетных счетов юр. лиц в банках	Модель	деньги
$L(t)$	Ссуды производителям	Остатки ссудных счетов юр. лиц в банках + облигации, купленные пенсионными фондами	Модель	деньги
$S(t)$	Суммарные сбережения в экономике	Депозиты резидентов и нерезидентов в банках + Пенсионные накопления – Кредиты физ. Лицам	Модель	деньги
$MS(t)$	Средства населения	Наличные деньги + Депозиты резидентов в банках + Пенсионные накопления – Кредиты физ. лицам..	Модель	деньги
$Q(t)$	запас продукта длительного пользования у населения	Нет	Модель	продукт
$M(t)$	Активные производственные фонды	Нет	Модель	$\frac{\text{продукт}}{\text{время}}$
ЭНДОГЕННЫЕ показатели конъюнктуры (информационные переменные)				
$r(t)$	Процент по кредитам	Средняя ставка по всем выданным к этому времени кредитам = доходы банков / выданные ссуды	Модель	$\frac{1}{\text{время}}$
$p(t)$	Дефлятор ВВП	Дефлятор ВВП	Модель	$\frac{\text{деньги}}{\text{продукт}}$

Имя	Смысл в модели	Статистический аналог	Источник прогноза	Размерность
$\iota(t)$	Инфляция	Квартальный темп роста дефлятора ВВП	Модель	$\frac{1}{\text{время}}$
$s_r(t)$	Средняя ставка заработной платы, включая госслужащих	Нет	Модель	$\frac{\text{деньги}}{\text{труд}}$
Двойственные переменные (эндогенные, вспомогательные)				
$\rho(t)$	Эффективная доходность производства	Нет	Модель	$\frac{1}{\text{время}}$
$q(t)$		Нет	Модель	время
$\psi_{3j}(t)$		Нет	Модель	1
ЭКЗОГЕННЫЕ потоки и запасы				
$R_s(t)$	Численность занятых	Численность занятых	Независимый от модели прогноз / сценарий	труд
$\text{Exp}_s(t)$	Реальный экспорт	Реальный экспорт	Независимый от модели прогноз / сценарий	$\frac{\text{продукт}}{\text{время}}$
$\text{Sf}_s(t)$	Депозиты нерезидентов	Депозиты нерезидентов, включая кредиты иностранных банков	Независимый от модели прогноз / сценарий	деньги
$\text{Sub}_s(t)$	Дотации населению из бюджета	Косвенно оценивается по данным бюджета	Сценарий государственной экономической политики	$\frac{\text{деньги}}{\text{время}}$
$G_s(t)$	Реальное государственное потребление	Реальное потребление государственных организаций и некоммерческих общественных организаций	Сценарий государственной экономической политики	$\frac{\text{продукт}}{\text{время}}$
ЭКЗОГЕННЫЕ показатели конъюнктуры				
$w_s(t)$	Валютный курс	Валютный курс	Сценарий государственной экономической политики	$\frac{\text{деньги}}{\text{валюта}}$

Модель определяет эндогенные переменные через экзогенные следующими соотношениями (таблица 5.2.2):

Таблица 5.2.2 – Уравнения модели.

№	Уравнение и его экономический смысл	Блок / тип уравнения
(6.2.1)	$N(t) - \tau_y p(t) J(t) - \tau_s s_r(t) R_s(t) = G p(t) G_s(t) \text{ an } \rho(t) + G p(t) G_s(t) b n$	Производитель
	Соотношение количественной теории денег для безналичных расчетов	Ограничение ликвидности
(6.2.2)	$M S(t) - S(t) + \text{Sf}_s(t) = \left((-\mu a a + a a \iota(t) + b a) p(t) + \frac{p(t) a a}{q(t)} \right) G G_s(t)$	Потребитель
	Спрос на деньги	Ограничение ликвидности
(6.2.3)	$\frac{d}{dt} M S(t) = -p(t) C(t) + R_s(t) s_r(t) + \iota(t) (\zeta_s - 1) S(t) + \text{Sub}_s(t) - \iota(t) (\zeta_s - 1) S(t)$	Потребитель

№	Уравнение и его экономический смысл	Блок / тип уравнения
	Баланс доходов и расходов потребителя	Баланс
(6.2.4)	$G p(t) G_s(t) e^{\left(\frac{p(t)}{e_j} - \frac{d_j}{e_j}\right)} = (-1 + \psi 3_f(t)) L(t) + N(t) + p(t) (-\psi 3_f(t) + 1 + \tau_y p(t)) M(t)$	Производитель
	Спрос на кредиты	Ограничение положительности капитала
(6.2.5)	$e^{\left(-\frac{\pi(t) ny - \pi(t) + db}{eb}\right)} G p(t) G_s(t) = (-1 + \zeta_n) N(t) + (\zeta_s - 1) S(t) + L(t)$	Банк
	Предложение кредитов	Ограничение положительности капитала
(6.2.6)	$0 = A M(t) + R_s(t) B e^{(-b t_0 + b t)} - Y(t)$	Производитель
	Эконометрическая производственная функция	Технологическое ограничение
(6.2.7)	$\frac{d}{dt} M(t) = J(t) - \kappa M(t)$	Производитель
	Динамика «активных» производственных фондов – элемент эконометрической оценки производственной функции	Технологическое ограничение
(6.2.8)	$\frac{d}{dt} L(t) = p(t) J(t) - \beta_a L(t)$	Банк
	Баланс ссуд	Баланс
(6.2.9)	$\frac{d}{dt} Q(t) = C(t) - \mu Q(t)$	Потребитель
	Баланс потребительских благ (длительного пользования)	Технологическое ограничение
(6.2.10)	$\frac{d}{dt} \psi 3_f(t) = (-1 + \psi 3_f(t)) \rho(t) + \psi 3_f(t) \beta_a + r(t)$	Производитель
	Динамика объективно обусловленной оценки (внутренней цены) основных фондов	Условие оптимальности
(6.2.11)	$\frac{d}{dt} \rho(t) = \frac{\kappa + A ny + \psi 3_f(t) \beta_a + r(t) - A - \psi 3_f(t) \kappa}{\tau_y} + \frac{(-1 + \psi 3_f(t)) \iota(t)}{\tau_y} + \rho(t)^2 + (-\iota(t) + \kappa) \rho(t)$	Производитель
	Динамика объективно обусловленной оценки (внутренней цены) денег	Условие оптимальности
(6.2.12)	$\rho(t) = -\frac{1}{\tau_s} - \frac{B (ny - 1) e^{(-b t_0 + b t)} p(t)}{\tau_s S_r(t)}$	Производитель
	Равенство предельных производительностей труда и активных фондов (с учетом ограничения ликвидности)	Условие оптимальности
(6.2.13)	$\frac{d}{dt} p(t) = \iota(t) p(t)$	Рынок продукта
	Определение инфляции	Обозначение
(6.2.14)	$0 = \frac{1}{q(t)} + \iota(t) - \mu + r(t) \zeta_s - r(t)$	Потребитель
	Равенство предельных полезностей сбережения и потребления	Условие оптимальности
(6.2.15)	$\frac{d}{dt} q(t) = (\mu - \eta \mu + \Delta) q(t) - 1 + \frac{q(t) \eta C(t)}{Q(t)}$	Потребитель
	Динамика объективно обусловленной оценки (внутренней цены) запаса потреби-	Условие оптимальности

№	Уравнение и его экономический смысл	Блок / тип уравнения
	сельских благ	
(6.2.16)	$\text{Imp}(t) = AI \left(\frac{C(t)}{CI} \right)^{ci} \left(\frac{J(t)}{JI} \right)^{gi} \left(\frac{w_s(t)}{WI} \right)^{di}$ Эконометрическая функция импорта. При численных расчетах использовалось альтернативное выражение $\text{Imp}(t) = 2729.58 + 0.144 C(t) + 0.446 J(t) - 15.937 w_s(t)$	Импортёр Описание поведения
(6.2.17)	$Y(t) = J(t) + G_s(t) + \text{Exp_s}(t) - \text{Imp}(t) + C(t)$ Основной макроэкономический баланс в реальном выражении	Рынок продукта Баланс

Роль начальных и терминальных условий в этой системе обсуждается в следующем разделе.

6 Алгоритм решения краевой задачи

6.1 Автомоделные решения и сбалансированный рост

Изучение динамических моделей экономики, для соотношений которых типична масштабная инвариантность, естественно начинать с исследования решений, автомоделных относительно группы растяжений. Примером таких решений служат хорошо известные решения **сбалансированного роста**, на которых все аддитивные (экстенсивные) величины растут с одинаковым постоянным темпом. Большинство известных выводов экономической теории получено сравнением различных режимов сбалансированного роста в некоторых простых абстрактных моделях экономики.

Но модель может допускать и более богатую группу симметрий растяжения, которой соответствует решение с различными темпами роста разных величин. Например, разница между темпами роста финансовых и материальных потоков представляет собой темп инфляции, а разница темпов роста производства и затрат ресурсов – темп технического прогресса. Такие решения будем называть **автомоделными**. Автомоделные решения служат исходной точкой для расчета модели и базой для идентификации ее параметров.

Представим систему (6.2.1) - (6.2.17) в векторной форме:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{s}(t), \mathbf{p}), \quad 0 = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{s}(t), \mathbf{p}), \quad (7.1.1)$$

$$0 = \mathbf{B}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}(t_0), \mathbf{s}(t_0), \mathbf{x}(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{s}(T), \mathbf{p}), \quad (7.1.2)$$

$$0 \leq \mathbf{S}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{x}(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{p}), \quad (7.1.3)$$

где $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ – списки неизвестных, $\mathbf{s}(t)$ – список экзогенных переменных, а $\mathbf{p}$ – список постоянных параметров. Чтобы найти автомоделные решения системы (7.1.1) - (7.1.3), отвечающие группе растяжений, надо сделать подстановку

$$\mathbf{x}_i(t) = \bar{\mathbf{x}}_i e^{\xi_j(t-t_0)}, \quad \mathbf{y}_j(t) = \bar{\mathbf{y}}_j e^{\eta_j(t-t_0)}, \quad \mathbf{s}_k(t) = \bar{\mathbf{s}}_k e^{\zeta_k(t-t_0)}, \quad (7.1.4)$$

и искать постоянные $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}, \xi, \eta, \zeta$, при которых система (7.1.1) - (7.1.3) будет удовлетворяться тождественно по t .

Решать «в лоб» такую систему уравнений с целью отыскать темпы роста двух десятков переменных – задача почти безнадежная даже для системы компьютерной алгебры. Кроме того, в нашем случае такой подход сталкивается не только с технической, но и с принципиальной трудностью.

То, что говорилось выше о симметриях и автомодельных решениях, относится к замкнутым (автономным) системам, а модели реальной экономики, как правило, не замкнуты. В них можно найти аналоги автомодельных решений, только если аппроксимировать экзогенные переменные $s(t)$ экспонентами. Но не понятно, какими должны быть темпы роста экзогенных переменных. Мы считаем, что удалось найти разумный путь преодоления указанных трудностей.

Предлагается искать автомодельные решения, на которых величины одной размерности растут с одинаковыми темпами. В процессе проверки размерностей каждой из величин $x_i(t)$, $y_j(t)$, $s_k(t)$ была сопоставлена ее размерность, выраженная как произведение степеней базовых размерностей. Если в это выражение подставить вместо размерности *время* единицу, а вместо базовой размерности ω выражение $e^{\lambda_\omega(t-t_0)}$, где λ_ω – неопределенный коэффициент («темпы роста размерности»), то выражение размерности переменной превратится в экспоненту, темпы которой и будут темпами роста соответствующей переменной при условии, что величины одной размерности растут с одинаковыми темпами. Получив, таким образом, из выражений для размерностей выражения для темпов роста величин $x(t)$, $y(t)$, $s(t)$

$$\xi = \xi(\lambda), \quad \eta = \eta(\lambda), \quad \zeta = \zeta(\lambda), \quad (7.1.5)$$

где λ – пока неизвестный вектор темпов роста базовых размерностей, будем снова искать решение в виде (7.1.4).

Указанный подход обладает следующими преимуществами:

- базовых размерностей гораздо меньше, чем переменных, поэтому система уравнений для параметров автомодельного решения будет относительно простой.
- базовые размерности у нас присвоены аддитивным величинам – запасам активов, поэтому автомодельные решения будут прямым содержательным аналогом традиционного сбалансированного роста.
- размерность экзогенных переменных определена на этапе сборки модели в системе ЭКОМОД, поэтому темпы их роста определяются согласовано с темпами роста остальных величин.
- разрешимость системы относительно темпов λ и получение алгебраической системы для амплитуд $\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}$ гарантировано тем, что система уравнений для λ это подсистема уравнений для генераторов групп растяжений, допускаемых моделью, а разрешимость системы для генераторов это критерий правильности системы размерности
- поскольку размерности всех переменных и параметров выражены через базовые, составление системы для поиска автомодельных решений можно автоматизировать, что и было сделано в системе ЭКОМОД.

Вообще говоря, предложенный метод не позволяет найти все решения вида (7.1.4). Однако, мы сознательно ограничиваемся поиском только тех решений, на которых переменные с одинаковой размерностью растут с одним и тем же тем-

пом, поскольку такие решения соответствуют нашим представлениям об экономическом росте. Таким образом, мы накладываем на уравнения модели еще одно требование, не содержащееся в уравнениях, но отражающее их содержательный смысл – требование существования темпов роста, отвечающих введенной из содержательных соображений системе размерностей активов.

6.2 Определение параметров модели на автомодельных решениях

Описанная процедура поиска автомодельных решений, согласованных с базовыми размерностями аддитивных величин, примененная к системе соотношений модели, дает соотношения вида

$$0 = \Phi(\lambda, \gamma, \mathbf{p}), \quad 0 = \Gamma(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}, \lambda, \gamma, \mathbf{p}), \quad 0 < \mathbf{H}(\mathbf{p}) \quad (7.2.1)$$

для амплитуд $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}$ автомодельного решения (7.1.4) - (7.1.5) и вектора темпов роста базовых размерностей модели λ . Первое уравнение в (7.2.1) получается из требования, чтобы при подстановке (7.1.4) в (7.1.1) - (7.1.3), экспоненты сократились, второе – из равенств (7.1.1) - (7.1.2) после сокращения экспонент. Первое неравенство получается из (7.1.3) после сокращения экспонент, а неравенство $0 < \mathbf{H}(\mathbf{p})$ – это накладываемые по умолчанию условия положительности параметров и дополнительные условия, собранные в группах «условия на параметры» системы ЭКОМОД. Явный вид системы (7.2.1) для модели (6.2.1) - (6.2.17) приведен ниже в разд. 8.1.

Система (7.2.1) имеет решающее значение для расчета модели. Она используется для идентификации параметров и для исключения краевых условий. Именно, мы рассматриваем систему (7.2.1) как недоопределенную систему соотношений на весь набор переменных и параметров $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}, \lambda, \gamma, \mathbf{p}$. Выбрав допустимую для этой системы точку $\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*, \bar{\mathbf{s}}^*, \lambda^*, \gamma^*, \mathbf{p}^*$, мы используем автомодельное решение

$$\mathbf{x}_i(t) = \bar{\mathbf{x}}_i^* e^{\xi_j(\lambda^*)(t-t_0)}, \quad \mathbf{y}_j(t) = \bar{\mathbf{y}}_j^* e^{\eta_j(\lambda^*)(t-t_0)}, \quad \mathbf{s}_k(t) = \bar{\mathbf{s}}_k^* e^{\zeta_k(\lambda^*)(t-t_0)} \quad (7.2.2)$$

как начальное приближение для решения системы уравнений при значениях параметров $\gamma^*, \mathbf{p}^*$.

В предложенном методе решения системы выбор допустимой для (7.2.1) точки $\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*, \bar{\mathbf{s}}^*, \lambda^*, \gamma^*, \mathbf{p}^*$ соответствует «подгонке» значений параметров. Эта задача возникает всегда, когда математическая модель используется для практических расчетов. Когда модель сводится к динамической системе, решение, грубо говоря, существует при любых значениях параметров или, если не существует, то это сразу видно. У нас исследование модели свелось к решению краевой задачи, установить существование решения которой очень сложно, и мы ищем параметры вместе с начальным приближением.

6.3 Алгоритм расчета и идентификации модели

6.3.1 НОРМИРОВКА И ОТБРАСЫВАНИЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Автомодельное решение (7.2.2) удовлетворяет условиям (7.1.1) - (7.1.3), если экзогенные переменные меняются по закону $s_k(t) = \bar{s}_k^* e^{\zeta_k(\lambda^*)(t-t_0)}$. Фактически, экзогенные переменные изменяются во времени не экспоненциально, а значительно сложнее, поэтому надо уметь решать задачу в общем случае. Идея предлагаемого ниже метода состоит в том, чтобы искать нужное решение как ограниченную поправку к автомодельному решению.

Чтобы реализовать эту идею, перенормируем переменные на выбранное автомодельное решение, сделав замену переменных

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}_i(t) e^{\zeta_i(\lambda^*)(t-t_0)}, \quad \mathbf{y}_j(t) = \tilde{\mathbf{y}}_j(t) e^{\eta_j(\lambda^*)(t-t_0)}, \quad \mathbf{s}_k(t) = \tilde{\mathbf{s}}_k(t) e^{\zeta_k(\lambda^*)(t-t_0)}.$$

После этого уравнения (7.1.1) примут вид

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}^*(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{y}}(t), \tilde{\mathbf{s}}(t)), \quad 0 = \mathbf{G}^*(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{y}}(t), \tilde{\mathbf{s}}(t)), \quad (7.3.1)$$

где $\tilde{\mathbf{s}}(t)$ заданы экзогенно. Индекс «*» означает, что в этой системе параметры и темпы роста автомодельных решений взяты из допустимого набора $\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*, \bar{\mathbf{s}}^*, \lambda^*, \gamma^*, \mathbf{p}^*$.

Главная трудность краевой задачи в том, что система (7.3.1) крайне неустойчива относительно возмущений краевых условий. Чтобы задача оставалась корректной, надо научиться строить ограниченные решения системы, которые в общем случае могут быть не единственными. Можно было бы воспользоваться этой свободой, чтобы попытаться удовлетворить граничным условиям при $t = T$. Однако, есть основания утверждать, что с экономической точки зрения граничные условия на конце планового периода искусственны. Поэтому предлагается **распорядиться произволом в выборе ограниченного решения, чтобы верифицировать модель по отчетным данным о статистических аналогах переменных и параметров модели.**

Заметим, что такая постановка не совсем игнорирует исходные граничные условия. Ограниченность мы определяем относительно автомодельного решения, которое удовлетворяет краевой задаче при экспоненциальной аппроксимации экзогенных переменных.

6.3.2 ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОМУ ВРЕМЕНИ И ГОМОТОПИЯ ЭКЗОГЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Статистические данные представляются в дискретном времени обычно с периодичностью месяц, квартал и год. Если шаг дискретизации велик, то большое значение имеет выбор разностной схемы. В численных экспериментах с моделью испытывались разные схемы разностной аппроксимации производных:

- явная – $\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t+1) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$;
- неявная – $\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t-1)$;

- смешанная, в которой в зависимости от собственных значений линеаризованной системы для разных переменных и даже на разных шагах по времени применяются то явная, то неявная схемы;
- интегральная, основанная на интегральном представлении ограниченных решений линеаризованной системы.

Экспериментально обнаружено что система, которая имеет решение, хорошо и устойчиво воспроизводящее наблюдаемую динамику, получается только при применении интегральной или неявной схем. Обе схемы приводят к сходным результатам, но неявная схема намного проще интегральной, поэтому мы остановились на дискретизации по неявной схеме. Тому, что неявная схема дискретизации лучше явной, можно дать такое объяснение. В модели фазовые переменные планируются экономическими агентами вперед по информации о текущем состоянии. В дискретном времени процедура планирования агентов соответствует именно неявной схеме.

После дискретизации по неявной схеме система (7.3.1) приобретает вид

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t-1) + F^*(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{s}(t)), \quad 0 = G^*(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{s}(t)), \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (7.3.2)$$

Задача состоит в том, чтобы найти решения системы (7.3.2), которые отличаются от $\tilde{x}^*$, $\tilde{y}^*$ не больше, чем на порядок. **Предложенный нами метод гарантирует получение ограниченных в этом смысле решений и одновременно идентифицирует граничные условия.**

По построению пара $\tilde{x}(t) = \tilde{x}^*$, $\tilde{y}(t) = \tilde{y}^*$ является решением системы (7.3.2) при $\tilde{s}(t) = \tilde{s}^*$. Однако чаще всего не удастся вычислить решение системы (7.3.2) при заданной экзогенной переменной $\tilde{s}(t)$, приняв $\tilde{x}(t) = \tilde{x}^*$, $\tilde{y}(t) = \tilde{y}^*$ в качестве начального приближения. Поэтому мы использовали метод погружения. Нужные значения $\tilde{s}(t)$ были соединены с «удобными» $\tilde{s}^*$ кривой в пространстве последовательностей (гомотопией):

$$s_u(t) = (1-u)s^* + u \tilde{s}(t).$$

Подставляя $s_u(t)$ в систему (7.3.2) вместо $\tilde{s}(t)$, получаем

$$x_u(t) = x_u(t-1) + F^*(x_u(t), y_u(t), s_u(t)), \quad 0 = G^*(x_u(t), y_u(t), s_u(t)), \quad t = t_0, \dots, T. \quad (7.3.3)$$

Очевидно, что $x_0(t) = \tilde{x}^*$, $y_0(t) = \tilde{y}^*$ – решение системы при $u=0$, а при $u=1$ величины $\tilde{x}(t) = x_1(t)$, $\tilde{y}(t) = y_1(t)$ удовлетворяют (7.3.2). Метод решения состоит в последовательном увеличении параметра u по следующей индуктивной схеме:

- вначале полагаем $u_0 = 0$. При этом значении параметра гомотопии u решение $x_{u_0}(t) = \tilde{x}^*$, $y_{u_0}(t) = \tilde{y}^*$ известно.
- пусть на шаге $n \geq 0$ для $u_n < 1$ известно решение $x_{u_n}(t)$, $y_{u_n}(t)$. Используя это решение как начальное приближение, пытаемся решить уравнение при $u=1$. Если это удастся сделать, то задача решена. Если нет, – пытаемся

найти решение при $u = \frac{1}{2} + \frac{u_n}{2}, \frac{1}{4} + \frac{3u_n}{4}, \dots$ приближающихся к u_n , каждый раз используя в качестве начального приближения $x_{u_n}(t), y_{u_n}(t)$. Первое значение в ряду пробных u , при котором удастся получить решение, принимается за u_{n+1} .

6.3.3 ПОИСК РЕШЕНИЯ С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Главная процедура предложенного алгоритма – решение системы (7.3.3) при фиксированном u . Она сочетает итерации метода Ньютона и метода минимизации невязки. Пусть мы нашли приближение $x_u(t), y_u(t)$ решения системы (7.3.3). Из точки $x_u(t), y_u(t)$ делаем один шаг по методу Ньютона, и получаем новое приближение $x'_u(t), y'_u(t)$ как решение линейной системы

$$\begin{aligned} x'_u(t) - x'_u(t-1) &= F^*(z_u(t)) + \frac{\partial F^*}{\partial x}(z_u(t)) \cdot (x'_u(t) - x_u(t)) + \frac{\partial F^*}{\partial y}(z_u(t)) \cdot (y'_u(t) - y_u(t)), \\ 0 &= G^*(z_u(t)) + \frac{\partial G^*}{\partial x}(z_u(t)) \cdot (x'_u(t) - x_u(t)) + \frac{\partial G^*}{\partial y}(z_u(t)) \cdot (y'_u(t) - y_u(t)), \\ z_u(t) &= \langle x_u(t), y_u(t), s_u(t) \rangle \quad t = t_0 + 1, t_0 + 2 \dots T. \end{aligned}$$

Эту систему можно написать заранее и аналитически исключить $y'_u(t)$ с помощью второго уравнения. Тогда для определения $x'_u(t), y'_u(t)$ получится система

$$x'_u(t-1) = A(z_u(t)) \cdot x'_u(t) + f(z_u(t)), \quad y'_u(t) = B(z_u(t)) \cdot x'_u(t) + g(z_u(t)) \quad t = t_0, \dots T. \quad (7.3.4)$$

Системе (7.3.4) не хватает $\dim(x'_u)$ краевых условий. Это значит, что результат ньютоновского шага представляет собой не одну точку, а гиперплоскость размерности $\dim(x'_u)$ в пространстве временных рядов переменных модели.

Точка на этой гиперплоскости, выбирается как проекция на гиперплоскость некоторой точки m_u в пространстве временных рядов переменных модели. Точка m_u задается в виде $m_u = (1-u)\bar{x}^* + u m$, где m , набор значений переменных, наилучшим образом соответствующий статистическим показателям, а $\bar{x}^*$ – исходный сбалансированный рост.

Неудачей поиска следующего приближения считается сильное увеличение невязки $x'_u(t), y'_u(t)$ по сравнению с невязкой предыдущего приближения $x_u(t), y_u(t)$. При неудаче уменьшается параметр гомотопии u . Удачным окончанием процесса поиска решения считается достаточная малость невязки и достаточно быстрое ее уменьшение за счет ньютоновского шага при фиксированных граничных условиях.

В реализации описанной процедуры есть существенная особенность. Система разностных уравнений в (7.3.4) сильно неустойчива. В выражение $x'_u(t_0)$ через $x'_u(T)$ входят коэффициенты порядка $10^{50} \div 10^{70}$, которые получаются в ре-

зультате сложений и умножений величин порядка единицы. Чтобы достаточно надежно определить большие величины через малые, расчеты приходится вести с высокой точностью. Обычно достаточно точности 100 знаков после запятой с периодической проверкой контрольными расчетами с еще большим числом знаков.

Полученные выражения, однако, нельзя использовать для минимизации невязок – слишком большими получаются градиенты. Поэтому перед минимизацией решение регуляризируется – из $2\dim(\mathbf{x}'_u)$ начальных и конечных значений $\mathbf{x}'_u(t)$ выбирается $\dim(\mathbf{x}'_u)$ таких, через которые остальные значения выражаются с коэффициентами порядка 1 (это всегда можно сделать, если определяемое системой (7.3.4) линейное многообразие проходит не слишком далеко от нуля.). Выражение через такие параметры означает, что мы просматриваем именно ограниченные решения системы (7.3.4).

6.4 Основные особенности процедуры расчета модели межвременного равновесия

Следует подчеркнуть несколько важных моментов, отличающих расчет модели межвременного равновесия от расчета обычных динамических систем, например, таких, которые описывают вычислимые модели общего равновесия.

- A) Расчет ведется сразу для всей траектории от начального приближения, а не шаг за шагом от начального значения. Это соответствует содержательному смыслу модели, траектория которой как целое **выражает одно экономическое равновесие**, а не последовательность статических равновесий.
- B) Соответственно пункту A) мы не фиксируем начальные условия фазовых переменных в соответствии со статистикой, а считаем их, как и терминальные значения двойственных переменных, настроечными параметрами модели. Это соответствует общепринятой процедуре прогнозирования, когда расчет начинается от какого-то момента в прошлом, и точность модели в этот момент не имеет какого-то особого значения.
- C) Отмеченная выше неустойчивость решений в прямом времени, которая для динамических систем была бы сильным недостатком, для рассматриваемой краевой задачи межвременного равновесия оборачивается достоинством. Во-первых, неустойчивость позволяет четко выделять ограниченные решения даже на конечном интервале. Во-вторых, неустойчивость означает наличие ярко выраженного магистрального свойства, т.е. слабой зависимости оптимального поведения агентов от точности их прогнозирования будущих изменений конъюнктуры [1]. Это, в свою очередь, снимает возражения против использования для моделирования принципа рациональных ожиданий.
- D) **Вся описанная в разд. 6.3.3 процедура реализована средствами Maple и работает автоматически после выбора решения недоопределенной системы конечных уравнений и неравенств (5.2.1).** Код процедуры открытый и довольно короткий, так что при достаточном опыте пользователь может менять параметры алгоритма и критерий идентификации граничных условий.

7 Результаты идентификации и верификации модели

7.1 Результаты идентификации модели

7.1.1 ВРЕМЕННОЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ РАСЧЕТА МОДЕЛИ И БАЗОВЫЙ ПРОГНОЗ ЭКЗОГЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Процесс идентификации параметров формализован лишь частично. Он состоит из многократного повторения трех шагов, приведенных ниже.

- 1) Выбор допустимой для (7.2.1) точки $\bar{x}^*, \bar{y}^*, \bar{s}^*, \lambda^*, \gamma^*, p^*$. Этот шаг включает выбор значений идентифицируемых параметров модели $p = p^*$.
- 2) Решение краевой задачи с начальным условием (7.2.2). Этот шаг, как показано в разд. 6.3.3, включает *автоматическую* идентификацию краевых условий, которые рассматриваются как настроечные параметры модели.
- 3) Сравнение решения со статистикой формальными и неформальными методами. При неудовлетворительном сходстве пункты 1-2 могут повторяться. При этом может меняться состав оцениваемых параметров в пункте 1.

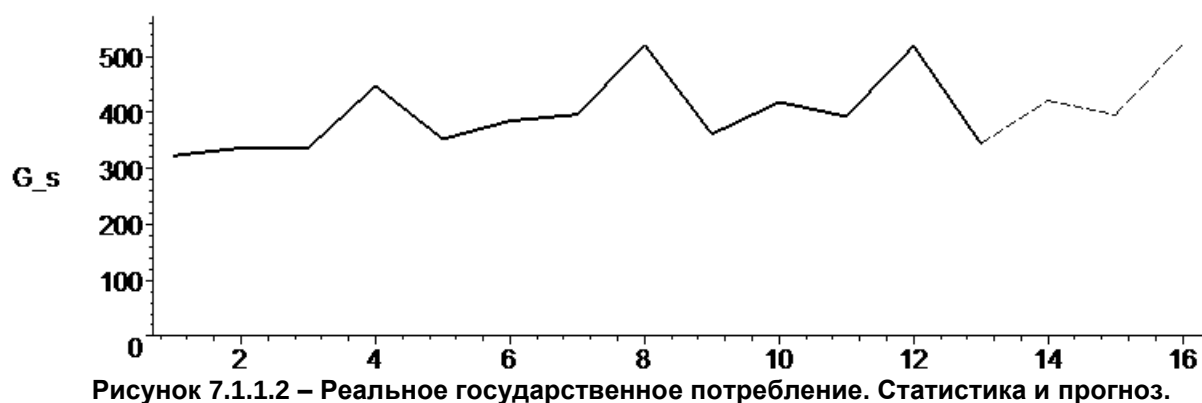
Модель идентифицировалась на квартальных данных, приведенных в разд. 2.3 на промежутке времени с I квартала 2006 года (соответствует $t=1$) по IV квартал 2009 года (соответствует $t=16$). Для периода времени $t=1..13$ (по I квартал 2009 года) известна статистика, а $t=14..16$ (II-IV кварталы 2009 года) – прогнозный интервал.

Специфика краевой задачи вносит существенные изменения в стандартную процедуру идентификации. Поскольку рассчитывается сразу вся траектория, нужно сразу брать такой интервал времени, на который модель будет распространяться при прогнозировании. Как будет показано ниже в разделе 7.2, разумным сроком прогноза по модели будет срок порядка года (например, 3 квартала). Но тогда на этот срок необходимо задать прогноз экзогенных величин (см. таблицу 5.2.1). Такой **базовый прогноз** был задан с продолжением статистических рядов из таблицы 2.4.1, представленных в табл. 7.1.1.1 и на рисунках 7.1.1.1 - 7.1.1.6.

Таблица 7.1.1.1 – Экзогенные переменные и их базовый прогноз

	Статистика													Прогноз данных		
	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10	t=11	t=12	t=13	t=14	t=15	t=16
R_s	7,368	7,379	7,39	7,404	7,491	7,6421	7,7135	7,6804	7,76294	7,8684	7,9254	7,8621	7,8304	7,91136	7,96836	7,90506
G_s	322,576	336,22	336,47	446,95	352,19	384,707	396,009	520,538	360,994	418,136	392,691	518,377	344,028	420,882	395,437	521,123
Sub_s	325	350	375	400	425	450	475	500	566,372	324,726	456,821	597,83	663,22	688,22	713,22	738,22
Exp_s	1738,98	2138,43	2410,33	2047,01	2145,92	2338,26	2389,7	2223,19	2167,38	2361,81	2627,12	2053,09	1757,74	1952,18	2217,49	1643,45
Sf_s	868,387	982,453	1351,96	1708,16	2142,9	2597,92	2773,57	2651,03	2563,38	2459,78	1837,78	1795,76	1488,04	1488,04	1488,04	1488,04
w_s	131,4	123,11	122,32	127,83	124,85	121,46	123,13	120,77	120,45	120,59	120	120,16	150	150	150	150

На рисунках жирной линией изображена статистика, прерывистой тонкой линией – продолжение (прогноз) статистики.



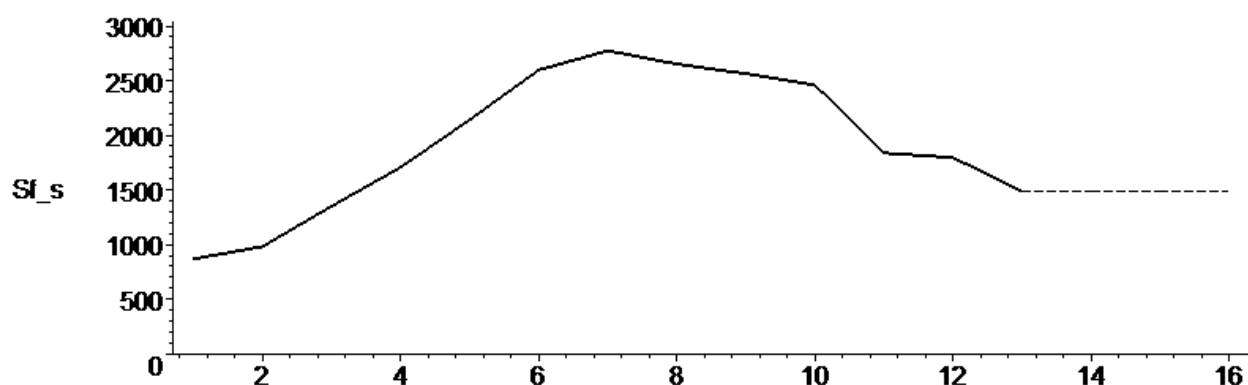


Рисунок 7.1.1.5 – Депозиты нерезидентов. Статистика и прогноз.

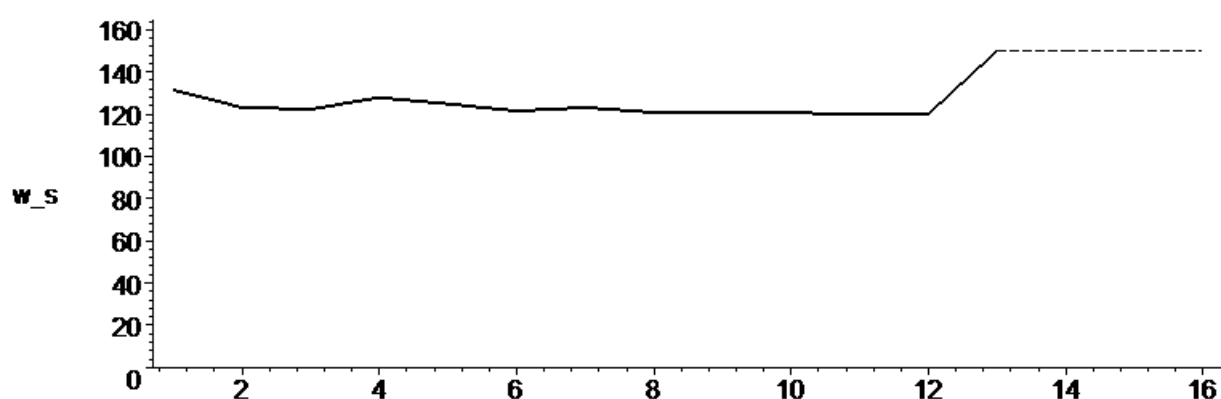


Рисунок 7.1.1.6 – Валютный курс. Статистика и прогноз.

7.1.2 ЗНАЧЕНИЯ ИДЕНТИФИЦИРОВАННЫХ ПАРАМЕТРОВ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПО ВЫХОДНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Часть параметров модели была определена при первичной обработке статистики (см. раздел 2). Эти параметры в процессе идентификации не изменялись и имели значения, представленные в таблице 7.1.2.1.

Таблица 7.1.2.1 – Заранее известные параметры модели и их значения.

Имя	Смысл параметра	Значение
A	Параметр производственной функции	7.54
B	Параметр производственной функции	289.4
κ	Темп амортизации активных фондов	5.16
b	Параметр производственной функции (технический прогресс)	0.00255
Al, ci, ji, wi	Параметры функции импорта	2729.6, 0.144, 0.446, -15.93
ζ_n	Норма резервирования расчетных счетов	0.06
ζ_s	Норма резервирования депозитов	0.04
η_y	Налоговая нагрузка	0.3

В результате идентификации получены значения 17 настроечных параметров, представленных в таблице 7.1.2.2.

Таблица 7.1.2.2 – Настроечные параметры модели и их идентифицированные значения.

Имя	Смысл параметра	Интервал возможных значений	Значение
G	Нормировочная константа	$[0, +\infty)$	1
λ	Темп роста базовой размерности «труд» (занятости)	$(-\infty, +\infty)$	0.01
ι_1	Средний темп инфляции	$(-\infty, +\infty)$	0.07
Δ	Коэффициент дисконтирования домашних хозяйств	$[0, +\infty)$	0.019
μ	Темп расходования населением запаса продукта	$[0, +\infty)$	1
τ_y	Период обращения денег в процессе инвестирования	$[0, +\infty)$	0.36
τ_s	Период обращения денег в процессе выплаты заработной платы	$[0, +\infty)$	0.08
η	Параметр функции полезности домашних хозяйств	$(0, \infty)$	1
β_a	Темп амортизации основных фондов	$[0, +\infty)$	0.248
an,bn,dj,db, aa,ba,ej,eb	Параметры смягчения условий дополняющей нежесткости	$(-\infty, +\infty)$	-40, 67.09, 1.66, -0.26, -50, 5.83, 0.95, 0.95

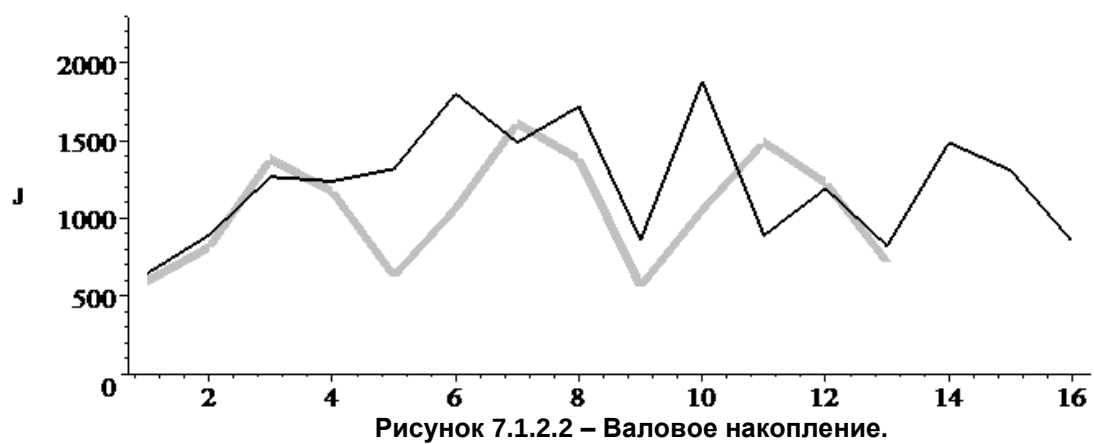
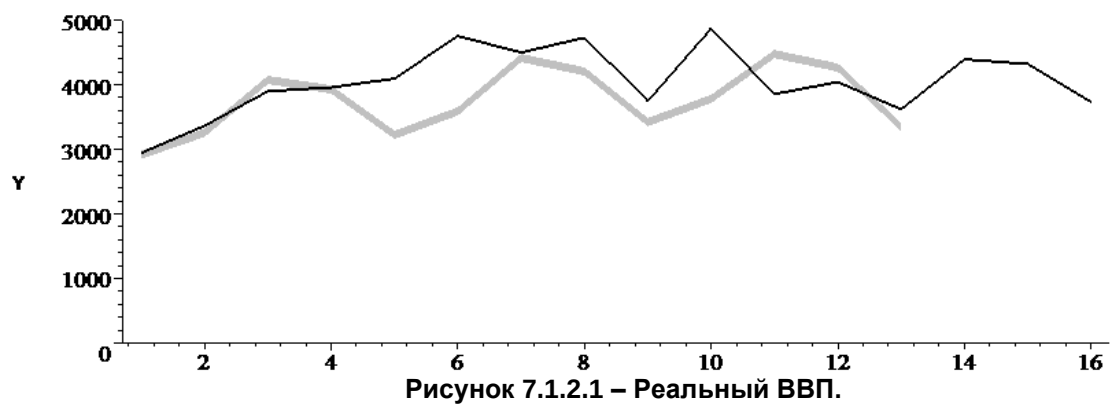
Кроме этих 17 параметров, идентифицированных «вручную», настроечными параметрами в модели служат еще какие-то 8 из 16 граничных значений для 8 дифференциальных уравнений, входящих в систему (6.2.1) - (6.2.17). И сам набор граничных условий, и их значения определяются автоматически в процессе решения задачи, как описано в разд. 6.3.3. Результат идентификации граничных значений для наблюдаемых величин входит в число показателей, приведенных в следующей таблице.

Ряды выходных переменных, полученные при этих значениях параметров, представлены в таблице 7.1.2.3, а их сравнение со статистикой – на рисунке 7.1.2.1 - 7.1.2.8 и в таблице 7.1.2.4.

Таблица 7.1.2.3 – Модельные значения наблюдаемых переменных (расчет).

														Прогноз		
	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10	t=11	t=12	t=13	t=14	t=15	t=16
Y	2941,18	3362,86	3896,63	3957,48	4093,36	4752,70	4496,74	4727,21	3747,08	4865,91	3853,93	4040,71	3619,17	4392,19	4319,78	3730,94
J	645,40	892,06	1266,59	1238,09	1317,13	1802,09	1488,84	1718,75	860,03	1881,42	888,84	1191,21	822,11	1486,49	1308,54	849,80
C	1352,26	1356,99	1434,93	1717,25	1875,47	2132,29	1931,63	2145,05	1813,34	2162,84	1353,79	1897,08	1636,66	1792,81	1543,18	1675,95
Imp	1118,03	1360,84	1551,70	1491,83	1597,36	1904,66	1709,43	1880,32	1454,66	1958,30	1408,51	1619,05	941,37	1260,17	1144,86	959,38
P	0,70	0,76	0,75	0,73	0,69	0,75	0,76	0,88	0,89	1,19	1,24	1,43	1,53	1,80	1,96	1,89
S[H]	862,93	746,52	800,75	559,01	745,93	666,56	766,10	681,67	959,16	1050,95	1627,16	1255,84	2032,71	2350,17	3019,52	2536,04
L	2653,20	2680,34	2918,87	3077,89	3226,42	3642,45	3824,11	4263,75	4037,91	5051,99	4944,91	5332,51	5297,95	6330,25	7088,96	6998,47
N	693,43	672,98	620,17	734,01	664,42	772,16	815,07	1069,28	932,89	1247,94	1190,94	1533,18	1318,70	1604,75	1684,02	1936,22

На рисунках **серой жирной линией** изображена статистика эндогенных переменных, **черной линией** – результаты расчета.



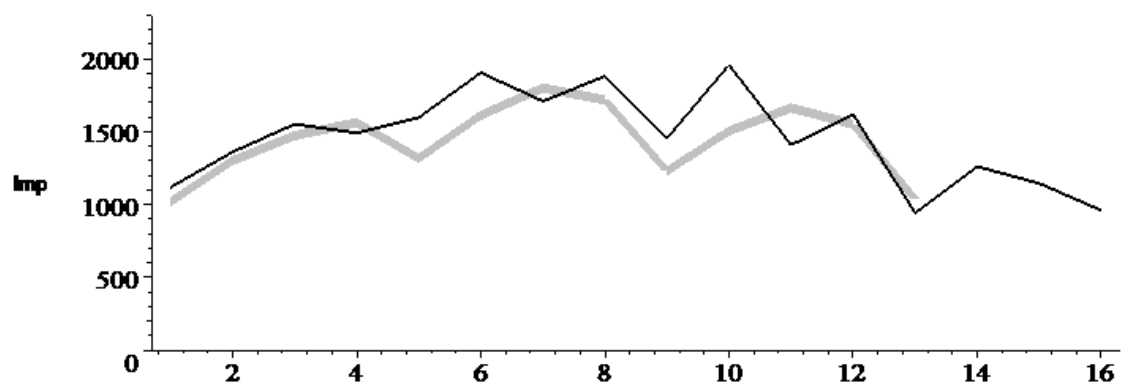


Рисунок 7.1.2.4 – Реальный импорт.

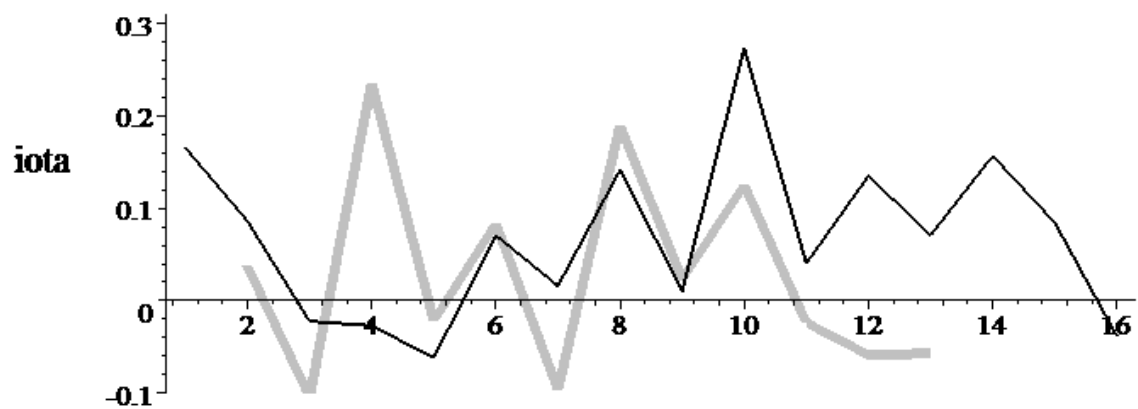


Рисунок 7.1.2.5 – Инфляция.

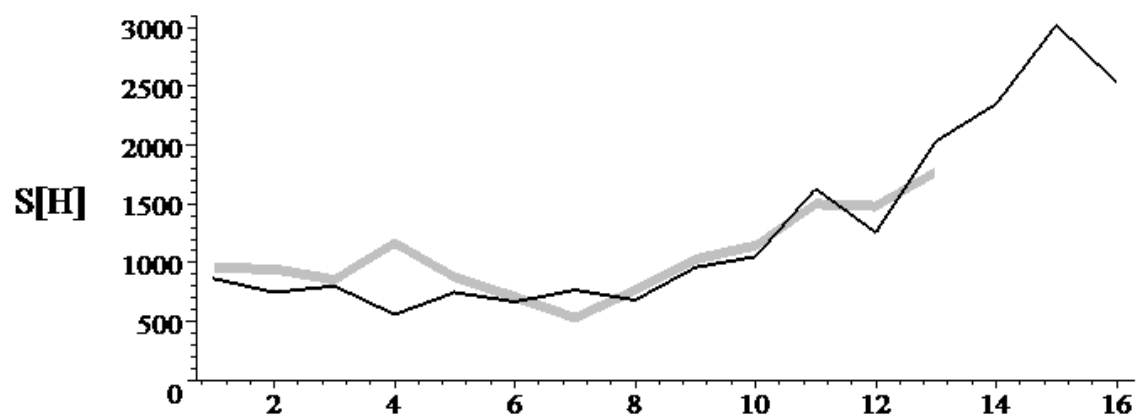
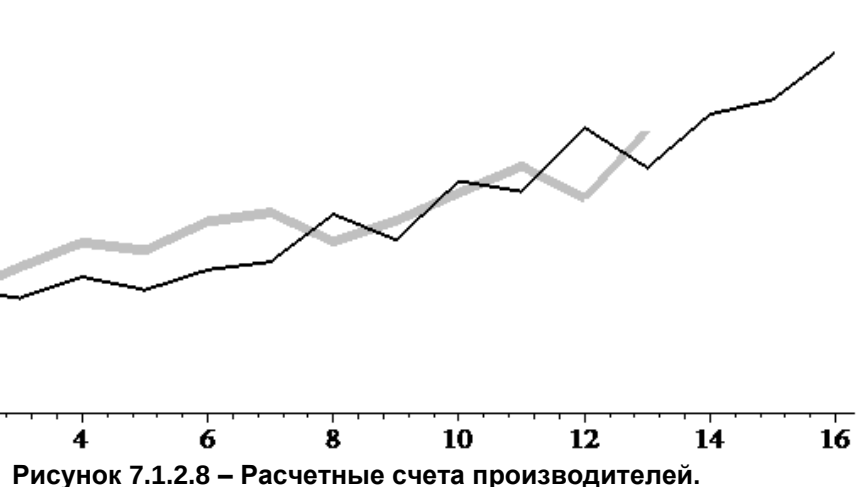
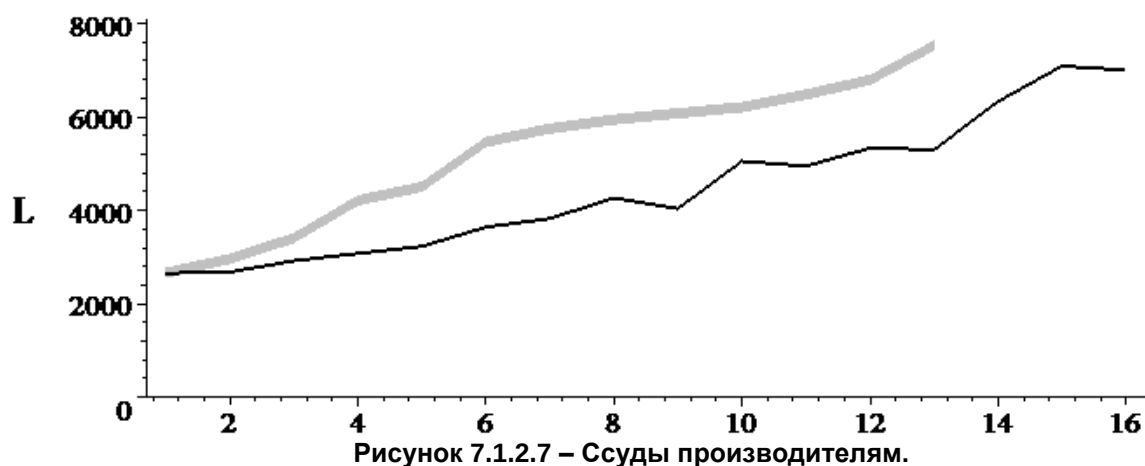


Рисунок 7.1.2.6 – Сбережения населения.



Приведенные графики наглядно показывают, что, за исключением, возможно, кредитов, показанных на рисунке 7.1.2.7, остальные расчетные показатели верно отражают не только наблюдавшуюся величину соответствующих статистических показателей, но и общий характер их динамики, а также в большинстве случаев и фазы квартальных колебаний.

Заметим, что воспроизведение в модели несглаженной квартальной инфляции является, по-видимому, очень редким в практике моделирования, во всяком случае, в моделях с сопоставимым числом настроечных параметров.

Погрешность для эндогенной переменной x рассчитывалась по формуле $\frac{x(t) - x_s(t)}{x_s(t)}$, где x_s – соответствующее статистическое значение, а средняя

погрешность по формуле:
$$\sqrt{\sum_{t=1}^{13} \frac{1}{13} \left(\frac{x(t) - x_s(t)}{x_s(t)} \right)^2}$$

Таблица 7.1.2.4 – Погрешности для эндогенных переменных.

	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10	t=11	t=12	t=13	Средняя
Y	0,009	0,033	-0,043	0,008	0,270	0,325	0,019	0,124	0,096	0,288	-0,139	-0,052	0,082	0.156
J	0,084	0,097	-0,083	0,058	1,097	0,695	-0,075	0,245	0,530	0,787	-0,403	-0,031	0,149	0.469
C	0,061	0,070	0,013	-0,059	0,327	0,507	0,063	0,193	0,164	0,490	-0,169	-0,058	0,048	0.235
P	0,000	0,051	0,152	-0,089	-0,117	-0,126	-0,015	-0,044	-0,054	0,131	0,207	0,472	0,676	0.259

	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9	t=10	t=11	t=12	t=13	Средняя
S[H]	-0,095	-0,210	-0,062	-0,521	-0,149	-0,058	0,447	-0,110	-0,067	-0,082	0,087	-0,152	0,147	0.220
L	-0,004	-0,095	-0,144	-0,269	-0,284	-0,333	-0,335	-0,282	-0,336	-0,186	-0,237	-0,215	-0,296	0.251
N	0,157	0,051	-0,210	-0,200	-0,241	-0,251	-0,244	0,158	-0,099	0,054	-0,103	0,329	-0,134	0.189

7.2 Устойчивость алгоритма идентификации модели

Устойчивость прогноза и оценку горизонта прогнозирования принято получать методом **ретро-прогноза**, т.е. оценкой погрешности воспроизведения конечного участка рядов выходных переменных моделью, идентифицированной по данным о начальном участке этих рядов. Однако этот метод вполне применим только, если процедура идентификации полностью формализована и автоматизирована. В нашем случае параметры, приведенные в табл. 7.1.2.2, определялись вручную. Повторить эту идентификацию на меньшем интервале можно только заставив исследователя забыть то, что он знает. Поэтому устойчивость посредством проведения «ретро-прогноза» проверялась только для автоматизированной идентификации граничных условий.

Для этого, задача решалась на промежутке $t = 1..16$, при фиксированных значениях явных параметров, указанных в табл. 7.1.2.2, однако длина прогноза увеличивалась с прежних $t = 14..16$ до $t = (T_stat + 1)..16$, $T_stat < 13$. Таким образом, о существовании статистики по эндогенным переменным на промежутке $t = (T_stat + 1)..13$ модель «не знала», но прогноз по экзогенным переменным был взят такой, какой он реализовался в действительности (таблица 7.1.1.1).

Проверялось, насколько хорошо при ранее выбранных параметрах повторяется участок прогноза $t = 14..16$. В качестве критерия использована величина

$\sqrt{\sum_{t=14}^{16} \frac{1}{3} \left(\frac{x(t) - \tilde{x}(t)}{\tilde{x}(t)} \right)^2}$, где $x(t)$ – эндогенная величина по новому прогнозу, а $\tilde{x}(t)$ – по старому прогнозу.

Таблица 7.2.1 показывает, что период в 3-4 квартала является естественным периодом прогнозирования для модели.

Таблица 7.2.1 – Ошибка отклонения ретро-прогноза от базового прогноза.

	Y	J	C	Imp	P	S[H]	L	N
T_stat=4	0,017	0,041	0,030	0,019	0,032	0,220	0,040	0,014
T_stat=7	0,064	0,235	0,088	0,118	0,081	0,026	0,054	0,070
T_stat=10	0,029	0,107	0,040	0,054	0,032	0,021	0,027	0,037

7.3 Постановка и результат решения задачи о чувствительности модели к изменению параметров

Чувствительность по параметру рассчитывается по формуле:

$$\frac{x(t, p + \Delta p) - x(t, p)}{\Delta x(t, p)}$$

где x – эндогенная переменная модели, p – параметр, по которому оценивается чувствительность. Значение переменной $x(t, p)$ берется по уже найденному решению задачи (табл. 7.1.2.3). Для нахождения значения $x(t, p + \Delta p)$ решается отдельная краевая задача при тех же самых экзогенных переменных и тех же самых параметрах, кроме одного: его значение изменяется на Δp . Результаты расчета чувствительности приведены в таблице 7.3.1.

Таблица 7.3.1 – Чувствительность эндогенных переменных по параметрам при $\delta=0.01$, $t=13$.

	Y	J	C	Imp	P	S[H]	L	N
λ	0,1382	0,1933	0,1148	-0,0286	0,1578	0,1211	0,0973	0,0997
d	-0,0033	-0,0095	-0,0059	0,0959	0,0774	0,0859	0,0881	-0,0050
ny	0,4475	3,0237	0,2580	-0,0860	4,6794	1,7874	-0,5425	1,1730
G	-0,0137	-0,1007	-0,0053	-0,1515	-0,6368	-0,1062	0,3154	-0,0383
$\zeta[n]$	0,0014	0,0087	0,0010	0,0098	0,0383	0,0064	0,0059	0,0035
$\zeta[s]$	-0,0016	0,0055	-0,0060	-0,0046	0,0561	-0,0058	-0,0112	0,0005
b	0,0352	0,0493	0,0293	-0,0073	0,0402	0,0308	0,0248	0,0254
A	0,2093	-4,4871	1,9214	3,9229	-0,5582	3,2242	8,1862	-1,1624
B	-1,3845	-6,4280	-1,6908	-4,8059	-15,0954	-10,2170	-8,6527	-2,7804
$M0$	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
κ	0,3530	5,4645	-0,7364	-3,4392	2,6220	-1,4987	-5,6486	1,8181
ai	-1,2734	-4,4105	0,0505	-1,3205	-5,8039	-3,5192	-2,3783	1,4755
ci	-0,1056	-0,3552	-0,0021	-0,1169	-0,5078	-0,3100	-0,2151	0,1203
ji	-0,1697	-0,5507	-0,0353	-0,2064	-1,0466	-0,6244	-0,4321	0,1538
wi	1,0768	3,7813	-0,1209	1,0342	4,4539	2,7002	1,7880	-1,3413
bn	0,2150	3,8535	-0,6087	-3,9020	0,7452	-2,7261	-6,7210	1,2597
ba	-0,0117	0,1880	-0,0884	0,4677	-0,1417	0,1376	0,1995	0,0467
dj	0,0291	0,2440	0,0023	0,0831	0,4993	0,0654	-0,7469	0,0900
db	-0,0055	-0,0356	-0,0037	-0,0369	-0,1064	-0,0229	-0,0216	-0,0140
Δ	0,0097	0,0473	0,0112	-0,1432	0,0022	-0,0717	-0,1057	0,0201
μ	0,1146	0,4926	0,1519	0,0753	0,3900	0,2206	0,1044	0,2187
$\tau[y]$	0,1672	3,7600	-0,7062	-4,1616	-0,6168	-3,5443	-7,3464	1,2009
$\tau[s]$	0,1293	0,3800	0,2252	0,5271	1,3923	0,9951	0,9026	0,1958
an	0,1331	-2,5426	1,1269	3,4528	0,4156	3,0882	6,7338	-0,6491
aa	0,0382	-0,0634	0,1201	-0,4263	0,1664	-0,1025	-0,1558	0,0069
ej	0,0001	-0,0005	0,0004	-0,0010	-0,0052	-0,0006	0,0084	-0,0001
eb	0,0067	0,0440	0,0042	0,0457	0,1351	0,0275	0,0257	0,0172
η	0,0460	0,1723	0,0687	-0,2104	0,0569	-0,0788	-0,1483	0,0804
$\beta[a]$	-0,0340	0,3829	-0,2065	-1,0483	-2,2615	-1,7798	-1,7752	0,0885

8 Исследование автомодельных решений модели

8.1 Сбалансированный рост экономики Казахстана

Классическим методом изучения качественных особенностей динамических моделей экономики является исследование **сравнительной статики сбалан-**

сированного роста. Таким способом получено большинство известных результатов экономической теории. Идея этого метода состоит в изучении зависимости от параметров каких-то характерных простых (чаще всего экспоненциальных) решений системы уравнений модели.

Выше, в разделе 6.1, мы указали класс простых решений для моделей рассматриваемого типа — *автомодельные решения* вида (7.1.4), в которых различные темпы роста отвечают различным независимым размерностям. С определенными оговорками автомодельное решение может рассматриваться как описание некоего идеализированного долговременного экономического равновесия.

Как видно из таблицы 5.2.1, в нашей модели присутствуют, не считая *времени*, 4 независимые размерности:

продукт, труд, валюта, деньги.

Им мы соотносим 4 темпа роста

$$\chi, \lambda, \omega, i + \chi. \quad (9.1.1)$$

и в соответствии с последним столбцом табл. 5.2.1 делаем в системе (6.2.1) - (6.2.17) подстановку

$$\begin{aligned} C(t) &= C(t0) e^{(\chi t)}, G_s(t) = G_s(t0) e^{(\chi t)}, \text{Imp}(t) = \text{Imp}(t0) e^{(\chi t)}, \\ J(t) &= J(t0) e^{(\chi t)}, L(t) = L(t0) e^{((i+\chi)t)}, M(t) = M(t0) e^{(\chi t)}, \\ MS(t) &= MS(t0) e^{((i+\chi)t)}, N(t) = N(t0) e^{((i+\chi)t)}, Q(t) = Q(t0) e^{(\chi t)}, \\ R_s(t) &= R_s(t0) e^{(\lambda t)}, S(t) = S(t0) e^{((i+\chi)t)}, Y(t) = Y(t0) e^{(\chi t)}, \\ p(t) &= \frac{p(t0) e^{((i+\chi)t)}}{e^{(\chi t)}}, \psi 3_f(t) = \psi 3_f(t0), q(t) = q(t0), r(t) = r(t0), \\ \rho(t) &= \rho(t0), s_r(t) = \frac{s_r(t0) e^{((i+\chi)t)}}{e^{(\lambda t)}}, \text{sal}(t) = \text{sal}(t0), \\ w_s(t) &= \frac{w_s(t0) e^{((i+\chi)t)}}{e^{(\omega t)}}, \text{Exp_s}(t) = \text{Exp_s}(t0) e^{(\chi t)}, \\ Sf_s(t) &= Sf_s(t0) e^{((i+\chi)t)}, \text{Sub_s}(t) = \text{Sub_s}(t0) e^{((i+\chi)t)}, \\ i(t) &= i(t0). \end{aligned}$$

Экспоненты сокращаются, если и только если темпы роста размерностей (9.1.1) связаны соотношениями

$$\chi = \lambda + b, \quad (9.1.2)$$

$$\omega = i + \frac{(ci + gi + di - 1) \chi}{di},$$

а для «амплитуд» (постоянных множителей при экспонентах) автомодельного решения получается следующая система уравнений (В этой системе из соображений наглядности мы заменили аргумент t^0 на t и оставили его только для того, чтобы отличать неизвестные и экзогенные величины от параметров модели. Фактически решения этой системы не зависят от времени.):

$$G_s(t) = -\frac{\text{Sub_s}(t)}{p(t)} + (\text{def}(t) + ny) Y(t) \quad (9.1.3)$$

$$\text{sal}(t) = \frac{\text{Exp_s}(t) - \text{Imp}(t)}{Y(t)} \quad (9.1.4)$$

$$N(t) - \tau_y p(t) J(t) - \tau_s s_r(t) R_s(t) = (G1 \text{ an } \rho(t) + G1 \text{ bn}) p(t) \quad (9.1.5)$$

$$M\mathfrak{S}(t) - S(t) + \text{Sf_s}(t) = \left(\frac{G1 \text{ aa}}{q(t)} - G1 \text{ aa } \mu + G1 \text{ aa } \mathfrak{u}(t) + G1 \text{ ba} \right) p(t) \quad (9.1.5)$$

$$M\mathfrak{S}(t) (\mathfrak{u}(t) + \chi) = -p(t) C(t) + R_s(t) s_r(t) + r(t) (\zeta_s - 1) \text{Sf_s}(t) + \text{Sub_s}(t) - r(t) (\zeta_s - 1) S(t) \quad (9.1.6)$$

$$p(t) G1 \mathbf{e}^{\left(\frac{\rho(t)}{ej} - \frac{dj}{ej} \right)} = (-1 + \psi 3_j(t)) L(t) + (-\psi 3_j(t) + 1 + \tau_y \rho(t)) p(t) M(t) + N(t) \quad (9.1.7)$$

$$p(t) G1 \mathbf{e}^{\left(-\frac{r(t) ny}{eb} + \frac{r(t)}{eb} - \frac{db}{eb} \right)} = (-1 + \zeta_n) N(t) + (\zeta_s - 1) S(t) + L(t) \quad (9.1.8)$$

$$0 = A M(t) + B R_s(t) - Y(t) \quad (9.1.9)$$

$$M(t) \chi = J(t) - \kappa M(t) \quad (9.1.10)$$

$$L(t) (\mathfrak{u}(t) + \chi) = p(t) J(t) - \beta_a L(t) \quad (9.1.10)$$

$$0 = (\rho(t) + \beta_a) \psi 3_j(t) - \rho(t) + r(t) \quad (9.1.11)$$

$$0 = \frac{-A + A ny + \kappa + r(t) - \mathfrak{u}(t)}{\tau_y} + \rho(t)^2 + (\kappa - \mathfrak{u}(t)) \rho(t) + \frac{(\mathfrak{u}(t) - \kappa + \beta_a) \psi 3_j(t)}{\tau_y} \quad (9.1.12)$$

$$\rho(t) = -\frac{1}{\tau_s} - \frac{p(t) (ny - 1) B}{s_r(t) \tau_s} \quad (9.1.13)$$

$$0 = \frac{1}{q(t)} - \mu + \iota(t) - r(t) + r(t) \zeta_s, \quad (9.1.14)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu - \eta \mu + \Delta) q(t) - 1 + \frac{q(t) \eta C(t)}{Q(t)}, \\ \chi Q(t) &= C(t) - \mu Q(t), \\ \text{Imp}(t) &= A I C(t)^{ci} C I^{(-ci)} J(t)^{gi} J I^{(-gi)} w_s(t)^{di} W I^{(-di)}, \\ Y(t) &= (\text{def}(t) + n_y) Y(t) + J(t) - \text{Imp}(t) + C(t) - \frac{\text{Sub}_s(t)}{p(t)} + \text{Exp}_s(t) \end{aligned} \quad (9.1.15)$$

По сравнению с системой (6.2.1) - (6.2.17) здесь для удобства исследования параметрической зависимости

- реальное государственное потребление $G_s(t)$ выражено через новый показатель относительного дефицита госбюджета $\text{def}(t)$ соотношением (9.1.3);
- введен показатель относительного сальдо торгового баланса $\text{sal}(t)$, (9.1.4);
- нормировочная постоянная G заменена на $G_1 = G \cdot G_s(t_0)$, поскольку при изменении госрасходов нормировка по смыслу модели не должна меняться.

Соотношение (9.1.2) показывает, что долгосрочный реальный темп роста экономики на автомодельном решении χ определяется экзогенно заданными темпами роста трудовых ресурсов λ и темпом технического прогресса $-b$, и, следовательно, не может быть изменен предусмотренными в модели мерами краткосрочного государственного регулирования. В этом смысле наша модель оказывается родственной классической модели роста Солоу [4], в которой можно менять пропорции потребления и накопления, но не темп сбалансированного роста. Есть, однако, и важные качественные отличия:

- в модели Солоу пропорции потребления и накопления не определяются из модели, а выбираются на основе внешнего критерия. В нашей модели пропорции определяются описанием рыночных механизмов.
- модель Солоу однородна по факторам производства, а наша — нет, поскольку экспорт задается экзогенно. Это обстоятельство отражает специфику сырьевой экономики, в которой экспорт слабо зависит от внутренних усилий.

Указанные отличия приводят к своеобразным экономическим следствиям, которые обсуждаются в следующем разделе. В частности показано, что модель описывает, как классический кейнсианский **эффект мультипликатора** (разд. 8.2.1), так и характерную для сырьевой экономики **«голландскую болезнь»** (разд. 8.2.2). При изменении некоторых параметров наблюдаются **бифуркации равновесий** (разд. 8.2.4).

8.2 Параметрическое регулирование сбалансированного роста (сравнительная статика)

В данном разделе показано, как изменяются амплитуды автомодельного решения при изменении амплитуд различных экзогенных переменных. Изменения

делаются по отношению к параметрам того автомодельного решения, которое служило начальным условием при расчете динамических решений, показанных в табл. 7.1.2.3. На всех рисунках этого раздела вертикальная пунктирная линия показывает это исходное значение изменяемого параметра

8.2.1 Влияние субсидий населению: эффект мультипликатора

Увеличение субсидий увеличивает ВВП в соответствии с рисунком 8.2.1.1 и инфляцию в соответствии с рисунком 8.2.1.2.

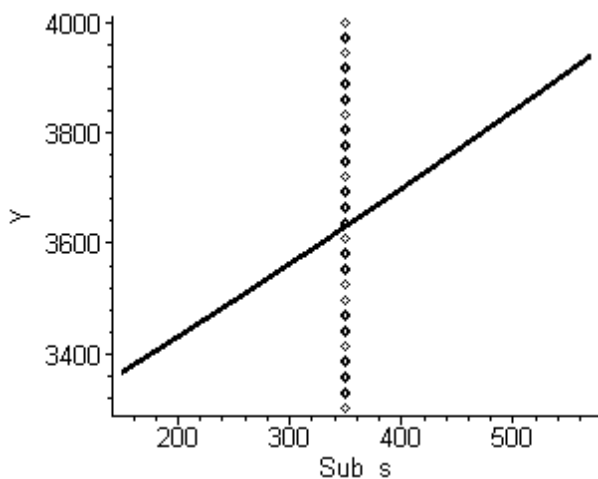


Рисунок 8.2.1.1 – Влияние изменения размера государственных субсидий на ВВП.

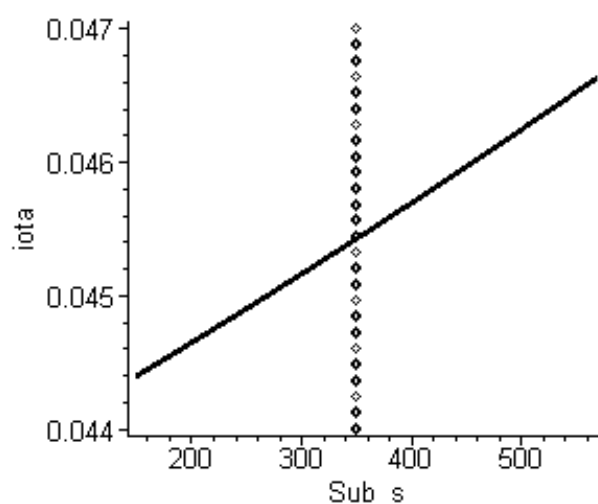


Рисунок 8.2.1.2 – Влияние изменения размера государственных субсидий на инфляцию.

Это классический **кейнсианский эффект мультипликатора** [4], проявление которого многократно наблюдалось в различные периоды в различных странах и использовалось для антикризисного регулирования.

Растут также доли потребления, инвестиций в соответствии с рисунком 8.2.1.3 и импорта в соответствии с рисунком 8.2.1.4.

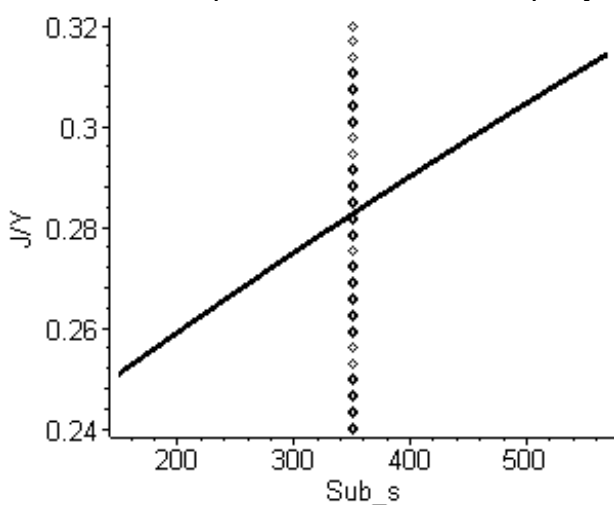


Рисунок 8.2.1.3 – Влияние изменения размера государственных субсидий на долю инвестиций в ВВП.

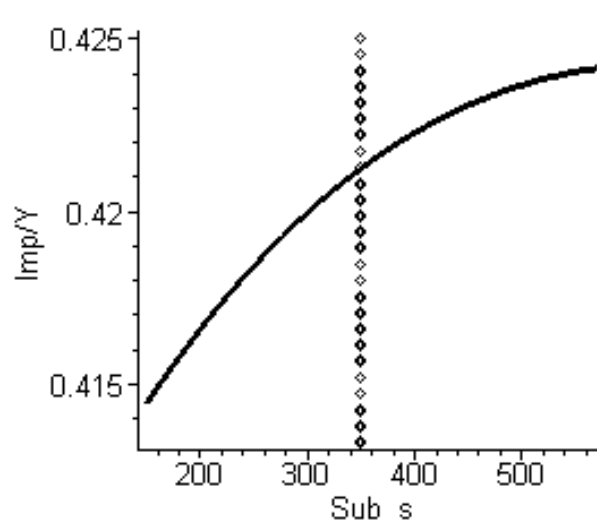


Рисунок 8.2.1.3 – Влияние изменения размера государственных субсидий на долю импорта в ВВП.

Потребление и импорт растут за счет общего увеличения спроса на продукт вследствие увеличения доходов населения. Производство и инвестиции также растут за счет увеличения спроса на продукт потребителями. Таким образом, увеличение субсидий сопровождается стимулированием спроса и инвестирования.

Однако затраты на субсидирование населения отражаются в растущем дефиците бюджета в соответствии с рисунком 8.2.1.5. Доля оттока капитала в ВВП, впрочем, уменьшается в соответствии с рисунком 8.2.1.6.

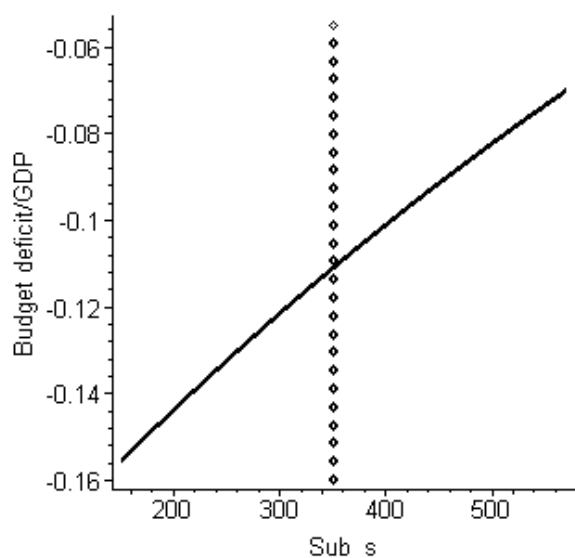


Рисунок 8.2.1.5 – Влияние изменения размера государственных субсидий на долю дефицита бюджета в ВВП.

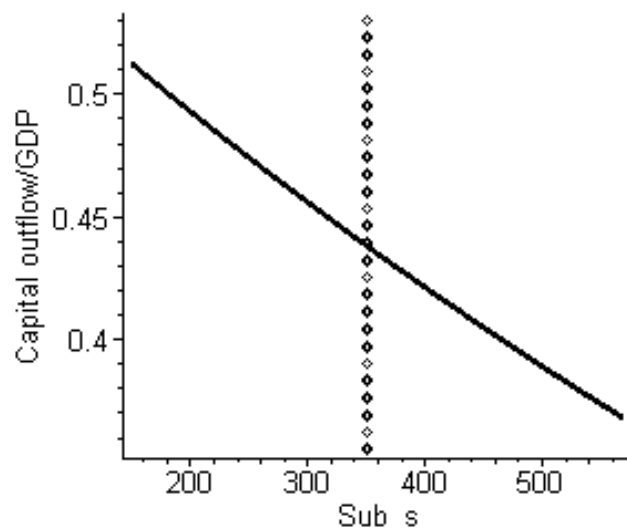


Рисунок 8.2.1.6 – Влияние изменения размера государственных субсидий на долю оттока капитала в ВВП.

8.2.2 ВЛИЯНИЕ ДЕПОЗИТОВ НЕРЕЗИДЕНТОВ: «ГОЛЛАНДСКАЯ БОЛЕЗнь»

Чистые депозиты нерезидентов оцениваются как разность депозитов нерезидентов и кредитов нерезидентам (разд.2.2). В модели она считается экзогенной величиной, не зависящей от доходности и процента по депозитам. Это предположение можно оправдать тем, что депозитная ставка в РК в последние годы систематически выше, чем на Западе, и, значит, приток депозитов регулируется не процентом, а оценкой рисков вложений в экономику РК.

Следует также помнить, что в модели приток иностранных вложений **не сопровождается соответствующим увеличением экспорта**, который задается экзогенно и независимо от внутреннего производства. Мы считаем такое предположение реалистичным для **сырьевой экономики**.

При изменении в модели депозитов нерезидентов изменения проявляются, прежде всего, в финансовом секторе. В результате увеличения предложения кредитов банками, процентная ставка по кредитам уменьшается (рис. 8.2.2.1.). Из-за уменьшения процентной ставки депозиты населения уменьшаются так, что **суммарные сбережения также уменьшаются** (рис. 8.2.2.2.).

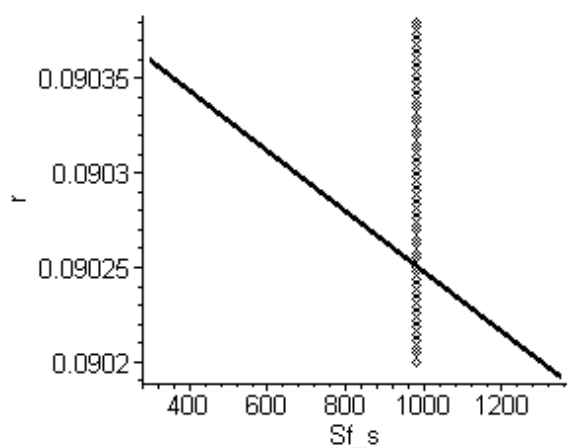


Рисунок 8.2.2.1 – Влияние изменения размера депозитов нерезидентов на процентную ставку по кредитам.

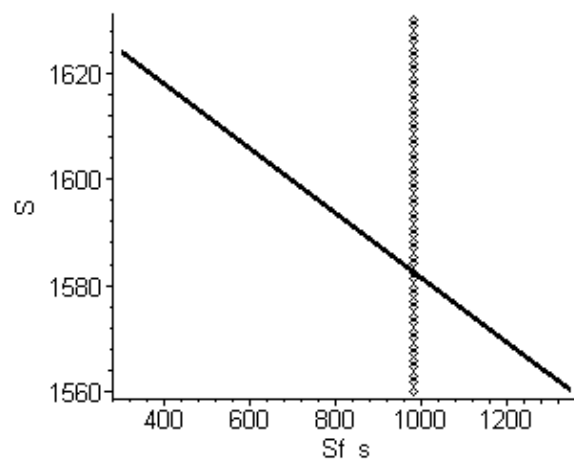


Рисунок 8.2.2.2 – Влияние изменения размера депозитов нерезидентов на депозиты.

Хотя это падение несколько компенсируется ростом чистых активов (собственного капитала) банков (рис. 8.2.2.3), кредитные вложения в экономику все-таки падают, а значит, падают инвестиции (рис. 8.2.2.5) и оборотные средства N . В конечном счете, в равновесии с увеличившимися внешними депозитами привлеченные банками средства уменьшаются (рис. 8.2.2.4).

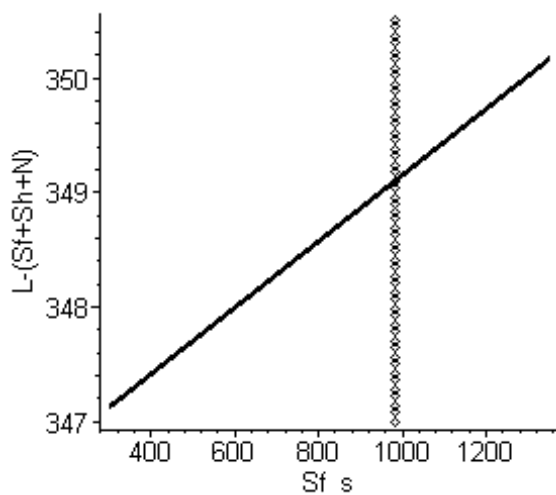


Рисунок 8.2.2.3 – Влияние изменения размера депозитов нерезидентов на чистые активы.

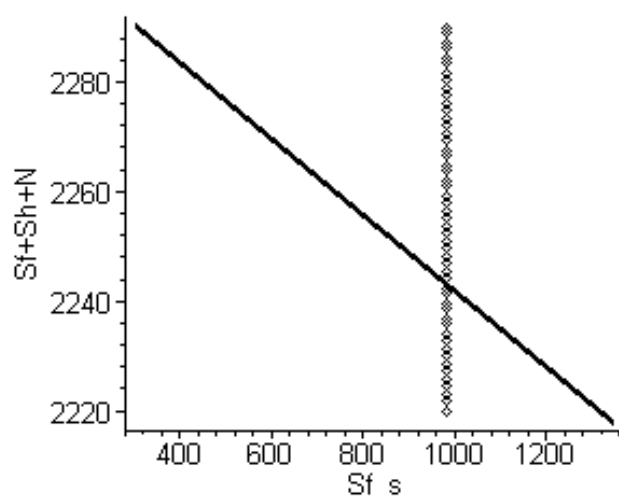


Рисунок 8.2.2.4 – Влияние изменения размера депозитов нерезидентов на обязательства банков.

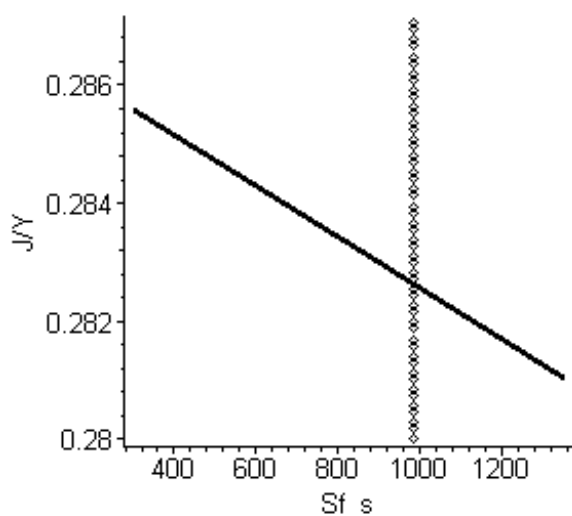


Рисунок 8.2.2.5 – Влияние изменения размера депозитов нерезидентов на долю инвестиций в ВВП.

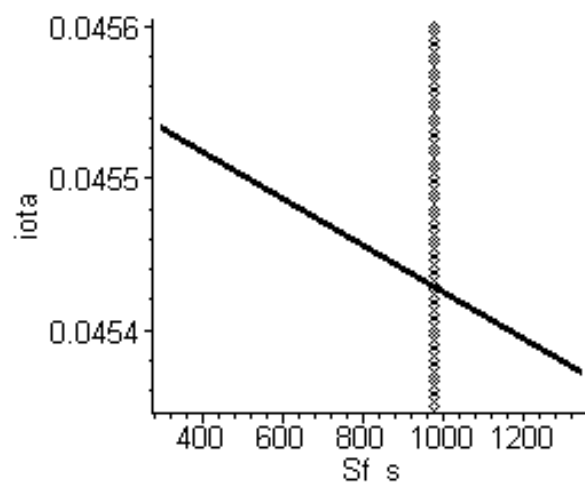


Рисунок 8.2.2.6 – Влияние изменения размера депозитов нерезидентов на инфляцию.

Сокращение инвестиций приводит к уменьшению ВВП в соответствии с рисунком 8.2.2.7. Вслед за ВВП сокращаются доходы населения, что приводит к уменьшению импорта в соответствии с рисунком 8.2.2.8 и способствует поддержанию низкого уровня сбережений.

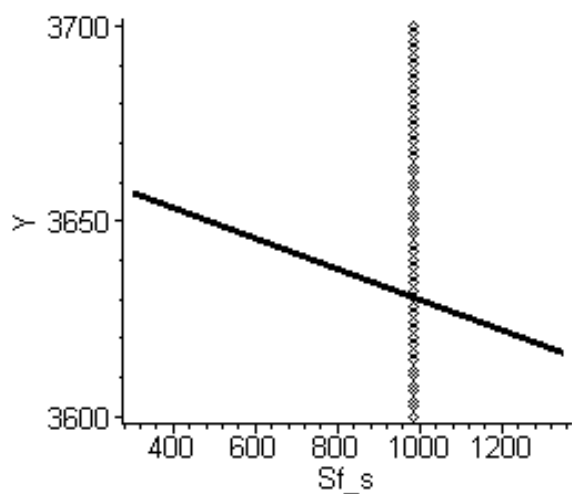


Рисунок 8.2.2.7 – Влияние изменения размера депозитов нерезидентов на ВВП.

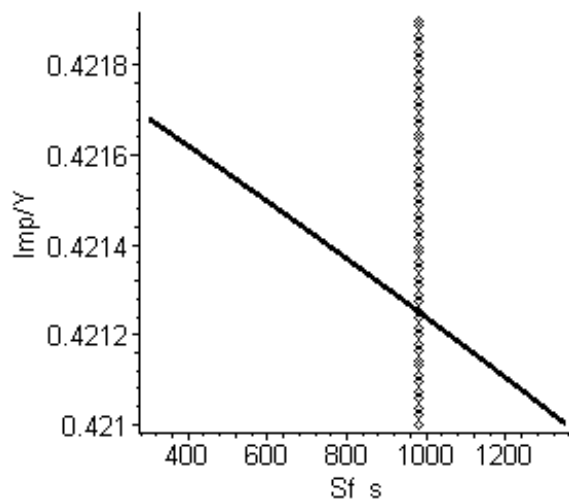


Рисунок 8.2.2.8 – Влияние изменения размера депозитов нерезидентов на долю импорта в ВВП.

Впрочем, уменьшение потребления домашних хозяйств, инвестиций и импорта в ВВП незначительны. Общее изменение ВВП – порядка 0.5 % при изменении иностранных депозитов на 25%. Поэтому финансовый оборот сокращается сильнее, чем реальный и инфляция несколько уменьшается в соответствии с рисунком 8.2.2.6.

Уменьшение производства уменьшает расходы государства и приводит к росту дефицита бюджета (точнее, на данном решении к уменьшению профицита), рис. 8.2.2.9. Уменьшение импорта при сохранении экспорта увеличивает сальдо торгового баланса, которое представляет собой отток капитала, который компенсирует привлечение депозитов нерезидентов в соответствии с рисунком 8.2.2.10.

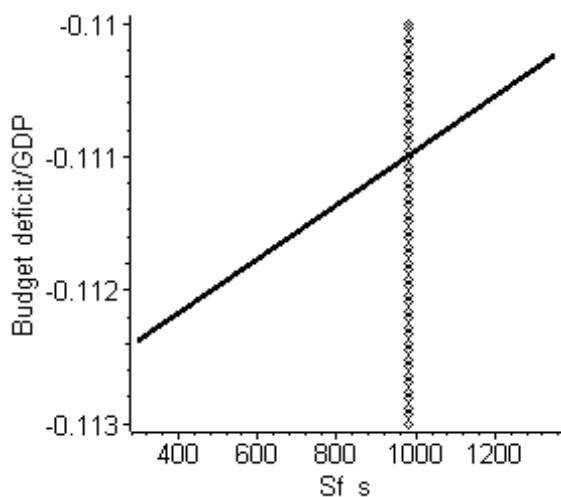


Рисунок 8.2.2.9 – Влияние изменения размера депозитов нерезидентов на долю дефицита бюджета в ВВП.

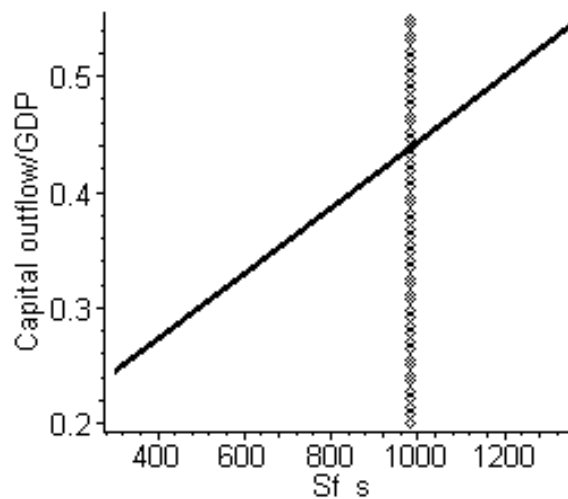


Рисунок 8.2.2.8 – Влияние изменения размера депозитов нерезидентов на долю оттока капитала в ВВП.

Таким образом, согласно модели **приток иностранных денег, не увеличивающих производство экспорта, вызывает в экономике стагнацию** и отток капитала по другим каналам. Сходное явление наблюдалось в Нидерландах, когда они стали получать большие доходы от североморской нефти. По этой причине указанное явление получило название «голландская болезнь».

8.2.3 ВЛИЯНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ ЗАНЯТОГО НАСЕЛЕНИЯ НА СБАЛАНСИРОВАННЫЙ РОСТ: НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Как уже говорилось в разд. 4.3.1.1, нам не удалось найти приемлемое описание рынка труда, поэтому численность занятых рассматривается в модели как экзогенный фактор, и модель не описывает явления безработицы. По этой причине экспериментам с изменением занятости трудно дать прямую экономическую интерпретацию. Результаты этих экспериментов интересны ярким проявлением нелинейных эффектов в модели.

Изменение доли инвестиций в соответствии с рисунком 8.2.3.1 и инфляции в соответствии с рисунком 8.2.3.2 монотонно и вполне ожидаемо.

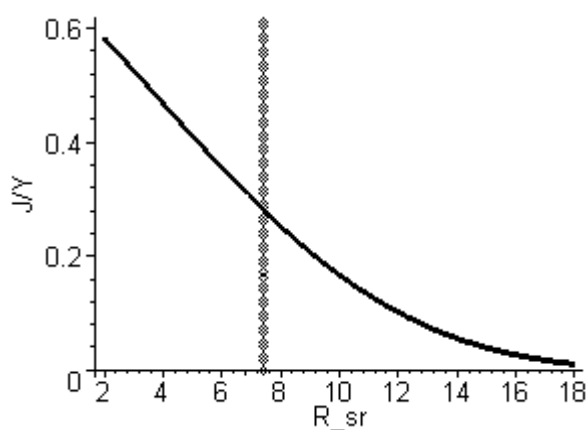


Рисунок 8.2.3.1 – Влияние изменения занятости на долю инвестиций в ВВП.

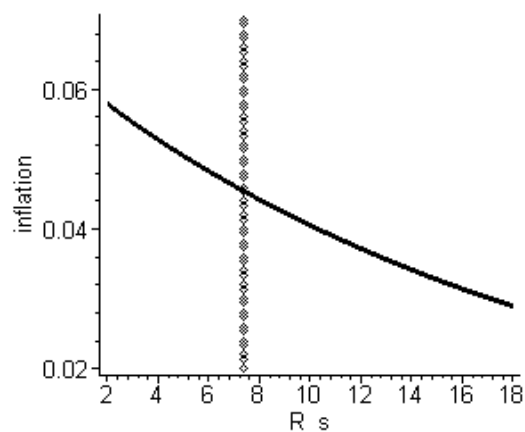


Рисунок 8.2.3.2 – Влияние изменения занятости на инфляцию.

Инвестиции падают, потому что труд замещает активные фонды, а инфляция падает, потому что с ростом числа занятых падает заработная плата.

Но вот ВВП оказывается зависящим от занятости не монотонно в соответствии с рисунком 8.2.3.3. Это, видимо, снова связано с неизменностью экспорта в сырьевой экономике. Пока внутреннего производства хватает на выпуск экспортной продукции, активные фонды замещают уменьшающийся труд не полностью. Когда же дефицит труда становится слишком большим, замещение интенсифицируется. Соответственно доля импорта имеет максимум по занятости в соответствии с рисунком 8.2.3.4.

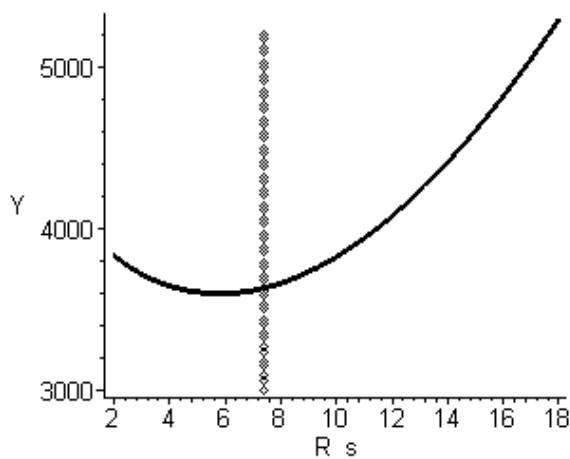


Рисунок 8.2.3.3 – Влияние изменения занятости на ВВП.

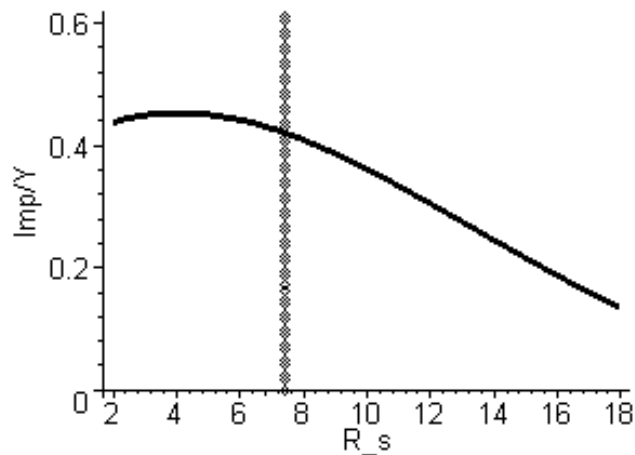


Рисунок 8.2.3.4 – Влияние изменения занятости на долю импорта в ВВП.

Дефицит бюджета в соответствии с рисунком 8.2.3.5 ведет себя противоположным образом по отношению к ВВП в силу изменения налоговых поступлений, пропорциональных ВВП. Отток капитала, однако, имеет максимум в другой точке в соответствии с рисунком 8.2.3.6.

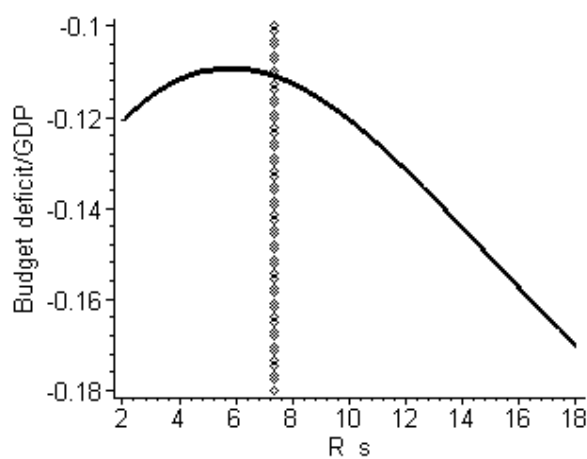


Рисунок 8.2.3.5 – Влияние изменения занятости на долю дефицита бюджета в ВВП.

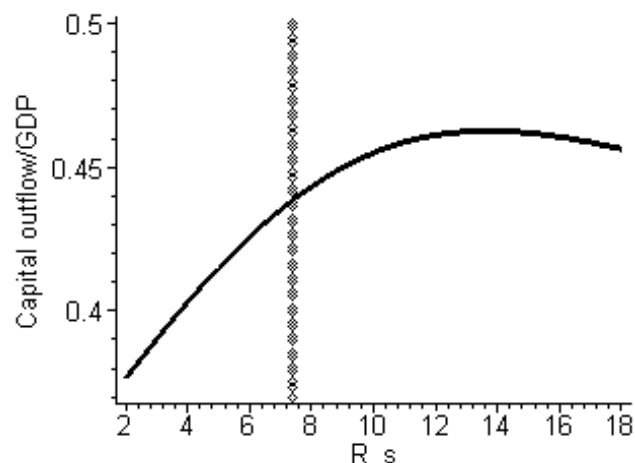


Рисунок 8.2.3.6 – Влияние изменения занятости на долю оттока капитала в ВВП.

8.2.4 ВЛИЯНИЕ НАЛОГОВОЙ НАГРУЗКИ НА СБАЛАНСИРОВАННЫЙ РОСТ: БИФУРКАЦИИ

Самая сложная и довольно неожиданная картина открывается при изменении налоговой нагрузки η_y упомянутой в разделе 2.3. В принципе система (9.1.3) - (9.1.15) имеет много решений. Но при изменении параметров, изученных в предыдущих разделах, в экономически осмысленной области значений переменных оказывалось только одно из этих решений. При изменении налоговой нагрузки от 0.15 до 0.45 в этой области оказывается несколько решений. На рисунках 8.2.4.1 - 8.2.4.6 эти разные ветви изображены черной, серой и серой штрихованной линиями. Вне диапазона $\eta_y \in (0.15, 0.45)$ экономически осмысленных решений у системы (9.1.3) - (9.1.15) не обнаружено.

Неожиданно оказывается, что **реальная нагрузка $\eta_y = 0.3$ при идентифицированных значениях параметров модели соответствует максимальному оттоку капитала** в соответствии с рисунком 8.2.4.1, и в этом смысле фактическое значение $\eta_y = 0.3$ оказывается самым «плохим» из возможных.

Представляется, что такое положение сложилось из-за взаимной адаптации бизнеса, стремящегося во всех странах СНГ, прежде всего, к вывозу капитала, и правительства, стремящегося не только сбалансировать бюджет, но и накопить резервы, которые тоже являются формой вывоза капитала.

Следствием этого факта является то, что при $\eta_y = 0.3$ ВВП в соответствии с рисунком 8.2.4.2 и доля инвестиций в соответствии с рисунком 8.2.4.3 достигают минимума, а доля импорта – максимума в соответствии с рисунком 8.2.4.4.

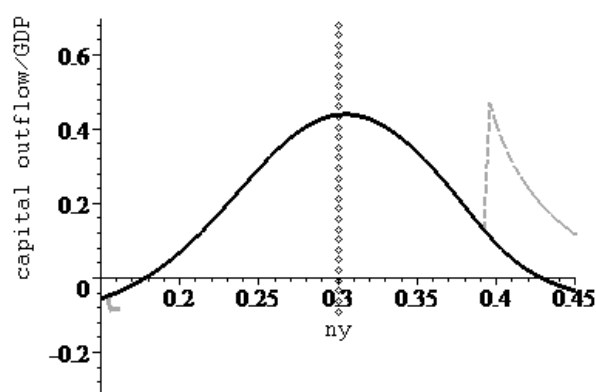


Рисунок 8.2.4.1— Влияние изменения налоговой нагрузки на долю оттока капитала в ВВП.

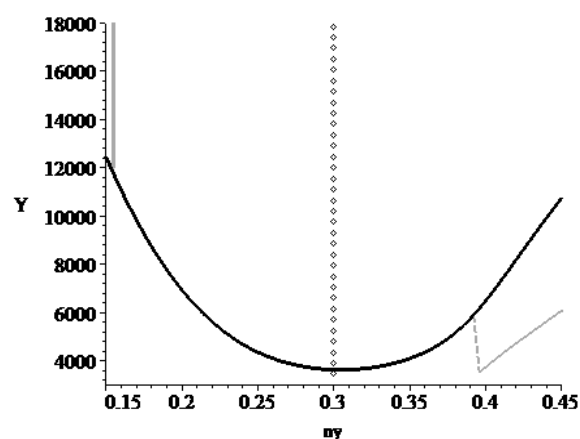


Рисунок 8.2.4.2— Влияние изменения налоговой нагрузки на ВВП.

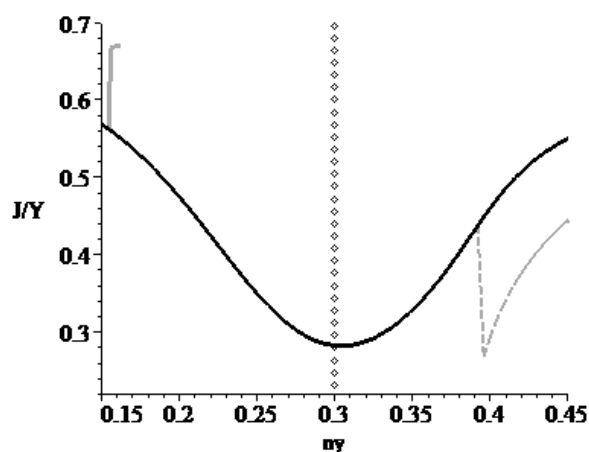


Рисунок 8.2.4.3 — Влияние изменения налоговой нагрузки на долю инвестиций в ВВП.

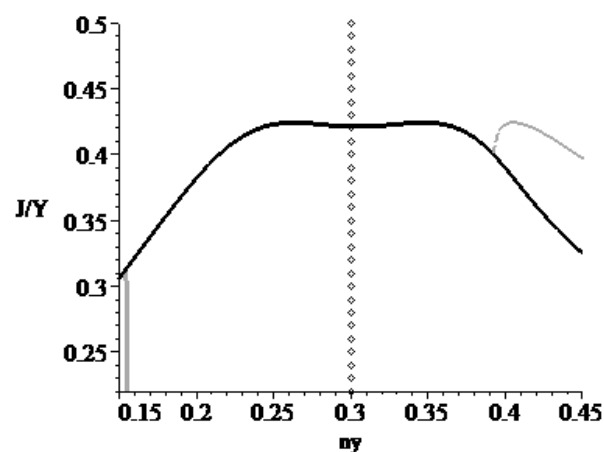


Рисунок 8.2.4.4 — Влияние изменения налоговой нагрузки на долю импорта в ВВП.

Изменение инфляции в соответствии с рисунком 8.2.4.5 и дефицита бюджета в соответствии с рисунком 8.2.4.6, впрочем, происходят монотонно и вполне понятно – с ростом налогов оба показателя падают.

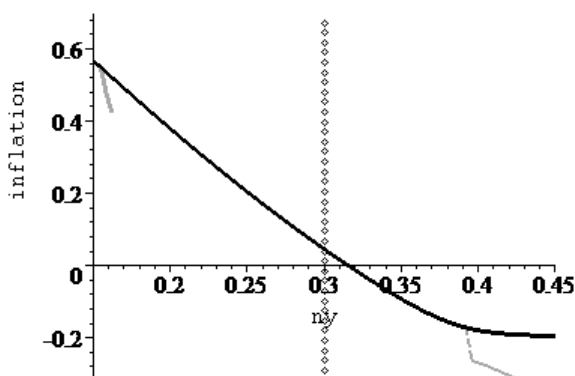


Рисунок 8.2.4.5 — Влияние изменения налоговой нагрузки на инфляцию.

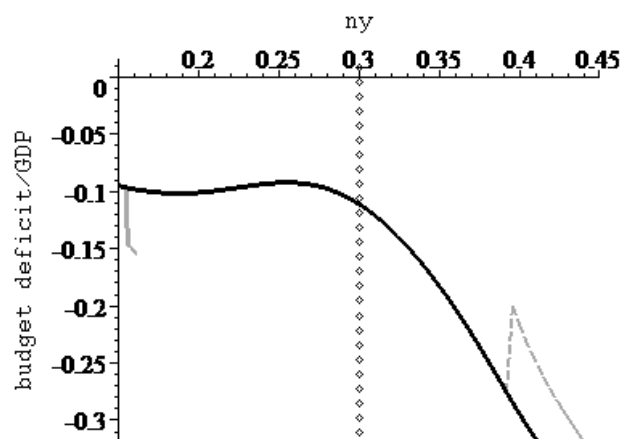


Рисунок 8.2.4.6 — Влияние изменения налоговой нагрузки на долю дефицита бюджета в ВВП.

Наибольший интерес в этих экспериментах представляют **бифуркации**. Синяя линия на рисунке 8.2.4.1 - 8.2.4.6. показывает непрерывное изменение решения системы (9.1.3) - (9.1.15) при изменении ny от $ny = 0.3$. В области малых налогов возникает еще одно решение, изображенное серой линией. Оно, впрочем, не представляет особого интереса, ввиду узкого диапазона существования и резких изменений при изменении ny .

Иное дело – решение, возникающее при больших налогах и изображенное на рисунке 8.2.4.1 - 8.2.4.6 серой пунктирной линией. Видно, что переход на него компенсирует отрицательные последствия движения по синей линии. Важно также заметить, что это решение появляется скачком в стороне от «черного»¹⁰. Это означает, что, постольку поскольку это явление соответствует реальности, переход от режима экономического развития, обозначенного черным, к режиму, обозначенному серой штрихованной линией, потребует неэкономических «волевых» усилий.

8.3 Аналог модели макроэкономического равновесия

8.3.1 Модель макроэкономического равновесия IS-LM.

Популярная модель IS-LM [4] описывает общее макроэкономическое равновесие, образующееся путём комбинации моделей равновесия на трёх рынках: труда, товарном и денежном. Предполагается, что на каждом из рынков равновесие достигается при следующих условиях:

- **на рынке труда:** выпуск продукта Y определяется производственной функцией по уровню занятости и капитальным вложениям независимо от реальной (за вычетом темпа инфляции) процентной ставки r (**кривая FE – full-employment**);
- **на товарном рынке:**

¹⁰ Вертикальные участки черных линий – артефакт графопостроителя.

- в закрытой экономике при равенстве инвестиций I и сбережений S , размер каждой из которых зависит от реальной процентной ставки r , а сбережения S кроме того зависят от выпуска продукта Y (**кривая IS – investments-savings**);
- в открытой экономике при равенстве разности инвестиций и сбережений $I - S$ и чистого экспорта NX , при этом $I - S$ зависит от выпуска продукта Y и реальной процентной ставки r , а NX – только от реальной процентной ставки r .
- на денежном рынке: при равенстве спроса на деньги MD и предложения денег MS , отнесённых к данному уровню цен p . При этом спрос на деньги (предпочтение ликвидности) зависит как от реальной процентной ставки r , так и от выпуска продукта Y , а предложение денег только от выпуска продукта Y (**кривая LM – liquidity-money**);
- общее макроэкономическое равновесие достигается ТОЛЬКО при достижении равновесия на всех трёх рынках, или, что то же самое, при пересечении кривых IS, LM, FE в одной точке.

8.3.2 АНАЛОГ IS-LM РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА ЭКОНОМИКИ КАЗАХСТАНА

Система (9.1.3) - (9.1.15) учитывает гораздо больше процессов и факторов, чем модель IS-LM. Однако если отбросить 7 из 18 уравнений системы (9.1.3) - (9.1.15) и зафиксировать определяемые ими величины, то оставшиеся уравнения дадут подсистему по смыслу и форме похожую на модель IS-LM.

В нашей модели сбережения превращаются в инвестиции не сразу, как в модели IS-LM, а через посредничество банков. Уравнение (9.1.10) показывает, что кредиты $L(t)$ в нашей модели пропорциональны инвестициям $J(t)$, поэтому в качестве аналога товарного рынка модели IS-LM в нашей модели будет рынок кредитов.

Кредитоспособность производителя, определяющая его спрос на кредиты, описывается уравнением (6.2.4), которое на автомодельном решении превращается в (9.1.7). Подставляя в это уравнение выражение $\psi_{3j}(t)$ из (9.1.11) и $M(t)$ из (9.1.9), получаем выражение для спроса на кредит, в которое входят процент $r(t)$, доходность $\rho(t)$ и выпуск $Y(t)$

$$0 = - \frac{\left(-\frac{r(t) - \rho(t)}{-\rho(t) - \beta_a} + 1 + \tau_y \rho(t) \right) (R_{sr}(t) B - Yr(t))}{A} + Nr(t) + \left(-1 + \frac{r(t) - \rho(t)}{-\rho(t) - \beta_a} \right) Lr(t) - GG_{sr}(t) e^{\left(\frac{\rho(t)}{\epsilon_j} - \frac{d_j}{\epsilon_j} \right)} \quad (9.3.1)$$

Доходность $\rho(t)$ в принципе можно выразить чрез реальный процент $r(t) - i(t)$ из (9.1.11), (9.1.12).

Фиксируя остальные переменные в (9.3.1), получим, как в модели IS-LM, зависимость спроса на кредит от реального процента, которая «сдвигается» при изменении выпуска $Y(t)$.

Эта зависимость при идентифицированных значениях параметров модели изображена тройной линией на рисунке 8.3.2.1. (как принято в учебниках, на рисунке фактически изображена обратная зависимость $r(t) - i(t)$ от $L(t)$). Откуда видим, что чем меньше реальная процентная ставка на кредиты, тем спрос на них больше, что, конечно, соответствует предположениям модели IS-LM.

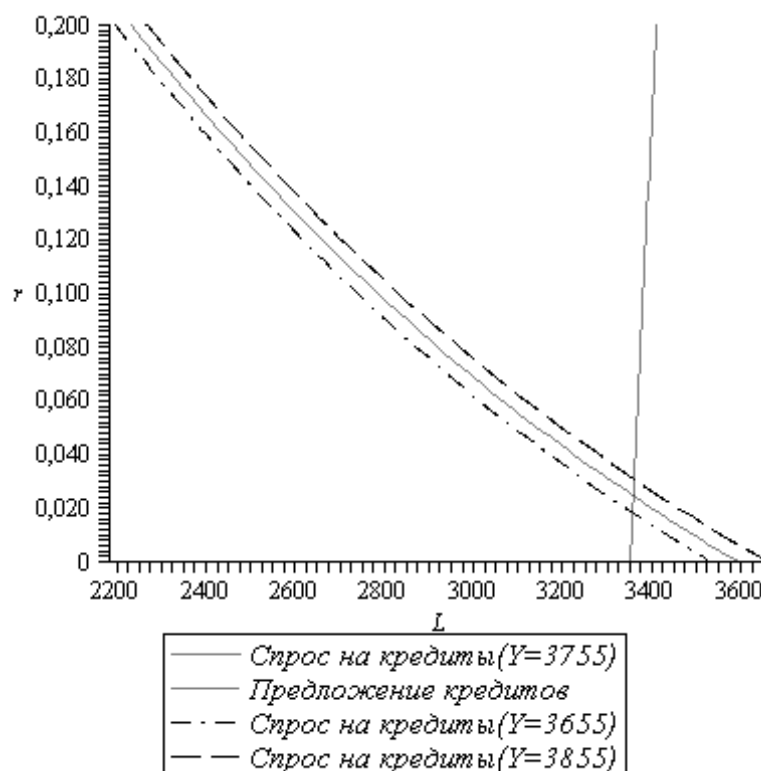


Рисунок 8.3.2.1 – Аналог равновесия товарного рынка.

Предложение кредитов определяется ресурсами банков, что выражается в модели уравнением (6.2.5), которое на автомодельном решении превращается в (9.1.8), из которого получается требуемая моделью IS-LM зависимость предложения кредитов от процента

$$L(t) = p(t) G1 e^{\left(-\frac{r(t) ny}{eb} + \frac{r(t)}{eb} - \frac{db}{eb} \right)} - (-1 + \zeta_n) N(t) - (\zeta_s - 1) S(t)$$

Эта зависимость (точнее, обратная к ней), выраженная через реальный процент, показана на рисунке 8.3.2.1. Откуда видим, что чем больше реальная процентная ставка на кредиты, тем их предложение со стороны Банка больше, что также соответствует положениям модели IS-LM. На рисунке серыми линиями вы-

делены спрос и предложение на рынке кредитов при данном уровне ВВП, т.е. в текущем положении равновесия.

Спрос на деньги $MD(t)$ естественно определить через переменные модели соотношением

$$MS(t) = MD(t) + S(t) - Sf_s(t).$$

Тогда из (9.1.6) для $MD(t)$ получается уравнение

$$0 = (-r(t) + r(t) \zeta_s + i(t) + b + \lambda) Sf_s(t) + Sub_s(t) + R_s(t) s_r(t) - C(t) + (r(t) - b - \lambda - r(t) \zeta_s - i(t)) S(t) + (-\lambda - b - i(t)) MD(t).$$

Подставляя в это уравнение выражение $R_s(t)$ из (9.1.9) и $s_r(t)$ из (9.1.13), получаем выражение для спроса на деньги, в которое входят процент $r(t)$, доходность $\rho(t)$ и выпуск $Y(t)$

$$0 = (-r(t) + r(t) \zeta_s + i(t) + b + \lambda) Sf_s(t) + Sub_s(t) + \frac{(M(t) A - Y(t)) (ny - 1)}{1 + \rho(t) \tau_s} - Cr(t) + (r(t) - b - \lambda - r(t) \zeta_s - i(t)) S(t) + (-\lambda - b - i(t)) MD(t). \quad (9.3.2)$$

Доходность $\rho(t)$, как уже говорилось, выражается через реальный процент $r(t) - i(t)$ из (9.1.11), (9.1.12).

Фиксируя остальные переменные в (9.3.2), получим, как и в модели IS-LM, зависимость спроса на деньги от реального процента, которая «сдвигается» при изменении выпуска $Y(t)$.

Эта зависимость при идентифицированных значениях параметров модели изображена тройной линией на рисунке 8.3.2.2. (Как принято в учебниках, на рисунке фактически изображена обратная зависимость $r(t) - i(t)$ от $MD(t)$.) Откуда видим, что зависимость между спросом на деньги и реальной ставкой процента невелика, а также, что вид этой зависимости отличается от принятой в предположениях модели IS-LM.

Аналогичный анализ соотношения (9.1.5) дает аналог кривой предложения денег, изображенной на рисунке 8.3.2.2. Откуда видим, что как таковой сдвигающейся зависимости между предложением денег и реальной ставкой процента нет, что соответствует положениям модели IS-LM. На зеленой рисунке серыми линиями выделены спрос и предложение на денежном рынке при данном уровне ВВП, т.е. в текущем положении равновесия. 8.3.2.2).

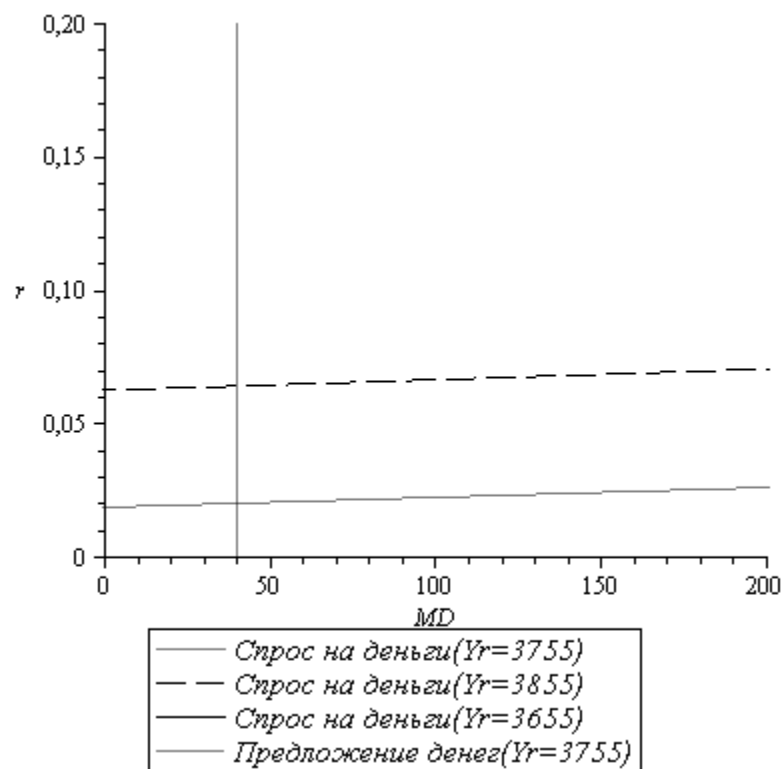


Рисунок 8.3.2.2 – Аналог равновесия денежного рынка

Предложение труда в нашей модели неэластично, поэтому равновесие рынка труда сводится к вертикальной прямой, изображенной на рисунке 8.3.2.3.

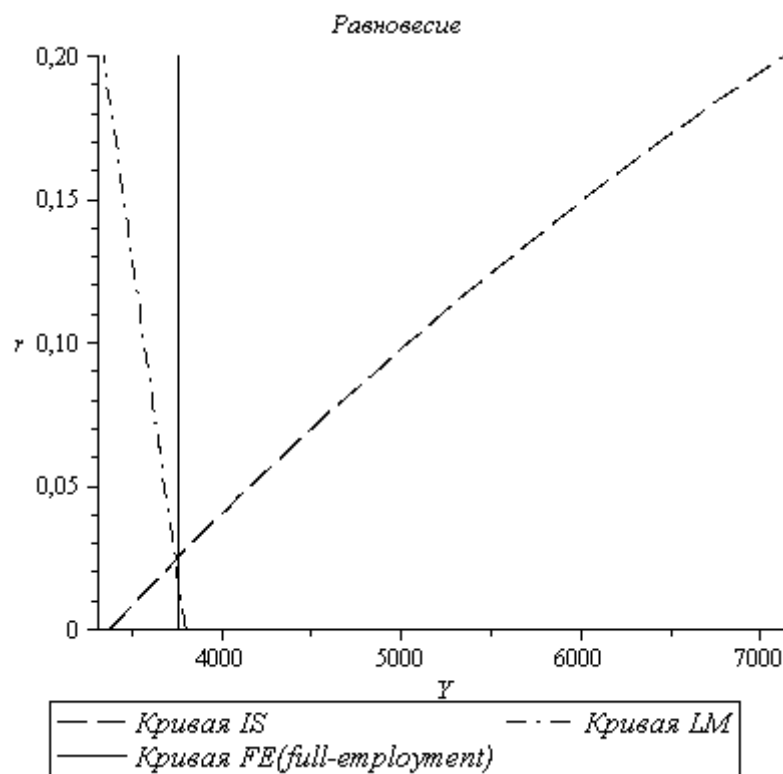


Рисунок 8.3.2.3 – Аналог макроэкономического равновесия

В целом же рисунок 8.3.2.3 показывает, что при вычисленных из системы (9.1.3) - (9.1.15) значениях выпуска $Y(t)$ и реального процента $r(t) - i(t)$ все три кривые сходятся в одной точке, как и требует IS-LM модель.

Таким образом, наша модель **включает описание зависимостей, учтенных в IS-LM модели**. Подчеркнем, однако, что это верно только для автомодельных решений. В динамической системе (6.2.1) - (6.2.17) кредиты и денежная масса являются фазовыми переменными, которые не находятся (как и реальная экономика) в мгновенном IS-LM равновесии. Отклонения от этого равновесия компенсируются производными фазовых переменных.

9 Результаты прогнозных расчетов и исследование влияния различных возможных сценариев государственной экономической политики

9.1 Чувствительность модели к изменению экзогенных переменных в моменты времени из горизонта прогнозирования

Как уже говорилось выше в разделе 7.1, траектория в краевой задаче рассчитывается вся целиком. Был сразу выбран интервал времени такой, на котором модель будет использоваться при прогнозировании (со II по IV квартал 2009 года). На этот срок был задан прогноз экзогенных величин (см. таблицу 7.1.1.1), который мы назвали базовым прогнозом. Результаты расчета модели при базовом прогнозе приведены таблице 7.1.2.3, и на рисунках 7.1.2.1 - 7.1.2.8.

Помимо расчета при базовом прогнозе, возможно рассчитать модель и получить прогноз эндогенных переменных при любой другом прогнозе экзогенных величин (см. таблицу 5.2.1) на интервале прогнозирования (II- IV квартал 2009 г.). Ниже, в разделе 9.2, приведены результаты альтернативных прогнозных расчетов. В данном разделе мы рассмотрим вопрос о чувствительности эндогенных переменных модели на прогнозном интервале к изменению экзогенных переменных на прогнозном интервале.

Итак, мы рассмотрим несколько прогнозов, в которых в отличие от базового (см. таблицу 7.1.1.1) один из экзогенных рядов в моменты времени $t = 14, 15, 16$ (II- IV квартал 2009 г.) с нарастанием отклоняется от значения в базовом прогнозе – на величину $\Delta(t-13)vnd(t)$. Здесь $vnd(t)$ - значение экзогенной переменной (R_s , G_s , Sub_s , Exp_s , Sf_s или w_s) в базовом прогнозе. Новые значения экзогенных рядов для двух значений Δ , 0.05 и 0.1, приведены ниже в таблицах 9.1.1 - 9.1.2.

Таблица 9.1.1 – Измененные экзогенные переменные для альтернативных прогнозных расчетов при $\Delta=0.05$.

Номер прогноза	Изменяемая экзогенная переменная	Изменяемые значения		
		t=14	t=15	t=16
1	R_s	8,31	8,77	9,09
2	G_s	441,93	434,98	599,29
3	Sub_s	722,63	784,54	848,95
4	Exp_s	2049,79	2439,24	1889,97

Номер прогноза	Изменяемая экзогенная переменная	Изменяемые значения		
		t=14	t=15	t=16
5	Sf_s	1562,44	1636,84	1711,25
6	w_s	157,50	165,00	172,50

Таблица 9.1.2 – Измененные экзогенные переменные для альтернативных прогнозных расчетов при delta=0.1.

Номер прогноза	Изменяемая экзогенная переменная	Изменяемые значения		
		t=14	t=15	t=16
7	R_s	8,70	9,56	10,28
8	G_s	462,97	474,52	677,46
9	Sub_s	757,04	855,86	959,69
10	Exp_s	2147,40	2660,99	2136,49
11	Sf_s	1636,84	1785,65	1934,45
12	w_s	165,00	180,00	195,00

По результатам расчетов модели по каждому из 12 прогнозов была оценена чувствительность эндогенных переменных к изменению прогноза. Чувствительность эндогенной переменной $x(t)$ оценивалась по формуле

$$\frac{x(t, \Delta, vnd) - x(t)}{\Delta x(t)}$$

при $t=16$ и, соответственно, при $\Delta = 0.05$ и $\Delta = 0.1$. Результаты расчета чувствительностей приведены в таблицах 9.1.3 - 9.1.4.

Таблица 9.1.3 – Чувствительность эндогенных переменных модели от изменения экзогенных переменных при delta=0.05, t=16.

Номер прогноза	Изменяемая экзогенная переменная	Y	J	C	Imp	p	S[H]	L	N
1	R_s	1,18	-1,79	3,67	0,21	-2,34	-2,09	-2,17	-1,97
2	G_s	0,32	0,80	-0,51	0,19	0,04	-1,35	0,57	1,62
3	Sub_s	0,13	0,41	0,21	0,22	-0,35	0,75	0,06	-0,24
4	Exp_s	0,92	2,43	-1,83	0,50	1,10	4,12	2,17	1,19
5	Sf_s	0,07	0,15	0,14	0,09	-0,32	-1,04	0,03	-0,20
6	w_s	1,27	3,44	-2,82	-6,83	1,31	5,80	2,87	1,28

Таблица 9.1.4 – Чувствительность эндогенных переменных модели к изменению экзогенных переменных при delta=0.1, t=16.

Номер прогноза	Изменяемая экзогенная переменная	Y	J	C	Imp	p	S[H]	L	N
7	R_s	1,21	-1,75	3,73	0,25	-2,13	-1,79	-1,94	-1,80
8	G_s	0,33	0,81	-0,51	0,19	0,03	-1,32	0,57	1,62
9	Sub_s	0,14	0,44	0,22	0,23	-0,34	0,75	0,06	-0,24
10	Exp_s	0,94	2,50	-1,80	0,53	1,18	4,36	2,31	1,26
11	Sf_s	0,07	0,14	0,14	0,09	-0,31	-1,02	0,03	-0,19
12	w_s	1,32	3,59	-2,76	-6,75	1,42	6,34	3,12	1,38

Как видно из таблиц 9.1.3 - 9.1.4, качественная и даже количественная зависимость чувствительности от Δ сохраняется, поэтому исследование прогнозных расчетов можно проводить при произвольном значении Δ .

9.2 Исследование влияния различных возможных сценариев государственной экономической политики

Ниже приведены результаты нескольких прогнозных расчетов. Каждый из прогнозных расчетов отличается от базового прогноза изменением одного из экзогенных рядов (см. таблицу 9.1.1) в прогнозный период $t=14,15,16$ (II- IV квартал 2009 г.).

Следует отметить, что **результаты прогнозных расчетов в целом совпадают с выводами раздела 8.2**, в котором рассматривалась зависимость сбалансированного роста от амплитуд экзогенных переменных. Проведенные здесь прогнозные расчеты позволяют наблюдать уже влияние динамики изменения экзогенных величин на динамику модели.

Интересным оказывается тот факт, что, хотя изменение экзогенных переменных в прогнозный период $t=14..16$ должно влиять на весь промежуток времени $t=1..16$ в силу того, что задача краевая, тем не менее, **изменение экзогенных переменных влияет существенным образом только на прогнозный период $t=14..16$, а на остальном временном промежутке $t=1..13$ влияние затухает**. Это – проявление сильного магистрального эффекта, который оправдывает применение принципа рациональных ожиданий, фактически сводя краевую задачу к динамической системе [1].

На всех рисунках в следующих разделах черным цветом изображена статистика, синим – текущий прогнозный расчет, красным – базовый прогноз.

9.2.1 Влияние увеличения субсидий населению

Рассмотрим сценарий увеличения субсидий населению. Изменение субсидий (показано пунктиром) по отношению к базовому прогнозу (сплошная линия) изображено на рисунке 9.2.1.1. Результаты расчетов приведены на рисунках 9.2.1.2 - 9.2.1.9.

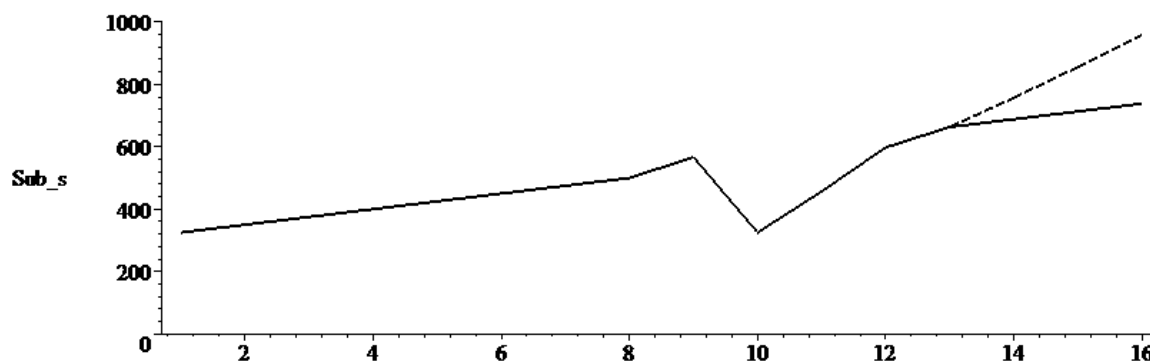


Рисунок 9.2.1.1 – Субсидии населению. Сценарий повышения субсидий населению.

Увеличение субсидий приводит к росту ВВП, потребления, инвестиций, валового накопления, сбережений населения, ссуд производителям, но уменьшает расчетные счета производителей и инфляцию. Как было отмечено в разделе

8.2.1, это классический кейнсианский эффект – увеличение субсидий стимулирует потребление и производство.

Хотя все переменные (и уравнения) взаимно и достаточно сложным образом влияют друг на друга, тем не менее, можно постараться выделить базовую цепочку влияния изменения экзогенной переменной на эндогенные переменные, как это принято в классической экономике.

Так, увеличение субсидий через баланс доходов и расходов потребителя (6.2.3) ведет к увеличению сбережений населения и увеличению потребления. Увеличение потребления через макроэкономический баланс (6.2.17) ведет к увеличению ВВП и импорта. За счет увеличения сбережений населения, которые по предположению модели хранятся в виде банковских вкладов, растут ссуды производителю (в модели эта зависимость выражена в форме смягчения условия неотрицательности банковского капитала (6.2.5)). Увеличение ссуд и потребления через уравнение для динамики кредитов (6.2.8) и макроэкономический баланс (6.2.17) влекут увеличение инвестиций.

Что касается объяснения уменьшения инфляции, то этот вопрос менее однозначный. По нашему мнению, сила такого сравнительно сложного описания экономики, как наша модель, в отличие от, скажем, IS-LM модели, заключается как раз в точном вычислении многочисленных связей какого-то показателя (в данном случае инфляции) с другими показателями экономики. Инфляция в конечную систему из 17 уравнений (6.2.1)-(6.2.17) входит (сама и через непосредственно определяющий её дефлятор ВВП) в 10 уравнений! При такой сложной зависимости вопрос о том, какое именно из этих уравнений дало ключевой вклад в падение инфляции, некорректный.

Падение цен и увеличение спроса ведет к росту доходности производства $\rho(t)$, что, в свою очередь через уравнение ограничения ликвидности (6.2.1) подталкивает производителя меньше денег держать в форме расчетных счетов, а вкладывать в производство. Таким образом, в вопросе влияния на расчетные счета эффект от увеличения доходности производства (со знаком минус) превышает эффект от увеличения инвестиций (со знаком плюс).

Данная схема влияния увеличения \ уменьшения потребления на падение \ увеличение инфляции и расчетных счетов характерна и прогнозных расчетов, приведенных ниже, поэтому мы её упоминать далее не будем. Подчеркнем только, что подобные **рассуждения помогают понять результаты расчетов, но ни в коем случае не заменяют самих расчетов**, поскольку относительную силу противоположных тенденций в экономике можно оценить на количественной модели.

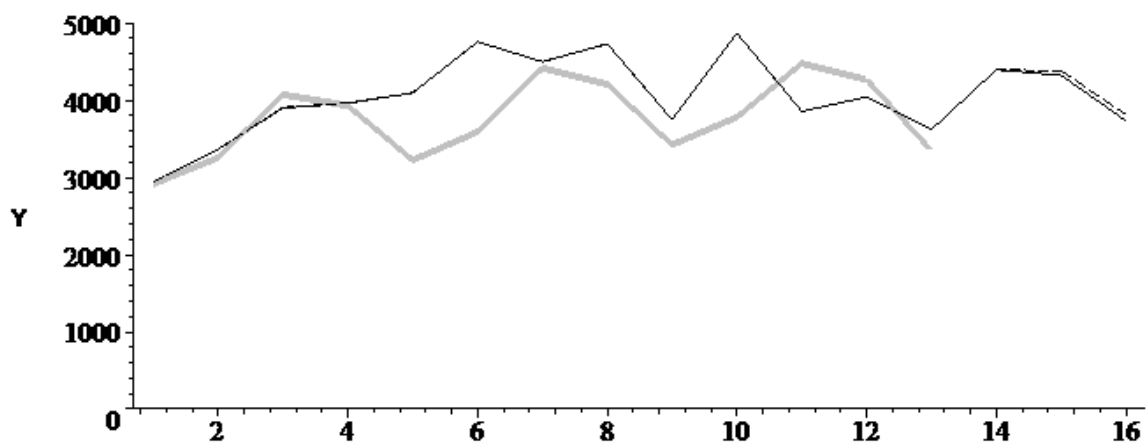


Рисунок 9.2.1.2 – Реальный ВВП. Влияние субсидий населению.

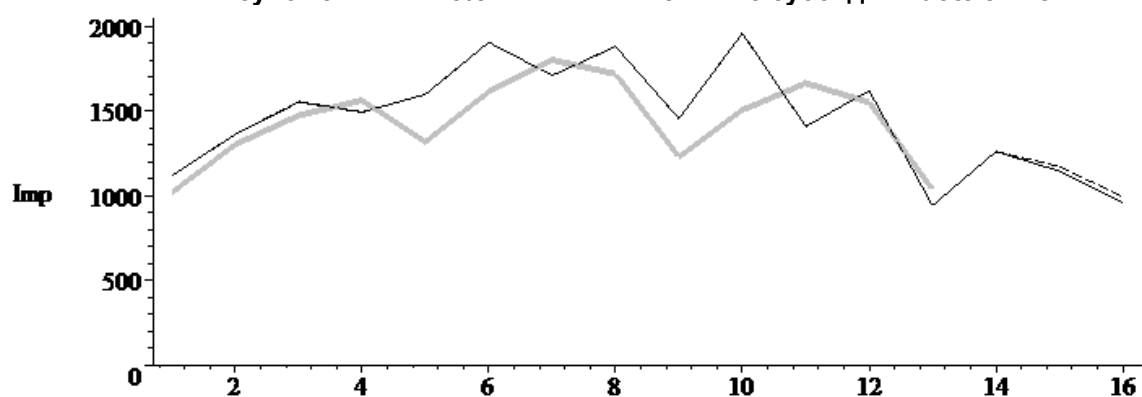


Рисунок 9.2.1.3 – Реальный импорт. Влияние субсидий населению.

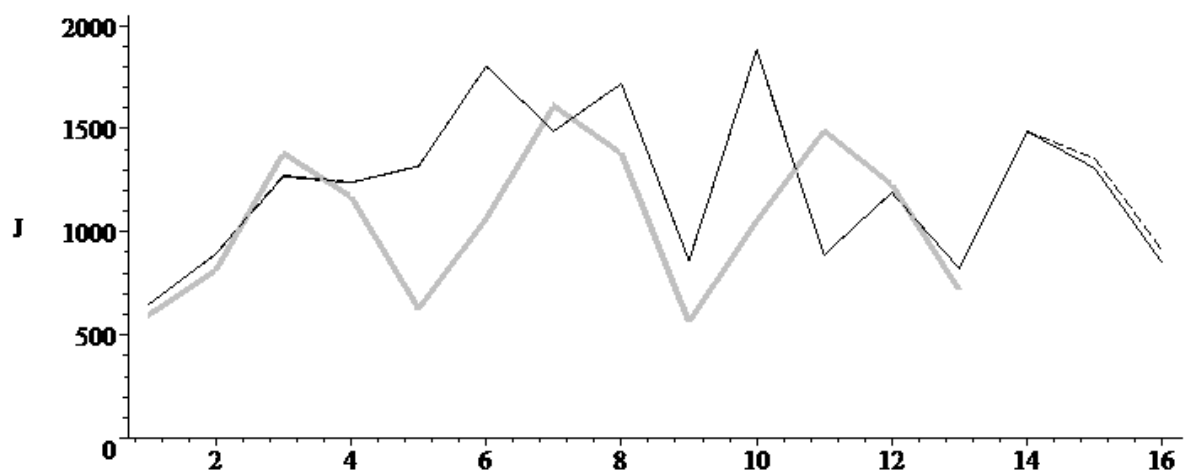


Рисунок 9.2.1.4 – Валовое накопление. Влияние субсидий населению.

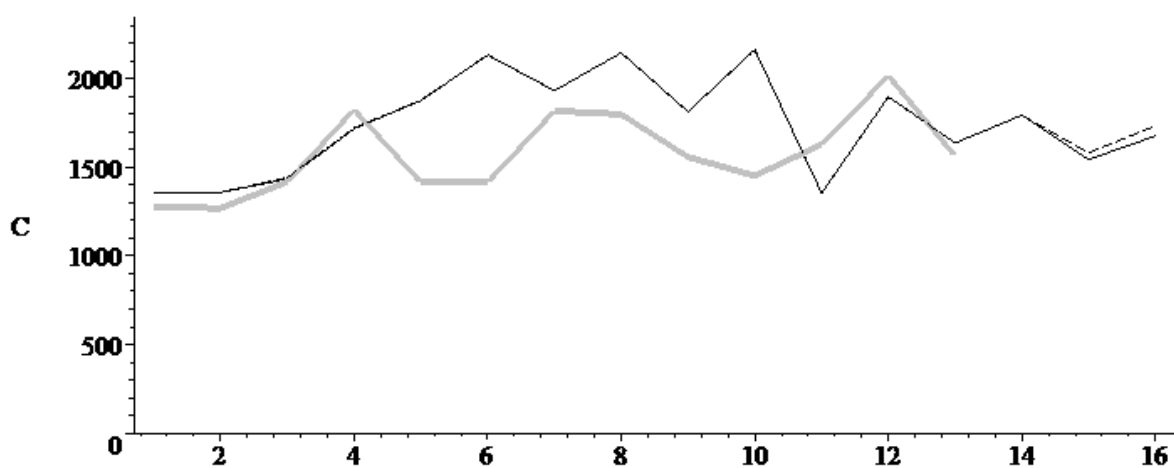


Рисунок 9.2.1.5 – Реальное потребление населения. Влияние субсидий населению.

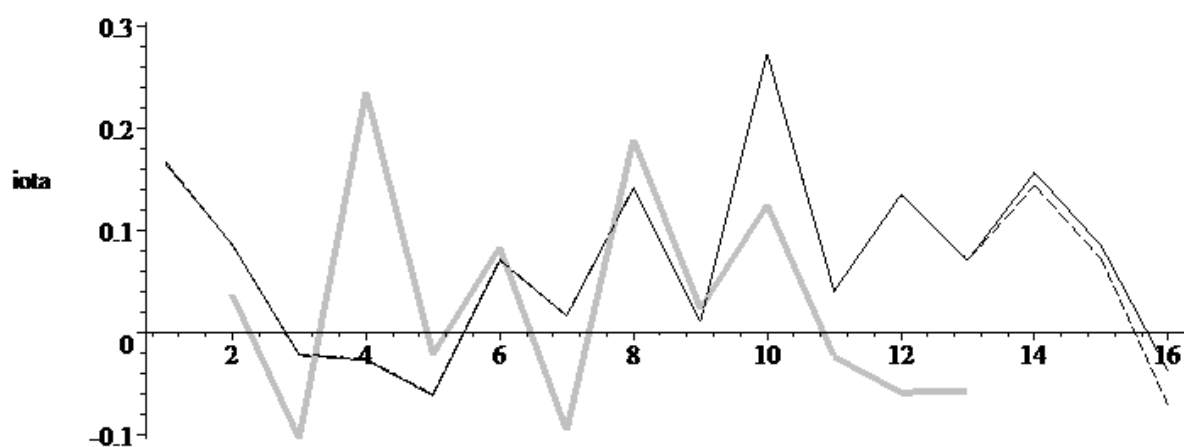


Рисунок 9.2.6.6 – Инфляция. Влияние субсидий населению.

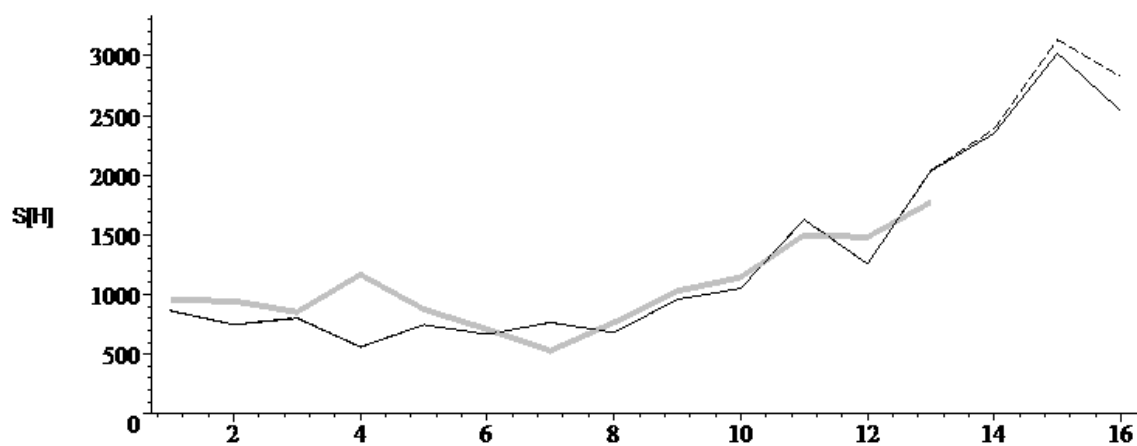


Рисунок 9.2.1.7 – Сбережения населения. Влияние субсидий населению.

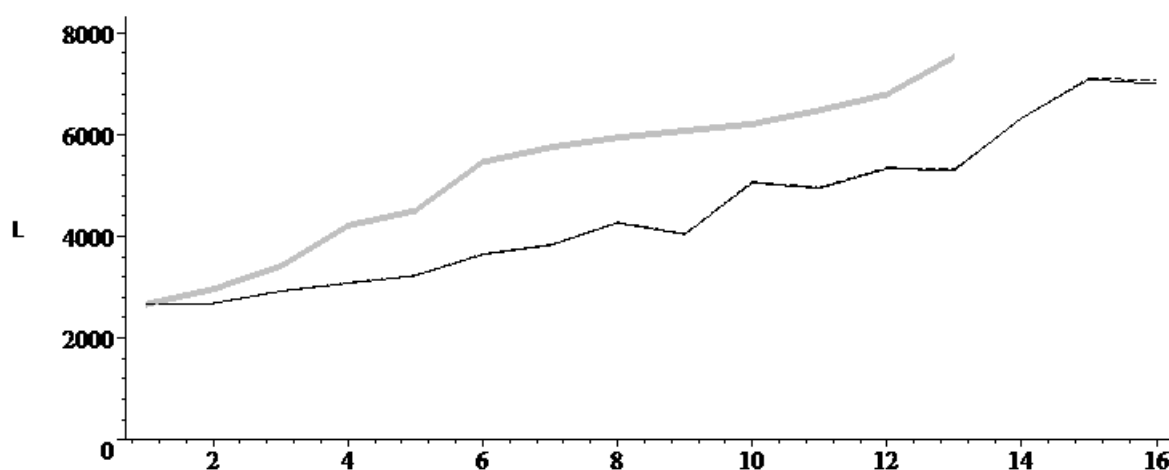


Рисунок 9.2.1.8 – Ссуды производителям. Влияние субсидий населению.

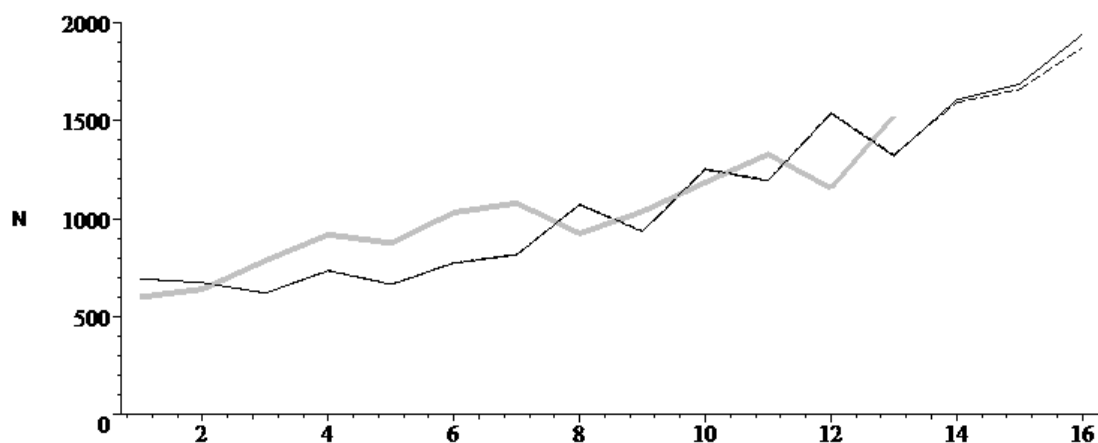


Рисунок 9.2.1.9 – Расчетные счета производителей. Влияние субсидий населению.

9.2.2 ВЛИЯНИЕ УВЕЛИЧЕНИЯ ДЕПОЗИТОВ НЕРЕЗИДЕНТОВ

В последнее время в средствах массовой информации Республики Казахстан активно обсуждается вопрос о будущем экономики в случае, если начавшийся примерно в 2008 отток иностранного капитала продолжится. Значительный вклад в приток \ отток капитала дают депозиты нерезидентов, которые в нашей модели считаются экзогенной величиной. Рассмотрим здесь сценарий увеличения депозитов нерезидентов, а сценарий продолжения их падения это рассматриваемые эффекты, но со знаком «минус».

Изменение иностранных депозитов по отношению к базовому прогнозу изображено на рисунке 9.2.2.1. Результаты расчетов приведены на рисунках 9.2.2.2 - 9.2.2.9.

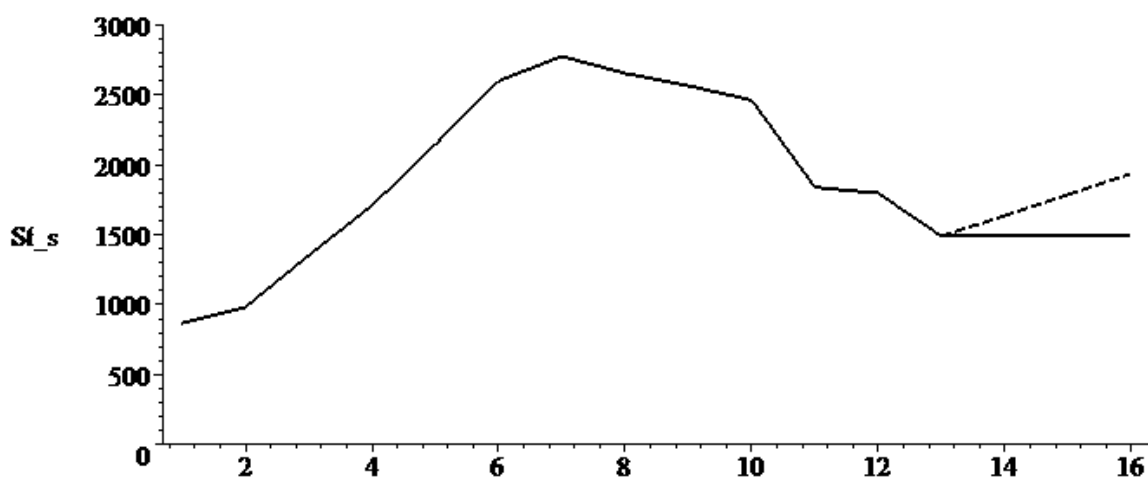


Рисунок 9.2.2.1 – Депозиты нерезидентов. Сценарий повышения депозитов нерезидентов.

Главные изменения в данном сценарии происходят с депозитами домашних хозяйств (рисунок 9.2.2.7). Депозиты домашних хозяйств падают по причине снижения ставки по депозитам. Суммарно депозиты иностранцев и домашних хозяйств растут. В этом заключается количественное различие с выводами раздела 8.2.2 - в модели сбалансированного роста суммарные сбережения падали. Но влияние изменения суммарных сбережений с учетом знака остаётся тем же: ссуды производителям незначительно увеличиваются. Увеличение ссуд приводит к незначительному увеличению реальных инвестиций, которые незначительно подтягивают за собой потребление, ВВП и импорт.

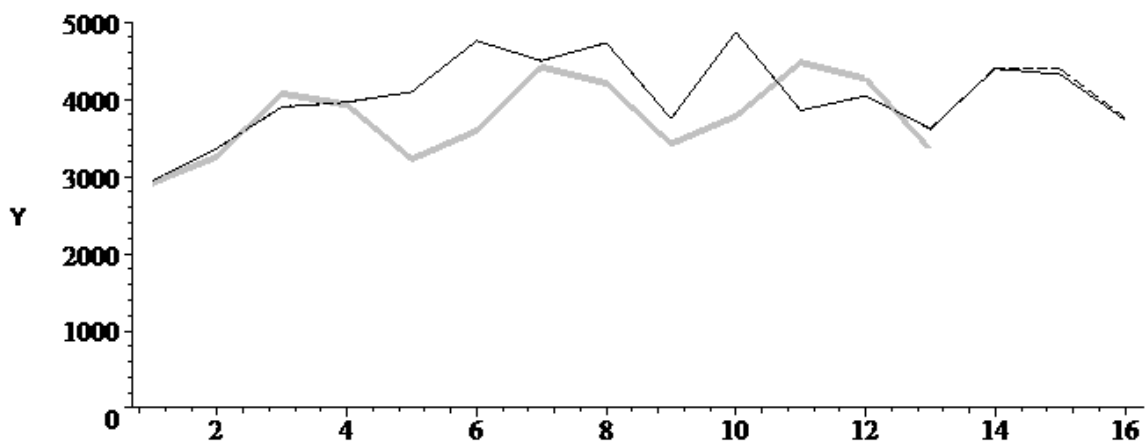


Рисунок 9.2.2.2 – Реальный ВВП. Влияние депозитов нерезидентов.

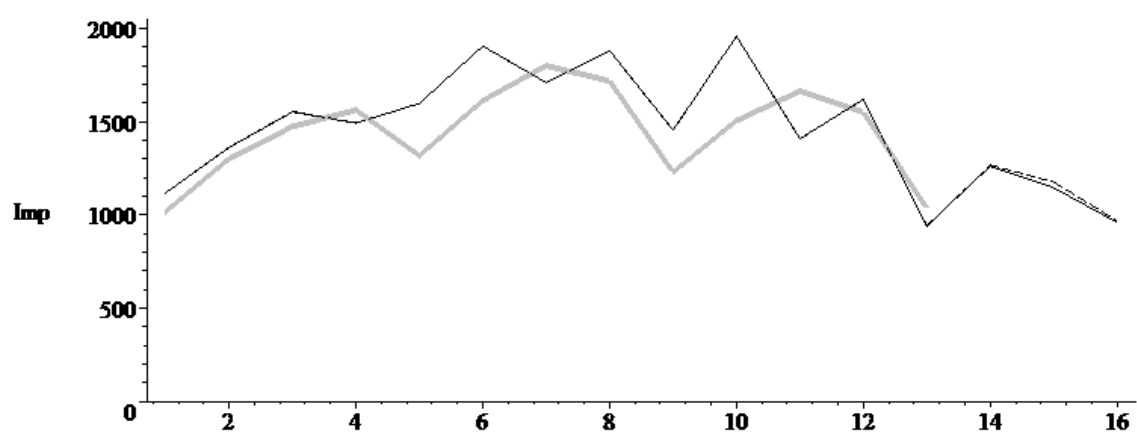


Рисунок 9.2.2.3 – Реальный импорт. Влияние депозитов нерезидентов.

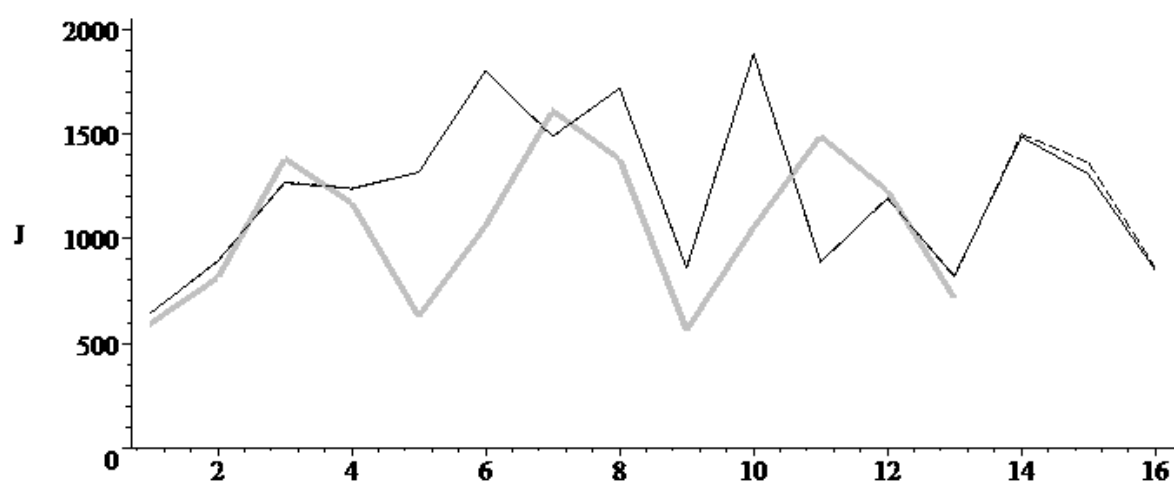


Рисунок 9.2.2.4 – Валовое накопление. Влияние депозитов нерезидентов.

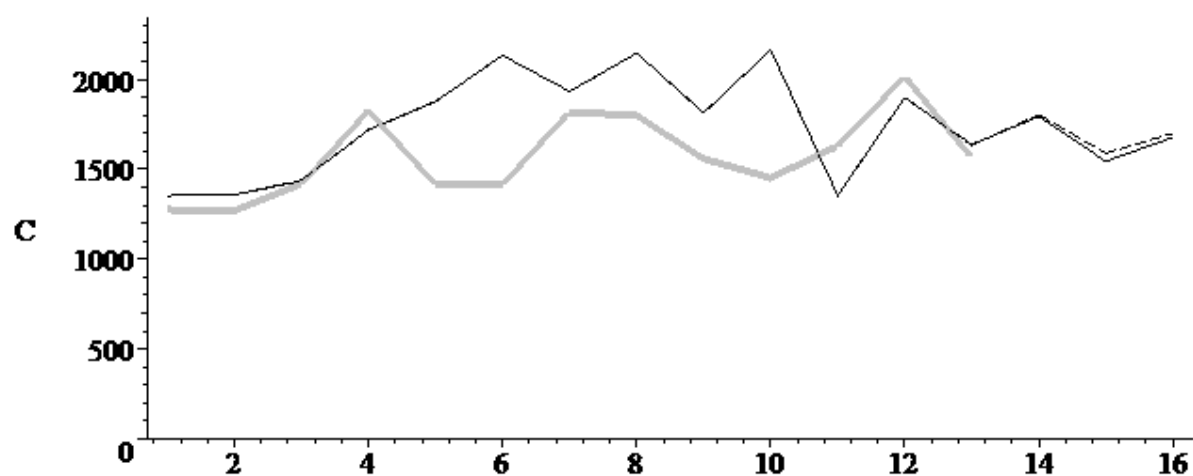


Рисунок 9.2.2.5 – Реальное потребление населения. Влияние депозитов нерезидентов.

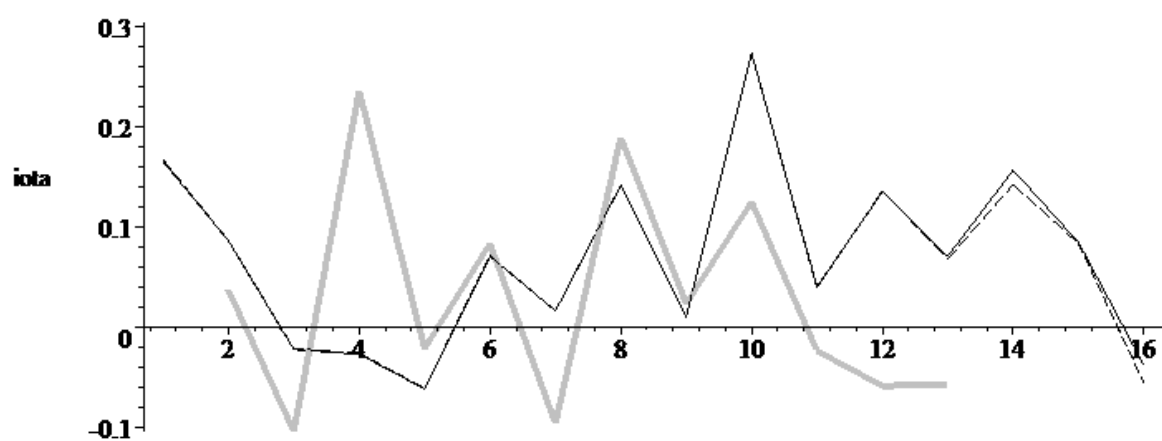


Рисунок 9.2.2.6 – Инфляция. Влияние депозитов нерезидентов.

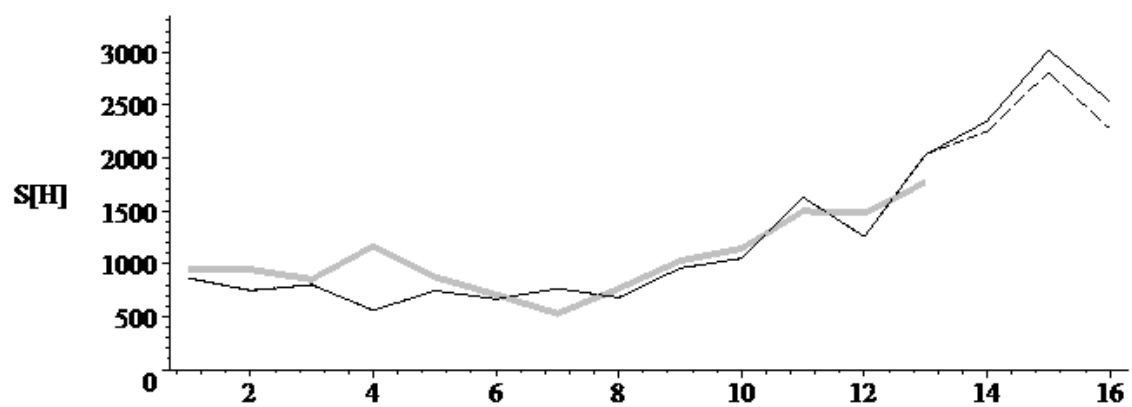


Рисунок 9.2.2.7 – Сбережения населения. Влияние депозитов нерезидентов.

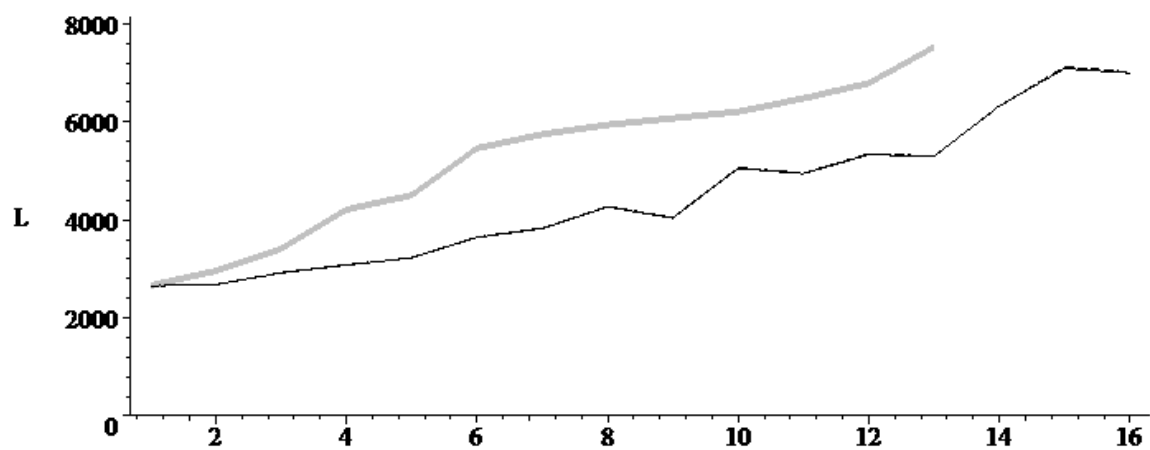


Рисунок 9.2.2.8 – Ссуды производителям. Влияние депозитов нерезидентов.

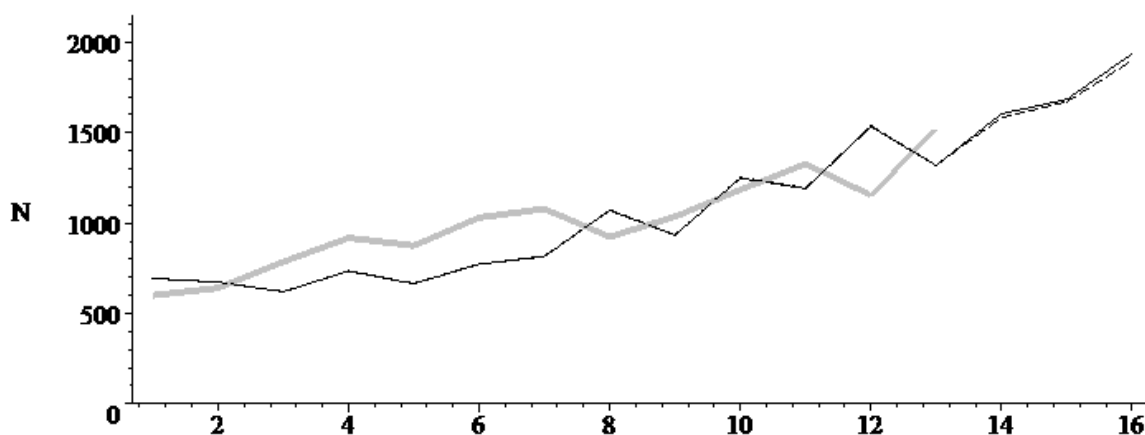


Рисунок 9.2.2.9 – Расчетные счета производителей. Влияние депозитов нерезидентов.

9.2.3 ВЛИЯНИЕ УВЕЛИЧЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ ЗАНЯТЫХ

Как уже отмечалось, к экспериментам с изменением численности занятого населения следует относиться с осторожностью: численность занятых рассматривается в модели как экзогенный фактор, и модель не описывает явления безработицы. В этом контексте также не совсем понятны меры государственного управления, которые могли бы регулировать численность занятых.

В качестве прогнозного сценария рассмотрим случай увеличения (рисунок 9.2.3.1). Результаты расчетов приведены на рисунках 9.2.3.2 - 9.2.3.9.

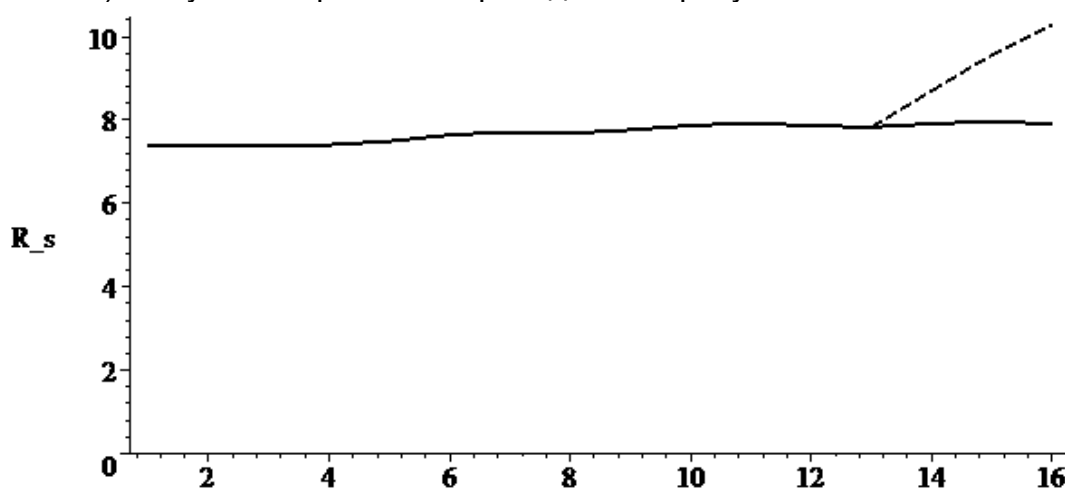


Рисунок 9.2.3.1 – Численность занятых. Сценарий повышения численности занятых (штрихованная линия).

В результате роста занятости как одного из факторов производства (см. (6.2.6)) растёт ВВП. Труд замещает активные фонды (см. (6.2.4), (6.2.7)), поэтому реальные инвестиции падают. Потребление растёт за счет увеличения предложения и падения цен, а импорт падает в силу большей эластичности по инвестициям, чем по потреблению – (6.2.16). Падение инвестиций приводит к снижению ссуд производителям, что влечет падение кредитной ставки и падение депозитов населения. Значительное падение расчетных счетов в данном случае, в отличие от раздела 9.2.1, связано с различием в периодах обращения денег для инвестиций и заработной платы в ограничении ликвидности производителя.

Следует отметить, что рассмотренное «увеличение занятости», по смыслу модели, есть увеличение за счет приема на работу на уже имеющиеся производства. Нетривиальный процесс создания новых производств не совсем походит под приведенное описание.

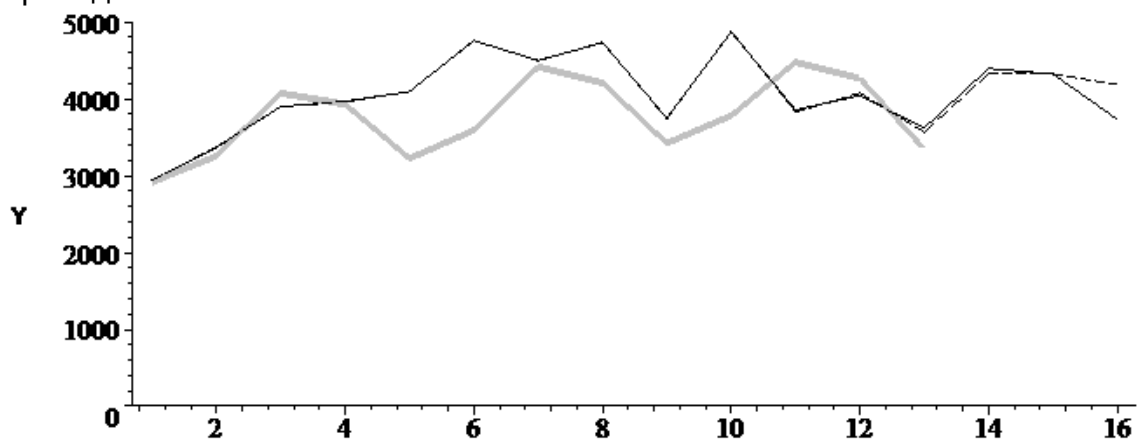


Рисунок 9.2.3.2 – Реальный ВВП. Влияние повышения численности занятых.

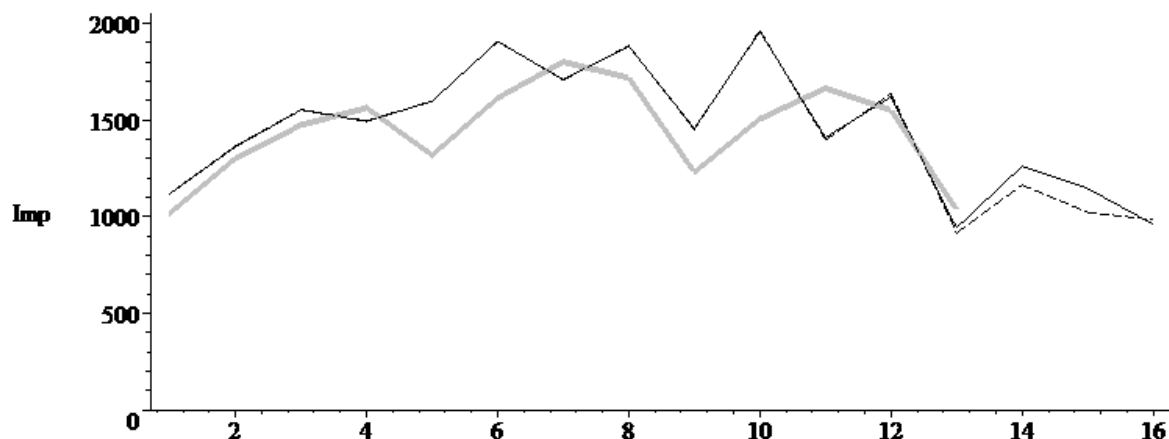


Рисунок 9.2.3.3 – Реальный импорт. Влияние повышения численности занятых.

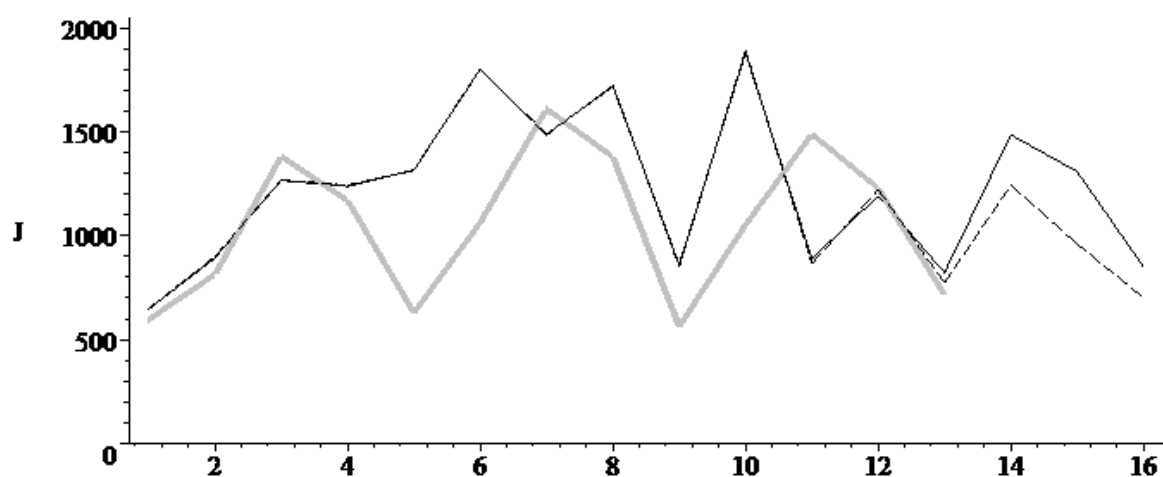


Рисунок 9.2.3.4 – Валовое накопление. Влияние повышения численности занятых.

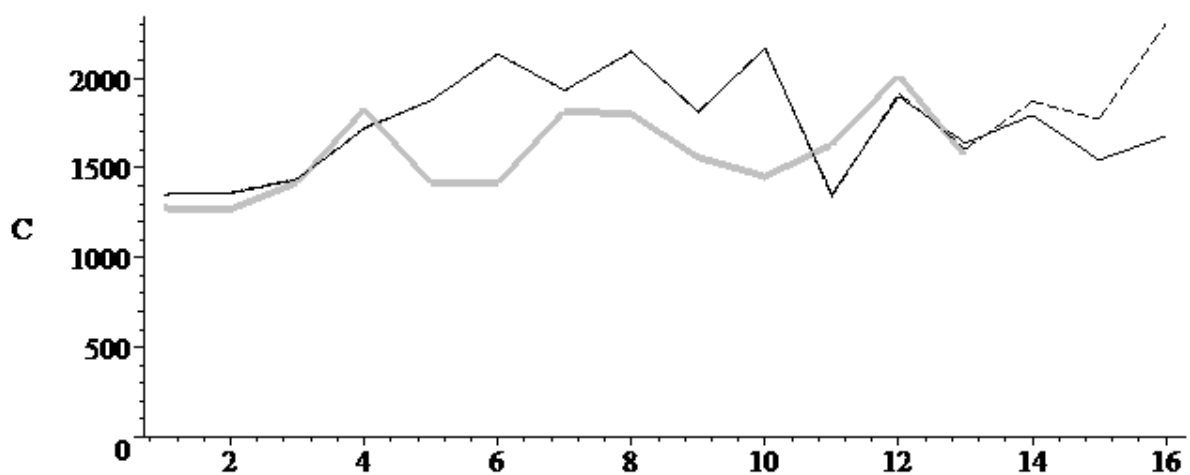


Рисунок 9.2.3.5 – Реальное потребление населения. Влияние повышения численности занятых.

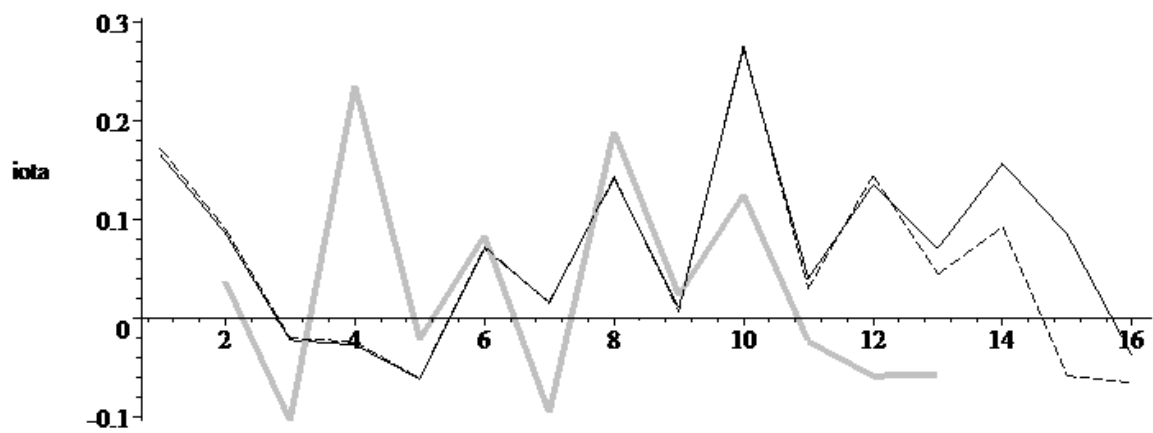


Рисунок 9.2.3.6 – Инфляция. Влияние повышения численности занятых.

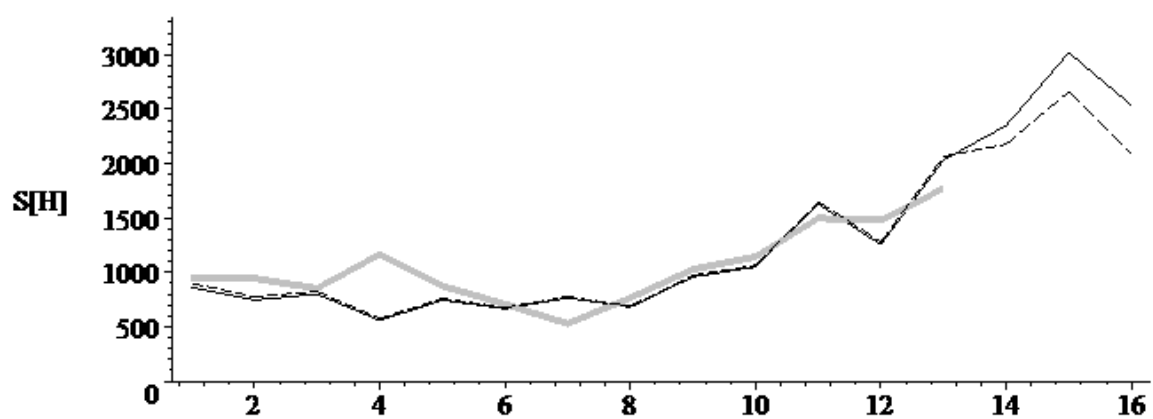


Рисунок 9.2.3.7 – Сбережения населения. Влияние повышения численности занятых.

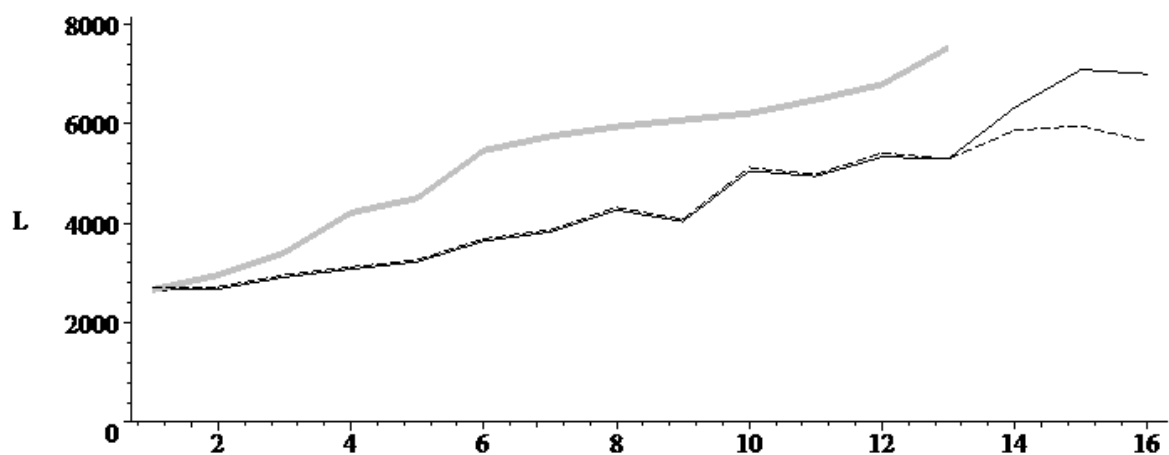


Рисунок 9.2.3.8 – Ссуды производителям. Влияние повышения численности занятых.

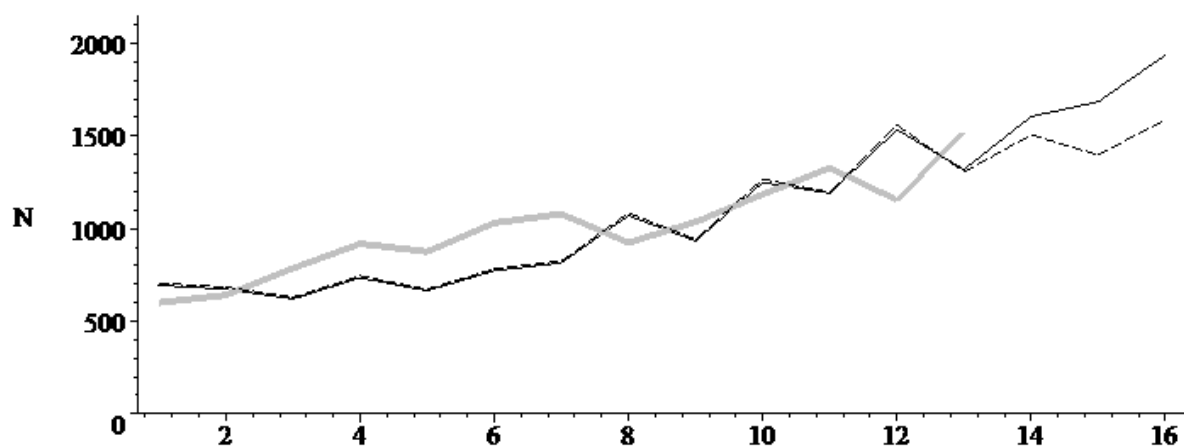


Рисунок 9.2.3.9 – Расчетные счета производителей. Влияние повышения численности занятых.

9.2.4 ВЛИЯНИЕ УВЕЛИЧЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННЫХ РАСХОДОВ

Изменение государственных расходов по отношению к базовому прогнозу изображено на рисунке 9.2.4.1. Результаты расчетов приведены на рисунках 9.2.4.2 - 9.2.4.9.

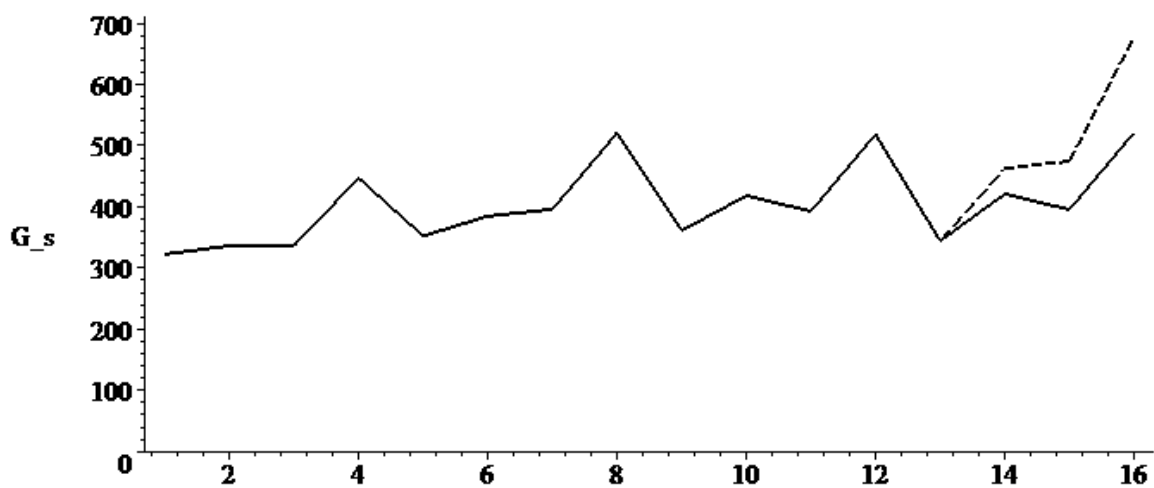


Рисунок 9.2.4.1 – Реальные государственные расходы. Сценарий повышения реальных гос-

ударственных расходов.

Сценарий увеличения государственных расходов в силу макроэкономического баланса в целом характеризуется одновременным ростом ВВП и реальных инвестиций, которые связаны между собой посредством производственной функции. Импорт незначительно растёт в силу необходимости инвестиций. Что касается потребления и инфляции, то они в разные моменты времени могут как расти, так и падать (рисунки 9.2.4.5, 9.2.4.5) относительно базового сценария. Увеличение инвестиций влечет увеличение ссуд производителям, а также расчетных счетов производителей в силу ограничения ликвидности производителя.

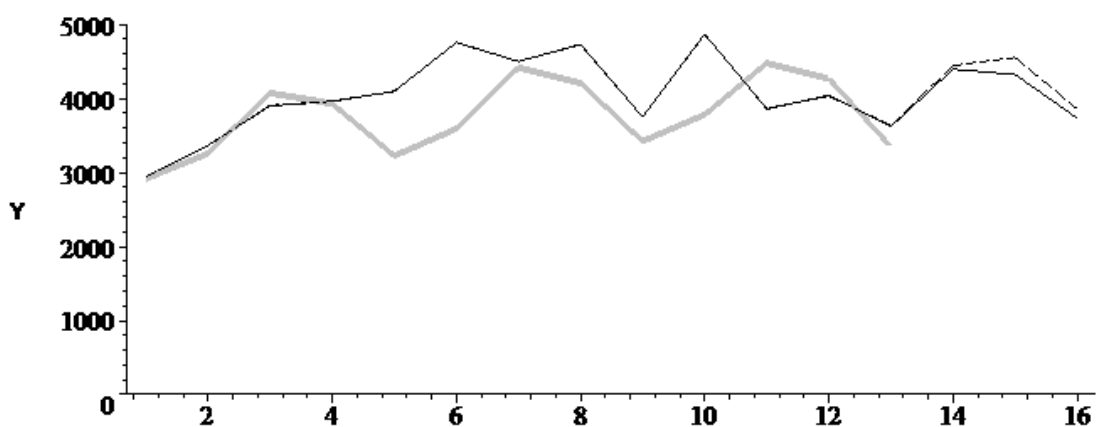


Рисунок 9.2.4.2 – Реальный ВВП. Влияние государственных расходов.

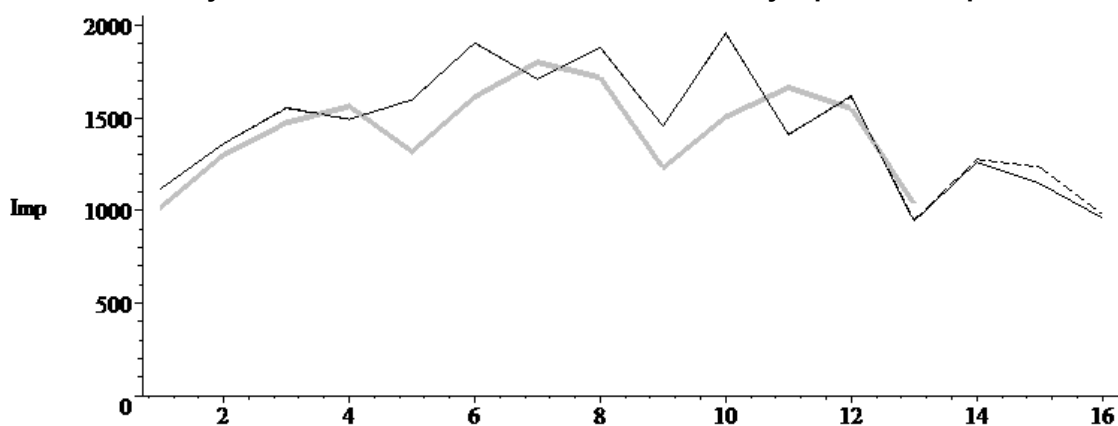


Рисунок 9.2.4.3 – Реальный импорт. Влияние государственных расходов.

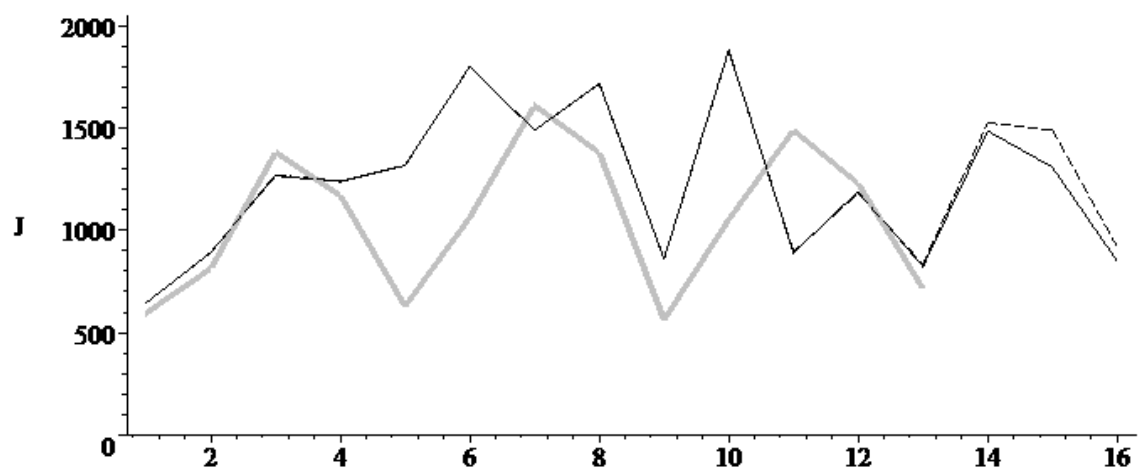


Рисунок 9.2.4.4 – Валовое накопление. Влияние государственных расходов.

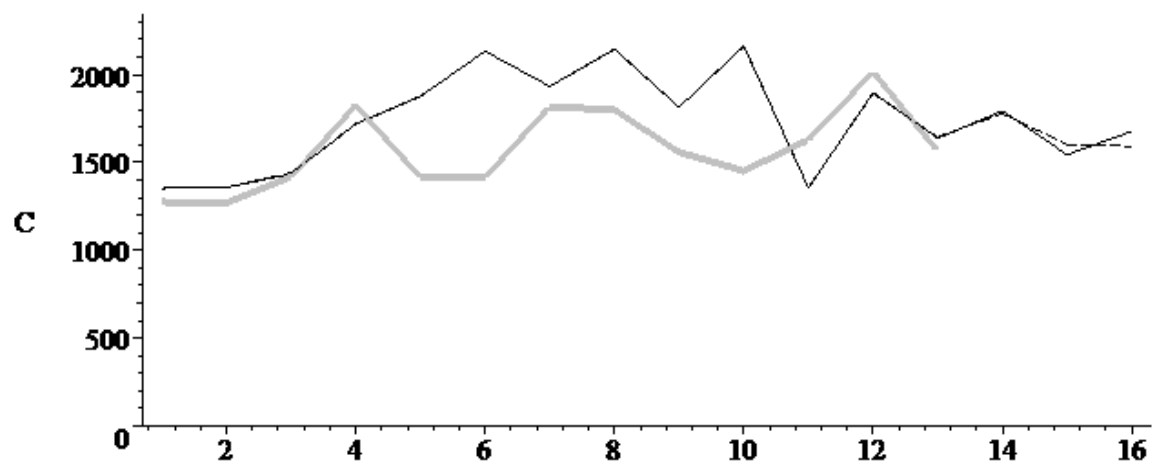


Рисунок 9.2.4.5 – Реальное потребление населения. Влияние государственных расходов.

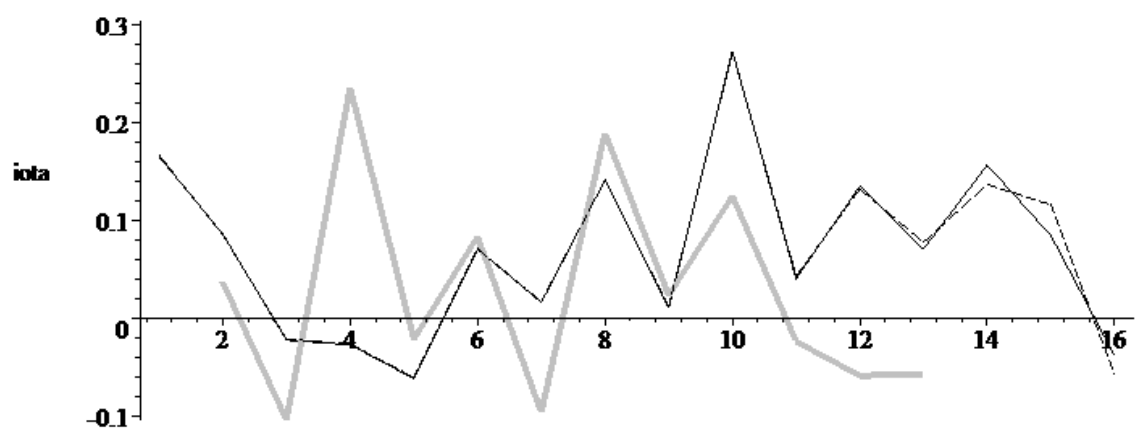


Рисунок 9.2.4.6 – Инфляция. Влияние государственных расходов.

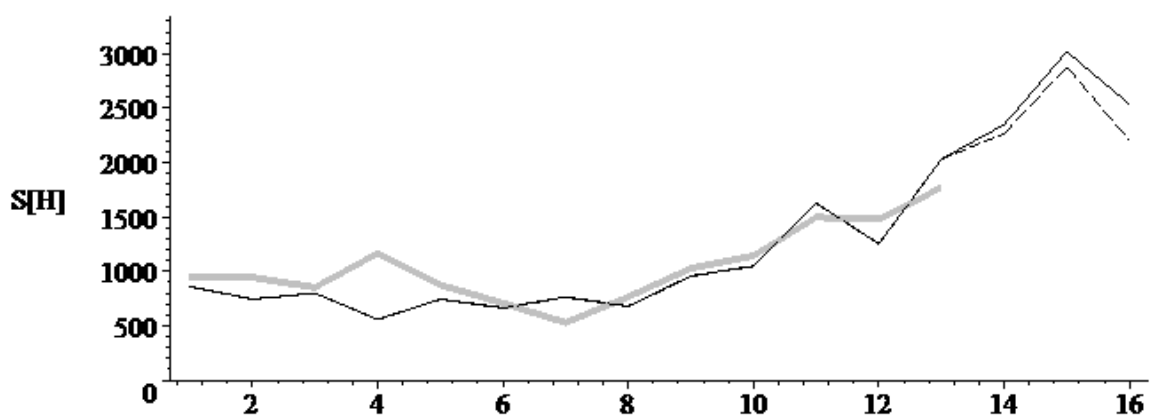


Рисунок 9.2.4.7 – Сбережения населения. Влияние государственных расходов.

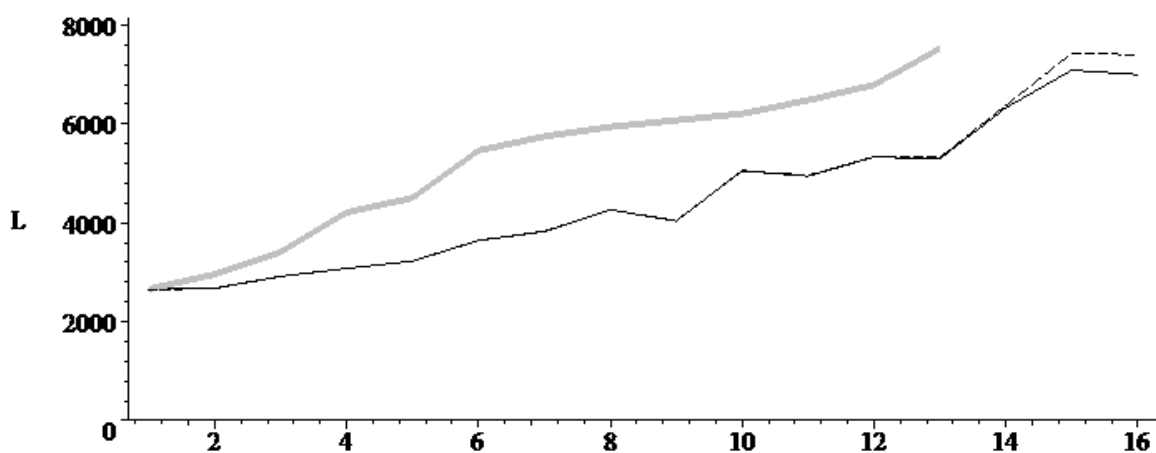


Рисунок 9.2.4.8 – Ссуды производителям. Влияние государственных расходов.

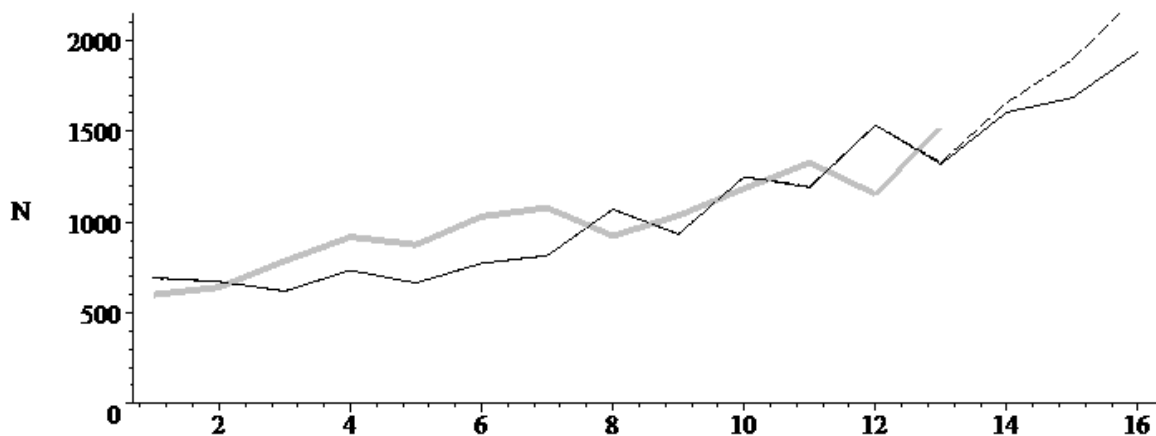


Рисунок 9.2.4.9 – Расчетные счета производителей. Влияние государственных расходов.

9.2.5 ВЛИЯНИЕ РОСТА ЭКСПОРТА

Экспорт в модели присутствует в двух уравнениях: в макроэкономическом балансе и платежном балансе. Платежный баланс служит для определения золотовалютных резервов, которые исключены из конечной системы уравнений (6.2.1)-(6.2.17), поэтому в конечную систему экспорт входит только через макроэкономический баланс. По этой причине объяснить влияние экспорта затруднительно.

Следует лишь ожидать, что при росте экспорта (рисунок 9.2.5.1) возрастут все остальные составляющие макроэкономического баланса, а за ними вырастут и показатели финансового сектора. Как видно из рисунков 9.2.5.2 - 9.2.5.9, так и происходит, за тем лишь исключением, что потребление падает.

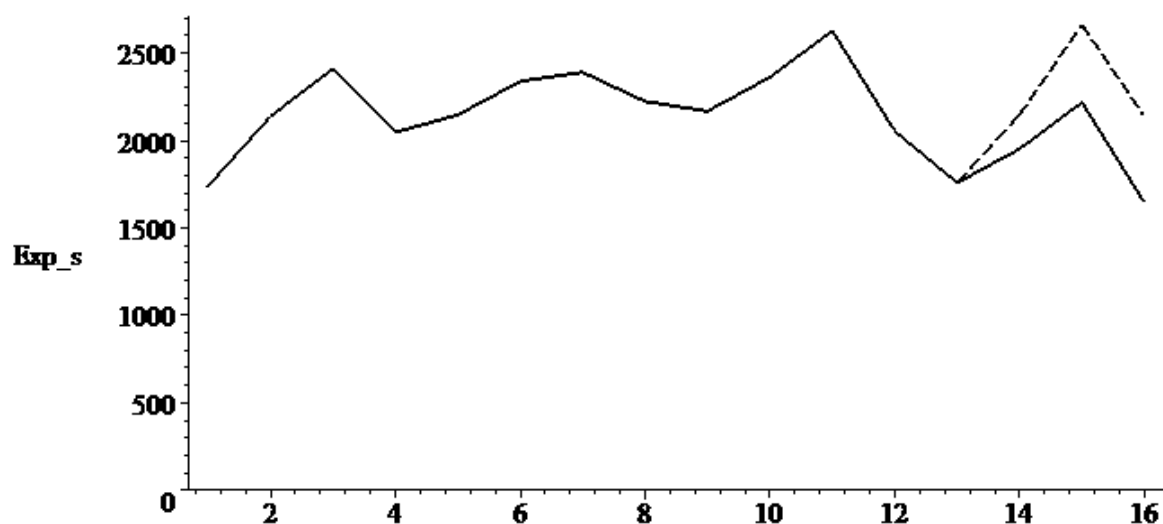


Рисунок 9.2.5.1 – Реальный экспорт. Сценарий повышения реального экспорта.

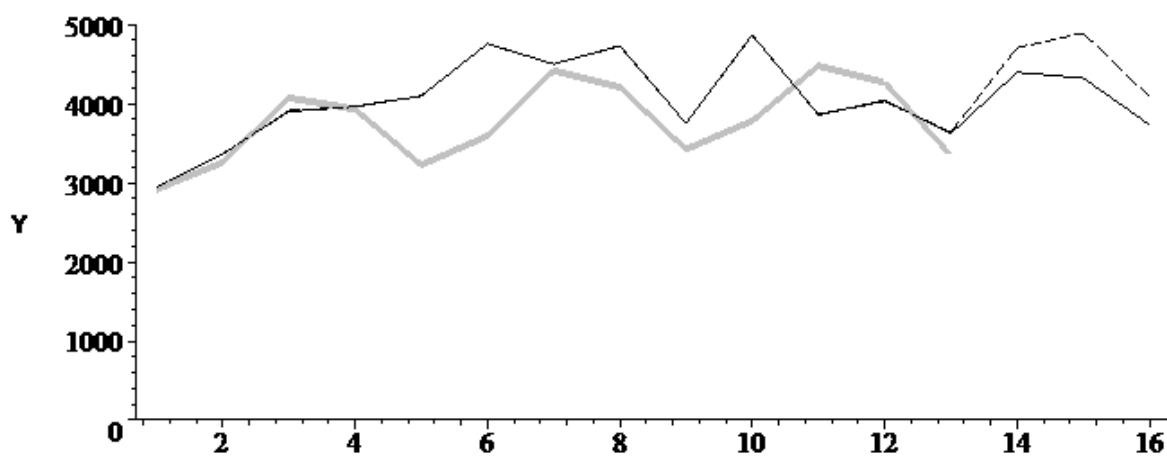


Рисунок 9.2.5.2 – Реальный ВВП. Влияние роста экспорта.

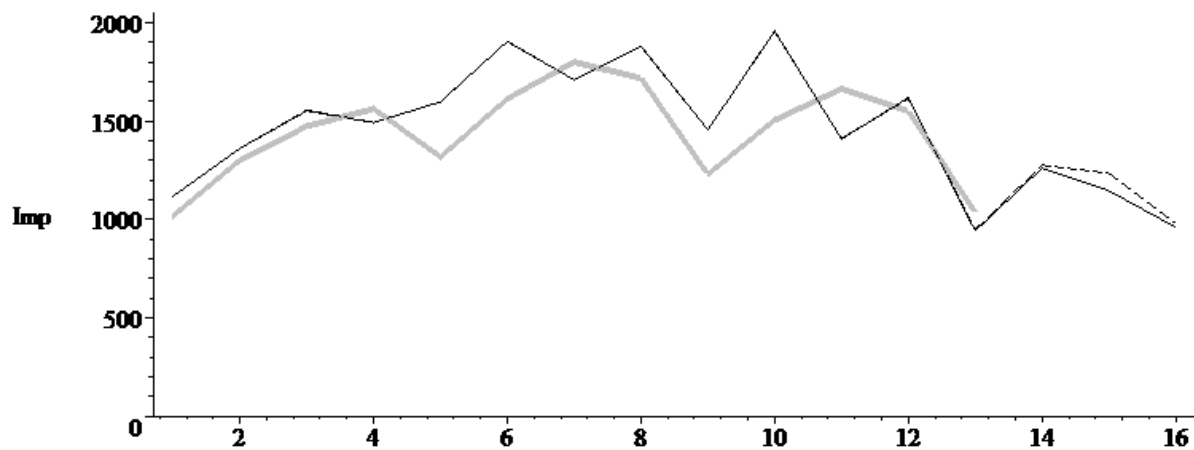
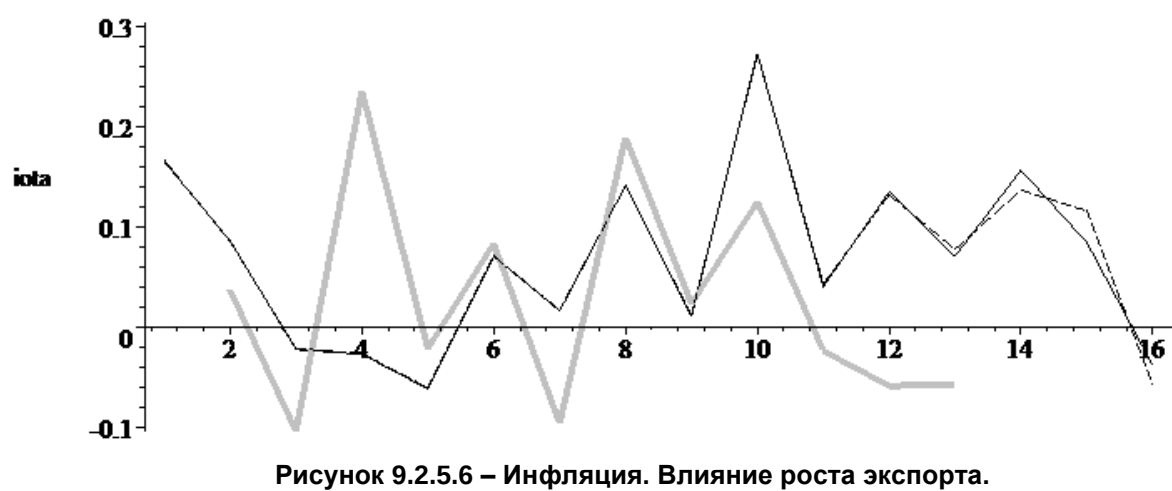
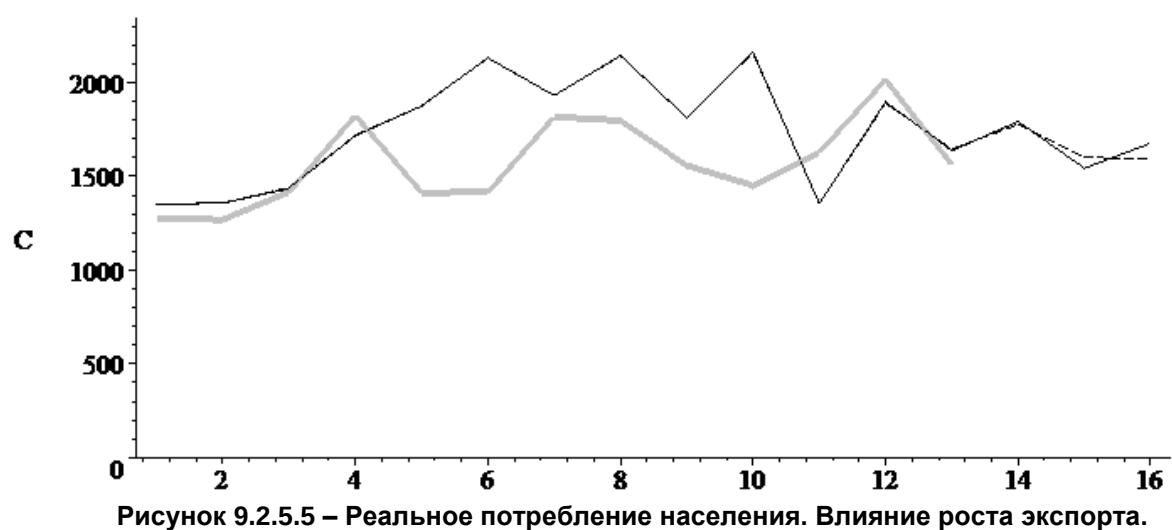
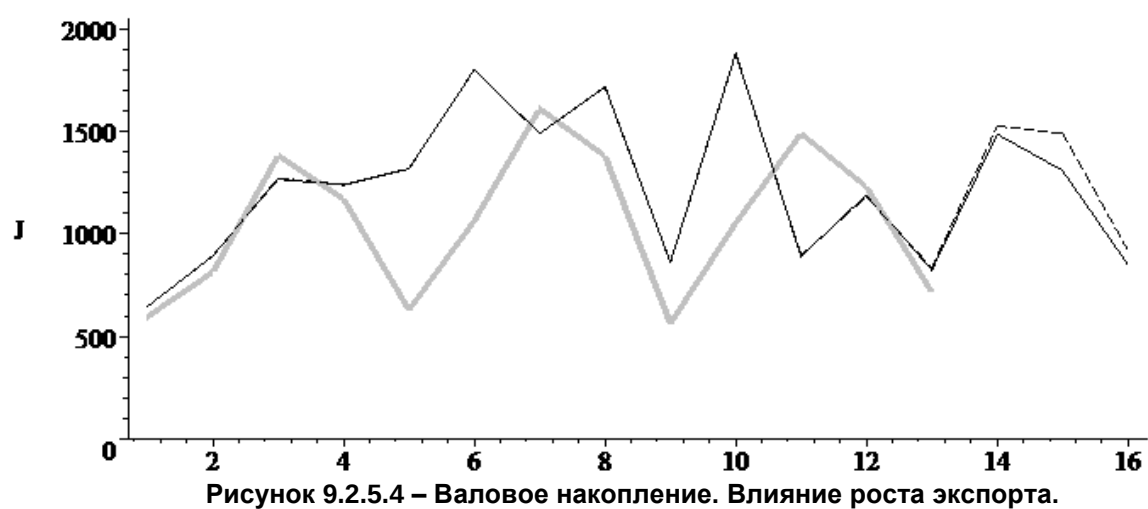


Рисунок 9.2.5.3 – Реальный импорт. Влияние роста экспорта.



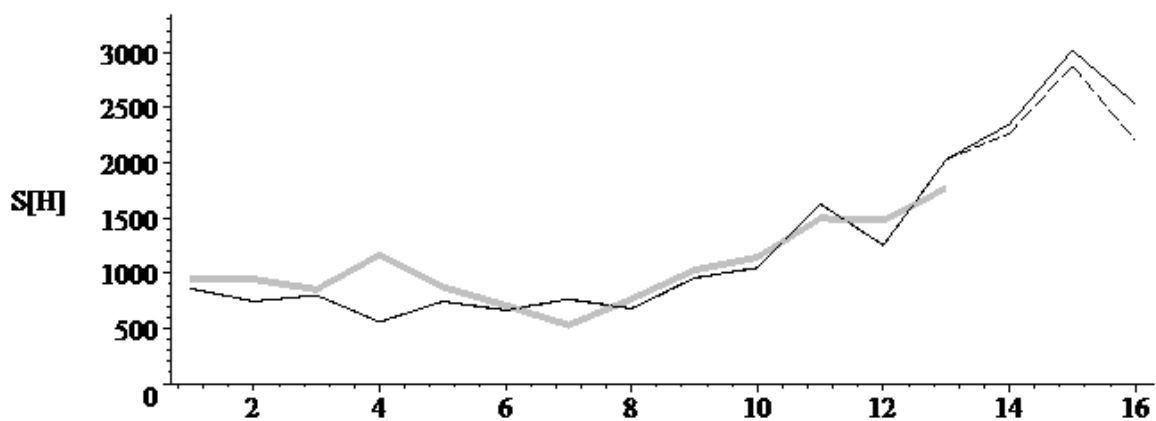


Рисунок 9.2.5.7 – Сбережения населения. Влияние роста экспорта.

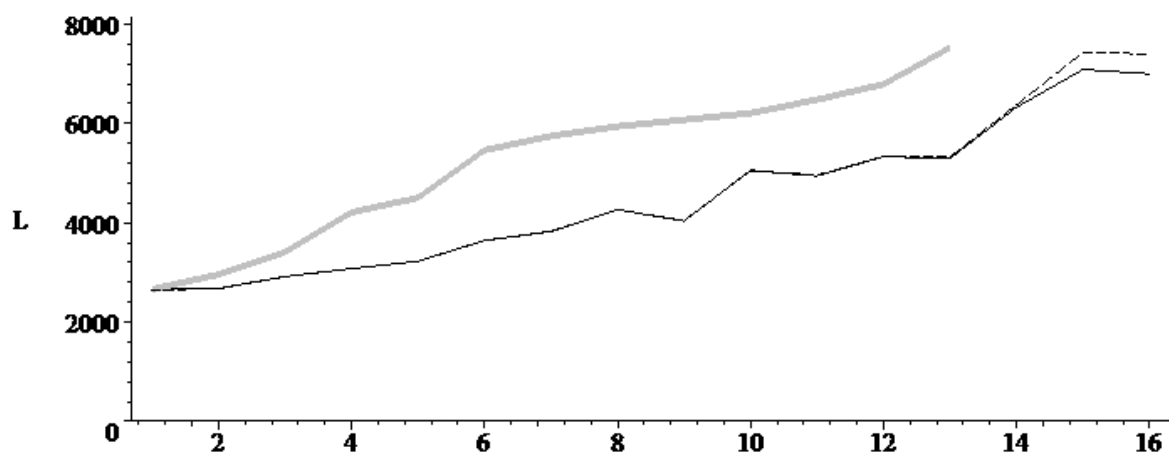


Рисунок 9.2.5.8 – Ссуды производителям. Влияние роста экспорта.

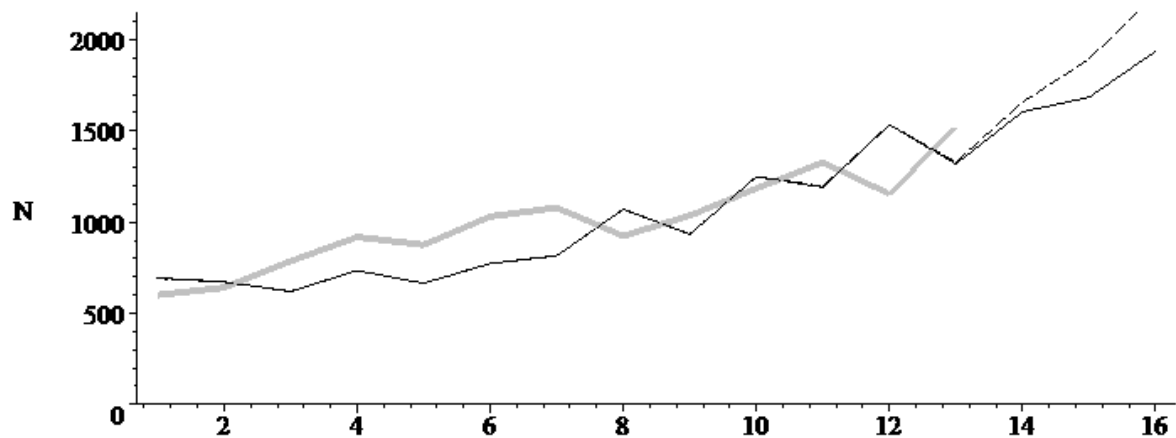


Рисунок 9.2.5.9 – Расчетные счета производителей. Влияние роста экспорта.

9.2.6 ВЛИЯНИЕ ВАЛЮТНОГО КУРСА

Рассмотрим сценарий, характеризующийся ослаблением тенге (рисунок 9.2.6.1). Результаты расчетов при этом сценарии приведены на рисунках 9.2.6.2 - 9.2.6.9.

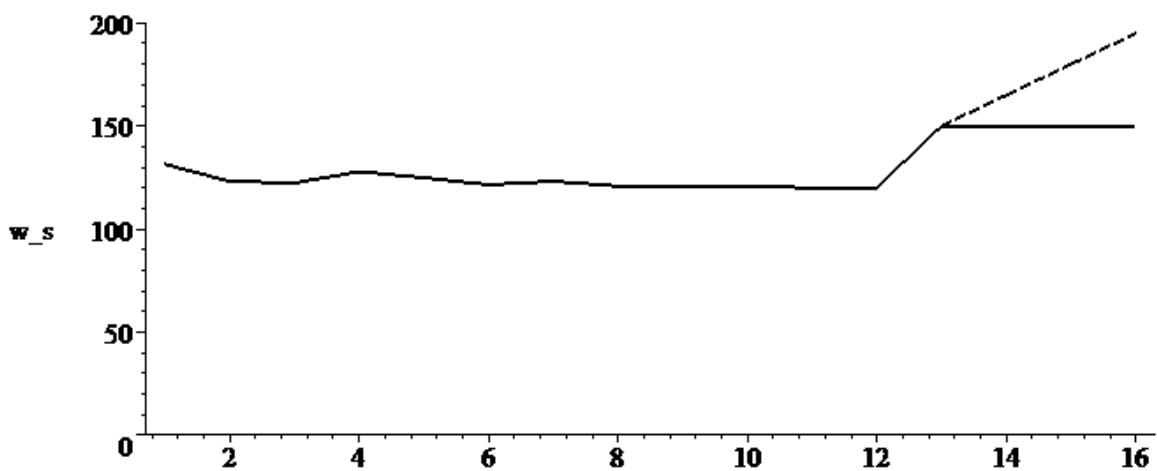


Рисунок 9.2.6.1 – Валютный курс. Сценарий повышения валютного курса.

Влияние ослабления тенге по модели отлично вписывается в классическую теорию: импорт становится менее конкурентноспособным, падает и замещается ВВП, который, соответственно, растёт. Рост ВВП требует инвестиций, инвестиции растут, что, в свою очередь, увеличивает спрос на кредиты со стороны производителей. Расчетные счета производителей растут вслед за производством. Спрос на депозиты со стороны банков растёт по причине удорожания иностранных депозитов, что влечет повышение ставки на денежном рынке и, как следствие, увеличение сбережений населения. Увеличивающиеся сбережения «проваливают» валовое потребление.

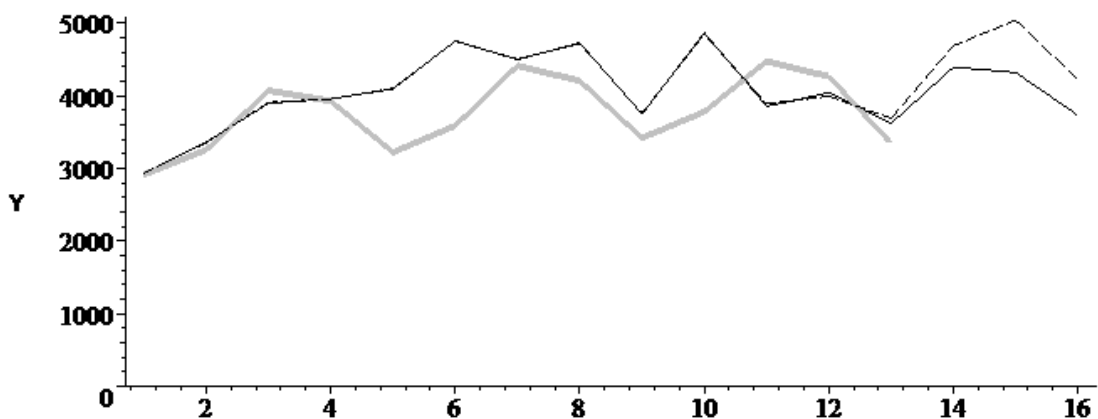


Рисунок 9.2.6.2 – Реальный ВВП. Влияние валютного курса.

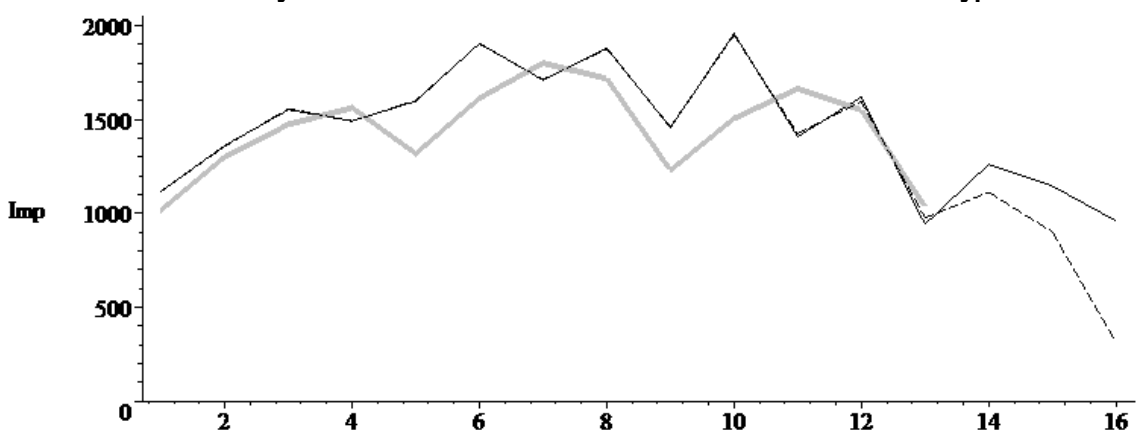


Рисунок 9.2.6.3 – Реальный импорт. Влияние валютного курса.

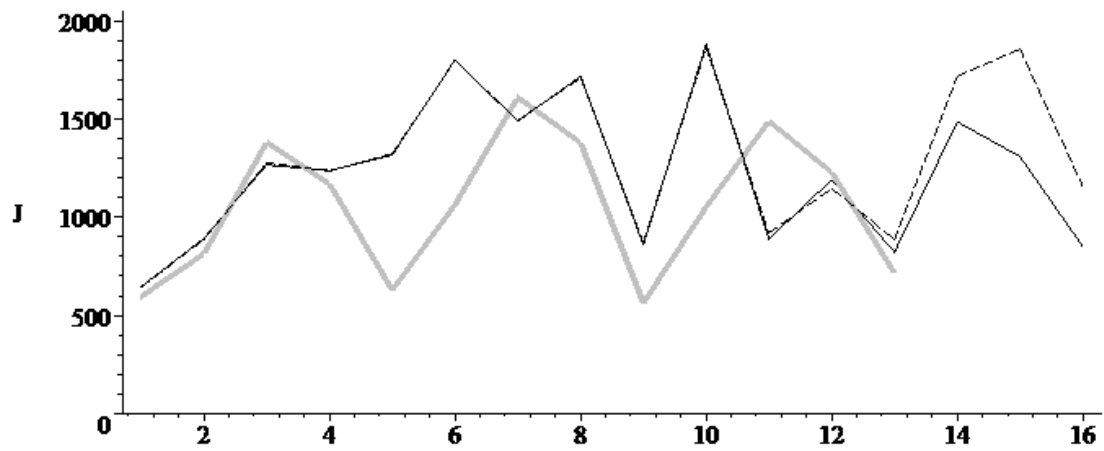


Рисунок 9.2.6.4 – Валовое накопление. Влияние валютного курса.

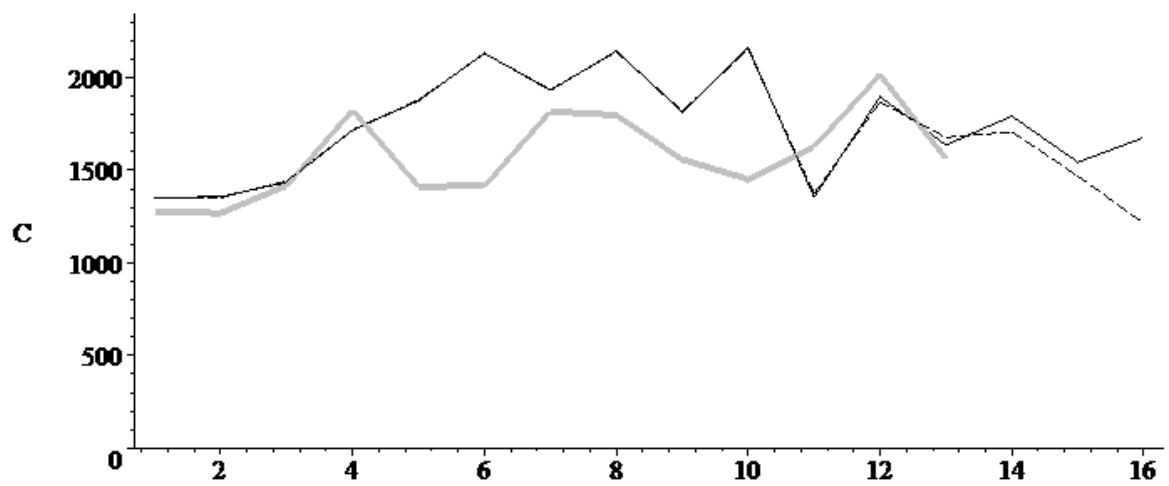


Рисунок 9.2.6.5 – Реальное потребление населения. Влияние валютного курса.

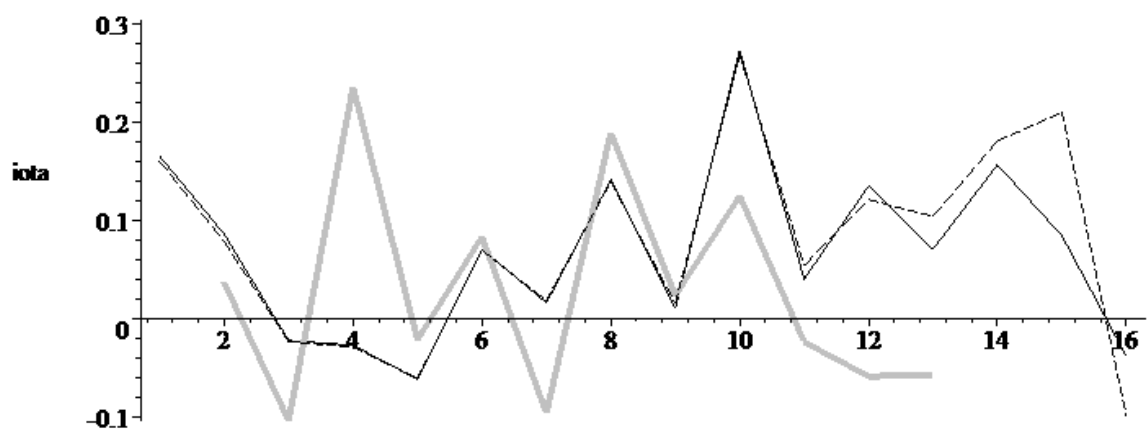


Рисунок 9.2.6.6 – Инфляция. Влияние валютного курса.

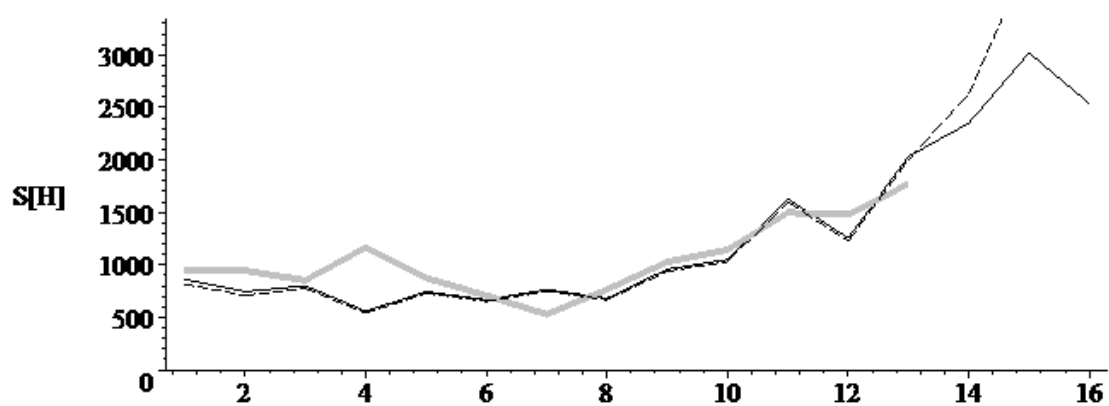


Рисунок 9.2.6.7 – Сбережения населения. Влияние валютного курса.

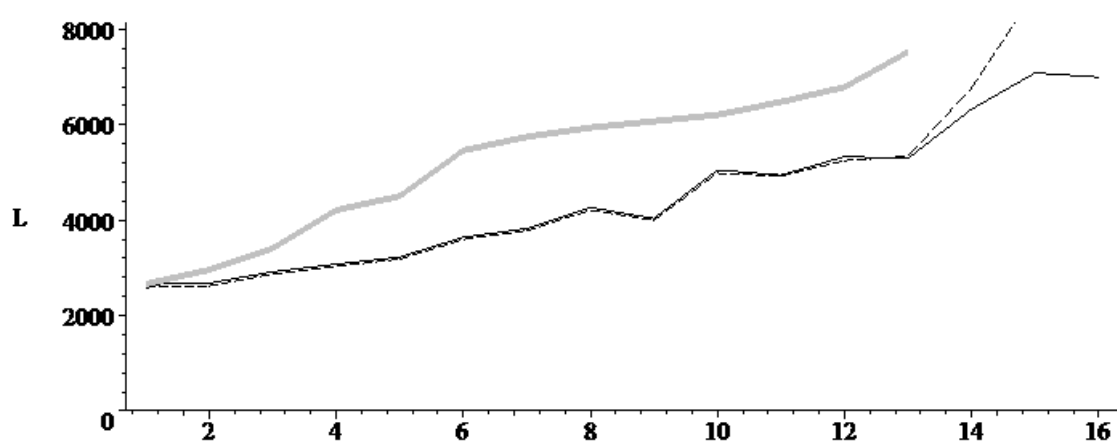


Рисунок 9.2.6.8 – Ссуды производителям. Влияние валютного курса.

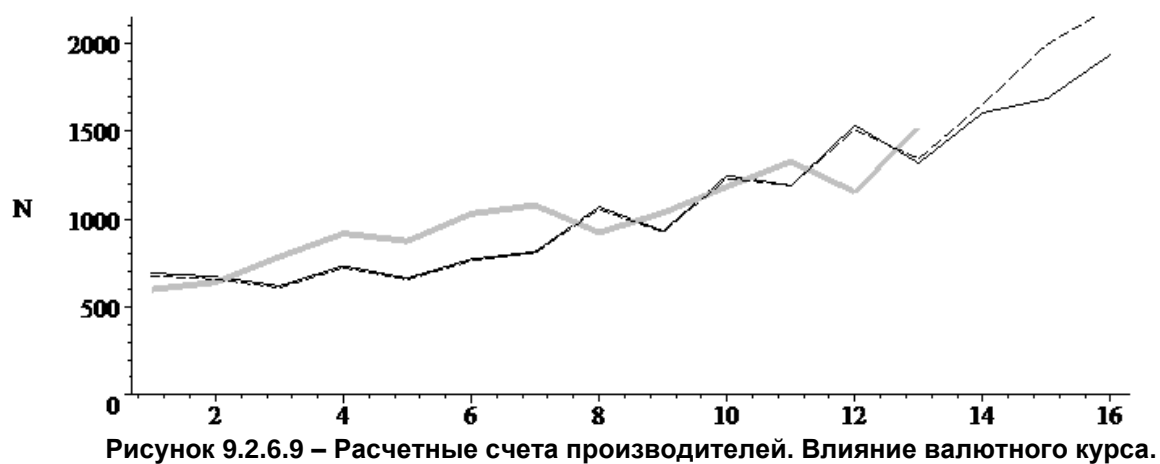


Рисунок 9.2.6.9 – Расчетные счета производителей. Влияние валютного курса.

Заключение

Выполнение проекта оказалось трудным испытанием для наших методов. С одной стороны, в период, который должна была описывать модель, экономиче-

ские процессы протекали столь бурно, что временами тренды пересиливали весьма интенсивные в экономике Казахстана сезонные колебания. С другой стороны, имевшаяся статистика не была столь полной и регулярной, как та, которой мы привыкли пользоваться в России. Именно этим мы объясняем то, что результаты моделирования экономики РК оказались хуже, чем те, что были получены для экономики РФ в предкризисный период [1, 9]. Тем не менее, получившаяся модель определенно способна воспроизводить как тенденции, так и колебания около них, характерные для большинства макроэкономических показателей.

Очень важно, то, что в модели после идентификации снова проявился **сильный магистральный эффект** (см. разд. 9.2). Постольку, поскольку это свойство выполняется, оно снимает все возражения против применения принципа рациональных ожиданий [1]. Последние оказываются нужны только для нахождения соответствующей исследуемой экономической системе формы конечных уравнений. После этого модель сводится к традиционной динамической системе. Но феномен сильного магистрального свойства сам нуждается в объяснении.

Ключом здесь служит то, что сильный магистральный эффект проявляется в модели не вообще, на уровне формул, а только при правильно идентифицированных значениях параметров. Тут надо вспомнить, что экономика как управляющая система должна не просто скоординировать действия миллиардов людей, но сделать это так, чтобы люди в большинстве случаев могли делать разумный выбор без сложных расчетов. Поэтому даже известные всем экономические механизмы могут не работать из-за своей сложности и риска. Например, в России все с 1994г знали, что можно брать потребительские кредиты в банке, но почти не просили, а банки почти не давали. К 2003г. кредитно-денежная система и доходы стабилизировались, потребительское кредитование перестало требовать детальных расчетов и строгих гарантий, и стало расти лавинообразно. Все это несколько напоминает известный в физике антропный принцип: Вселенная представляется наблюдателю гармоничной и «приспособленной» к нему потому, что во Вселенной с иным устройством наблюдатель не возникнет.

Обобщая этот пример, можно предположить, что в каждый момент времени в экономике отбирается и действует такой комплекс механизмов, который не требует детальных расчетов для разумных решений. Поэтому описывая в модели механизмы «по жизни», а не по учебникам, мы получаем модель с сильным магистральным свойством. В такой системе все оптимально, рационально и с полным предвидением могут идти к кризису, как лемминги в реку. Просто в сложившейся системе экономических отношений для отдельных агентов, даже предвидящих кризис, попытка заранее застраховаться от него приводит к личному краху еще до кризиса.

Литература

1. Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г. Сильный магистральный эффект в модели рациональных ожиданий современной банковской системы России. // Журнал новой экономической ассоциации т.1, №2, 2009. С. 70-84.
2. Андреев М.Ю., Поспелов И.Г. Принцип рациональных ожиданий: обзор концепций и примеры моделей. М.: ВЦ РАН 2008, 79с.

3. Андреев М.Ю., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А. Технология моделирования экономики и модель современной экономики России. М.: МИФИ, 2007, 262с.
4. Дорнбуш Р., Фишер С. Макроэкономика. Изд-во Моск. ун-та: ИНФРА-М М. 1997.
5. Завриев Н.К., Поспелова Л.Я., Поспелов И.Г. Исследование математических моделей экономики средствами инструментальной системы ЭКОМОД // Математическое моделирование. 2003. Т.15, №8. С. 57-74.
6. Комаров С.И., Петров А.А., Поспелов И.Г., Поспелова Л.Я. Представление знаний, содержащихся в математических моделях экономики // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. №5. С. 37-59.
7. Макаров В.Л. Вычислимая модель российской экономики (RUSEC) // Препринт #WP/99/069/ М.: ЦЭМИ РАН, 1999.
8. Петров А.А. Об экономике языком математики. М.: ФАЗИС, 2003, 112 с.
9. Петров А.А., Поспелов И.Г. Математические модели экономики России // Вестник РАН, т.79, №6, 2009. С. 492-506.
10. Петров А.А., Поспелов И.Г.. Модельная «летопись» российских экономических реформ http://isir.ras.ru/win/db/show_ref.asp?P=id-23268.In-ru .
11. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат. 1996. 586 с.
12. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. От Госплана к неэффективному рынку: Математический анализ эволюции российских экономических структур. The Edwin Mellen Press. Lewiston, NY, USA. 1999. 393p.
13. Пильник Н.П., Поспелов И.Г. О естественных терминальных условиях в моделях межвременного равновесия. // Экономический журнал ВШЭ, 2007, т. 11, №1, с. 1-33.
14. Полтерович В.М. Кризис экономической теории.
<http://www.ecsocman.edu.ru/images/pubs/2005/11/24/0000242064/3-Polterovich.pdf>
15. Поспелов И.Г. Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов. М.: ВЦ РАН 2003, 200с.
<http://www.ccas.ru/mmes/mmest/ecodyn03.htm>
16. Поспелов И.Г. Моделирование российской экономики в условиях кризиса // Вопросы экономики, №11, 2009. С. 50-75.
17. Шатров А.В., Осипова О.Н. Имитационная модель и сценарии развития экономики Кировской области. //Сб. тр. Летней школы ЭКОМОД-2006. – Киров: изд. ВятГУ, с.26-75
18. Dixon P.B., Rimmer M.T. Forecasting and Policy Analysis with a Dynamic CGE Model of Australia. Monash University Center of Policy Studies Working Paper No. OP-90, June 1998 <http://www.monash.edu.au/policy/> .
19. Handbook of Mathematical Economics. North-Holland, 1991.
20. Jacoby H.D., Reilly J.M., McFarland J.R. Paltsev S. Technology and technical change in the MIT EPPA model // Energy Economics, In Press, Corrected Proof, Available online 23 June 2006,
21. Maple 9 Learning Guide, Maplesoft, Waterloo Maple Inc., Canada, 2003, лицензия № 920523203
22. Turnovsky S. J. Methods of Macroeconomic Dynamics. MIT Press Cambridge, Mass. 2000. 687p.
23. Сайт агентства Республики Казахстан по регулированию и надзору финансового рынка и финансовых организаций <http://www.afn.kz/>

24. Сайт агентства Республики Казахстан по статистике
<http://www.stat.kz/Pages/default.aspx>
25. Сайт национального банка Республики Казахстан <http://www.nationalbank.kz/>
26. Статистический бюллетень национального банка Республики Казахстан
<http://www.nationalbank.kz/index.cfm?uid=ED7C51EE-2219-B830-8A138816A7576BA8&docid=310>

Приложение П. Листинг и инструкция по работе с моделью

П.1 Среда реализации модели

Модель межвременного экономического равновесия Республики Казахстан реализована в среде компьютерной алгебры Maple. Все рабочие файлы были написаны и безошибочно исполнены на версии программы 10.00. Более поздние версии программы, как правило, поддерживают работу предыдущих версий. Рабочими файлами программы являются файлы с расширением «.mws», которые открываются основным приложением Maple – swmaple.exe.

Результаты работы какого-либо mws-файла можно сохранять с помощью команды save. Сохранение происходит в файл с указанным в команде save названием и расширением “.m”. Результат сохранения может быть считан из любого mws-файла с помощью команды read.

Программное изделие представляет собой набор mws-файлов и m-файлов. В программном изделии mws-файлы сохраняют данные в m-файлы с отброшенной либо буквенной, либо цифровой составляющей названия mws-файла. Например, файл «C53.mws» сохраняет результат в «C.m», а «58-1-2 режимы, FC=L, L.mws» – в «58-1-2.m».

Файлы обычно имеют иерархию: mws-файл с какой-либо цифровой составляющей в названии стоит на одну ступень в иерархии выше, чем файл с такой же цифровой составляющей но без двух последних знаков. Файл с более высокой иерархией считывает результат работы предыдущего файла. Например, файл «58-1-2 режимы, FC=L, L.mws» сохраняет данные в «58-1-2.m», а файл «58-1-2-1 смягчение УДН.mws», стоящий на ступень выше, считывает «58-1-2.m» и сохраняет свои результаты в «58-1-2-1.m», который будет считан файлом «58-1-2-1m2 идеен мяг.mws»

Более точно порядок использования файлов и их назначение описаны в таблице П.1.1.

Таблица П.1.1 – Файловая структура программного изделия и назначение файлов.

Местонахождение (папка) и название файла	Назначение файла \ папка
\\Модель экономики РК 58	Корневая папка программного изделия
B57.mws	Описание деятельности банка
C53.mws	Описание деятельности собственника
CB1.mws	Описание деятельности Центрального Банка
EX57.mws	Описание деятельности экспортера
G50.mws	Описание деятельности государства
H50.mws	Описание деятельности домашних хозяйств
IM57.mws	Описание деятельности импортера

J58.mws	Описание деятельности производителя-инвестора
58.mws	Объединение описания отдельных агентов. Считывает предыдущие 8 файлов. Проверка балансов. Исключение переменных из тривиальных соотношений.
58-1 общ.mws	Удаление балансовых тождеств и исключение интегрирующих переменных.
58-1-2 режимы, FC=L, L.mws	Выбор режимов условий дополняющей нежесткости, исключение переменных.
58-1-2-1 смягчение УДН.mws	Смягчение (см. раздел 5.1) оставшихся условий дополняющей нежесткости.
58-1-2-1m2 иден мяг.mws	Нормировка смягченных условий дополняющей нежесткости.
58-1-2-1m2n6 норм-нарос+иденпарам.mws	Нормирование переменных модели на темп роста, соответствующий размерности переменной. Нахождение сбалансированного роста, оценка значений некоторых параметров модели.
58-1-2-1m2n6-5 Ньют exp.mws	Квазилинеаризация системы уравнений, уточнение сбалансированного роста
58-1-2-1m2n6-5r1 реш - Основное решение.mws	Решение краевой задачи. Вычисление ошибок. Построение графиков.
58-1-2-1m2n6-5r2 реш - Ретро-прогноз.mws	Вычисление ретро-прогноза (изменяется период, на котором «известна» статистика, и период, на который строится прогноз). При решении краевой задачи в качестве начального приближения использует «основное решение», сохраненное в «58-1-2-1m2n6-5r1.m».
58-1-2-1m2n6-5r7 реш в сторону - Изменение параметров.mws	Вычисление решения с измененным значением какого-либо параметра. В качестве начального приближения использует «основное решение».
58-1-2-1m2n6-5r8 реш в сторону - Прогнозы.mws	Вычисление решения при альтернативном прогнозе, заданным произвольным образом. В качестве начального приближения использует «основное решение».
58-1-2-1m2n6-5r9 реш в сторону - Прогнозы `равномерные`.mws	Вычисление решения при альтернативном прогнозе, в котором отклонение экзогенной переменной нарастает с заданным темпом. В качестве начального приближения использует «основное решение».
Changeparam.mpl	Сохраненный в текстовом формате (.mpl) файл «58-1-2-1m2n6-5r7 реш в сторону - Изменение параметров.mws». Запускается файлом «Changeparam.bat». Считывает файл «changeparam_input.m» с параметрами, при которых будет считаться краевая задача. Сохраняет результат работы в файл «changeparam_output.m».
Changeparam.bat	Запускает файл «Changeparam.mpl». Запускается файлом «mymatrix.mws»
mymatrix.mws	Вместе с файлами «Changeparam.bat», «Changeparam.mpl» используется для расчета чувствительности модели к изменению параметров. Для этого при каждом измененном значении параметра считается «58-1-2-1m2n6-5r7 реш в сторону - Изменение параметров.mws» (его mpl-версия). Для каждого параметра (всего около 30 раз) записывает имя изменяемого параметра и новое значение в файл «changeparam_input.m», запускается «Changeparam.bat», считывает результат из «changeparam_output.m».
*.m	Файлы с таким расширением хранят результаты работы mws-файлов с соответствующим названием
\\Модель экономики РК 58\\newdata	Папка со статистическими данными
data01.mws	Содержит вбитые вручную необходимые данные по статистике, а также базовый прогноз следующих экзогенных переменных: труд, субсидии населению, депозиты нерезидентов, валютный курс. Сохраняет массив данных в файл «DATA.m»
DATA.m	Содержит результаты работы «data01.mws».
param01.mws	Считывает данные из «DATA.m». Оценивает некоторые параметры модели. Добавляет в массив данных прогноз следующих экзогенных переменных: экспорт, государственное потребление.
ICONS.m	Содержит значения параметров модели, оцененных в файле «param01.mws»
DA.m	Содержит окончательный массив статистических данных, сформированный в «param01.mws»

П.2 Использование системы ЭКОМОД

Каждый mws-файл программного изделия состоит из последовательности строк, команд. Типичной строкой является запись присвоения одному имени списка результатов работы процедуры или функции над списками объектов – уравнений, переменных. Процедуры бывают двух типов: стандартные, т.е. реализованные разработчиками программы Maple, а бывают написанные нами и включенные в систему ЭКОМОД. О работе стандартных процедур можно узнать из справки внутри программы (при нажатии F1), поэтому на этих процедурах мы останавливаться не будем, а объясним реализацию системы ЭКОМОД.

Система ЭКОМОД организована в виде набора функций и процедур, обеспечивающих запись и последующую работу с моделями в канонической форме. Функции и процедуры ЭКОМОД определяются в двух библиотечных файлах: varlist.mws и esomob.mws. Первая из этих библиотек содержит функции, обеспечивающие сбор информации о модели и контроль корректности модели. Вторая библиотека содержит несколько десятков функций общего назначения, которые по нашему опыту упрощают процесс анализа модели. Кроме библиотек, в состав системы ЭКОМОД входят макросы – последовательности команд, которые оформлены как отдельный mws-файл.

Для того, чтобы встроить систему ЭКОМОБ в Maple, необходимо:

- запустить (полностью исполнить) в любой последовательности файлы varlist.mws и esomob.mws. При этом не имеет значение ответ на запрос Maple о сохранении результатов работы этих файлов.
- скопировать папку macros, содержащую макросы системы ЭКОМОД, в корневую папку программы Maple.

Приведем **основные структуры данных системы ЭКОМОД:**

1. **стандартные имена** – это глобальные переменные, которые подобно библиотечным функциям имеют в системе ЭКОМОД вполне определенный смысл. Этих имен довольно много, но, как показывает опыт, их случайное использование маловероятно. Укажем некоторые из них
 - 1.1. **INDEX** – внутрисистемное имя типа **symbol** рабочего файла, которое определяется пользователем в начале исполнения этого файла и определяет его положение на схеме проекта, изображенной на рисунке;
 - i. **INDEX.mws** используется как имя файла в операционной системе,
 - ii. индексы файлов экономических агентов (далее ЭА) совпадают с индексами агентов,
 - iii. блок сборки может иметь произвольный индекс,
 - iv. Индекс любого из остальных блоков проекта состоит из индекса его непосредственного предка и еще двух произвольных символов. Этот индекс определяют имя m-файла, из которого данный файл считывает исходные данные **I_Glob** и имя m-файла, в который он записывает результат;
 - 1.2. **peri, veri, neri** – определяемые пользователем обозначения текущего времени, начального и конечного моментов. Задание **peri, veri, neri** существенно для корректной работы некоторых функций ЭКОМОД. В данной модели **peri := t; veri := T; neri := t0;**
 - 1.3. списки типа **list** соотношений и переменных модели, составляемые функциями ЭКОМОД. Эти списки создаются в файлах ЭА, сливаются при

- сборке и потом передаются без изменений, за исключением списка **L_Variables**, в который добавляются новые переменные, введенные пользователем, и списка **L_Glob**, который может пополняться вручную;
- i. **L_Relations** – список соотношений канонической формы модели,
 - ii. **L_Variables** – список имен переменных/параметров модели,
 - iii. **L_Con** – список ограничений на параметры,
 - iv. **L_Assets** – список имен активов,
 - v. **L_Renotations** – список, содержащий историю переименований переменных,
 - vi. **L_Glob** – список идентификаторов (в виде строк) списков, которые надо передавать в следующий рабочий файл проекта согласно иерархии файлов.
2. **признаки** соотношений и переменных/параметров (не видимые на экране) определяются при вводе некоторого соотношения одной из функций системы ЭКОМОД. Наличие признаков не влияет на обычную работу с соотношениями.
- 2.1. Признак соотношения в ЭКОМОД – это таблица, записанная как атрибут Maple для равенства, неравенства или для каждого из сомножителей УДН. Признак сохраняется за соотношением при всех его преобразованиях. Вывести признаки соотношений на экран можно стандартной функцией **attribute** или в более наглядной форме функциями ЭКОМОД **Desc** или **desc**. Таблица признаков соотношения может содержать поля:
- i. **ID** = уникальное имя соотношения,
 - ii. **Origin** = исходный вид соотношения,
 - iii. **Block** = индекс агента, при описании которого введено соотношение,
 - iv. **Group** = тип группы, к которой принадлежит соотношение,
 - v. **Asset** = название актива (только для баланса),
 - vi. **Assettype** = тип актива (только для баланса),
 - vii. **Dim** = размерность актива (только для баланса),
 - viii. **Stock** = имя запаса актива (только для баланса).
- 2.2. Признаки переменной/параметра тоже организованы в таблицу. Список этих таблиц хранится как атрибут списка **L_Variables**. Вывести атрибуты отдельных переменных можно функциями **Desc** или **desc**. В таблицу признаков переменной/параметра могут входить поля:
- i. **Type** = переменная ЭА | переменная ВД | параметр,
 - ii. **Dim** = размерность переменной,
 - iii. **Index** = индекс ЭА (для переменных ЭА),
 - iv. **Description** = название, если оно задано функцией **_ (,)**.
 - v. **Atype** = поток | запас (только для переменной, входящей в баланс),
 - vi. **Asset** = актив, к которому она относится, поток/запас (только для переменной, входящей в баланс),
 - vii. **Tech** = источник | сток (только для переменной, указанной в списке потоков группы **Tech**).
3. **Макрос** – служебный **mws**-файл, используемый как процедура без параметров для стандартной, достаточно сложной обработки объектов определенного формата, имеющих определенные имена. Обычно запускается функцией **MacroExec** и ничего не выводит на экран, но при необходимости макрос мо-

жет быть открыт как обычный файл и исполнен построчно, возможно, с необходимыми для конкретного случая изменениями, выполняемыми вручную. В этом состоит его преимущество перед функцией Maple при исполнении сложной, но в общем стандартной линейной последовательности команд.

П.3 Инструкции по осуществлению некоторых изменений программного продукта

Изменение \ добавление статистических данных. Статистика вводится в модель в двух файлах: «data01.mws», «param01.mws», которые находятся в папке «newdata». Вся статистика в этих файлах вбита вручную, ниоткуда дополнительно не считывается. При добавлении статистики за новый период необходимо сначала открыть файл «data01.mws», последовательно найти все записи вида «имя_переменной(период_времени)=число» и вставить значения переменных для нового периода. Например, в самом начале файла в массив с именем «STAN» введены данные «pY(1) = 2041.9946» - номинальный ВВП за первый квартал 2006. Если необходимо добавить данные за 14-й квартал (II квартал 2009), после записи «pY(13) = 3055.2638» через запятую вбивается запись «pY(14) = 3200», если номинальный ВВП за 14-й квартал – 3200 млрд. тенге. Далее добавляются данные для всех статистических рядов – pC, pG_s и т.д. Методика сбора статистики описана в разделе 2. После исполнения файла «data01.mws» необходимо проделать ту же операцию с файлом «param01.mws». Для проверки правильности добавления данных рекомендуется сравнить списки переменных из конечного массива статистических данных «DA», относящиеся к разным периодам: необходимо командами sel(DA,1) и sel(DA,14) в конце файла «data01.mws» вывести два списка и сравнить их содержание.

Не рекомендуется добавлять статистику за новый период, если модель не будет настроена на новую длину расчетного периода (см. ниже). Т.е., например, не рекомендуется добавлять статистику за 17-й квартал, если модель будет считаться на 16 кварталов.

Следует знать и помнить, что для вступления изменений в силу, необходимо запустить последовательно оба файла: «data01.mws», «param01.mws». Данные статистики используются только начиная с файла «58-1-2-1m2n6 нормна-рост+иденпарам.mws». Файлы более низкого уровня запускать не обязательно. Наоборот, **необходимо запустить указанный файл и ВСЕ файлы более высокого уровня** («58-1-2-1m2n6-5 Ньют exp.mws» и т.д.), **чтобы новая статистика была верно использована.**

Изменение базового сценария. Как уже было описано в разделе 7, расчетный период модели, например $t = 1..16$, делится на два участка: на участок, где точно известна статистика экзогенных переменных модели, и где она «не известна», например, как выше – $t = 14..16$. Отрезок времени, на котором неизвестна статистика, является прогнозным интервалом, введенная статистика для него – прогноз, «базовый сценарий». Данные для базового сценария вводятся как в файле «data01.mws» (для рядов труд, субсидии населению, депозиты нерезидентов, валютный курс), так и в «param01.mws» (для рядов экспорт, государственное потребление). Чтобы изменить прогноз или добавить новые данные, необходимо по имени экзогенных рядов (см. таблицу 7.1.1.1) с помощью команды из меню Maple “edit-find” найти места, где вводился прогноз, и изменить \ продолжить его. Необ-

ходимо исполнить все те же файлы, как в случае с добавлением статистических данных.

Не рекомендуется добавлять данные для сценария за новый период, если модель не будет настроена на новую длину расчетного периода (см. ниже).

Изменений длины расчетного периода. Для изменения длины расчетного периода помимо добавления новых статистических данных (см. выше) необходимо в файле «58-1-2-1m2n6-5r1 реш - Основное решение.mws» в записи «TIME := [t0=1, T=16];» изменить «16» на длину нового расчетного периода. Напомним, что под длиной расчетного периода мы понимаем всю длину вместе с прогнозным периодом. Если требуется изменить лишь длину периода, на котором известна статистика, за счет уменьшения \ увеличения длины прогнозного периода, то необходимо помимо изменения статистики в файле «58-1-2-1m2n6-5r1 реш - Основное решение.mws» в записи «IOTR := 1..13» изменить «13» на номер последнего периода, в котором известна статистика.

Например, появились данные за II-III кварталы 2009 года, а модель продолжает считаться на 16 кварталов. Тогда вносятся данные за два новых квартала, длина расчетного периода остается той же («T=16»), а прогнозный интервал уменьшается до 16-го квартал («IOTR := 1..13»).

Изменение длины «статистического» периода при расчете ретро-прогноза. При расчете ретро-прогноза (см. раздел 7.2) искусственно уменьшается длина периода, на котором «известна» статистика. Чтобы задать длину периода с известной статистикой, необходимо в файле «58-1-2-1m2n6-5r2 реш - Ретро-прогноз.mws» в записи «TSTAT:=10» вместо «10» указать новую длину. По результатам работы файла в списке «ALLPOGR» сохраняются погрешности рассчитанного ретро-прогноза, использованные в разделе 7.2.

Изменение параметров модели. Наиболее простым способом изменения параметров модели является следующий. В конце файла «58-1-2-1m2n6 нормн-рост+иденпарам.mws» перед строкой «SaveGlob("ROST", "PARAM","NORM", "NAZV");» изменяется содержание списка «PARAM»: сначала выполняется команда «PARAM:=rev(PARAM,имя_параметра)» – удаляем из списка нужный параметр (например, rev(PARAM,A)), затем добавляем новое значение «PARAM:=clis(PARAM,имя_параметра=новое_значение)» (например, clis(PARAM,A=1).

Вычисление решения при измененном значении одного из параметров. Если уже вычислено какое-то решение в файле «58-1-2-1m2n6-5r1 реш - Основное решение.mws» и необходимо сравнить, как будет выглядеть решение при измененном значении одного из параметров, используется файл «58-1-2-1m2n6-5r7 реш в сторону - Изменение параметров.mws». В строке «PARAMIZM:=op(sel(PARAM, mu));» вместо «mu» вбивается имя нужного параметра, а в строке «PARAMZAM:=lhs(PARAMIZM)=rhs(PARAMIZM)+rhs(PARAMIZM)*0.01*u;» вместо «0.01» указывается доля, на которую вы хотите изменить предыдущее значение указанного параметра.

Вычисление погрешности эндогенных переменных. Расчет погрешностей эндогенных переменных, описанный в разделе 7.1.2, производится в файле «58-1-2-1m2n6-5r1 реш - Основное решение.mws». По результатам работы файла погрешности для эндогенных переменных и всех периодов времени сохраняются в списке «MyPOGR», а средние погрешности – в списке «SREDN».

Вычисление чувствительности эндогенных переменных по параметрам модели. Вычисление матрицы чувствительности эндогенных переменных по всем

параметрам модели (см. раздел 7.3) осуществляется с помощью файла «mymatrix.mws». В результате запуска «mymatrix.mws» запускается файл «Changeparam.mpl» – текстовый аналог файла «58-1-2-1m2n6-5r7 реш в сторону - Изменение параметров.mws» – столько раз, сколько параметров в модели. Результат (матрица) сохраняется под именем «myres». Период времени, для которого считается чувствительность, меняется в файле «mymatrix.mws» в строке «mytime := 13:» - с «13» на необходимый. Значение величины «delta» изменяется в файле «Changeparam.mpl» в строке «PARAMZAM:= lhs(PARAMIZM)=rhs(PARAMIZM)+ rhs(PARAMIZM)*0.01*u;» с «0.01» на необходимый.

Вычисление чувствительности эндогенных переменных модели при изменении сценария (экзогенных переменных). Для вычисления чувствительности эндогенных переменных модели при изменении сценария используется файл «58-1-2-1m2n6-5r9 реш в сторону - Прогнозы `равномерные`.mws». Каким образом формируется сценарий – описано в разделе 9.1. Чтобы задать нужный сценарий, необходимо в указанном файле в строке «номерпрогноза:=2;» задать число, соответствующее номеру сценария (список сценариев приведен в файле). Чтобы задать значение «Delta» (см. раздел 9.1), нужно в строке «OTKL:=0.1;» внести нужное число. Вычисленные значения чувствительности, соответствующие выбранному сценарию, содержатся в списке «ALLELAST».

Выбор и изменение альтернативного сценария. В модели предусмотрен расчет произвольного сценария, а не только сценариев с нарастающим отклонением какой-либо экзогенной переменной на прогнозном интервале, которые использованы в разделе 9.1. Для формирования и вычисления произвольного сценария используется файл «58-1-2-1m2n6-5r8 реш в сторону - Прогнозы.mws». В этом файле уже заложен ряд сценариев, которые можно выбрать, задав нужный номер в строке «номерпрогноза:=6;». Если необходимо построить новый, отличный от имеющихся сценариев, то в «номерпрогноза:=6;» заменяем «6» на «1». Определяем все значения экзогенных переменных, которые мы хотим изменить. Например, это по-прежнему $R_s(14)$, $R_s(15)$, $R_s(16)$, а также $w_s(14)$, $w_s(15)$, $w_s(16)$. Тогда а) вместо строки « $NAMES:=[R_s(14),R_s(15),R_s(16)];$ » вводится строка « $NAMES:=[R_s(14),R_s(15),R_s(16),w_s(14),w_s(15),w_s(16)];$ » б) вместо строки, определяющей «TRRS», вводится строка с новыми значениями экзогенных переменных, например, « $TRRS:=[R_s(14) = 8, R_s(15) = 8, R_s(16) = 8, w_s(14) = 140, w_s(15) = 140, w_s(16) = 140];$ ». Решение, соответствующее новому сценарию, записывается в массив «RET».

П.4 Пример описания блока экономического агента в системе ЭКОМОД

Приведем описания блока экономического агента «Население» некоторой промежуточной модели в качестве примера типичного mws-файла данного программного продукта. Фрагменты mws-файла оформлены рамками. Текст, присутствующий в рамках, является текстом непосредственно из mws-файла, поскольку в Maple допускается запись и форматирование комментариев.

Начало блока ЭА «Население».

```
> restart:

библиотеки и макросы

> with(student):
```

```

> read cat(libname[1 .. -5], `/vars.m`);
> read cat(libname[1 .. -5], `/ecomob.m`);
> macro(ify = infinity, pc = piecewise, plota = plots[animate], plota3 =
plots[animate3d], app = applyop, sop = subsop, cnv = convert, ats = attrib-
utes, ep=epsilon):
> unprotect(pi, gamma, Psi); N_B();

```

Это **стандартное начало** всех рабочих файлов Maple системы ЭКОМОД. Maple исполняет команды в хронологической, а не текстовой последовательности, поэтому в случае ошибки надежнее исполнить все с начала, очистив рабочую область. Это и делает первая команда.

Вторая строка – заголовок рубрики. При работе в Maple рубрики можно закрывать, чтобы убрать с экрана неактуальную в данный момент информацию. Команды рубрики «библиотеки и макросы» загружают библиотеки ЭКОМОД, вводят несколько сокращенных обозначений, (например, «ep» вместо стандартного в Maple обозначения «epsilon» для буквы ε) и лишают специального смысла некоторые резервированные символы Maple (например, π дальше в файле будет просто буквой, а не 3.14159...).

```

peri := t; neri := t0; veri := T;
                                peri:=t
                                neri:=t0
                                veri:=T

```

Команда задала обозначения текущего времени, начального и конечного моментов времени. Эти обозначения **должны быть одинаковыми во всех файлах, относящихся к одной модели.**

НАСЕЛЕНИЕ:

блок модели, описывающий в агрегированном виде деятельность совокупности домашних хозяйств в качестве потребителей, сберегателей и источника трудовых ресурсов

```

> INDEX := H; NAZV := cnv(cat(INDEX, ".m"), string);
                                INDEX:=H
                                NAZV:="H.m"

```

Строка команд после текста заголовка **специфична для блока**. Она задает **имя** ЭА «H» и формирует из него название рабочего файла «H.m», который передает окончательный вид соотношений блока процедурам сборки модели. Имена INDEX, NAZV **стандартные** (см. раздел П.2 приложения А).

В данном блоке система ограничений описывает четыре вида деятельности населения :

- Потребление
- Сбережение в виде банковских депозитов
- Получение доходов в виде заработной платы, государственных пособий и процента по депозитам

Предложение труда

Система ограничений

Потребление

Считаем, что купленный потребительский продукт $C(t)$ накапливается в запасе $Q(t) >$

Balance (**BAQ**, `продукт`, `продукт`, **m**, **diff** ($Q(t)$, t) = $C(t)$ - _(`потребление`, $V(t)$)) :

$$\frac{d}{dt} Q(t) = C(t) - V(t)$$

Здесь уже начинается ввод соотношений блока. Единственная в приведенном фрагменте команда вводит *балансовую группу*, состоящую в данном случае из одного баланса запаса. Группа водится функцией **Balance**, аргументами которой служат:

1. внутрисистемное имя балансового уравнения – **BAQ**;
2. имя актива или инструмента, баланс которого вводится в модель – `продукт` ;
3. размерность запаса – `продукт` ;
4. тип запаса **m** (можно **m**) – материальный актив (финансовый актив обозначается **ф** или **£**, а финансовый пассив – **п** или **р**);
5. само балансовое уравнение;
6. список любого числа равенств или неравенств, связывающих запас и потоки данного балансового уравнения (в данном случае их нет).

и расходуется на потребление $V(t)$ пропорционально запасу.

> **Tech** (**CON**, [$-V(t)$], $V(t) = \mu * Q(t)$) :

$$V(t) = \mu Q(t)$$

Функция **Tech()** вводит группу соотношений, описывающих технологические ограничения на деятельность агента. Первый аргумент функции **Tech()** задает мнемоническое название этой группы. В рамках системы балансов такая группа "поглощает" потоки затрат и "порождает" потоки выпусков. Список этих потоков (возможно, пустой), в котором потоки затрат стоят со знаком "-", образует второй аргумент функции **Tech()**. При проверке системы балансов этот список рассматривается как формальный пассив в системе оборота материального актива.

Остальные (необязательные) аргументы – это равенства или неравенства, образующие данную группу технологических ограничений.

Покупки продукта $C(t)$ оплачиваются по цене $p_y(t)$, и в результате определяется поток потребительских расходов $pC(t)$

> **Role** (`покупатель`, **y**, _(`покупки продукта`, $C(t)$) = _(`цена продукта`, $p[y](t)$)⁽⁻¹⁾ * $pC(t)$) :

$$C(t) = \frac{pC(t)}{p_y(t)}$$

Функция **Role()** вводит институциональное ограничение-равенство на действия населения в качестве покупателя. Аргументами функции **Role()** служат

1. название роли – `покупатель`, которое служит мнемоническим указателем, поскольку одноименные роли разных агентов описываются однотипными системами ограничений,
2. индекс блока **ВД** – **s**, в котором осуществляется данная роль,

3. список (возможно пустой) ограничений роли. Эти ограничения могут содержать только планируемые переменные агента и информационные переменные блока ВД – s.

Можно заметить, что в приведенном отрывке в командах ввода иногда вместо простого имени переменной, скажем, $C(t)$, стоит выражение вроде `_(`покупки продукта`,  $C(t)$ )`. Таким способом в системе ЭКОМОД вводятся **содержательные названия переменных и параметров**. Изолированное подчеркивание «`_`» – это **имя функции** системы ЭКОМОД. Ее первым аргументом служит символ, выражающий название величины, а вторым – сама эта величина. Результатом функции служит просто ее второй аргумент, а побочным действием – занесение названия в базу данных о величинах и соотношениях.

Сбережение

С точки зрения финансовой системы процесс сбережения представляет собой кредитование банка населением и описывается он, с точностью до обозначений, так же, как кредитование производителя банком: депозиты $S(t)$ помещаются в банк на срок $\frac{1}{\beta_s}$ под процент $r_s(t)$. Депозиты растут за счет нетто-вкладов $SdS(t)$.

```
> Balance (BAS, `депозиты`, `деньги`, f, diff(S(t), t) = SdS(t), _(`срок депозитов`^(-1)`, beta[s]) * S(t) <= SdS(t)):
```

$$\frac{d}{dt} S(t) = SdS(t)$$

$$-\beta_s S(t) \leq SdS(t)$$

Депозиты $S(t)$ – это записи в сберкнижке или дебитной карте. Чтобы увеличить их на $SdS(t)$ надо внести деньги $NdS(t)$. Имея депозит, можно получить процентные платежи $NrS(t)$

```
> Role (`Кредитор`, s, SdS(t) = NdS(t), NrS(t) = r[s](t) * S(t)):
```

$$SdS(t) = NdS(t)$$

$$NrS(t) = r_s(t) S(t)$$

Видно, что по существу описание достаточно компактно. Основное место занимают комментарии, которые мы оставили, чтобы показать, наглядность и содержательность компьютерной записи модели в системе ЭКОМОД. Записывать роль именно после баланса не обязательно. **Группы можно вводить в произвольном порядке.**

Баланс доходов и расходов

Считаем, что население пользуется наличностью $A(t)$, которая, напомним, не отличается в модели от остатков корреспондентских счетов в ЦБ. Запас наличности убывает за счет потребительских расходов $pC(t)$ и нетто-вкладов $SdS(t)$, а растет – за счет доходов. Кроме упомянутых выше процентных платежей $NrS(t)$, в модели учитываются доходы за счет зарплаты $sR(t)$ и **трансфертов от государства** $SB_x(t)$

```
> Balance (FIN, `корсчет`, `деньги`, f, diff(A(t), t) = -NdS(t) - pC(t) + sR(t) + NrS(t) + _(`субсидии населению`, SB[x](t)), 0 <= A(t)):
```

$$\frac{d}{dt} A(t) = -NdS(t) - pC(t) + sR(t) + NrS(t) + SB_x(t)$$

$$0 \leq A(t)$$

Трансферты $SB_x(t)$ не планируются населением, а задаются государством. Содержательно этой модельной величине отвечает сумма **государственных: субсидии населению** (пенсии, пособия, стипендии) и **зарплаты государственных служащих** (бюджетников)

Предложение труда

Население служит источником трудовых ресурсов $R(t)$. Продавая их на рынке труда по ставке заработной платы $s_r(t)$, оно получает поток доходов $IS(t)$ (фонд заработной платы)

> **Role**(`продавец`, r , $sR(t) = s[r](t) * R(t)$):
 $sR(t) = s_r(t) R(t)$

> **Tech**(**LAB**, $[R(t)]$, $R(t) = R[r](t)$):
 $R(t) = R_r(t)$

Цель деятельности потребителя => Functional, CASH

> **Functional** := $\text{Int}((Q(t)/Q0)^{(1-\eta)} * \exp(-\Delta t) / (1-\eta), t = t0 \dots T)$: **Value**(**Functional**);

$$\int_{t0}^T \frac{\left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{(1-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{1-\eta} dt$$

Здесь мы не выделяем и не фиксируем поток полезных расходов. Основные деньги, тем не менее, указать можно и нужно

> **CASH** := $A(t)$;
 $CASH := A(t)$

Функционал задачи населения не сводится к функционалу от потока полезных расходов, но задача все же "однородна с точностью до сдвига", поэтому постановка граничных условий и вычисление капитала возможны, хотя и несколько модифицируются.

Решение задачи населения => условия оптимальности URA, VSP;

Система ограничений имеет стандартный идентификатор **L_Relations** в файле любого агента. Для населения эта система имеет вид

> **op**(**L_Relations**);
 $\frac{d}{dt} Q(t) = C(t) - V(t)$, $V(t) = \mu Q(t)$, $C(t) = \frac{pC(t)}{p_y(t)}$, $\frac{d}{dt} S(t) = SdS(t)$, $\{-\beta_s S(t) \leq SdS(t)\}$, $SdS(t) = NdS(t)$,
 $NrS(t) = r_s(t) S(t)$, $\frac{d}{dt} A(t) = -NdS(t) - pC(t) + sR(t) + NrS(t) + SB_x(t)$, $\{0 \leq A(t)\}$, $sR(t) = s_r(t) R(t)$,
 $R(t) = R_r(t)$

Посмотрим, какую информацию собрала система ЭКОМОД в процессе записи ограничений.

Система **L_Relations** содержит **Count**(**L_Relations**);

Равенств: 9

Неравенств: 2

УДН: 0

Переменных: 16

Параметров: 2

Признаки (см. раздел П.2 приложения А) каждого уравнения сохранены в виде его атрибутов и могут быть прочитаны функцией **Desc**. Например, первое уравнение имеет признаки

> **op**(**Desc**(**L_Relations**[1]));
Assettype = `м`, **Group** = "Баланс", **Stock** = $Q(t)$, **Asset** = `продукт`, **Origin** = $\text{diff}(Q(t), t) = C(t) - V(t)$, **Dim** = `продукт`, **ID** = BAQ

Из 16 входящих в систему $L_Relations$ переменных $VRS := \text{spcr}(L_Relations) : \text{op}(\%) ;$
 $p_y(t), pC(t), s_r(t), A(t), sR(t), SB_x(t), R_r(t), NdS(t), NrS(t), r_s(t), S(t), SdS(t), R(t), V(t), C(t), Q(t)$

переменные с индексированными именами (5 штук) являются информационными

$IVARS := \text{select}(\text{proc}(x) \text{ options operator, arrow; type}(\text{op}(0,x), \text{indexed}) \text{ end}$
 $\text{proc}, VRS) : \text{op}(IVARS) ;$

$p_y(t), s_r(t), SB_x(t), R_r(t), r_s(t)$

а остальные 11 $\text{op}(\text{rev}(VRS, IVARS)) ;$

$pC(t), A(t), sR(t), NdS(t), NrS(t), S(t), SdS(t), R(t), V(t), C(t), Q(t)$

планируемыми переменными населения

Для планируемых переменных, входящих в ограничения с производными (фазовых переменных)

$\text{op}(\text{map}(\text{po}, \text{lef}(L_Relations, \text{diff}), 1)) ;$

$A(t), S(t), Q(t)$

строго говоря, надо задать из статистики начальные условия в момент $t=t0$. Однако поскольку модель воспроизводит статистические данные не совсем точно, мы считаем значения фазовых переменных в момент $t0$ настроенными параметрами модели.

размерности переменных и параметров

Введенные третьими аргументами функции **Balance()** размерности активов позволяют вычислить размерности всех величин, входящих в систему ограничений, если эта система записана корректно. Это делается командой

Dimension(L_Relations) ;

Отсутствие ошибки при выполнении этой команды говорит о корректности построенной системы ограничений. Размерности переменных записываются в комментариях к ним и могут быть выведены $\text{op}(\text{map}(\text{proc}(x) \text{ options operator, arrow;}$

$\text{bus}(\text{op}(\text{sel}(\text{Desc}(x), \text{Dim})), \text{Dim} = [x]) \text{ end proc}, VRS)) ;$

$[p[y](t)] = \text{'деньги'/'продукт'}, [pC(t)] = \text{'деньги'/'время'}, \text{Dim} = [s[r](t)],$
 $[A(t)] = \text{'деньги'}, [sR(t)] = \text{'деньги'/'время'}, [SB[x](t)] = \text{'деньги'/'время'},$
 $\text{Dim} = [R[r](t)], [NdS(t)] = \text{'деньги'/'время'}, [NrS(t)] = \text{'деньги'/'время'},$
 $[r[s](t)] = 1/\text{'время'}, [S(t)] = \text{'деньги'}, [SdS(t)] = \text{'деньги'/'время'}, \text{Dim} =$
 $[R(t)], [V(t)] = \text{'продукт'/'время'}, [C(t)] = \text{'продукт'/'время'}, [Q(t)] =$
 'продукт'

Кроме размерности, в комментариях к переменным, появившимся в соотношениях, введенных с помощью функций ЭКОМОД, содержится ее название (если оно было введено функцией $_ (,)$) и некоторые другие характеристики. Полностью комментариев может быть выведен функцией **Desc()**. Например,

> Desc(SdS(t)) ;

$[Index = H, Asset = \text{'депозиты'}, Type = \text{'переменная агента'}, Dim = \text{'деньги'/'время'}, Atype = \text{'поток'}]$

> Desc(mu) ;

$[Type = \text{'параметр модели'}, Dim = 1/\text{'время'}]$

Список учтенных системой ЭКОМОД переменных и параметров имеет системное имя

L_Variables;

$[V(t), C(t), Q(t), t, \mu, p_y(t), pC(t), \beta_s, SdS(t), S(t), NdS(t), NrS(t), r_s(t), SB_x(t), sR(t), A(t), s_r(t), R(t),$
 $R_r(t)]$

Этот этап просмотра, конечно, не обязателен. После задания функционала система ограничений автоматически упрощается.

Упрощение ограничений => URA, VSP, Stocks, Variables ;

> MacroExec (EC_Iscluch) ;

"Done"

> op (VSP) ;

$$pC(t) = -\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t), R(t) = R_r(t), sR(t) = s_r(t) R(t),$$

$$NrS(t) = r_s(t) S(t), SdS(t) = NdS(t), C(t) = \frac{pC(t)}{p_y(t)}, V(t) = \mu Q(t)$$

> URA := VarCons: op (%) ;

$$0 = \frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right), 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t)\right),$$

$$\{0 \leq NdS(t) + \beta_s S(t)\}, \{0 \leq A(t)\}$$

В результате работы макроса EC_Iscluch система ограничений **L_Relations** тождественно преобразуется в две системы: список выражений исключенных лишних переменных, имеющий стандартное имя **VSP**, и список существенных ограничений, имеющий стандартное имя **URA**. Процедура исключения лишних переменных допускает появление среди существенных ограничений равенств, содержащих производные нескольких переменных, но не допускает появления дифференциальных неравенств.

Одновременно с выделением существенных ограничений определяется и список существенных планируемых переменных, который получает стандартное имя **Variables**.

op(Variables)

Q(t), S(t), NdS(t), A(t)

Среди них выделяется список фазовых переменных **Stocks**.

Stocks := cL(Stocks) op(Stocks)

Q(t), S(t), A(t)

Итак, теперь задача состоит в том, чтобы максимизировать **Functional** по переменным **Variables** при ограничениях **URA**. К этим ограничениям надо добавить терминальное условие.

Граничные условия роста капитала => KOT, OOM, TerCons ;

> KOT := [seq(cat(a, op(0, x)) (t), x = rev(Stocks, CASH))] :

> OOM := Choice(DOMEGA, Omega(t) =

cnv(zip(`\*`, KOT, rev(Stocks, CASH)), `+`) + CASH) :

> TerCons := [bus(Rhs(OOM), peri = neri) * exp(gamma * (veri - neri)) <= bus(Rhs(OOM), peri = veri)] ;

$$TerCons := [(aS(t0) S(t0) + aQ(t0) Q(t0) + A(t0)) e^{(\gamma(T-t0))} \leq aS(T) S(T) + aQ(T) Q(T) + A(T)]$$

Команда **FLAG** системы ЭКОМОД, исходя из выражения функционала, списка переменных и списков динамических и терминальных ограничений, автоматически вводит нужный набор двойственных переменных ($\psi_1(t), \psi_2(t), \dots$ для равенств, $\phi_3(t), \phi_4(t), \dots$ для неравенств и $\Phi_1, \dots$ для терминальных неравенств); выписывает УДН и составляет функционал Лагранжа **LAG**.

Достаточные условия оптимальности => USOP;

> FLAG (Functional, Variables, URA, TerCons);

варьируемые переменные Variables

$[A(t), NdS(t), S(t), Q(t)]$

динамические ограничения VarCons

$$\left[0 = \frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right), 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t)\right), \right. \\ \left. \{0 \leq NdS(t) + \beta_s S(t)\}, \{0 \leq A(t)\} \right]$$

краевые ограничения TerCons

$$[0 \leq aS(T) S(T) + aQ(T) Q(T) + A(T) - (aS(t0) S(t0) + aQ(t0) Q(t0) + A(t0)) e^{(\gamma(T-t0))}]$$

нормировка двойственных переменных ndw

1

условия доп. нежесткости

$$[[\Phi 1] [aS(T) S(T) + aQ(T) Q(T) + A(T) - (aS(t0) S(t0) + aQ(t0) Q(t0) + A(t0)) e^{(\gamma(T-t0))}], \\ [\Phi 4(t)] [A(t)], [\Phi 3(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)]]$$

Функционал Лагранжа

$$\int_{t0}^T \frac{Q(t) \left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{(-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{Q0 (1 - \eta)} + \psi 1(t) \left(\frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right) \right) \\ + \psi 2(t) \left(NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t)\right) \right) + \Phi 3(t) (NdS(t) + \beta_s S(t)) + \Phi 4(t) A(t) dt \\ + \Phi 1 (aS(T) S(T) + aQ(T) Q(T) + A(T) - (aS(t0) S(t0) + aQ(t0) Q(t0) + A(t0)) e^{(\gamma(T-t0))})$$

Команда **FLAG** использует формулу интегрирования по частям, чтобы избавиться от производных прямых переменных в функционале Лагранжа. Двоеточие в конце команды означает, что ее вывод будет скрыт от глаз пользователя. Это сделано для экономии места и удобства чтения рабочего листа.

> FLAG (LAG) :

Дальнейшие преобразования заключаются в записи вариаций по переменным модели. Это делает функция **VLAG**. Для наглядности в условия оптимальности добавляются формальные дифференциалы тех переменных, вариацией которых получено то или иное равенство.

Не варьировем начальные значения фазовых переменных

> LAP := bus (LAP, map ('=' , bus (Stocks, peri = neri) , 0)) :

Задача населения вогнута, поэтому необходимые условия максимальности функционала Лагранжа являются и достаточными.

> **VLAG (Variables) ;**

$$\left[\begin{aligned} & [\Phi 1] [aS(T) S(T) + aQ(T) Q(T) + A(T) - (aS(t0) S(t0) + aQ(t0) Q(t0) + A(t0)) e^{(\gamma(T-t0))}], \\ & [\phi 4(t)] [A(t)], [\phi 3(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)], \\ & 0 = \frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right), 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t)\right), \\ & 0 = \left(\frac{\left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{(-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{Q0(1-\eta)} - \frac{\left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{(-\eta)} \eta e^{(-\Delta t)}}{Q0(1-\eta)} - \psi 1(t) \mu + \left(\frac{d}{dt} \psi 1(t)\right) \right) dQ, \\ & 0 = \left(\frac{\psi 1(t) r_s(t)}{p_y(t)} + \left(\frac{d}{dt} \psi 2(t)\right) + \phi 3(t) \beta_s \right) dS, 0 = \left(-\frac{\psi 1(t)}{p_y(t)} + \psi 2(t) + \phi 3(t) \right) dNdS, \\ & 0 = \left(-\frac{\psi 1(t) \left(\frac{d}{dt} p_y(t)\right)}{p_y(t)^2} + \frac{\frac{d}{dt} \psi 1(t)}{p_y(t)} + \phi 4(t) \right) dA, 0 = \left(-\frac{\psi 1(T)}{p_y(T)} + \Phi 1 \right) dA(T), \\ & 0 = (-\psi 2(T) + \Phi 1 aS(T)) dS(T), 0 = (-\psi 1(T) + \Phi 1 aQ(T)) dQ(T) \end{aligned} \right]$$

Для каждого агента мы выводим из условий оптимальности уравнение изменения собственного капитала. Вид нужной билинейной формы $MK(t)$ определяется видом верхней подстановки, получающейся при интегрировании по частям функционала Лагранжа.

Капитал и граничные условия => USOK2

> **OMK := MK(t) = -bus(rev(rev(LAP,Int),Phi1),veri=peri) ;**

$$OMK := MK(t) = \frac{\psi 1(t) A(t)}{p_y(t)} + \psi 1(t) Q(t) + \psi 2(t) S(t)$$

> **UMK1 := diff(OMK,peri) :**

> **SUM1 := sel(op(1, sel(LAG+xxX, Int)), clis(SPS, SPH)) :**

> **SUM2 := sel(op(1, sel(LAP, Int)), Variables) :**

> **UMK2 := expand(ich(UMK1 + (0=-SUM2) + (0=SUM1), diff(MK(t),t))) ;**

$$UMK2 := \frac{d}{dt} MK(t) = -\frac{Q(t)}{Q0 \left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{\eta} e^{(\Delta t)} (1-\eta)} + \frac{\psi 1(t) s_r(t) R_r(t)}{p_y(t)} + \frac{\psi 1(t) SB_x(t)}{p_y(t)}$$

В процессе преобразований используются вспомогательные функции системы ЭКОМОД:

- **ich** исключает переменную из списка соотношений,
- **bus** совершает подстановки из списка,
- **sel** выделяет из списка соотношения определенного типа или содержащие определенный элемент,
- **rev** удаляет из списка соотношения определенного типа или содержащие определенный элемент.

> **QMK := ich(expand(sel(USOP, dQ)), exp(Delta*t)) ;**

$$QMK := \left[e^{(\Delta t)} = - \frac{1}{Q0 \left(\frac{Q(t)}{Q0} \right)^\eta \left(-\psi 1(t) \mu + \left(\frac{d}{dt} \psi 1(t) \right) \right)} \right]$$

> **UMK3** := bus(**UMK2**, **QMK**);

$$UMK3 := \frac{d}{dt} MK(t) = \frac{Q(t) \left(-\psi 1(t) \mu + \left(\frac{d}{dt} \psi 1(t) \right) \right)}{1 - \eta} + \frac{\psi 1(t) s_r(t) R_r(t)}{p_y(t)} + \frac{\psi 1(t) SB_x(t)}{p_y(t)}$$

> **OMEGA1** := **Omega**(**t**) = **MK**(**t**) / (**1/p**[**y**](**t**) * **psi1**(**t**));

$$OMEGA1 := \Omega(t) = \frac{MK(t) p_y(t)}{\psi 1(t)}$$

> **OMEGA2** := **diff**(**OMEGA1**, **t**);

$$OMEGA2 := \frac{d}{dt} \Omega(t) = \frac{\left(\frac{d}{dt} MK(t) \right) p_y(t)}{\psi 1(t)} + \frac{MK(t) \left(\frac{d}{dt} p_y(t) \right)}{\psi 1(t)} - \frac{MK(t) p_y(t) \left(\frac{d}{dt} \psi 1(t) \right)}{\psi 1(t)^2}$$

> **OMEGA3** := bus(**OMEGA2**, **UMK3**, **ich**(**OMEGA1**, **MK**(**t**)), **NULL**);

> **OMEGA4** := **expand**(**OMEGA3**);

$$OMEGA4 := \frac{d}{dt} \Omega(t) = - \frac{p_y(t) Q(t) \mu}{1 - \eta} + \frac{p_y(t) Q(t) \left(\frac{d}{dt} \psi 1(t) \right)}{\psi 1(t) (1 - \eta)} + s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) + \frac{\Omega(t) \left(\frac{d}{dt} p_y(t) \right)}{p_y(t)} - \frac{\Omega(t) \left(\frac{d}{dt} \psi 1(t) \right)}{\psi 1(t)}$$

Полезным потоком следует считать стоимость фактического потребления

> **OPP** := **PP**(**t**) = **p**[**y**](**t**) * **Q**(**t**) / **1*mu**;

$$OPP := PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu$$

> **OPP** := **PP**(**t**) = **p**[**y**](**t**) * **Q**(**t**) * **mu**;

$$OPP := PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu$$

Функция **MAC** рекурсивно разлагает свой первый аргумент по степеням переменных, указанных остальными аргументами. Она является удобным инструментом приведения уравнений к обозримому виду:

> **OMEGA** := **MAC**(bus(**OMEGA4**, **ich**(**OPP**, **Q**(**t**))), **Omega**(**t**), **PP**(**t**));

$$OMEGA := \frac{d}{dt} \Omega(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) + \frac{\left(- \left(\frac{d}{dt} \psi 1(t) \right) + \psi 1(t) \mu \right) PP(t)}{\psi 1(t) \mu (-1 + \eta)} + \frac{\left(\left(\frac{d}{dt} p_y(t) \right) \psi 1(t) - \left(\frac{d}{dt} \psi 1(t) \right) p_y(t) \right) \Omega(t)}{p_y(t) \psi 1(t)}$$

> **MUK** := [
_(`полезный поток`, **PP**(**t**)) = **Rhs**(**OPP**),
_(`внутренняя доходность`, **rho**(**t**)) = **de**(**rhs**(**OMEGA**), **Omega**(**t**)),
_(`1+эффективный налог`, **nu**(**t**)) = **-de**(**rhs**(**OMEGA**), **PP**(**t**)),
_(`косвенный доход`, **f**(**t**)) = bus(**rhs**(**OMEGA**), **PP**(**t**) = 0, **Omega**(**t**) = 0)
];

$$MUK := \left[PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu, \rho(t) = \frac{D(p_y(t) \psi_1(t) - D(\psi_1(t)) p_y(t))}{p_y(t) \psi_1(t)}, v(t) = -\frac{-D(\psi_1(t)) + \psi_1(t) \mu}{\psi_1(t) \mu (-1 + \eta)}, \right. \\ \left. f(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) \right]$$

> **VOM := expand (bus (OMEGA1 ,OMK)) ;**

$$VOM := \Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \frac{p_y(t) \psi_2(t) S(t)}{\psi_1(t)}$$

> **USOK1 := (cd@clis) (USOP, VOM,MUK) :**

> **OOM1 := ich (OOM,CASH) ;**

$$OOM1 := A(t) = \Omega(t) - aS(t) S(t) - aQ(t) Q(t)$$

> **USOK2 := subs (bus (OOM1 ,peri = veri) ,bus (OOM1 ,peri = neri) ,USOK1) ;**

$$USOK2 := \left[\Phi 1 \right] [\Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))}], [\phi 4(t)] [A(t)], [\phi 3(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)], \\ 0 = -\frac{\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right), 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t)\right), \\ 0 = \left(\frac{\left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{(-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{Q0 (1 - \eta)} - \frac{\left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{(-\eta)} \eta e^{(-\Delta t)}}{Q0 (1 - \eta)} - \psi_1(t) \mu + \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t)\right) \right) dQ, \\ 0 = \left(\frac{\psi_1(t) r_s(t)}{p_y(t)} + \left(\frac{d}{dt} \psi_2(t)\right) + \phi 3(t) \beta_s \right) dS, 0 = \left(-\frac{\psi_1(t)}{p_y(t)} + \psi_2(t) + \phi 3(t) \right) dNdS, \\ 0 = \left(-\frac{\psi_1(t) \left(\frac{d}{dt} p_y(t)\right)}{p_y(t)^2} + \frac{\frac{d}{dt} \psi_1(t)}{p_y(t)} + \phi 4(t) \right) dA, 0 = \left(-\frac{\psi_1(T)}{p_y(T)} + \Phi 1 \right) dA(T), \\ 0 = (-\psi_2(T) + \Phi 1 aS(T)) dS(T), 0 = (-\psi_1(T) + \Phi 1 aQ(T)) dQ(T), \\ \Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \frac{p_y(t) \psi_2(t) S(t)}{\psi_1(t)}, PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu, \\ \rho(t) = \frac{\left(\frac{d}{dt} p_y(t)\right) \psi_1(t) - \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t)\right) p_y(t)}{p_y(t) \psi_1(t)}, v(t) = -\frac{\left(\frac{d}{dt} \psi_1(t)\right) + \psi_1(t) \mu}{\psi_1(t) \mu (-1 + \eta)}, f(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) \right]$$

> **KOG := rev ([seq (de (Rhs (OOM) ,x) = de (Rhs (VOM) ,x) ,x = Stocks)] ,1 = 1) ;**

$$KOG := \left[aS(t) = \frac{p_y(t) \psi_2(t)}{\psi_1(t)}, aQ(t) = p_y(t) \right]$$

В качестве описания поведения агента имеет смысл рассматривать лишь те решения системы условий оптимальности, для которых множитель Лагранжа $\Phi 1$ при терминальном ограничении строго положителен, т.е. терминальное ограничение активно.

коэффициенты терминального условия => USOK ;

> **USOK3 := bus (USOK2 ,bus (KOG ,peri = veri) ,bus (KOG ,peri = neri)) :**

> GRA1 := sel (USOK3, veri) ;

$$GRA1 := \left[\Phi 1 \right] \left[\Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))} \right], 0 = \left(-\frac{\psi 1(T)}{p_y(T)} + \Phi 1 \right) dA(T),$$

$$0 = \left(-\psi 2(T) + \frac{\Phi 1 p_y(T) \psi 2(T)}{\psi 1(T)} \right) dS(T), 0 = (-\psi 1(T) + \Phi 1 p_y(T)) dQ(T) \Big]$$

Регулярное решение = терминальное условие активно

> GRA2 := app(strog, 1, udg2 (GRA1, 1)) :

> GRA3 := ifur (GRA2, Phi1, "");

$$из 0 = (-\psi 1(T) + \Phi 1 p_y(T)) dQ(T)$$

$$получилось 0 = 0$$

$$из 0 = (-\psi 2(T) + \Phi 1 p_y(T) / \psi 1(T) \psi 2(T)) dS(T)$$

$$получилось 0 = 0$$

$$GRA3 := \left[\left\{ 0 < \frac{\psi 1(T)}{p_y(T)} \right\}, 0 = \Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))} \right]$$

> USOK := clis (KOG, GRA3, rev (USOK3, GRA1)) ;

$$USOK := \left[aS(t) = \frac{p_y(t) \psi 2(t)}{\psi 1(t)}, aQ(t) = p_y(t), \left\{ 0 < \frac{\psi 1(T)}{p_y(T)} \right\}, 0 = \Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))}, [\phi 4(t)] [A(t)], \right.$$

$$[\phi 3(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)],$$

$$0 = \frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right), 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t)\right),$$

$$0 = \left(\frac{\left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{(-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{Q0 (1 - \eta)} - \frac{\left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{(-\eta)} \eta e^{(-\Delta t)}}{Q0 (1 - \eta)} - \psi 1(t) \mu + \left(\frac{d}{dt} \psi 1(t)\right) \right) dQ,$$

$$0 = \left(\frac{\psi 1(t) r_s(t)}{p_y(t)} + \left(\frac{d}{dt} \psi 2(t)\right) + \phi 3(t) \beta_s \right) dS, 0 = \left(-\frac{\psi 1(t)}{p_y(t)} + \psi 2(t) + \phi 3(t) \right) dNdS,$$

$$0 = \left(-\frac{\psi 1(t) \left(\frac{d}{dt} p_y(t)\right)}{p_y(t)^2} + \frac{\frac{d}{dt} \psi 1(t)}{p_y(t)} + \phi 4(t) \right) dA, \Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \frac{p_y(t) \psi 2(t) S(t)}{\psi 1(t)},$$

$$PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu, \rho(t) = \frac{\left(\frac{d}{dt} p_y(t)\right) \psi 1(t) - \left(\frac{d}{dt} \psi 1(t)\right) p_y(t)}{p_y(t) \psi 1(t)}, v(t) = -\frac{\left(\frac{d}{dt} \psi 1(t)\right) + \psi 1(t) \mu}{\psi 1(t) \mu (-1 + \eta)},$$

$$\left. f(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) \right]$$

Полученные выражения для капитала и коэффициентов терминального условия ясно показывают, что все двойственные переменные естественно поделить на положительную величину $\frac{\psi 1(t)}{p_y(t)}$, отвечающую балансу основных денег.

Для перенормированных двойственных переменных мы сохраняем исходные обозначения, а саму выделенную величину $\frac{\psi 1(t)}{p_y(t)}$ переименуем в $\xi(t)$. Первые множители УДН можно также поделить на эту положительную величину.

Нормировка двойственных => USOP2 ;

> hav (USOK, cat (d, op (0, CASH))) ;

$$0 = \left(-\frac{\psi_1(t) \left(\frac{d}{dt} p_y(t) \right)}{p_y(t)^2} + \frac{\frac{d}{dt} \psi_1(t)}{p_y(t)} + \phi_4(t) \right) dA$$

> 1/p[y] (t) *psi1 (t) ;

$$\frac{\psi_1(t)}{p_y(t)}$$

> SPF := [] :

> SP := rev(clis (SPS, SPH) , psi1) :

> PSP1 := zip (` = ` , SP, zip (` \* ` , SP, [xi (t) \$nops (SP)])) :

> PSP2 := clis (PSP1, ich (1/p[y] (t) *psi1 (t) = xi (t) , psi1 (t))) :

> PSP := clis (PSP2, bus (PSP2, peri=neri) , bus (PSP2, peri=veri)) :

> USOP1 := ich (Vale (bus (USOK, PSP, NULL)) , -3, diff (xi (t) , t)) :

> USOP2 := bus (USOP1, zip (` = ` , sed (USOP1) , bus (sed (USOP1) , xi (t) = 1))) ;

$$USOP2 := \left[\begin{aligned} & aS(t) = \psi_2(t), aQ(t) = p_y(t), \{0 < \xi(T)\}, 0 = \Omega(T) - \Omega(t_0) e^{(\gamma(T-t_0))}, [\phi_4(t)] [A(t)], \\ & [\phi_3(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)], \\ & 0 = \frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right), 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t)\right), \\ & 0 = \left(\frac{\left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{(-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{Q0(1-\eta)} - \frac{\left(\frac{Q(t)}{Q0}\right)^{(-\eta)} \eta e^{(-\Delta t)}}{Q0(1-\eta)} - \xi(t) p_y(t) \mu - \frac{\rho(t) p_y(t)^2 \xi(t) - \left(\frac{d}{dt} p_y(t)\right) \xi(t) p_y(t)}{p_y(t)} \right) dQ, \\ & 0 = \left(\xi(t) r_s(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi_2(t)\right) \xi(t) + \frac{\psi_2(t) \left(-\frac{\rho(t) p_y(t)^2 \xi(t) - \left(\frac{d}{dt} p_y(t)\right) \xi(t) p_y(t)}{p_y(t)} - \xi(t) \left(\frac{d}{dt} p_y(t)\right) \right)}{p_y(t)} \right) \\ & + \phi_3(t) \xi(t) \beta_s \Bigg] dS, 0 = (-\xi(t) + \psi_2(t) \xi(t) + \phi_3(t) \xi(t)) dNdS, \\ & 0 = \left(-\frac{\xi(t) \left(\frac{d}{dt} p_y(t)\right)}{p_y(t)} - \frac{\rho(t) p_y(t)^2 \xi(t) - \left(\frac{d}{dt} p_y(t)\right) \xi(t) p_y(t)}{p_y(t)^2} + \phi_4(t) \xi(t) \right) dA, \\ & \Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \psi_2(t) S(t), PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu, \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \xi(t) &= - \frac{\rho(t) p_y(t)^2 \xi(t) - \left(\frac{d}{dt} p_y(t) \right) \xi(t) p_y(t)}{p_y(t)} - \xi(t) \left(\frac{d}{dt} p_y(t) \right), \\ v(t) &= - \frac{\frac{\rho(t) p_y(t)^2 \xi(t) - \left(\frac{d}{dt} p_y(t) \right) \xi(t) p_y(t)}{p_y(t)} + \xi(t) p_y(t) \mu}{\xi(t) p_y(t) \mu (-1 + \eta)}, \quad f(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) \end{aligned} \right]$$

Двойственные переменные сами по себе нам в модели не нужны, поэтому мы их, по возможности, исключаем. Исключение двойственных переменных можно проводить с помощью специализированной функции **idw**, также как и с помощью обычных функций исключения переменных **ich**, **ifur**.

Исключение двойственных => USOP4 ;

> INF := diff(p[y](t), t) = _(`темп инфляции`, iota(t)) * p[y](t) ;

$$INF := \frac{d}{dt} p_y(t) = \iota(t) p_y(t)$$

> DWOY := MAC(clis(INF, bus(USOP2, INF)), op(SPS)) ;

$$DWOY := \left[\frac{d}{dt} p_y(t) = \iota(t) p_y(t), aS(t) = \psi 2(t), aQ(t) = p_y(t), \{0 < \xi(T)\}, 0 = \Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))}, \right.$$

$$[\phi 4(t)] [A(t)], [\phi 3(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)],$$

$$0 = - \frac{\left(\frac{d}{dt} A(t) \right) + NdS(t) - s_r(t) R_r(t) - r_s(t) S(t) - SB_x(t) + p_y(t) Q(t) \mu + \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right) p_y(t)}{p_y(t)},$$

$$0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t) \right),$$

$$0 = dQ \xi(t) \iota(t) p_y(t) - dQ \xi(t) p_y(t) \mu - dQ p_y(t) \rho(t) \xi(t) + \frac{dQ \left(\frac{Q(t)}{Q0} \right)^{(-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{Q0},$$

$$0 = dS \xi(t) r_s(t) + dS \left(\frac{d}{dt} \psi 2(t) \right) \xi(t) - dS \psi 2(t) \rho(t) \xi(t) + dS \phi 3(t) \xi(t) \beta_s,$$

$$0 = -dNdS \xi(t) + dNdS \psi 2(t) \xi(t) + dNdS \phi 3(t) \xi(t), 0 = \xi(t) dA (-\rho(t) + \phi 4(t)),$$

$$\Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \psi 2(t) S(t), PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu, \frac{d}{dt} \xi(t) = -\rho(t) \xi(t),$$

$$\left. v(t) = - \frac{\rho(t) - \iota(t) + \mu}{\mu (-1 + \eta)}, f(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) \right]$$

> idw(dA, phi4(t)) :

$$\phi 4(t) = \rho(t)$$

> idw(dNdS, phi3(t)) :

$$\phi 3(t) = - \frac{-dNdS \xi(t) + dNdS \psi 2(t) \xi(t)}{dNdS \xi(t)}$$

> USOP4 := MAC(DWOY, p[y](t)) ;

$$\begin{aligned}
USOP4 := & \left[\frac{d}{dt} p_y(t) = \iota(t) p_y(t), aS(t) = \psi 2(t), aQ(t) = p_y(t), \{0 < \xi(T)\}, 0 = \Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))}, \right. \\
& [\rho(t)] [A(t)], [1 - \psi 2(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)], \\
& 0 = \frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right), 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t)\right), \\
& 0 = \frac{dQ \left(\frac{Q(t)}{Q0} \right)^{(-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{Q0} - \xi(t) dQ (\rho(t) - \iota(t) + \mu) p_y(t), \\
& 0 = -\xi(t) dS \left(-r_s(t) - \left(\frac{d}{dt} \psi 2(t)\right) + \psi 2(t) \rho(t) - \beta_s + \beta_s \psi 2(t) \right), \Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \psi 2(t) S(t), \\
& \left. PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu, \frac{d}{dt} \xi(t) = -\rho(t) \xi(t), v(t) = -\frac{\rho(t) - \iota(t) + \mu}{\mu (-1 + \eta)}, f(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) \right]
\end{aligned}$$

Вместо дифференциального уравнения для $\xi(t)$ и конечного выражения для $Q(t)$ удобнее получить дифференциальное уравнение для запаса $Q(t)$:

```

> UQ1 := hav(USOP4, dQ);

```

$$UQ1 := 0 = \frac{dQ \left(\frac{Q(t)}{Q0} \right)^{(-\eta)} e^{(-\Delta t)}}{Q0} - \xi(t) dQ (\rho(t) - \iota(t) + \mu) p_y(t)$$

```

> UQ2 := div(ich(UQ1, sel(Rhs(UQ1), exp(-Delta*t))), dQ);
> UQ3 := bus(diff(UQ2, t), INF);
> UQ4 := MAC(div(UQ3, UQ2), diff(Q(t), t), diff(xi(t), t));

```

$$UQ4 := -\frac{\eta \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)}{Q(t)} - \Delta = \frac{-\left(\frac{d}{dt} \iota(t)\right) + \iota(t) \rho(t) - \iota(t)^2 + \left(\frac{d}{dt} \rho(t)\right) + \iota(t) \mu}{\rho(t) - \iota(t) + \mu} + \frac{\frac{d}{dt} \xi(t)}{\xi(t)}$$

```

> USOP5 := bus(USOP4, UQ1=UQ4);

```

$$\begin{aligned}
USOP5 := & \left[\frac{d}{dt} p_y(t) = \iota(t) p_y(t), aS(t) = \psi 2(t), aQ(t) = p_y(t), \{0 < \xi(T)\}, 0 = \Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))}, \right. \\
& [\rho(t)] [A(t)], [1 - \psi 2(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)], \\
& 0 = \frac{-\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right), 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t)\right), \\
& -\frac{\eta \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)}{Q(t)} - \Delta = \frac{-\left(\frac{d}{dt} \iota(t)\right) + \iota(t) \rho(t) - \iota(t)^2 + \left(\frac{d}{dt} \rho(t)\right) + \iota(t) \mu}{\rho(t) - \iota(t) + \mu} + \frac{\frac{d}{dt} \xi(t)}{\xi(t)}, \\
& 0 = -\xi(t) dS \left(-r_s(t) - \left(\frac{d}{dt} \psi 2(t)\right) + \psi 2(t) \rho(t) - \beta_s + \beta_s \psi 2(t) \right), \Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \psi 2(t) S(t), \\
& \left. PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu, \frac{d}{dt} \xi(t) = -\rho(t) \xi(t), v(t) = -\frac{\rho(t) - \iota(t) + \mu}{\mu (-1 + \eta)}, f(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) \right]
\end{aligned}$$

Введем новую переменную $q(t)$ вместо $\rho(t)$: $\rho(t) = \frac{1}{q(t)} - \mu + \iota(t)$

```

> USOP6 := ich(USOP5, -3, diff(xi(t), t));

```

```
> USOP7 := Vale(ich(clis(mu+rho(t)-iota(t) =
1/q(t), USOP6), rho(t)));
```

$$USOP7 := \left[\begin{aligned} &\rho(t) = \frac{1}{q(t)} + \imath(t) - \mu, \frac{d}{dt} p_y(t) = \imath(t) p_y(t), aS(t) = \psi 2(t), aQ(t) = p_y(t), \{0 < \xi(T)\}, \\ &0 = \Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))}, \left[\frac{1}{q(t)} + \imath(t) - \mu \right] [A(t)], [1 - \psi 2(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)], \\ &0 = -\frac{\left(\frac{d}{dt} A(t) \right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t)}{p_y(t)} - \mu Q(t) - \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right), 0 = NdS(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t) \right), \\ &-\frac{\eta \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)}{Q(t)} - \Delta = \left(\imath(t) \left(\frac{1}{q(t)} + \imath(t) - \mu \right) - \imath(t)^2 - \frac{\frac{d}{dt} q(t)}{q(t)^2} + \imath(t) \mu \right) q(t) - \frac{1}{q(t)} - \imath(t) + \mu, \\ &0 = -\xi(t) dS \left(-r_s(t) - \left(\frac{d}{dt} \psi 2(t) \right) + \psi 2(t) \left(\frac{1}{q(t)} + \imath(t) - \mu \right) - \beta_s + \beta_s \psi 2(t) \right), \\ &\Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \psi 2(t) S(t), PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu, \frac{d}{dt} \xi(t) = -\left(\frac{1}{q(t)} + \imath(t) - \mu \right) \xi(t), \\ &\imath(t) = -\frac{1}{q(t) \mu (-1 + \eta)}, f(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) \end{aligned} \right]$$

Теперь $\xi(t)$ больше не нужно.

```
> USOP8 :=
```

```
MAC(Ich(USOP7, diff(A(t), t), diff(psi2(t), t), diff(q(t), t), diff(S(t), t)), psi2(t), q(t), Q(t), xi(t)));
```

$$USOP8 := \left[\begin{aligned} &\rho(t) = \frac{1}{q(t)} + \imath(t) - \mu, \frac{d}{dt} p_y(t) = \imath(t) p_y(t), aS(t) = \psi 2(t), aQ(t) = p_y(t), \{0 < \xi(T)\}, \\ &0 = \Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))}, \left[\frac{1}{q(t)} + \imath(t) - \mu \right] [A(t)], [1 - \psi 2(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)], \\ &\frac{d}{dt} A(t) = -p_y(t) Q(t) \mu - \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right) p_y(t) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t), \frac{d}{dt} S(t) = NdS(t), \\ &\frac{d}{dt} q(t) = -1 + \left(\frac{\eta \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)}{Q(t)} + \Delta + \mu \right) q(t), \frac{d}{dt} \psi 2(t) = \left(\frac{1}{q(t)} + \imath(t) - \mu + \beta_s \right) \psi 2(t) - r_s(t) - \beta_s, \\ &\Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \psi 2(t) S(t), PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu, \frac{d}{dt} \xi(t) = (-\imath(t) + \mu) \xi(t) - \frac{\xi(t)}{q(t)}, \\ &\imath(t) = -\frac{1}{q(t) \mu (-1 + \eta)}, f(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t) \end{aligned} \right]$$

```
> sel(USOP8, xi);
```

$$\left[\{0 < \xi(T)\}, \frac{d}{dt} \xi(t) = (-\imath(t) + \mu) \xi(t) - \frac{\xi(t)}{q(t)} \right]$$

```
> USOP9 := rev(USOP8, xi);
```

Выделяем ядро системы соотношений.

```
> VKOT, USOP10 := selectremove(has, USOP9, KOT);
```

```
> VSP := Clis(VKOT, VSP);
```

> **MUK:**

> **VMUK, USOP11 := selectremove(has,USOP10,LHS(MUK)):**

> **VSP := Clis(VMUK,VSP);**

$$VSP := \left[\rho(t) = \frac{1}{q(t)} + \iota(t) - \mu, PP(t) = p_y(t) Q(t) \mu, v(t) = -\frac{1}{q(t) \mu (-1 + \eta)}, f(t) = s_r(t) R_r(t) + SB_x(t), \right. \\ \left. aQ(t) = p_y(t), aS(t) = \psi 2(t), pC(t) = -\left(\frac{d}{dt} A(t)\right) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t), R(t) = R_r(t), \right. \\ \left. sR(t) = s_r(t) R(t), NrS(t) = r_s(t) S(t), SdS(t) = NdS(t), C(t) = \frac{pC(t)}{p_y(t)}, V(t) = \mu Q(t) \right]$$

> **URA := USOP11;**

$$URA := \left[\frac{d}{dt} p_y(t) = \iota(t) p_y(t), 0 = \Omega(T) - \Omega(t0) e^{(\gamma(T-t0))}, \left[\frac{1}{q(t)} + \iota(t) - \mu \right] [A(t)], \right. \\ \left. [1 - \psi 2(t)] [NdS(t) + \beta_s S(t)], \right. \\ \left. \frac{d}{dt} A(t) = -p_y(t) Q(t) \mu - \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right) p_y(t) - NdS(t) + s_r(t) R_r(t) + r_s(t) S(t) + SB_x(t), \frac{d}{dt} S(t) = NdS(t), \right. \\ \left. \frac{d}{dt} \psi 2(t) = \left(\frac{1}{q(t)} + \iota(t) - \mu + \beta_s\right) \psi 2(t) - r_s(t) - \beta_s, \frac{d}{dt} q(t) = -1 + \left(\eta \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right) \frac{1}{Q(t)} + \Delta + \mu\right) q(t), \right. \\ \left. \Omega(t) = A(t) + p_y(t) Q(t) + \psi 2(t) S(t) \right]$$

В результате решения задачи оптимального управления мы получаем систему соотношений, описывающую поведение населения. Она для экономии места опущена. На последнем шаге работы с моделью населения мы делаем единственную операцию – приписываем всем планируемым и дополнительным переменным населения **индекс** H , который служит кратким именем агента «Население» в модели (он был задан в начале файла).

> **Indexation([iota(t)],[]);**

Равенств: 19

Неравенств: 0

УДН: 2

Переменных агента: 21

информационных переменных: 5

параметров модели: 6

Итого переменных и равенств: 21 = 21

0.120

1.061

Warning, новая переменная (или функция) гамма с размерностью 1/время

Функция, производящая индексацию, одновременно проверяет размерность и выводит краткую информацию о системе, описывающей поведение населения. В данном случае при индексации мы указываем, что величину $\iota(t)$ – темп инфляции – индексировать не надо, поскольку она одинакова для всех агентов.

П.5 Пример описания блоков ВД в системе ЭКОМОД

Описания отдельных агентов объединяются в замкнутую модель в специальном рабочем листе сборки модели – «58.mws» (см. таблицу П.1.1).

Применяемая ниже функция **SborA()** считывает файл с именем ее аргумента, созданный при исполнении файла с описанием поведения соответствующего агента. Она присоединяет индексированное описание агента к общему списку соотношений **ALL**, одновременно объединяя комментарии к переменным и создавая полный список индексов агентов **EA** и список индексов взаимодействий **IA**, упоминавшихся в ролях агентов. Процедура выдает на печать списки существенных соотношений **URA** (в данном случае вывод соотношений был скрыт), но включает в общую систему, в том числе, и выражения лишних переменных **VSP**.

Описания поведения агентов могут добавляться в общий список в произвольном порядке.

```

Производитель
> SborA(J) :
Банк
> SborA(B) :
Собственник
> SborA(C) :
Население
> SborA(H) :
Государство
> SborA(G) :
ЦБ
> SborA(CB) :
Внешняя торговля
> SborA(F) :

```

После сборки описаний агентов система ЭКОМОД позволяет вывести список всех взаимодействий, которые упоминались в этих описаниях. Это делает функция **Inters()**, вызванная без параметров.

```

> IA := Inters() ;
У переменных встречаются следующие индексы взаимодействий: [l, y, r, p, s, n,
b, w, x, g]
В заголовках ролей встречаются следующие индексы взаимодействий: [l, n, y, x,
p, s, b, w, r, g]

```

$$IA := [l, y, r, p, s, n, b, w, x, g]$$

Приведем описание только одного из блоков ВД. В файле сборки такие описания следуют подряд в произвольном порядке. Они используют либо уже знакомую функцию **Balance()**, либо специальную функцию **Ia()**, которая просто регистрирует соотношения, проверяя только общематематический синтаксис.

Рынок депозитов s

```
> Inters(s) ;
```

список соотношений роли s

$$KdS_B(t) = SdS_B(t)$$

$$rS_B(t) = r_s(t) S_B(t)$$

$$SdS_H(t) = NdS_H(t)$$

$$NrS_H(t) = r_s(t) S_H(t)$$

список переменных роли s

$$r_s(t)$$

Функция **Inters()** с индексом взаимодействия в качестве параметра выдает все ранее записанные соотношения, в которых фигурирует этот индекс. Выдача эта делается просто для справки, чтобы напомнить разработчику использованные выше обозначения. (Надо иметь в виду, что работа со сложным блоком агента может продолжаться долгое время, и за это время забываются все обозначения в других блоках).

```
> Balance(BALs, `депозиты`, `деньги`, f, 0=SdS[B](t)-SdS[H](t)) :  
    0=SdSB(t)-SdSH(t)  
  
> Balance(BAKs, `корсчет`, `деньги`, f, 0=-KdS[B](t)+NdS[H](t)) :  
    0=-KdSB(t)+NdSH(t)  
  
> Balance(BAKrs, `корсчет`, `деньги`, f, 0=rS[B](t)-NrS[H](t)) :  
    0=rSB(t)-NrSH(t)
```

Это балансы взаимодействия.

```
> Renote(S[B](t) = S(t)) :
```

Для величины объема депозитов $S[B](t)$ вводим безындexное обозначение $S(t)$ с помощью функции **Renote()**. Эта функция заменяет обозначения во всей модели в соответствии с равенствами, записанными в качестве аргументов функции. Функция **Renote()** запоминает все сделанные ею когда-либо замены и не дает обозначать разные переменные одинаково и одинаковые по-разному.

Мы обычно используем эту функцию, чтобы ввести простые безындexные обозначения для наиболее важных величин модели.

Кроме простого удобства чтения и записи, такие обозначения имеют и особый смысл в системе ЭКОМОД: безындexные величины никогда не будут исключены из системы применяемыми ниже процедурами автоматического упрощения системы уравнений модели.

По окончании описания всех блоков ВД функция **CheckBal()** системы ЭКОМОД проверяет балансы активов, упомянутых в вызовах функций **Balance()** во всех блоках модели. Она может быть вызвана без аргументов для проверки всех активов, описанных в модели, либо с названием одного конкретного актива в качестве аргумента.

Проверяется, что каждый поток, появившийся в правой части какого-либо балансового уравнения или в списке потоков группы ограничений **Tech()**, должен появиться еще ровно один раз, причем с противоположным знаком. (В балансах пассивов и списках **Tech()** знаки у потоков при проверке надо изменять на противоположные).

Проверяется также, что система балансов финансового инструмента не имеет источников и стоков (потоки не встречаются в списках **Tech()**)

В процессе проверки выводятся все балансовые уравнения: со знаком "+" для активов финансового инструмента, со знаком минус – для пассивов, без знака – для запасов материального актива.

Если обнаружится несбалансированный поток, информация о нем будет выведена вместо сообщения "OK".

Проверка балансов

> **CheckBal** (`продукт`) ;

актив : продукт

$$\left[\frac{d}{dt} Q_H(t) = C(t) - V_H(t), 0 = Y(t) - J(t) - G_s(t) - \text{Exp}_s(t) - C(t) \right]$$

OK

> **CheckBal** (`срочные ссуды`) ;

актив : срочные ссуды

$$"+", \left[\frac{d}{dt} L(t) = L dL_B(t), 0 = -L dL_B(t) + L dL_J(t) \right]$$

$$"-", \left[\frac{d}{dt} L_J(t) = L dL_J(t) \right]$$

OK

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
1 КОНЦЕПЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН	6
1.1 ХАРАКТЕР РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН 1990-2008гг. И ЕГО ОТРАЖЕНИЕ В СТАТИСТИКЕ	6
1.1.1 Качественные характеристики развития экономики Республики Казахстан 1990-2008гг.	6
1.1.2 Характеристика развития экономики республики Казахстан по имеющимся статистическим данным.....	7
1.1.3 Количественные характеристики развития экономики Республики Казахстан	8
1.2 СТРУКТУРА МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН	10
1.3 ПРЕДНАЗНАЧЕНИЕ МОДЕЛИ.....	11
2 РЕЗУЛЬТАТЫ СБОРА И ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ СТАТИСТИКИ	13
2.1 ПОКАЗАТЕЛИ РЕАЛЬНОГО СЕКТОРА И МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ	13
2.1.1 Данные по реальному сектору и необходимость их корректировки.....	13
2.1.2 Производственная функция.....	16
2.1.3 Функция спроса на импорт	17
2.1.4 Корректировка реальных показателей	18
2.2 ПОКАЗАТЕЛИ КРЕДИТНО-ДЕНЕЖНОЙ СФЕРЫ	20
2.3 ПОКАЗАТЕЛИ БЮДЖЕТНОЙ СФЕРЫ.....	23
2.4 СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ИСПОЛЬЗОВАННЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ	25
3 МЕТОДИКА И ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ	26
3.1 ПРИНЦИП РАЦИОНАЛЬНЫХ ОЖИДАНИЙ И МОДЕЛИ МЕЖВРЕМЕННОГО РАВНОВЕСИЯ	26
3.2 МОДЕЛЬ МЕЖВРЕМЕННОГО РАВНОВЕСИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ КАПИТАЛОМ.....	27
3.3 КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА МОДЕЛИ И СИСТЕМА ЭКОМОД	29
4 ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПО БЛОКАМ	31
4.1 Блок «Банк»	31
4.1.1 Функции Банка в модели.....	31
4.1.2 Ограничения деятельности Банка	32
4.1.2.1 Выдача ссуд.....	32
4.1.2.2 Привлечение депозитов	32
4.1.2.3 Проведение безналичных расчетов.....	33
4.1.2.4 Динамика резервов банка и резервные требования	33
4.1.2.5 Уплата налогов и выплата дивидендов	34
4.1.3 Целевой функционал и терминальные условия	34
4.1.3.1 Максимизация капитализации.....	34
4.1.3.2 Упрощение ограничений и условие роста капитала	35
4.1.4 Решение задачи банка	36
4.1.4.1 Условия оптимальности	36
4.1.4.2 Капитал банка и регулярное решение задачи банка.....	37
4.1.4.3 Нормировка двойственных переменных	38
4.1.4.4 Режимы	39
4.1.5 Описание поведения банка.....	39
4.2 Блок «ПРОИЗВОДИТЕЛЬ»	40
4.2.1 Функции Производителя в модели.....	40
4.2.2 Ограничения деятельности Производителя	41
4.2.2.1 Производство.....	41
4.2.2.2 Получение ссуд.....	41
4.2.2.3 Расчеты производителя и ограничения ликвидности	42
4.2.2.4 Уплата налогов и выплата дивидендов	43
4.2.3 Целевой функционал и условие роста капитала.....	43

4.2.4	Описание поведения производителя	44
4.3	Блок «НАСЕЛЕНИЕ»	46
4.3.1	Функции населения и особенности их представления в модели	46
4.3.1.1	Предложение труда населением	46
4.3.1.2	Спрос на потребительский продукт	47
4.3.1.3	Сбережения населения	47
4.3.1.4	Баланс доходов и расходов населения	47
4.3.1.5	Предложение труда	48
4.3.2	Упрощение ограничений, терминальное условие и условия оптимальности	48
4.3.3	Описание поведения населения	49
4.4	Блок «СОБСТВЕННИК»	51
4.4.1	Функции собственника в модели	51
4.4.2	Ограничения деятельности собственника	52
4.4.2.1	Управление капиталом банка	52
4.4.2.2	Управление капиталом производителя	53
4.4.2.3	Балансы денег и валюты (иностранных активов)	53
4.4.2.4	Целевой функционал собственника	53
4.4.3	Решение задачи собственника	54
4.4.4	Описание поведения собственника	56
4.5	ОПИСАНИЯ МЕХАНИЗМОВ ГОСУДАРСТВЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ, ВНЕШНЕЙ ТОРГОВЛИ И МЕЖДУНАРОДНОГО СОТРУДНИЧЕСТВА	58
4.5.1	Принципы описания механизмов управления в модели	58
4.5.2	Блок «Государство»	58
4.5.3	Блок «Центральный банк» (ЦБ)	60
4.5.3.1	Функции ЦБ в модели	60
4.5.3.2	Описание операций ЦБ	62
4.5.3.3	Упрощение модели ЦБ и баланс ЦБ в остатках	63
4.5.3.4	Описание деятельности ЦБ	63
4.5.4	Блок «Экспортер»	64
4.5.4.1	Функции экспортера в модели	64
4.5.4.2	Описание деятельности Экспортера	65
4.5.5	Блок «Импортер»	66
4.6	ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ АГЕНТОВ	68
4.6.1	Рынок продукта y	69
4.6.2	Рынок труда r	69
4.6.3	Рынок кредитов l	70
4.6.4	Рынок депозитов s	70
4.6.5	Рынок валюты w	70
4.6.6	Размещение внутреннего государственного долга g	71
4.6.7	Уплата налогов и выплата субсидий x	71
4.6.8	Проведение платежей и расчетов p	72
4.6.9	Управление капиталом Банка b	72
4.6.10	Управление капиталом Производителя p	72
5	РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЕ ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ	73
5.1	СБОРКА И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОДЕЛИ	73
5.2	ОПИСАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ И УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ	75
6	АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ	78
6.1	АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И СБАЛАНСИРОВАННЫЙ РОСТ	78
6.2	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ НА АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ	80
6.3	АЛГОРИТМ РАСЧЕТА И ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ	81
6.3.1	Нормировка и отбрасывание краевых условий	81
6.3.2	Переход к дискретному времени и гомотопия экзогенных переменных	81
6.3.3	Поиск решения с идентификацией граничных условий	83

6.4	ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕДУРЫ РАСЧЕТА МОДЕЛИ МЕЖВРЕМЕННОГО РАВНОВЕСИЯ.....	84
7	РЕЗУЛЬТАТЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛИ.....	85
7.1	РЕЗУЛЬТАТЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ.....	85
7.1.1	Временной интервал для расчета модели и базовый прогноз экзогенных переменных.....	85
7.1.2	Значения идентифицированных параметров и результаты идентификации по выходным переменным.....	87
7.2	УСТОЙЧИВОСТЬ АЛГОРИТМА ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ.....	92
7.3	ПОСТАНОВКА И РЕЗУЛЬТАТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МОДЕЛИ К ИЗМЕНЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ.....	92
8	ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ.....	93
8.1	СБАЛАНСИРОВАННЫЙ РОСТ ЭКОНОМИКИ КАЗАХСТАНА.....	93
8.2	ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА (СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИКА).....	96
8.2.1	Влияние субсидий населению: эффект мультипликатора.....	97
8.2.2	Влияние депозитов нерезидентов: «голландская болезнь».....	98
8.2.3	Влияние численности занятого населения на сбалансированный рост: нелинейные эффекты.....	101
8.2.4	Влияние налоговой нагрузки на сбалансированный рост: бифуркации.....	103
8.3	АНАЛОГ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ.....	105
8.3.1	Модель макроэкономического равновесия IS-LM.....	105
8.3.2	Аналог IS-LM равновесия в модели сбалансированного роста экономики Казахстана.....	106
9	РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОГНОЗНЫХ РАСЧЕТОВ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВОЗМОЖНЫХ СЦЕНАРИЕВ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ.....	110
9.1	ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ МОДЕЛИ К ИЗМЕНЕНИЮ ЭКЗОГЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ ИЗ ГОРИЗОНТА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ.....	110
9.2	ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВОЗМОЖНЫХ СЦЕНАРИЕВ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ.....	112
9.2.1	Влияние увеличения субсидий населению.....	112
9.2.2	Влияние увеличения депозитов нерезидентов.....	116
9.2.3	Влияние увеличения численности занятых.....	120
9.2.4	Влияние увеличения государственных расходов.....	123
9.2.5	Влияние роста экспорта.....	126
9.2.6	Влияние валютного курса.....	129
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	132
	ЛИТЕРАТУРА.....	133
	ПРИЛОЖЕНИЕ П. ЛИСТИНГ И ИНСТРУКЦИЯ ПО РАБОТЕ С МОДЕЛЬЮ.....	135
П.1	СРЕДА РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ.....	135
П.2	ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЭКОМОД.....	137
П.3	ИНСТРУКЦИИ ПО ОСУЩЕСТВЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПРОГРАММНОГО ПРОДУКТА.....	139
П.4	ПРИМЕР ОПИСАНИЯ БЛОКА ЭКОНОМИЧЕСКОГО АГЕНТА В СИСТЕМЕ ЭКОМОД.....	141
П.5	ПРИМЕР ОПИСАНИЯ БЛОКОВ ВД В СИСТЕМЕ ЭКОМОД.....	157
	ОГЛАВЛЕНИЕ.....	161