ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2011, № 3, с. 13–22

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 681.511.4

СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ, ЛИНЕАРИЗУЕМЫМ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ*

© 2011 г. В. Н. Афанасьев, П. В. Орлов
Москва, МИЭМ

Поступила в редакцию 09.11.10 г.

Для класса нелинейных систем, для которых существует координатное представление (диффеоморфизм), преобразующее исходную систему в систему с линейной основной частью и нелинейной обратной связью, ставится задача оптимального управления. При этом координатное преобразование существенно изменяет вид исходного квадратичного функционала. Матрицы штрафа становятся зависимыми от состояния системы. Линейность структуры преобразованной системы и квадратичный функционал позволяют при синтезе управления осуществить переход от уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Отметим, что решить уравнение Риккати в полученном виде в общем случае аналитически невозможно. Возникает необходимость в аппроксимации решения, которая реализуется численными методами с использованием пакетов символьного программного обеспечения или интерполяционными методами. В последнем случае удается получить субоптимальное управление. Приведенный пример иллюстрирует использование предлагаемого метода управления нелинейной системы, линеаризуемой обратной связью.

Введение. Поведение нелинейных систем не может быть описано линейными функциями состояния или линейными дифференциальными уравнениями. Для линейных систем существует мощный и удобный математический аппарат, позволяющий проводить их анализ и синтез, однако все эти методы неприменимы или ограниченно применимы для нелинейных систем. Одним из методов синтеза нелинейных систем управления является метод, основанный на линеаризации системы обратной связью, с последующим использованием аппарата функций Ляпунова [1]. Отдельно стоит отметить метод управления нелинейными объектами на основе итеративных процедур поиска условий выполнения нелинейных неравенств (неравенство Гамильтона–Якоби–Беллмана, неравенство Риккати [2–5]).

В работе на основе линеаризации нелинейной системы обратной связью будет построен субоптимальный метод управления с точки зрения функционала качества системы; будет рассмотрено, что происходит с функционалом качества при линеаризации, а также что произойдет с системой при наличии возмущения и как синтезировать управление в этом случае.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную стационарную систему, у которой m входов и n состояний

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i = f(x) + g(x)u, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$, $f(0) = 0$ и $f, g_1, \ldots, g_m$ – гладкие (C^∞) векторные поля, определенные на открытом множестве U_x, содержащем начало. Если система (1.1) линеаризуема на U_x [6], то существует координатное преобразование (диффеоморфизм) $z = \Phi(x)$, определенное на U_x, и пара функций обратной связи $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, также определенных на U_x, такие, что $\beta(x)$ – невырожденная для любого $x \in U_x$ и

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(f(x) + g(x)\alpha(x))\right]_{x = \Phi^{-1}(z)} = A_0 z, \tag{1.2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-08-00677).

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(g(x)\beta(x))\right]_{x = \Phi^{-1}(z)} = B_0, \tag{1.3}$$

где

$$A_0 = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_m), \quad B_0 = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_m), \tag{1.4}$$

$$A_i \in R^{d_i \times d_i}, \quad b_i \in R^{d_i \times 1},$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.5}$$

и $\sum_{i=1}^{m} d_i = n.$

В этом случае, применив закон обратной связи

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{1.6}$$

к системе (1.1), где $v = (v_1, \ldots, v_m)$ – новый вектор входа, совместно с преобразованием координат $z = \Phi(x)$, получим

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + B_0 v, \\ z(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Запишем систему с помехой

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} g_i(x)u_i + \sum\limits_{j=1}^{k} h_j(x)w_j, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

здесь $w^{\mathrm{T}} = (w_1, \ldots, w_k)$ – неизвестное возмущение, $h_1, \ldots, h_k$ – гладкие (C^∞) векторные поля, определенные на U_x. Перепишем систему (1.8) в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u + h(x)w, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Синтез управления для объекта (1.9) может быть проведен в постановке задачи дифференциальной игры, если возмущение w интерпретировать как антагонистическое управление.

Рассматривая задачу синтеза закона управления как дифференциальную игру двух игроков U и W на интервале $[0, T]$ [7] введем функционал

$$J(x, u, w) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{T}} \left\{ x^T(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) - w^{\mathrm{T}}(t)Pw(t) \right\} dt. \tag{1.10}$$

Здесь матрица Q может быть положительно полуопределенной; матрицы R, P – положительно определенные.

Применяя закон обратной связи $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ к системе (1.9), совместно с преобразованием координат $z = \Phi(x)$ получим

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + B_0 v + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} h(x)\right]_{x = \Phi^{-1}(z)} w, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Обозначим

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}h(x)\right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = D(z).$$

Тогда система (1.11) примет вид

$$\begin{cases}\dot{z} = A_0 z + B_0 v + D(z)w,\\ z(0) = z_0.\end{cases} \tag{1.12}$$

Координатное преобразование $z = \Phi(x)$ и закон обратной связи (1.6) осуществляет переход от исходной нелинейной системы (1.9) к системе (1.12), имеющей линейную структуру, но с параметрами, зависящими от состояния. Учитывая, что цели управления остались теми же самыми, следует произвести соответствующее преобразование функционала качества (1.10). Поставив (1.6) в (1.10), будем иметь

$$\begin{gathered}\tilde{J}(z,v) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\Big\{(\Phi^{-1}(z))^{\mathrm{T}}Q\Phi^{-1}(z) + \\ + (\alpha(\Phi^{-1}(z)) + \beta(\Phi^{-1}(z))v)^{\mathrm{T}}R(\alpha(\Phi^{-1}(z)) + \beta(\Phi^{-1}(z))v) - w^{\mathrm{T}}Pw\Big\}\,dt.\end{gathered} \tag{1.13}$$

Из этой записи видно, что линеаризация системы ведет к нелинейным моделям функционала качества. Раскроем скобки

$$\begin{gathered}(\alpha(\Phi^{-1}(z)) + \beta(\Phi^{-1}(z))v)^{\mathrm{T}}R(\alpha(\Phi^{-1}(z)) + \beta(\Phi^{-1}(z))v) = \alpha^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\alpha(\Phi^{-1}(z)) + \\ + v^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\beta(\Phi^{-1}(z))v + 2\alpha^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\beta(\Phi^{-1}(z))v.\end{gathered}$$

Введем ряд обозначений

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_1(\Phi^{-1}(z))}{n\cdot z_1} & \dots & \dfrac{\alpha_1(\Phi^{-1}(z))}{n\cdot z_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\alpha_m(\Phi^{-1}(z))}{n\cdot z_1} & \dots & \dfrac{\alpha_m(\Phi^{-1}(z))}{n\cdot z_n}\end{bmatrix} = \theta(z), \tag{1.14}$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\Phi_1^{-1}(z)}{n\cdot z_1} & \dots & \dfrac{\Phi_1^{-1}(z)}{n\cdot z_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\Phi_n^{-1}(z)}{n\cdot z_1} & \dots & \dfrac{\Phi_n^{-1}(z)}{n\cdot z_n}\end{bmatrix} = \zeta(z), \tag{1.15}$$

$$\zeta(z)Q\zeta(z) + \theta^{\mathrm{T}}(z)R\theta(z) = Q(z), \tag{1.16}$$

$$\theta^{\mathrm{T}}(z)R\beta(\Phi^{-1}(z)) = N(z), \tag{1.17}$$

$$\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\beta(\Phi^{-1}(z)) = R(z). \tag{1.18}$$

С такими обозначениями функционал принимает вид:

$$\tilde{J}(z,v) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\Big\{z^{T}Q(z)z + v^{\mathrm{T}}R(z)v + 2z^{\mathrm{T}}N(z)v - w^{\mathrm{T}}Pw\Big\}\,dt. \tag{1.19}$$

Как видим, матрицы $Q(z)$, $R(z)$ и $N(z)$ зависят от состояния системы (1.12). Начальная задача управления объектом (1.9) с функционалом качества (1.10) преобразована к задаче синтеза управляющих воздействий для объекта (1.12) с функционалом (1.19). В этой постановке задача относится к классу задач, в которых параметры системы зависят от состояния системы.

Впервые проблема управления нелинейными объектами с их представлением в виде линейных моделей с параметрами, зависящими от состояния (State Dependent Coefficient, SDC), и функционалами, матрицы штрафа которых также зависят от состояния объекта, была сформулирована в начале 1960-х годов в публикации [7]. Разработка предложенного метода была продолжена и с конца 1990-х годов метод привлекает все большее внимание со стороны ученых и практиков. Дело в том, что преобразование исходного нелинейного дифференциального уравнения, которое описывает исходную систему управления, в систему с линейной структурой, но с параметрами, зависящими от состояния, и использование квадратичного функционала качества позволяют при синтезе управления осуществить переход от уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Это и составляет основу метода синтеза оптимальных нелинейных систем управления (State Dependent Riccati Equations, SDRE). Неоднозначность представления нелинейной системы в виде системы линейной структуры, но с параметрами, зависящими от состояния, отсутствие достаточно универсальных алгоритмов решения уравнения Риккати, параметры которого также зависят от состояния, порождают множество возможных субоптимальных решений.

2. Синтез управления. Используя функционал (1.19), запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана [8]

$$\begin{aligned}&\inf_{v\in V}\sup_{w\in W}\left[\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}+\frac{\partial V(z,t)}{\partial z}(A_0z+B_0v+D(z)w)+\right.\\&\left.+\frac{1}{2}(z^{\mathrm T}Q(z)z+v^{\mathrm T}R(z)v+2z^{\mathrm T}N(z)v-w^{\mathrm T}Pw)\right]=0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $V(z,t)$ – функция Беллмана. Граничное условие в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана отсутствует, так как время окончания переходного процесса не фиксировано. Кроме того, учитывая инвариантность во времени матриц системы (1.12), $\dfrac{\partial V(z,t)}{\partial t}=0$.

Перепишем (2.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\inf_{v\in V}\sup_{w\in W}\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}A_0z+\frac{1}{2}v^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T}\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}+\frac{1}{2}v^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T}\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}+\right.\\&+\frac{1}{2}w^{\mathrm T}D^{\mathrm T}(z)\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}+\frac{1}{2}w^{\mathrm T}D^{\mathrm T}(z)\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}+\frac{1}{2}z^{T}Q(z)z+\\&\left.+\frac{1}{2}v^{\mathrm T}R(z)v+\frac{1}{2}v^{\mathrm T}N^{\mathrm T}(z)z+\frac{1}{2}v^{\mathrm T}N^{\mathrm T}(z)z-\frac{1}{2}w^{\mathrm T}Pw\right]=0.\end{aligned}$$

Вынесем v^T и w^T за скобки

$$\begin{aligned}&\inf_{v\in V}\sup_{w\in W}\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}A_0z+\frac{1}{2}v^{\mathrm T}\left\{B_0^{\mathrm T}\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}+R(z)v+Ne(z)z\right\}+\right.\\&\left.+\frac{1}{2}w^{\mathrm T}\left\{D^{\mathrm T}(z)\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}-Pw\right\}+\frac{1}{2}z^{T}Q(z)z++\frac{1}{2}v^{\mathrm T}N^{\mathrm T}(z)z\right]=0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Назначим управляющие воздействия в виде

$$\begin{aligned}&v=-R^{-1}(z)\left\{B_0^{\mathrm T}\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}+N^{\mathrm T}(z)z\right\},\\&w=P^{-1}D^{\mathrm T}(z)\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Тогда уравнение (2.2) запишется как

$$\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}A_0z+\frac{1}{2}v^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T}\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}+\frac{1}{2}w^{\mathrm T}D^{\mathrm T}(z)\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm T}z+\frac{1}{2}v^{\mathrm T}N^{\mathrm T}(z)z+\frac{1}{2}z^{\mathrm T}Q(z)=0.\tag{2.4}$$

Таким образом, управления (2.3) организованы по принципу обратной связи, где $\partial V(z)/\partial z$ является решением уравнения (2.4). Определим $\partial V(z)/\partial z$ как

$$\left[\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right]^{\mathrm{T}} = S(z)z. \tag{2.5}$$

Перепишем (2.3) с учетом (2.5)

$$\begin{gathered} v = -R^{-1}(z)\left\{B_0^{\mathrm{T}} S(z) + N^{\mathrm{T}}(z)z\right\}, \\ w = P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z)S(z)z. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Выражение (2.4) становится уравнением Риккати

$$\begin{gathered} S(z)A_0 + A_0^{\mathrm{T}}S(z) - \left[R^{-1}(z)(B_0^{\mathrm{T}}S(z) + N^{\mathrm{T}}(z))\right]^{\mathrm{T}} B_0^{\mathrm{T}}S(z) + \\ -\left[R^{-1}(z)(B_0^{\mathrm{T}}S(z) + N^{\mathrm{T}}(z))\right]^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}}(z) + \left[P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z)S(z)\right]^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}}(z)S(z) + Q(z) = 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Перепишем (2.7)

$$S(z)A_0 + A_0^{\mathrm{T}}S(z) - \left[B_0^{\mathrm{T}}S(z) + N^{\mathrm{T}}(z)\right]^{\mathrm{T}} R^{-1}(z)\left[B_0^{\mathrm{T}}S(z) + N^{\mathrm{T}}(z)\right] + S(z)D(z)P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z)S(z) + Q(z) = 0 \tag{2.8}$$

и раскроем выражение в квадратных скобках

$$\begin{gathered} \left[B_0^{\mathrm{T}}S(z) + N^{\mathrm{T}}(z)\right]^{\mathrm{T}} R^{-1}(z)\left[B_0^{\mathrm{T}}S(z) + N^{\mathrm{T}}(z)\right] = S(z)B_0R^{-1}(z)B_0^{\mathrm{T}}S(z) + N(z)R^{-1}(z)N^{\mathrm{T}}(z) + \\ + S(z)B_0R^{-1}(z)N^{\mathrm{T}}(z) + N(z)R^{-1}(z)B_0^{\mathrm{T}}S(z). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Тогда уравнение Риккати становится следующим:

$$\begin{gathered} S(z)(A_0 - B_0R^{-1}(z)N^{\mathrm{T}}(z)) + (A_0 - B_0R^{-1}(z)N^{\mathrm{T}}(z))^{\mathrm{T}}S(z) - \\ - S(z)\left[B_0R^{-1}(z)B_0^{\mathrm{T}} - D(z)P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z)\right]S(z) + Q(z) - N(z)R^{-1}(z)N^{\mathrm{T}}(z) = 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Отметим, что матрицы R и Р должны задаваться так, чтобы матрица $M = B_0R^{-1}(z)\,B_0^{\mathrm{T}} - D(z)P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z)$ была бы, по крайней мере, положительно полуопределенной. Учитывая обозначения (1.16) и (1.17), произведение $R^{-1}(z)N^{\mathrm{T}}(z)$ может быть записано в виде

$$R^{-1}(z)N^{\mathrm{T}}(z) = \beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))R^{-1}(\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z)))^{-1}\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\theta(z) = \beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))\theta(z). \tag{2.11}$$

Разность $Q(z) - N(z)R^{-1}(z)N^{\mathrm{T}}(z)$ также можно преобразовать, принимая во внимание (1.16), (1.17) и (1.18)

$$\begin{gathered} Q(z) - N(z)R^{-1}(z)N^{\mathrm{T}}(z) = \zeta(z)Q\zeta(z) + \theta^{\mathrm{T}}(z)R\theta(z) - \theta^{\mathrm{T}}(z)R\beta(z)\beta^{-1}(z)R^{-1}(\beta^{\mathrm{T}}(z))^{-1}\beta^{\mathrm{T}}(z)R\theta(z) = \\ = \zeta(z)Q\zeta(z) + \theta^{\mathrm{T}}(z)R\theta(z) - \theta^{\mathrm{T}}(z)R\theta(z) = \zeta(z)Q\zeta(z). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Уравнение Риккати (2.10) с учетом (2.11) и (2.12) запишется как

$$\begin{gathered} S(z)(A_0 - B_0\beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))\theta(z)) + (A_0 - B_0\beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))\theta(z))^{\mathrm{T}}S(z) - \\ - S(z)\left[B_0R^{-1}(z)B_0^{\mathrm{T}} - D(z)P^{-1}(z)D^{\mathrm{T}}(z)\right]S(z) + \zeta(z)Q\zeta(z) = 0. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Произведение $N^{\mathrm{T}}(z)z$, привлекая (1.14) и (1.17), выражается как

$$N^{\mathrm{T}}(z)z = \beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\theta(z)z = \beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\alpha(\Phi^{-1}(z)). \tag{2.14}$$

Тогда управление v, учитывая (1.18), (2.5) и (2.14), можно представить как

$$\begin{gathered} v = R^{-1}(z)\left[B_0^{\mathrm{T}}S(z) + N^{\mathrm{T}}(z)\right]z = \beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))R^{-1}(\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z)))^{-1}B_0^{\mathrm{T}}S(z)z + \\ + \beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))R^{-1}(\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z)))^{-1}\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z)))R\alpha(\Phi^{-1}(z)) = \\ = \beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))R^{-1}(\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z)))^{-1}B_0^{\mathrm{T}}S(z)z + \beta^{-1}(\Phi^{-1}(x))\alpha(\Phi^{-1}(z)). \end{gathered} \tag{2.15}$$

Возвращаясь к системе (1.9), произведем обратную подстановку в законе обратной связи (1.6)

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = \alpha(x) - \beta(x)\left[\beta^{-1}(x)R^{-1}(\beta^{\mathrm T}(x))^{-1}B_0^{\mathrm T}S(\Phi(x))\Phi(x) + \beta^{-1}(x)\alpha(x)\right] =$$
$$= \alpha(x) - R^{-1}(\beta^{\mathrm T}(x))^{-1}B_0^{\mathrm T}S(\Phi(x))\Phi(x) - \alpha(x) = -R^{-1}(\beta^{\mathrm T}(x))^{-1}B_0^{\mathrm T}S(\Phi(x))\Phi(x). \quad (2.16)$$

Таким образом, оптимальное управление для системы (1.9) определяется выражением

$$u = -R^{-1}(\beta^{\mathrm T}(x))^{-1}B_0^{\mathrm T}S(\Phi(x))\Phi(x), \quad (2.17)$$

где $z = \Phi(x)$ – диффеоморфизм, а матрица $S(\Phi(x)) = S(z)$ является решением уравнения Риккати (2.13). Следует отметить, что структура полученного управления (2.16) напоминает структуру оптимального управления для линейных систем

$$u = -R^{-1}B^{\mathrm T}Sx. \quad (2.18)$$

Вернемся к уравнению (2.13). Заметим, что в матрицах $\theta(z)$ и $\zeta(z)$, входящих в это уравнение, как следует из (1.14) и (1.15), z_i присутствует в знаменателях элементов этих матриц. Рассмотрим вопрос о синтезе управления при $z_i = 0$ $(\forall i : i = 1, \ldots, n)$. Пусть деление на ноль происходит в точках $z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_l}$. Обозначим через $\tilde\theta(z)$ и $\tilde\zeta(z)$ следующие матрицы:

$$\tilde\theta(z) = \begin{bmatrix} \prod\limits_{i=1}^{l}(1-\delta_{1,k_i})\dfrac{\alpha_1(\Phi^{-1}(z))}{(n-l)\cdot z_1} & \cdots & \prod\limits_{i=1}^{l}(1-\delta_{n,k_i})\dfrac{\alpha_1(\Phi^{-1}(z))}{(n-l)\cdot z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod\limits_{i=1}^{l}(1-\delta_{1,k_i})\dfrac{\alpha_m(\Phi^{-1}(z))}{(n-l)\cdot z_1} & \cdots & \prod\limits_{i=1}^{l}(1-\delta_{n,k_i})\dfrac{\alpha_m(\Phi^{-1}(z))}{(n-l)\cdot z_n} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\tilde\zeta(z) = \begin{bmatrix} \prod\limits_{i=1}^{l}(1-\delta_{1,k_i})\dfrac{\Phi_1^{-1}(z)}{(n-l)\cdot z_1} & \cdots & \prod\limits_{i=1}^{l}(1-\delta_{n,k_i})\dfrac{\Phi_1^{-1}(z))}{(n-l)\cdot z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod\limits_{i=1}^{l}(1-\delta_{1,k_i})\dfrac{\Phi_n^{-1}(z)}{(n-l)\cdot z_1} & \cdots & \prod\limits_{i=1}^{l}(1-\delta_{n,k_i})\dfrac{\Phi_n^{-1}(z)}{(n-l)\cdot z_n} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Здесь δ – символ Кронекера. Уравнение Риккати при подстановке матриц (2.19) и (2.20) вместо $\theta(z)$ и $\zeta(z)$примет вид

$$S(z)(A_0 - B_0\beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))\tilde\theta(z)) + (A_0 - B_0\beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))\tilde\theta(z))^{\mathrm T}S(z) -$$
$$- S(z)\left[B_0R^{-1}(z)B_0^{\mathrm T} - D(z)P^{-1}(z)D^{\mathrm T}(z)\right]S(z) + \tilde\zeta(z)Q\tilde\zeta(z) = 0 \quad (2.21)$$

и будет определено для любого z. Справедливость такой замены будет показана в следующем разделе путем исследования устойчивости системы при синтезированном управлении.

Стоит отметить, что решить уравнения Риккати в виде (2.21) при синтезе управления в общем случае аналитически невозможно. Возникает необходимость в аппроксимации решения, которая реализуется численными методами с использованием пакетов символьного программного обеспечения или интерполяционными методами [9]. Точность аппроксимации зависит от производительности ЭВМ, а потому при практической реализации можно говорить лишь о субоптимальности полученного метода.

3. Анализ устойчивости. При исследовании устойчивости системы воспользуемся вторым методом Ляпунова. Функция $\tilde V(x) = 2V(x)$, где $V(x)$ – функция Беллмана для системы (1.9) и функционала качества (1.10), является функцией Ляпунова. Пусть $\omega_i\{|x|\}$, $i = 1,2,3,$ – скалярные неубывающие функции, такие, что $\omega_i(0) = 0$, $\omega_i\{|x|\} > 0$ при $x \neq 0$. Функция $\tilde V(x)$ удовлетворяет условию $\omega_1\{|x|\} \le \tilde V(x) \le \omega_2\{|x|\}$, $\forall x$. Из второй теоремы Ляпунова следует, что если будет доказано

$$\frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\dot{x} \le -\omega_3\{|x|\}, \tag{3.1}$$

то система устойчива. Производную функции Беллмана по координате можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial V(x)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 2\frac{\partial V(z)}{\partial z}\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}. \tag{3.2}$$

Управление u в (2.16) определено $\forall x$, в то время как управление v в виде (2.6) не определено в точках $z_i = 0\ (\forall i : i = 1, \ldots, n)$. Доопределим управление v для корректного применения закона обратной связи (1.6), записав его как

$$v = -R^{-1}(z)\left(B_0^{\mathrm{T}}S(z)z + \beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\alpha(\Phi^{-1}(z))\right). \tag{3.3}$$

Теперь воспользуемся (1.6), а также соотношениями (1.2), (1.3)

$$\frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\dot{x} = 2\frac{\partial V(z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x}\left[f(x) + g(x)u + h(x)w\right] = 2\frac{\partial V(z)}{\partial z}\left[A_0 z + B_0 v + D(z)w\right]. \tag{3.4}$$

Подставим в (3.4) управление w, определяемое в (2.6), совместно с (2.4) и (3.3)

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial V(z)}{\partial z}\left[A_0 z + B_0 v + D(z)w\right] &= 2z^{\mathrm{T}}S(z)\left[A_0 - B_0R^{-1}(z)B_0^{\mathrm{T}}S(z) + D(z)P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z)S(z)\right]z - \\ &- 2z^{\mathrm{T}}S(z)B_0R^{-1}(z)\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\alpha(\Phi^{-1}(z)). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Перепишем последнее слагаемое правой части уравнения (3.5) в виде

$$\begin{aligned} -2z^{\mathrm{T}}S(z)B_0R^{-1}(z)\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\left[\alpha(\Phi^{-1}(z)) + \tilde{\theta}(z)z - \tilde{\theta}(z)z\right] &= -2z^{\mathrm{T}}S(z)B_0R^{-1}(z)\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\tilde{\theta}(z)z + \\ &+ 2z^{\mathrm{T}}S(z)B_0R^{-1}(z)\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\left[\tilde{\theta}(z)z - \alpha(\Phi^{-1}(z))\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Заметим, $\left[\tilde{\theta}(z)z - \alpha(\Phi^{-1}(z))\right] = 0$ всегда, кроме случая $z \equiv 0$, следовательно

$$2z^{\mathrm{T}}S(z)B_0R^{-1}(z)\beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\left[\tilde{\theta}(z)z - \alpha(\Phi^{-1}(z))\right] = 0.$$

Таким образом, уравнение (3.5) принимает вид

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial V(z)}{\partial z}\left[A_0 z + B_0 v + D(z)w\right] = \\ &= 2z^{\mathrm{T}}S(z)\left[A_0 - B_0R^{-1}(z)\left[B_0^{\mathrm{T}}S(z) + \beta^{\mathrm{T}}(\Phi^{-1}(z))R\tilde{\theta}(z)\right] + D(z)P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z)S(z)\right]z. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Преобразуем (3.7), учитывая (1.18):

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial V(z)}{\partial z}\left[A_0 z + B_0 v + D(z)w\right] &= z^{\mathrm{T}}\Big[S(z)(A_0 - B_0\beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))\tilde{\theta}(z)) + (A_0 - B_0\beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))\tilde{\theta}(z))^{\mathrm{T}}S(z) - \\ &- 2S(z)\left[B_0R^{-1}(z)B_0^{\mathrm{T}} + D(z)P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z)\right]S(z)\Big]z. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Пусть $\omega_3\{|x|\} = \omega_3\{|\Phi^{-1}(z)|\} = z^{\mathrm{T}}\tilde{\zeta}(z)Q\tilde{\zeta}(z)z$. После всех преобразований, (3.1) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} &z^{\mathrm{T}}\Big[S(z)(A_0 - B_0\beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))\tilde{\theta}(z)) + (A_0 - B_0\beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))\tilde{\theta}(z))^{\mathrm{T}}S(z) - \\ &- 2S(z)\left[B_0R^{-1}(z)B_0^{\mathrm{T}} + D(z)P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z)\right]S(z)\Big]z \le z^{\mathrm{T}}\tilde{\zeta}(z)Q\tilde{\zeta}(z)z. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Если перенести правую часть влево, то внутри квадратных скобок можно выделить уравнение Риккати, подобное (2.13), и тогда (3.9) упрощается:

$$-z^{\mathrm{T}}S(z)\left[B_0R^{-1}(z)B_0^{\mathrm{T}} - D(z)P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z)\right]S(z)z \le 0. \tag{3.10}$$

Это неравенство выполняется $\forall z$, так как матрицы R и P назначались так, чтобы

$$B_0R^{-1}(z)B_0^{\mathrm{T}} + D(z)P^{-1}D^{\mathrm{T}}(z) \geq 0, \; z \neq 0. \tag{3.11}$$

Назначение матриц штрафа функционала качества, при которых выполняется условие (3.11), обеспечивает устойчивость системы управления с синтезированными управляющими воздействиями.

Пример. Динамика синхронного генератора [1] в установившемся режиме может быть задана динамической системой вида (1.9)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} g_i(x)u_i = f(x) + g(x)u, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

где

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -p\left[(1+x_3)\sin(x_1+d) - \sin d\right] - qx_2 \\ -rx_3 + s\left[\cos(x_1+d) - \cos d\right] \end{bmatrix},$$

$$g(x) = h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

p, q, r, s, d — действительные параметры. Координатное преобразование для этой системы

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -p\left[(1+x_3)\sin(x_1+d) - \sin d\right] - qx_2 \end{bmatrix},$$

совместно с функциями обратной связи

$$\alpha(x) = \frac{-px_2(1+x_3)\cos(x_1+d) - pq\sin d + q^2x_2}{p\sin(x_1+d)} + q(1+x_3) + rx_3 - s\left[\cos(x_1+d) - \cos d\right]$$

и

$$\beta(x) = -\frac{1}{p\sin(x_1+d)},$$

образуют систему

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0z + B_0v + D(z)w, \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Матрицы $A_0, B_0, D(z)$ будут иметь вид

$$A_0 = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$D(z) = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot h(x)\right]_{x = \Phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p\sin(z_1+d) \end{bmatrix}$$

для всех $x \in U_x = \{x : 0 < x_1 + d < \pi\}$. В этом случае $U_z = \Phi(U_x) = \{x : 0 < z_1 + d < \pi\}$.

Моделирование произведено в среде Simulink [7] пакета MATLAB при параметрах объекта

$$p = 136.0544, \quad q = 4, \quad r = 0.4091, \quad s = 0.2576, \quad d = \pi/4,$$

начальных условиях

$$x(0) = (1\,18 - 9)^{\mathrm{T}}$$

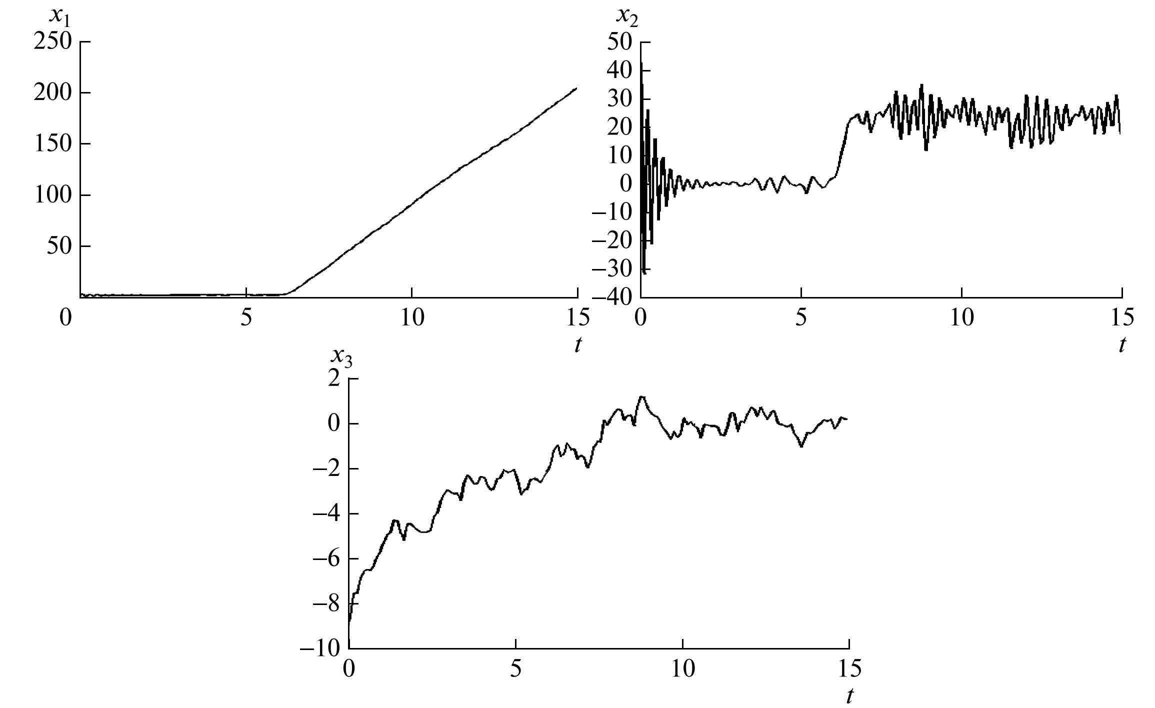

Рис. 1. График состояния x_1, x_2, x_3 при отсутствии управления

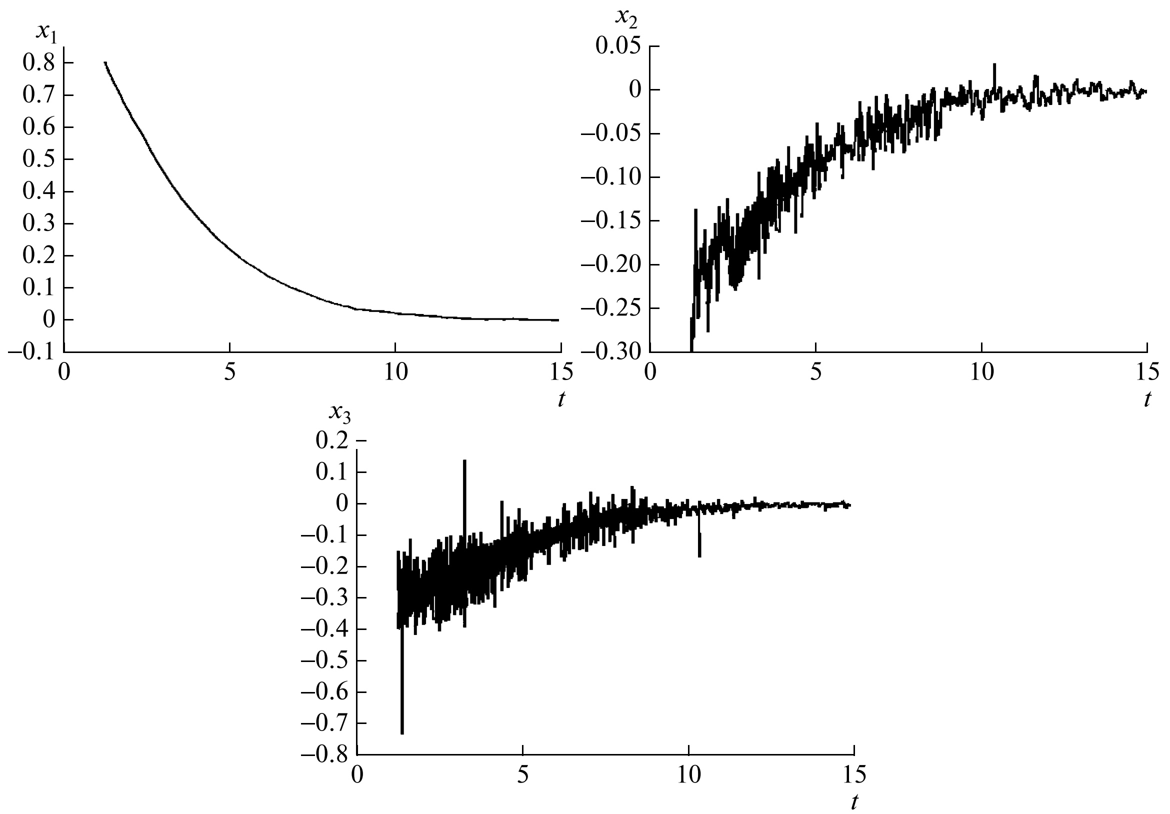

Рис. 2. График состояния x_1, x_2, x_3 при управляющем воздействии

и весовых матрицах

$$Q = \mathrm{diag}(|x_1(0)|, \quad |x_2(0)|, |x_3(0)|), \quad R = 0.0001, \quad P = 1000.$$

В качестве помехи w использовался белый шум интенсивности $W = 1$.

При отсутствии управления получены графики состояний x_1, x_2, x_3 системы, приведенные на рис. 1.

Как видно из этих графиков, при отсутствии управления система неустойчива. Ниже представлены графики состояний при подаче управляющего сигнала (рис. 2).

Графики на рис. 2 говорят об успешной стабилизации объекта при управляющем воздействии.

Заключение. Для нелинейных систем, линеаризуемых обратной связью, с помехой построен субоптимальный метод управления с точки зрения функционала качества системы. Был промоделирован объект, характеризующий динамику синхронного генератора при наличии помехи, результаты которого продемонстрировали эффективность разработанного метода.

Проведенное исследование изменения функционала качества при линеаризации динамической системы говорит о том, что линейная модель системы, полученной в результате преобразования координат совместно с законом обратной связи, влечет за собой нелинейность этого функционала. Один из вариантов дальнейшего изучения может быть сформулирован как задача линеаризации исходного квадратичного функционала качества с весовыми матрицами, зависящими от состояния, или задача с фиксированным временем окончания переходного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fontenla F., Haimovich H., Kofman E. et al.* Control design with guaranteed ultimate bound for feedback linearizable systems // Proc. 17th World Congress IFAC. Seoul, Korea, 2008. P. 242–247.
2. *Суботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
3. *Fong Y., Rotkovitz M., Anderson B.* An iterative procedure to solve HJBI equations in nonlinear H_∞ control // Proc. 17th World Conf. IFAC. Seoul, Korea, 2008. P. 200–205.
4. *Афанасьев В.Н.* Концепция гарантированного управления в задачах управления неопределенным объектом // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 1. С. 24–31.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Оптимальное гашение колебаний высотных сооружений при сейсмических воздействиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 5. С. 60–66.
6. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. 3rd edition. London: Springer, 1995. 564 p.
7. *Person J.D.* Approximation methods in optimal control // J. Electronics and Control. 1962. V. 12. P. 453–469.
8. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 615 с.
9. *Герман-Галкин С. Г.* Matlab & Simulink. Проектирование мехатронных систем. СПб: Корона-Век, 2008.