ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Е.В. Панов, А.С.Шведов

УКОРОЧЕНИЕ НАБОРА ВЕСОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ КВАДРАТИЧЕСКОМУ СПЕКТРАЛЬНОМУ ОКНУ, ПРИ ОЦЕНКЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Препринт WP2/2008/01
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Москва
ГУ ВШЭ
2008

УДК 519.246
ББК 22.172
П 16

Редактор серии WP2
«Количественный анализ в экономике»
В.А. Бессонов

П 16 **Панов Е.В., Шведов А.С. Укорочение набора весов, соответствующих квадратическому спектральному окну, при оценке ковариационной матрицы:** Препринт WP2/2008/01. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2008. – 24 с.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_T, ...$ – многомерный случайный процесс с дискретным временем. Для асимптотической ковариационной матрицы могут быть использованы оценки вида $\hat{\Sigma} = \hat{C}(0) + \sum_{k=1}^{T-1} w_k \left(\hat{C}(k) + \hat{C}'(k)\right)$, где $\hat{C}(k)$ – выборочная ковариационная функция. Во многих случаях такая оценка обладает хорошей точностью, если веса w_k соответствуют квадратическому спектральному окну. Но недостатком при этом является большое число слагаемых. В данной работе предлагается оценка, содержащая значительно меньше ненулевых весов, но такая, что веса сходятся к весам квадратичного спектрального окна при росте выборки. Оценка строится таким образом, что матрица $\hat{\Sigma}$ всегда положительно полуопределенная.

Классификация JEL: C14, C32.
Ключевые слова: ковариационная матрица, спектральное окно.

УДК 519.246
ББК 22.172

Panov E.V., Shvedov A.S. A smaller weight set for quadratic spectral window in covariance matrix estimation: Working paper WP2/2008/01. – Moscow: State University – Higher School of Economics, 2008. – 24 p. (in Russian)

Let, $X_1, X_2, ..., X_T, ...$ be a multivariate random process in discrete time. For its asymptotic covariance matrix one can use estimators of the form $\hat{\Sigma} = \hat{C}(0) + \sum_{k=1}^{T-1} w_k \left(\hat{C}(k) + \hat{C}'(k)\right)$, where $\hat{C}(k)$ is the sample autocovariance matrix of order k. Usually such estimator is efficient when weights w_k correspond to a quadratic spectral window. However the drawback of such approach is the large number of summands used in the formula above. The estimator offered in this paper has much less non-zero weights, but its weights converge to quadratic spectral ones when the sample size grows. This estimator is also guaranteed to always be positive semi-definite.

JEL Classification: C14, C32
Key phrases: covariance matrix, spectral window

Препринты ГУ ВШЭ размещаются на сайте
http://new.hse.ru/C3/C18/preprintsID/default.aspx.

Введение

В данной работе рассматривается класс оценок асимптотической ковариационной матрицы многомерного случайного процесса с дискретным временем, при построении которых используется идея, заключающаяся в том, что эту матрицу (в некотором частном случае) можно выразить через ковариационную функцию случайного процесса. Предлагается новая оценка из этого класса.

Вопрос о выборе наилучшей оценки из данного класса (как и об определении наилучшего класса оценок) далек от своего окончательного решения. Но во многих случаях при использовании оценок из рассматриваемого в данной работе класса преимущество отдается оценке с весами, соответствующими квадратическому спектральному окну, которая иногда более коротко называется оценкой с QS (quadratic spectral) весами. Построена оценка с QS весами в работе [Priestley, 1962]. Данная оценка строится как приближенно удовлетворяющая некоторому условию оптимальности и во многих практических ситуациях обладает хорошей точностью. Свойства этой оценки обсуждаются, например, в работах [Andrews, 1991], [Christou, Pittis, 2002].

Оценка асимптотической ковариационной матрицы, предлагаемая в настоящей работе, во-первых, близка к оценке с QS весами, во-вторых, включает в себя значительно меньше слагаемых, чем оценка с QS весами и, в-третьих, как и оценка с QS весами, является положительно полуопределенной для любого набора наблюдений (даже для очень коротких временных рядов).

Одна из первых работ, где рассматривается и оценивается асимптотическая ковариационная матрица многомерного случайного процесса с дискретным временем, – это [Levine, 1983]. Но из-за имеющейся связи асимптотической ковариационной матрицы и спектральной плотности случайного процесса для построения оценок асимптотической ковариационной матрицы могут быть использованы и существующие оценки спектральной плотности. А таким оценкам за последние шестьдесят лет было уделено значительное внимание (см., например, [Bartlett, 1950], [Parzen, 1957], [Priestley, 1962], [Bartlett, 1963], [Priestley, 1981]).

Отметим, что кроме термина *asymptotic covariance matrix* (см., например, [Ledoit, Wolf, 2003]) для обозначения асимптотической ковариационной матрицы используется термин *long-run average covariance matrix* (см., например, [Phillips, Moon, 1999]). Различные оценки асимптотической ковариационной матрицы рассматриваются в работах [Andrews, 1991], [Andrews, Monahan, 1992], [Christou, Pittis, 2002], [Den Haan, Levin, 2000], [Newey, West, 1987, 1994], [Phillips, Ouliaris, 1988], [Stock, Watson, 1988], [Xiao, Phillips, 1998].

В разделе 1 настоящей работы дается определение асимптотической ковариационной матрицы, обсуждаются ее свойства и приводятся некоторые оценки этой матрицы. В разделе 2 на основе оценки с QS весами строится новая оценка с укороченным набором весов, доказывается, что данная оценка является положительно полуопределенной и близкой к оценке с QS весами.

Будем обозначать через N множество натуральных чисел, через Z – множество целых чисел, через R – множество действительных чисел. Условимся, что компоненты всех векторов и элементы всех матриц – действительные числа. Исключение составляют матрицы спектральных плотностей, элементы которых – комплексные числа.

1. Асимптотическая ковариационная матрица и ее оценки

Для последовательности случайных векторов $X_1, X_2, ..., X_T, ...$ определим *спектральную плотность*

$$g(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}E\left(\left(\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-E\left(X_t\right)\right)e^{-it\lambda}\right)\left(\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-E\left(X_t\right)\right)e^{it\lambda}\right)'\right)$$

при тех $\lambda\in R$, для которых указанный предел существует и конечен; штрих означает транспонирование. Если определено значение $g(0)$, то *асимптотическая ковариационная матрица* определяется как

$$\Sigma = 2\pi\cdot g(0)$$

(см. [Phillips, Moon, 1999]).

Когда случайный процесс $X_1, X_2, ..., X_T, ...$ является стационарным в широком смысле, асимптотическая ковариационная матрица тесно связана с ковариационной функцией этого случайного процесса. Напомним, что *ковариационной функцией* называется функция $C:Z\to R^{n\cdot n}$, действующая по правилу

$$C(k)=E\left(\left(X_{s+k}-E\left(X_{s+k}\right)\right)\left(X_s-E\left(X_s\right)\right)'\right)$$

(предположение о существовании такой функции включается в определение стационарного в широком смысле случайного процесса).

Покажем, что если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}C(k)$ сходится, то

$$\Sigma = C(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C(k)+C'(k)\right). \tag{1.1}$$

(С учетом равенства $C(-k)=C'(k)$ соотношение (1.1) может быть записано в виде $\Sigma=\sum_{k\in Z}C(k)$.) Имеем

$$E\left(\left(\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-E\left(X_t\right)\right)e^{-it\lambda}\right)\left(\sum_{s=1}^{T}\left(X_s-E\left(X_s\right)\right)e^{is\lambda}\right)'\right)=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}C(t-s)e^{-i(t-s)\lambda}=TC(0)+\sum_{k=1}^{T}(T-k)\left(C(k)e^{-ik\lambda}+C'(k)e^{ik\lambda}\right).$$

Тогда спектральную плотность при $\lambda=0$ можно выразить в следующем виде:

$$g(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}\left(TC(0)+\sum_{k=1}^{T}(T-k)\left(C(k)+C'(k)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\left(C(0)+\sum_{k=1}^{T}\left(1-\frac{k}{T}\right)\left(C(k)+C'(k)\right)\right).$$

Воспользуемся тем, что суммирование по Чезаро не изменяет сумму ряда, то есть

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{k=1}^{T}\left(1-\frac{k}{T}\right)C(k)=\sum_{k=1}^{\infty}C(k),\quad \lim_{T\to\infty}\sum_{k=1}^{T}\left(1-\frac{k}{T}\right)C'(k)=\sum_{k=1}^{\infty}C'(k)$$

(см., например, [Андерсон, 1976, лемма 8.3.1]). Поэтому

$$g(0)=\frac{1}{2\pi}\left(C(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C(k)+C'(k)\right)\right),$$

и соотношение (1.1) доказано.

(Относительно случая, когда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}C(k)$ расходится, то есть случайный процесс является процессом с длинной памятью, см., например, [Robinson, 2004].)

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих понятие асимптотической ковариационной матрицы.

Пример 1. Пусть случайные вектора $X_1, X_2 \ldots X_T$ независимые и одинаково распределенные, и Ω – ковариационная матрица случайного вектора X_t. Тогда асимптотическая ковариационная матрица

$$\Sigma = 2\pi \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} E\left(\left(\sum_{t=1}^{T} \left(X_t - E(X_t) \right) \right) \left(\sum_{s=1}^{T} \left(X_s - E(X_s) \right) \right)' \right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} E\left(\left(X_t - E(X_t) \right) \left(X_t - E(X_t) \right)' \right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot T \cdot \Omega = \Omega.$$

Поэтому в данном случае в качестве оценки для матрицы Σ можно использовать обычную оценку для матрицы Ω:

$$\hat{\Omega}(X_1, X_2 \ldots X_T) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X})(X_t - \bar{X})',$$

где $\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} X_t$.

Однако, как показывает следующий пример, даже для стационарного случайного процесса матрица Σ, вообще говоря, не совпадает с ковариационной матрицей случайного вектора X_t.

Пример 2. Рассмотрим одномерный случайный процесс $MA(1)$, то есть последовательность случайных величин

$$X_t = \varepsilon_t + a\varepsilon_{t-1}, \quad t \in Z.$$

Случайные величины ε_t независимы, одинаково распределены, $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = 1$; $a \in R$. Тогда ковариационная матрица случайного вектора X_t

$$\Omega = E(X_t^2) = 1 + a^2.$$

В то же время

$$E\left(\left(\sum_{t=1}^{T} X_t \right)^2 \right) = E\left(\left(a\varepsilon_0 + (1+a) \sum_{t=1}^{T-1} \varepsilon_t + \varepsilon_T \right)^2 \right) = a^2 + (T-1)(1+a)^2 + 1.$$

Поэтому асимптотическая ковариационная матрица $\Sigma = (1+a)^2$.

Выражения для асимптотической ковариационной матрицы в примерах 1 и 2 можно получить и с помощью формулы (1.1).

Следующий пример показывает, что асимптотическая ковариационная матрица может существовать и тогда, когда случайный процесс не является стационарным.

Пример 3. Рассмотрим последовательность случайных величин $X_t = U_t + 0.5\, U_{t-1}$, $t > 0$, где U_t, $t \geq 0$ – последовательность независимых случайных величин с нулевыми ожиданиями, $Var(U_t) = 2$ для четного t и $Var(U_t) = 1$ для нечетного t. Тогда асимптотическая ковариационная матрица

$$\Sigma = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} Var \sum_{t=1}^{T} \left(U_t + \frac{1}{2} U_{t-1} \right) \right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} Var \left(\frac{1}{2} U_0 + \sum_{t=1}^{T-1} \frac{3}{2} U_t + U_T \right) \right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^{T-1} \frac{9}{4} Var U_t \right) \right) = \frac{27}{8}.$$

Пример 4. Предположим, что имеются наблюдения одномерного процесса $O_t = \sqrt{\nu} \cdot W_t + U_t$, $t = 0..\infty$. Здесь ненаблюдаемый процесс W_t – это случайное блуждание (то есть приращения $W_t - W_{t-1}$ независимы, имеют единичную дисперсию и нулевое ожидание, поэтому $Var(W_t - W_0) = t$). Другой ненаблюдаемый процесс U_t, играющий роль шума, стационарный в широком смысле случайный процесс. Число $\nu > 0$ – неизвестный параметр, который требуется оценить.

Положим $X_t = O_t - O_{t-1}$. Тогда

$$\sum_{t=1}^{T} X_t = O_T - O_0 = \sqrt{\nu}(W_T - W_0) + U_T - U_0.$$

Из стационарности процесса U_t следует, что $E\left(\sum_{t=1}^{T} X_t \right) = 0$. Поэтому

$$E\left(\left(\sum_{t=1}^{T} X_t \right)^2 \right) = Var\left(\sum_{t=1}^{T} X_t \right) =$$

$$= \nu Var(W_T - W_0) + Var(U_T - U_0) + 2\sqrt{\nu} Cov(W_T - W_0, U_T - U_0).$$

Из неравенства

$$\left|Cov\left(W_T - W_0, U_T - U_0\right)\right| \le \sqrt{Var\left(W_T - W_0\right)\cdot Var\left(U_T - U_0\right)} =$$
$$= \sqrt{T\,Var\left(U_T - U_0\right)}$$

следует, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left(\left(\sum_{t=1}^{T}X_t\right)^2\right) = \nu,$$

то есть асимптотическая ковариационная матрица (которая в одномерном случае является числом) случайного процесса X_t равна ν. А значит состоятельная оценка асимптотической ковариационной матрицы будет состоятельной оценкой параметра ν. В частности, благодаря этому свойству оценки асимптотической ковариационной матрицы находят применение на рынках ценных бумаг, в обработке сигналов и в других областях науки и техники. С алгоритмом декомпозиции такого временного ряда O_t на компоненты, в некотором смысле близкие к (ненаблюдаемым) рядам W_t и U_t, можно познакомиться в работе [Beveridge, Nelson, 1981].

Переходя к построению оценок для асимптотической ковариационной матрицы, здесь и далее будем считать, что $E\left(X_t\right) = 0,\ t\in Z$. Тогда *выборочная ковариационная функция* $\hat{C}(k)$ имеет вид

$$\hat{C}(k) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}X_t X'_{t+k}. \qquad (1.2)$$

В настоящей работе рассматриваются оценки асимптотической ковариационной матрицы вида

$$\hat{\Sigma} = \hat{C}(0) + \sum_{k=1}^{T-1} w_k\left(\hat{C}(k) + \hat{C}'(k)\right), \qquad (1.3)$$

где w_k – некоторые числа, называемые *весами*. При этом оценкой для значения спектральной плотности при $\lambda = 0$ является матрица $\frac{1}{2\pi}\hat{\Sigma}$. Оценки такого вида рассматриваются, например, в работах [Andrews, 1991], [Bartlett, 1950], [Christou, Pittis, 2002], [Newey, West, 1987, 1994], [Priestley, 1962, 1981]. Несмотря на внешнее сходство с представлением (1.1) асимптотической ковариационной матрицы для стационарных случайных процессов, оценки вида (1.3) могут быть состоятельными и для случайных процессов, не являющихся стационарными (см., например, [Newey, West, 1987]).

Свойства оценки $\hat{\Sigma}$ во многом определяются следующей функцией, называемой *спектральным окном:*

$$w(\lambda) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{T-1} w_k \cos k\lambda,\ \ -\pi \le \lambda \le \pi.$$

Так, при выборе «треугольных» весов

$$w_k = 1 - \frac{k}{T},\ \ k = 1,2,\ldots,T-1,$$

спектральное окно с точностью до множителя $\frac{1}{2\pi}$ совпадает с ядром Фейера (см. [Андерсон, 1976, раздел 9.2.3]; определение ядра Фейера см., например, в книге [Шведов, 2005, приложение 2]).

Рассмотрим функцию

$$W(\lambda) = \frac{3}{4\pi}\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2\right),\ \ -\pi \le \lambda \le \pi.$$

Нетрудно увидеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\lambda)d\lambda = 1.$$

При каждом $A > \frac{1}{\pi}$ рассмотрим функцию

$$W_A(\lambda) = \begin{cases} \pi A W(\pi A\lambda) & \text{при}\ \ |\lambda| \le \frac{1}{A} \\ 0 & \text{при}\ \ \frac{1}{A} < |\lambda| \le \pi \end{cases}$$

Спектральное окно называется *квадратическим*, если при некотором A оно близко к функции $W_A(\lambda)$, например, является частичной суммой ряда Фурье этой функции. Такие спектральные окна были впервые исследованы независимо в работах [Bartlett, 1963], [Priestley, 1962].

Функция $W_A(\lambda)$ четная и может быть разложена в ряд Фурье

$$W_A(\lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\lambda,\ \ -\pi \le \lambda \le \pi.$$

Коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W_A(\lambda)d\lambda = \frac{1}{\pi}$$

и при $k \ge 1$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W_A(\lambda)\cos k\lambda\, d\lambda.$$

После подсчета интегралов оказывается, что $a_k = \frac{1}{\pi} p\left(\frac{k}{A}\right)$, где

$$p(y) = \frac{3}{y^2}\left(\frac{\sin y}{y} - \cos y\right) \qquad (1.4)$$

при $y \ne 0$ (и по непрерывности $p(0) = 1$). Соответственно, чтобы спектральное окно было частичной суммой ряда Фурье функции $W_A(\lambda)$, веса w_k должны быть определены по формулам

$$w_k = p\left(\frac{k}{A}\right). \qquad (1.5)$$

Такой выбор весов в оценке $\hat{\Sigma}$ впервые дан в работе [Priestley, 1962]. В работе [Andrews, 1991] для этих весов предложено название QS веса. Значение A зависит, вообще говоря, от T, выбор функции $A(T)$ является предметом исследования.

Интересно отметить, что в близкой задаче и решаемой близкими методами, когда оценивается не спектральная плотность, а плотность распределения вероятностей, оптимальной (в некотором классе оценок) также оказывается оценка, построенная с использованием квадратической функции (см. [Епанечников, 1969]).

В расчетах с использованием «треугольных» весов часто производится укорочение набора весов. Выбирается функция

$$m : N \to N,$$

удовлетворяющая условию $m(T) \le T - 1$ при любом T, как правило, монотонно неубывающая и стремящаяся к бесконечности при $T \to \infty$, но медленнее, чем линейная функция. После этого веса w_k определяются по формулам

$$w_k = \begin{cases} 1 - \dfrac{k}{m(T)+1} & \text{при } k \le m(T) \\ 0 & \text{при } k > m(T) \end{cases}$$

Эта процедура укорочения является достаточно важной, хотя бы потому, что доверие к оценкам $\hat{C}(k)$ при k близких к $T-1$ не может быть большим.

В настоящей работе предлагается решение задачи укорочения набора весов $w_k = p\left(\frac{k}{A}\right)$, соответствующих квадратическому спектральному окну. Простое отбрасывание слагаемых $w_k\left(\hat{C}(k) + \hat{C}'(k)\right)$ при k больших некоторого $m(T)$ не является удовлетворительным решением. Следующий пример показывает, что при таком отбрасывании матрица $\hat{\Sigma}$ может не быть положительно полуопределенной.

Пример 5. Рассмотрим набор одномерных наблюдений x_t, $t = 1..20$, где $x_t = 1$ при нечетном t и $x_t = -1$ при четном t. Возьмем $m = 6$ и $A = \frac{10}{3\pi}$. Веса $w_k = p\left(\frac{k}{A}\right)$ и выборочные автоковариации $\hat{C}(k) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k} x_t x_{t+k}$ при $k = 1, 2, ..., 6$ приведены в следующей таблице.

k	w_k	$\hat{C}(k)$
0	–	1.00
1	0.914	–0.95
2	0.687	0.90
3	0.398	–0.85
4	0.138	0.80
5	–0.029	–0.75
6	–0.086	0.70

При этих значениях $\hat{\Sigma} = \hat{C}(0) + \sum_{k=1}^{m} w_k\left(\hat{C}(k) + \hat{C}'(k)\right) \approx -0.12$.

2. Уменьшение числа слагаемых для оценки с QS весами

Оценка (1.3) с весами (1.5) содержит столько же слагаемых, сколько и наблюдений в наборе. Обратимся к вопросу об уменьшении числа этих слагаемых. Пусть функция $m : N \to N$ обладает свойствами, перечисленными в разделе 1. В данном разделе строится оценка вида

$$\hat{\Sigma} = \hat{C}(0) + \sum_{k=1}^{m} q_{km}\left(\hat{C}(k) + \hat{C}'(k)\right), \qquad (2.1)$$

где $m = m(T)$, близкая к оценке (1.3) с весами (1.5).

В работе [Newey, West, 1987] показано, что если существуют действительные числа $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m$ не все равные нулю и такие, что

$$q_{km} = \left(\sum_{j=k}^{m} \xi_j \xi_{j-k}\right)\left(\sum_{j=0}^{m} \xi_j^{\,2}\right)^{-1}, \; k = 1..m, \tag{2.2}$$

то оценка $\hat{\Sigma}$ является положительно полуопределенной (см. также [Шведов, 2005, с. 128 – 132]).

Напомним, что при действительных неотрицательных ν функция Бесселя первого рода порядка ν определяется соотношением

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}, \quad x \in R. \tag{2.3}$$

(Равенством (2.3) с небольшим изменением могут быть заданы функции Бесселя первого рода порядка ν и при отрицательных ν, см., например, [Сеге, 1962, с. 29]. Но в настоящей работе функции Бесселя первого рода отрицательного порядка не используются.) Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \cdot \frac{J_1(x)}{x}.$$

Выберем монотонно возрастающую и принимающую положительные значения функцию $B : N \to R$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} B(m) = \infty, \;\; \lim_{m\to\infty} \frac{B^2(m)}{m} = 0. \tag{2.4}$$

Определим числа

$$\xi_j = \sqrt{\frac{B(m)}{m+1}}\,\varphi\!\left(\frac{B(m)}{m+1}\left(j - \frac{m}{2}\right)\right), \;\; j = 0..m. \tag{2.5}$$

Теорема. Предположим, что

1) функция B удовлетворяет приведенным выше условиям, в частности, условиям (2.4);

2) веса q_{km} рассчитаны по формулам (2.2), (2.5);

3) веса w_k рассчитаны по формулам (1.5) при $A(m) = \dfrac{m+1}{B(m)}$, то есть $w_k = w_{km} = p\left(\dfrac{k}{A(m)}\right)$.

Тогда

$$\max_{1\le k\le m} | q_{km} - w_{km} | \to 0 \;\text{ при }\; m \to \infty.$$

Предварительно докажем три леммы.

Лемма 1. Для любого $y \in R$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\varphi(y-x)dx = p(y),$$

где функция p определена равенством (1.4).

Доказательство. Напомним, что для функции $f \in L^1(R)$ преобразование Фурье определяется равенством

$$\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi izx}dx, \;\; z \in R$$

(см., например, [Стейн, Вейс, 1974, с. 8]). Рассмотрим функцию

$$Q(x) = \begin{cases} 0.75(1-x^2) & \text{при } |x| \le 1 \\ 0 & \text{при } |x| > 1 \end{cases}$$

Путем прямолинейных выкладок нетрудно установить, что преобразование Фурье

$$\hat{Q}(z) = p(2\pi z).$$

Поскольку и функция Q, и функция $\hat{Q}$ принадлежат пространству $L^1(R)$, справедливо равенство

$$Q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Q}(z)e^{2\pi ixz}dz$$

(см. [Стейн, Вейс, 1974, следствие 1.21]). Это соотношение позволяет найти преобразование Фурье функции p

$$\hat{p}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-2\pi izx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Q}\left(\frac{x}{2\pi}\right)e^{-2\pi izx}dx = 2\pi Q(2\pi z).$$

Рассмотрим функцию $S(x) = \sqrt{Q(x)}$. Воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cos(zx)dx = \frac{J_1(z)}{z}, \;\; z \in R$$

(см., например, [Грей, Мэтьюз, 1953, с. 60]) и четностью функции S, находим

$$\hat{S}(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cos(2\pi zx)dx=\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{3\pi}{8}}\frac{J_1(2\pi z)}{2\pi z}=$$
$$=\sqrt{2\pi}\varphi(2\pi z)$$

Поскольку при любом $\nu\ge 0$

$$J_\nu(z)=O(z^{-1/2}) \text{ при } z\to\infty \tag{2.6}$$

(см., например, [Сеге, 1962, с. 30] или [Грей, Мэтьюз, 1953, с. 75]) функция φ принадлежит пространству $L^1(R)$. Поэтому и функция $\hat{S}$ принадлежит пространству $L^1(R)$, и

$$S(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{S}(z)e^{2\pi ixz}dz$$

(см. [Стейн, Вейс, 1974, следствие 1.21]). Это соотношение позволяет найти преобразование Фурье функции φ

$$\hat{\varphi}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-2\pi izx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{S}\left(\frac{x}{2\pi}\right)e^{2\pi i(-2\pi z)x/2\pi}dx=$$
$$=\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{S}(y)e^{2\pi i(-2\pi z)y}dy=\sqrt{2\pi}S(2\pi z)$$

Поскольку функция φ принадлежит пространству $L^1(R)$, функция ψ, определенная равенством

$$\psi(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\varphi(y-x)dx,$$

также принадлежит пространству $L^1(R)$ (см. [Стейн, Вейс, 1974, теорема 1.3]). Тогда определено преобразование Фурье функции ψ, и для него имеет место соотношение

$$\hat{\psi}(z)=\left(\hat{\varphi}(z)\right)^2=\left(\sqrt{2\pi}S(2\pi z)\right)^2=2\pi Q(2\pi z)$$

(см. [Стейн, Вейс, 1974, теорема 1.4]).

Таким образом, функция $\hat{\psi}$ совпадает с функцией $\hat{p}$. Отсюда следует, что функция ψ совпадает с функцией p почти всюду на R (см. [Стейн, Вейс, 1974, следствие 1.22]).

Из определения функции Q следует, что функция $\hat{\psi}$ принадлежит пространству $L^1(R)$. Поэтому функция $\psi(-x)$, представляющая собой

преобразование Фурье функции $\hat{\psi}$ (см. [Стейн, Вейс, 1974, следствие 1.21]), является непрерывной на R функцией (см. [Стейн, Вейс, 1974, теорема 1.1]). Поэтому и функция ψ непрерывна на R. Точно такими же рассуждениями может быть установлена и непрерывность функции p на R, но в данном случае это не нужно, функция p непрерывна на R по определению (1.4). Но если две непрерывные на R функции совпадают почти всюду на R, то они совпадают всюду.

Лемма 1 доказана.

Из четности функции φ и леммы 1 следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x)dx=1. \tag{2.7}$$

Лемма 2. Для чисел ξ_j, определенных соотношением (2.5),

$$\sum_{j=0}^{m}\xi_j^2\to 1 \text{ при } m\to\infty.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\left|\sum_{j=0}^{m}\xi_j^2-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x)dx\right|\le\left|\sum_{j=0}^{m}\xi_j^2-\int\limits_{-\frac{B(m)}{2}}^{\frac{B(m)}{2}}\varphi^2(x)dx\right|+\left|\int\limits_{-\infty}^{-\frac{B(m)}{2}}\varphi^2(x)dx\right|+\left|\int\limits_{\frac{B(m)}{2}}^{\infty}\varphi^2(x)dx\right|.$$

Последние два интеграла в правой части неравенства стремятся к нулю при $m\to\infty$ в силу интегрируемости функции φ^2 (см. (2.7)) и первого из соотношений (2.4). Введем обозначение

$$h=\frac{B(m)}{m+1}.$$

Тогда для первого слагаемого в правой части неравенства с учетом (2.5) получаем следующую оценку сверху.

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{m}\left|h\varphi^2\left(h\left(j-\frac{m}{2}\right)\right)-\int\limits_{-\frac{B(m)}{2}+jh}^{-\frac{B(m)}{2}+(j+1)h}\varphi^2(x)dx\right|\le\\&\le\sum_{j=0}^{m}\int\limits_{-\frac{B(m)}{2}+jh}^{-\frac{B(m)}{2}+(j+1)h}\left|\varphi^2(x)-\varphi^2\left(h\left(j-\frac{m}{2}\right)\right)\right|dx\end{aligned} \tag{2.8}$$

При любом j точка $h\left(j-\frac{m}{2}\right)$ является серединой отрезка

$$S_j=\left[-\frac{B(m)}{2}+jh,\quad -\frac{B(m)}{2}+(j+1)h\right].$$

В последующей оценке будем использовать то, что для любого $x\in S_j$

$$\left|\varphi^2(x)-\varphi^2\left(h\left(j-\frac{m}{2}\right)\right)\right|\le\frac{h}{2}\sup_{x\in S_j}\left|\frac{d\varphi^2(x)}{dx}\right|.$$

Воспользуемся соотношением

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_1(x)}{x}\right)=-\frac{J_2(x)}{x}\qquad(2.9)$$

(см. [Грей, Мэтьюз, 1953, с. 25]). Из этого соотношения следует, что при $x\in R$ с точностью до некоторой абсолютной константы функция $\left|\frac{d\varphi^2}{dx}\right|$ мажорируется функцией

$$|x|\cdot\left|\frac{J_1(x)}{x}\right|\cdot\left|\frac{J_2(x)}{x^2}\right|.$$

В силу (2.6) существуют абсолютные константы x_0 и C_0 такие, что при $|x|\ge x_0$

$$|J_1(x)|\le\frac{C_0}{|x|^{1/2}},\ |J_2(x)|\le\frac{C_0}{|x|^{1/2}}.$$

Тогда при $|x|\ge x_0$

$$|x|\cdot\left|\frac{J_1(x)}{x}\right|\cdot\left|\frac{J_2(x)}{x^2}\right|\le\frac{C_0^2}{x_0^3}.$$

Воспользуемся тем, что функции $\frac{J_1(x)}{x}$ и $\frac{J_2(x)}{x^2}$ целые, и, следовательно, ограниченные при $|x|\le x_0$. Обозначим через C_1 и C_2 константы, которыми эти функции, соответственно, ограничены сверху при $|x|\le x_0$. Тогда при $|x|\le x_0$

$$|x|\cdot\left|\frac{J_1(x)}{x}\right|\cdot\left|\frac{J_2(x)}{x^2}\right|\le x_0C_1C_2.$$

Тем самым установлено, что функция $\left|\frac{d\varphi^2}{dx}\right|$ ограничена на всей прямой R некоторой абсолютной константой C_3.

Поэтому каждый из интегралов в правой части неравенства (2.8) ограничен сверху величиной

$$C_3\frac{h^2}{2}=\frac{C_3}{2}\frac{B^2(m)}{(m+1)^2}.$$

Отсюда следует, что правая часть неравенства (2.8) ограничена сверху величиной

$$\frac{C_3}{2}\frac{B^2(m)}{m+1},$$

которая на основании второго из соотношений (2.4) стремится к нулю при $m\to\infty$. Таким образом,

$$\left|\sum_{j=0}^m\xi_j^2-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x)dx\right|\to 0\ \text{ при }\ m\to\infty.$$

Для завершения доказательства леммы осталось воспользоваться равенством (2.7).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Существует абсолютная константа C такая, что при любом $m\in N$, при любом $k=1..m$

$$\left|\sum_{j=k}^m\xi_j\xi_{j-k}\right|\le C.$$

Доказательство леммы 3 немедленно следует из леммы 2 и неравенства Коши – Буняковского:

$$\left|\sum_{j=k}^m\xi_j\xi_{j-k}\right|\le\sqrt{\sum_{j=k}^m\xi_j^2\cdot\sum_{j=k}^m\xi_{j-k}^2}.$$

Доказательство теоремы. Пусть $m\in N$, $1\le k\le m$. Тогда

$$|q_{km}-w_{km}|\le\left|q_{km}-\sum_{j=k}^m\xi_j\xi_{j-k}\right|+\left|\sum_{j=k}^m\xi_j\xi_{j-k}-w_{km}\right|.\qquad(2.10)$$

Покажем, что каждое из слагаемых в правой части неравенства (2.10) стремится к нулю при $m \to \infty$ равномерно по k.

На основании (2.2), лемм 2 и 3 для первого слагаемого имеем

$$\left| q_{km} - \sum_{j=k}^{m} \xi_j \xi_{j-k} \right| = \left| \sum_{j=k}^{m} \xi_j \xi_{j-k} \right| \left| \left(\left(\sum_{j=0}^{m} \xi_j^{\,2} \right)^{-1} - 1 \right) \right| \to 0 \text{ при } m \to \infty$$

равномерно по k.

Воспользуемся обозначением h, введенным в доказательстве леммы 2. Для второго слагаемого в правой части неравенства (2.10) с помощью леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=k}^{m} \xi_j \xi_{j-k} - w_{km} \right| = \left| \sum_{j=k}^{m} \xi_j \xi_{j-k} - p\left(\frac{k}{A(m)} \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{j=k}^{m} \xi_j \xi_{j-k} - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\varphi\left(\frac{k}{A(m)} - x \right) dx \right| = \\ &= \left| \sum_{j=k}^{m} h\varphi\left(h\left(j - \frac{m}{2} \right) \right) \varphi\left(h\left(j - k - \frac{m}{2} \right) \right) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\varphi\left(x - \frac{k}{A(m)} \right) dx \right|, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где при последнем переходе использованы (2.5) и четность функции φ. Воспользуемся выражением функции $A(m)$ через функцию $B(m)$, данным в формулировке теоремы, из которого следует, что $\frac{1}{A(m)} = h$. Тогда выражение, стоящее в правой части равенства (2.11), может быть оценено сверху следующим выражением:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=k}^{m} \int_{-\frac{B(m)}{2}+jh}^{-\frac{B(m)}{2}+(j+1)h} | \varphi(x)\varphi(x-kh) - \\ &-\varphi\left(h\left(j - \frac{m}{2} \right) \right) \varphi\left(h\left(j - \frac{m}{2} \right) - kh \right) | \, dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{-\frac{B(m)}{2}+kh} |\varphi(x)\varphi(x-kh)| dx + \int_{\frac{B(m)}{2}}^{\infty} |\varphi(x)\varphi(x-kh)| dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Оценка первой суммы в выражении (2.12) аналогична оценке правой части неравенства (2.8) в доказательстве леммы 2. Для любого $x \in S_j$

$$\left| \varphi(x)\varphi(x-kh) - \varphi\left(h\left(j - \frac{m}{2} \right) \right) \varphi\left(h\left(j - \frac{m}{2} \right) - kh \right) \right| \le$$
$$\le \frac{h}{2} \sup_{x \in S_j} \left| \frac{d}{dx} \left(\varphi(x)\varphi(x-kh) \right) \right|.$$

Из (2.9) получаем, что с точностью до некоторой абсолютной константы при $x \in R$ функция $\left| \frac{d}{dx} \left(\varphi(x)\varphi(x-kh) \right) \right|$ мажорируется функцией

$$|x| \cdot \left| \frac{J_1(x-kh)}{x-kh} \right| \cdot \left| \frac{J_2(x)}{x^2} \right| + |x-kh| \cdot \left| \frac{J_1(x)}{x} \right| \cdot \left| \frac{J_2(x-kh)}{(x-kh)^2} \right|.$$

Будем использовать те же обозначения x_0, C_0, C_1, C_2, что и в доказательстве леммы 2. Из тех же рассуждений, что и при доказательстве леммы 2, следует, что при любом $y \in R$

$$\left| \frac{J_1(y)}{y} \right| \le \max\left(\frac{C_0}{x_0^{3/2}}, C_1 \right)$$

и

$$|y| \cdot \left| \frac{J_2(y)}{y^2} \right| \le \max\left(\frac{C_0}{x_0^{3/2}}, x_0 C_2 \right).$$

Поэтому функция $\left| \frac{d}{dx} \left(\varphi(x)\varphi(x-kh) \right) \right|$ ограничена на всей прямой R некоторой абсолютной константой C_4. Каждый из интегралов в первой сумме выражения (2.12) ограничен сверху величиной

$$C_4 \frac{h^2}{2} = \frac{C_4}{2} \frac{B^2(m)}{(m+1)^2},$$

а вся первая сумма выражения (2.12) при любом k ограничена сверху величиной

$$\frac{C_4}{2} \frac{B^2(m)}{m+1},$$

которая на основании второго из соотношений (2.4) стремится к нулю при $m \to \infty$.

Чтобы оценить предпоследний интеграл в выражении (2.12), воспользуемся тем, что, как было установлено при доказательстве леммы 2, $\left|\frac{J_1(x)}{x}\right| \le \frac{C_0}{|x|^{3/2}}$ при $|x| \ge x_0$ и $\left|\frac{J_1(x)}{x}\right| \le C_1$ при $|x| \le x_0$. Из этих неравенств и из определения функции φ следует, что существует абсолютная константа c такая, что

$$|\varphi(x)| \le c$$

при любом $x \in R$ и

$$|\varphi(x)| \le \frac{c}{|x|^{3/2}}$$

при $|x| \ge x_0$. Тогда при любом $k, 1 \le k \le m$,

$$\int_{-\infty}^{-\frac{B(m)}{2}+kh} |\varphi(x)\varphi(x-kh)|\,dx \le c \int_{-\infty}^{-\frac{B(m)}{2}+kh} |\varphi(x-kh)|\,dx =$$

$$= c \int_{-\infty}^{-\frac{B(m)}{2}} |\varphi(y)|\,dy \to 0 \quad \text{при } m \to \infty$$

в силу первого из соотношений (2.4).

Последний интеграл в выражении (2.12) равен предпоследнему интегралу в этом выражении.

Теорема доказана.

Библиография

Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.

Грей Э., Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: ИЛ, 1953.

Епанечников В.А. Непараметрическая оценка многомерной плотности // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14. Вып. 1. С. 156–162.

Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962.

Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

Шведов А.С. Математические основы и оценка параметров эконометрических моделей состояние – наблюдение. М.: ГУ ВШЭ, 2005.

Akaike H. A New Look at the Statistical Model Identification // IEEE Transactions on Automatic Control. 1974. Vol. 19. P. 716–723.

Andrews D.W.K. Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation // Econometrica. 1991. Vol. 59. P. 817–858.

Andrews D.W.K., Monahan J.C. An Improved Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimator // Econometrica. 1992. Vol. 60. P. 953–966.

Bartlett M.S. Periodogram Analysis and Continuous Spectra // Biometrika. 1950. Vol. 37. P. 1–16.

Bartlett M.S. Statistical Estimation of Density Functions // Sankya. Ser. A. 1963. Vol. 25. P. 245–254.

Beveridge S., Nelson C.R. A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the "Business Cycle" // Journal of Monetary Economics. 1981. Vol. 7. P. 151–174.

Christou C., Pittis N. Kernel and Bandwidth Selection, Prewhitening, and the Performance of the Fully Modified Least Squares Estimation Method // Econometric Theory. 2002. Vol. 18. P. 948–961.

Den Haan W.J., Levin A. A Practitioner's Guide to Robust Covariance Matrix Estimation // Working Paper T0197, National Bureau of Economic Research, 1996.

Den Haan W.J., Levin A. Robust Covariance Matrix Estimation with Data-Dependent VAR Prewhitening Order // Technical working paper 255, National Bureau of Economic Research, 2000.

Levine D.K. A Remark on Serial Correlation in Maximum Likelihood // Journal of Econometrics. 1983. Vol. 23. P. 337–342.

Mills T.C. The Econometric Modeling of Financial Time Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

Newey W.K., West K.D. A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticiy and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix // Econometrica. 1987. Vol. 55. No. 3. P. 703–708.

Newey W.K., West K.D. Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation // The Review of Economic Studies. 1994. Vol. 61. No. 4. P. 631–653.

Parzen E. On Consistent Estimates of the Spectrum of a Stationary Time Series // Ann. Math. Statist. 1957. Vol. 28. P. 329–348.

Phillips P.C.B., Ouliaris S. Testing for Cointegration Using Principal Components Method // Journal of Economic Dynamics and Control. 1988. Vol. 12. P. 205–230.

Phillips P.C.B., Moon H.R. Linear Regression Limit Theory for Nonstationary Panel Data // Econometrica. 1999. Vol. 67. P. 1057–1111.

Priestley M.B. Spectral Analysis and Time Series. N. Y.: Academic Press, 1981.

Priestley M.B. Basic Considerations in the Estimation of Spectra // Technometrics. 1962. Vol. 4. P. 551–564.

Robinson P.M. Robust Covariance Matrix Estimation: “HAC” Estimates with Long Memory/Antipersistence Correction // STICERD – Econometrics Paper Series/2004/471, Suntory and Toyota International Centres for Economics and Related Disciplines, London School of Economics.

Stock J.H., Watson M.W. Testing for Common Trends // Journal of the American Statistical Association. 1988. Vol. 83. P. 1097–1107.

White H. Asymptotic Theory for Econometricians. N. Y.: Academic Press, 1984.

Xiao Z., Phillips P.C.B. Higher-Order Approximations for Frequency Domain Time Series Regression // Journal of Econometrics. 1998. Vol. 86. P. 297–336.

Препринт WP2/2008/01

Серия WP2

Количественный анализ в экономике

Е.В. Панов, А.С. Шведов

Укорочение набора весов, соответствующих квадратическому спектральному окну, при оценке ковариационной матрицы

Публикуется в авторской редакции

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*

Технический редактор *О.А. Быстрова*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 1,5. Усл. печ. л. 1,4
Заказ № . Изд. № 849

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3

Notes