С. А. Логвенков П. А. Мышкис В. С. Самовол

Сборник задач по математическому анализу

Функции нескольких переменных

Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и социологии

Москва
Издательство МЦНМО
2012

С. А. Логвенков П. А. Мышкис В. С. Самовол

Сборник задач по математическому анализу

Функции нескольких переменных

Учебное пособие для факультетов менеджмента,
политологии и социологии

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 512 (075.8)
ББК 22.143
Л69

Логвенков С. А., Мышкис П. А., Самовол В. С.

Л69 Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. — М.: МЦНМО, 2012. — 40 с.

ISBN 978-5-4439-0211-1

Сборник задач составлен в соответствии с программой по математическому анализу для подготовки студентов, обучающихся по специальности менеджмент, социология, политология. Содержит задачи по следующим темам: область определения, линии уровня функции нескольких переменных, частные производные, производная сложной функции, градиент, производная по направлению, первый и второй дифференциал, касательная плоскость, приближенные вычисления, формула Тейлора, локальный экстремум функции нескольких переменных, локальный условный экстремум функции нескольких переменных, двойные интегралы, задачи из различных разделов математического анализа, простейшие дифференциальные уравнения.

ББК 22.143

ISBN 978-5-4439-0211-1

Предисловие

Настоящий сборник задач посвящен прежде всего одному из важнейших разделов высшей математики — основам дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных. Кроме того, в него включены некоторые задачи из других разделов математического анализа, а также первичные сведения о дифференциальных уравнениях. Сборник составлен в соответствии с программами курса «Алгебра и анализ», читаемого на различных факультетах НИУ-ВШЭ. Изложение материала в предлагаемом сборнике ориентировано на углубленное изучение фундаментальных математических идей и методов, широко применяемых в исследовании социально-экономических процессов и явлений.

Для облегчения восприятия и удобства пользования весь материал разбит на отдельные разделы. Здесь прежде всего представлены задачи, связанные с освоением техники дифференцирования функций нескольких переменных и нахождения экстремумов этих функций. Отдельный раздел посвящен двойным интегралам. Последний раздел сборника содержит задачи из некоторых других областей математического анализа, а также задачи по дифференциальным уравнениям. Большая часть задач снабжена ответами.

При подборе примеров и задач привлекались разнообразные источники и, прежде всего, те книги, которые вошли в приведенный в конце сборника библиографический список.

Оглавление

Сергей Алексеевич Логвенков
Петр Анатольевич Мышкис
Владимир Симхович Самовол

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Подписано в печать 10.10.2012 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 2,5. Тираж 500 экз.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

1. Область определения, линии уровня функции нескольких переменных.

Изобразите области определения функций:

1.1. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.

1.2. $z = \arcsin(x + y)$.

1.3. $z = \sqrt{xy} + acr\sin\dfrac{x}{2}$.

1.4. $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

1.5. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

1.6. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.

1.7. $z = \arcsin\dfrac{y}{x^2}$.

1.8. $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.

1.9. $u = \dfrac{x + y + z}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$.

1.10. $u=\sqrt{x+y+z}$.

Постройте линии уровня функций:

1.11. $z=\dfrac{y}{x}$.

1.12. $z=x^2-y^2$.

1.13. $z=x^2+y^2$.

1.14. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

1.15. $z=\sqrt{xy}$.

1.16. $z=\dfrac{y-x^2}{x^2}$.

1.17. $z=x^2y+y$.

1.18. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

1.19. $z=\min(x^2,\, y)$.

1.20. $z=\max(x+y,\, 2x-3y)$.

2. Частные производные. Производная сложной функции. Градиент. Производная по направлению.

Найдите частные производные первого порядка следующих функций:

2.1. $z = x^3 + 2y^3 - 7x^2y^4$.

2.2. $z = \dfrac{x^2 y}{x + y}$.

2.3. $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x^2}$.

2.4. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

2.5. $z = x\sqrt[3]{y} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

2.6. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2.7. $z = \sqrt{x}\, e^{\frac{y}{x}}$.

2.8. $z = xe^{-xy}$.

2.9. $z = arctg\dfrac{y}{x}$.

2.10. $z = xy\, e^{x+2y}$.

2.11. $z = e^{3x^2+2y^2-xy}$.

2.12. $u = yx^3 + xz^2 + y^2 z$.

2.13. $u = \dfrac{x}{\sqrt{x + y^2 + z^3}}$.

2.14. $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

2.15. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

2.16. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$.

2.17. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}$.

2.18. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$.

2.19. $u = x^2 - arctg(y + z^3)$.

2.20. $u = x^3 y^2 z + 3x - 5y + z + 2$

2.21. Проверьте, что функция $z = y\ln(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

2.22. Проверьте, что функция $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}$.

2.23. Проверьте, что функция $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

2.24. Проверьте, что функция $z=\frac{y^2}{3x}+xy$ удовлетворяет уравнению $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$.

2.25. Проверьте, что функция $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

2.26. Проверьте, что функция $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ удовлетворяет уравнению $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$.

2.27. Найдите u'_x и u'_y, если $u=f(t)$ и $t=\frac{y}{x}$.

2.28. Найдите u'_x и u'_y, если $u=f(t)$ и $t=\sqrt{x^2+y^2}$.

2.29. Найдите u'_x, u'_y и u'_z, если $u=f(t)$ и $t=xy^2z^3$.

2.30. Найдите u'_x, u'_y и u'_z, если $u = f(t)$ и $t = xy + \dfrac{z^2}{x}$.

2.31. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^2 y^3$, $x = t^3 + 2$ и $y = 3t^4 - 1$.

2.32. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x \sin \dfrac{x}{y}$, $x = 1 + 3t$ и $y = \sqrt{1 + t^2}$.

2.33. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{3x+2y}$, $x = \cos t$ и $y = t^2$.

2.34. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \dfrac{y^2 - 1}{x}$, $x = 1 - e^{2t}$ и $y = e^t$.

2.35. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{xy} \ln(x + y)$, $x = 2t^2$ и $y = 1 - 2t^2$.

2.36. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \ln(x + \ln y)$, $x = e^{2t^2}$ и $y = \ln t$.

2.37. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}}$ и $x = \sin t$, $y = tgt$.

2.38. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \ln(x + \sqrt{t^2 + y^2})$ и $x = t^2 + 1$, $y = e^t$.

2.39. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^2 e^{\frac{y}{t}}$ и $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = t^3$.

2.40. Найдите $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{dz}{dt}$, если $z = arctg\frac{xt}{y}$ и $x = tgt$, $y = e^{t^2+1}$.

2.41. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = e^{xy}$ и $y = \varphi(x)$.

2.42. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = arctg\frac{y}{x}$ и $y = x^2$.

2.43. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln(x^3y^2)$ и $y = e^{x^2+3}$.

Найдите производные z'_u и z'_v функции $z = z(x,y)$, где $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$:

2.44. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = u^2v$, $y = \frac{u}{v^3}$.

2.45. $z = arctg\frac{x}{y}$, $x = u\sin v$, $y = u\cos v$.

2.46. $z = x^3 + y^3$, $x = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$, $y = arctg\frac{u}{v}$.

2.47. $z = \sqrt{xy}$, $x = \ln u$, $y = \ln v$.

2.48. $z = \ln\frac{x}{y}$, $x = \sin\frac{u}{v}$, $y = \sqrt{\frac{u}{v}}$.

2.49. Дана функция $y(x) = (1 + x^2)^{e^{-x} - e + 1}$. Записав $y = u^v$, где $u = 1 + x^2$, $v = e^{-x} - e + 1$, найдите $y'(x)$ как производную сложной функции. В ответе укажите $y'(-1)$.

Найдите в указанной точке производную функции $y = y(x)$, заданной неявно:

2.50. $x^5 + 2xy^2 - y^3 - 1 = 0$**,** $(1;2)$**.**

2.51. $e^{x^4 - y^2} - y^2 + 15 = 0$**,** $(2;4)$**.**

2.52. $(1+2x)e^{y/x} - x = 0$**,** $(-1;0)$**.**

Найдите в указанной точке первые частные производные функции $z = z(x, y)$, заданной неявно:

2.53. $z^3 + 3xyz + 1 = 0$**,** (0; 1).

2.54. $e^z - xyz - 2 = 0$**,** (1; 0)**.**

2.55. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$**,** $(1;1;\frac{1}{3})$**.**

2.56. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0$**,** (1; 1;-2)**.**

2.57. $z - x = y\, ctg(z - x)$**,** $(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$**.**

2.58. Найдите производную функции $z = x^3y - 5xy^2 + 8$, по направлению $\vec{l} = (1;1)$ в точке $M(1;1)$.

2.59. Найдите производную функции $z = \ln\frac{x^2 + y^2}{xy}$, по направлению $\vec{l} = (6;8)$ в точке $M(1;2)$.

2.60. Найдите производную функции $z = x^2 + xy + 2x + 2y$, по направлению $\vec{l} = (3;4)$ в точке $M(1;1)$.

2.61. Найдите производную функции $u = xy - \dfrac{x}{z}$ в точке $A(-4;3;-1)$ по направлению $\overrightarrow{AB}$, где $B(1;4;-2)$.

2.62. Найдите производную функции $u = x + \ln(z^2 + y^2)$ в точке $A(2;1;1)$ по направлению $\overrightarrow{AB}$, где $B(0;2;0)$.

2.63. Найдите производную функции $u = x^2 y - \ln(xy + z^2)$ в точке $A(1;5;-2)$ по направлению $\overrightarrow{AB}$, где $B(1;7;-4)$.

2.64. Найдите производную функции $z = 3x^4 + y^3 + xy$ в точке $M(1,2)$ по направлению луча, образующего с осью x угол 135^0.

2.65. Найдите производную функции $u = x^2 - 3yz + 4$ в точке $M(1;2;-1)$ по направлению луча, образующего одинаковые углы со всеми координатными осями.

2.66. Найдите производную функции $z = f(x^2 + xy + 2x + 2y - 1)$, по направлению $\vec{l} = (3;2)$ в точке $M(1;1)$, если $f'(5) = -2\sqrt{13}$.

2.67. Найдите производную функции $z = f(y^2 - xy + 3x - 2y - 2)$, по направлению $\vec{l} = (2;-4)$ в точке $M(2;3)$, если $f'(1) = 2\sqrt{5}$.

2.68. Найдите единичный вектор $\vec{l}$, по направлению которого производная функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(-1;2)$ достигает наибольшего значения.

2.69. Найдите единичный вектор $\vec{l}$, по направлению которого производная функции $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ в точке $M(3;1)$ достигает наибольшего значения.

2.70. Найдите единичный вектор $\vec{l}$, по направлению которого производная функции $u = xz^{y}$ в точке $M(-3;2;1)$ достигает наибольшего значения.

2.71. Дана функция $z = 3x^2 y + x + y^3$, точка $A(1;\ 2)$ и вектор $\vec{l} = a\vec{i} + 30\vec{j}$. При каком значении параметра a производная функции в точке A по направлению $\vec{l}$ будет максимальна?

2.72. Дана функция $z = 2xy^3 - x^2 + 2y$, точка $A(-1;\ -2)$ и вектор $\vec{l} = a\vec{i} + 11\vec{j}$. При каком значении параметра a производная функции в точке A по направлению $\vec{l}$ будет минимальна?

2.73. Найдите приближенно производную функции $f(P)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, если $f(A) = 5$, $f(B) = 5.06$ и длина AB равна 0.03.

2.74. Найдите приближенно значение f(B), если f(A) = 6, длина отрезка AB равна 0.02, $grad\, f(A) = (6;-8)$, а косинус угла между вектором $grad\, f(A)$ и вектором $\overrightarrow{AB}$ равен $\dfrac{2}{5}$.

3. Первый и второй дифференциал. Касательная плоскость.

3.1. Найдите приращение Δf и дифференциал df функции $f(x,y)=x^2y$ в точке (1; 1).

3.2. Найдите приращение Δf и дифференциал df функции $f(x,y)=x^2+xy-y^2$ в точке (1; 1).

3.3. Найдите первый дифференциал функции f в данной точке

а) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, (1; 1)

б) $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$, (2; 1)

в) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, (1; 0; 1)

г) $f(x,y,z)=arctg\dfrac{xy}{z^2}$, (3; 2; 1)

г) $f(x,y,z)=\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^z$, (1; 1; 1)

3.4. Найдите первый дифференциал функции

а) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

б) $f(x,y)=\ln(3x+2y)$

в) $f(x,y)=(y^3+2x^2y+3)^4$

г) $f(x,y)=x+y^2+\ln(x+y^2)$

д) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$

е) $f(x,y,z)=tg^2\dfrac{xy}{z}$

ж) $f(x,y,z)=e^{x^2yz^3}$

3.5. Найдите все частные производные второго порядка

а) $f(x,y)=xy(x^3+y^3-3)$

б) $f(x,y)=y^2(1-e^x)$

в) $f(x,y)=\ln(x^2+y)$

г) $f(x,y,z)=x(1+y^2z^3)$

д) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$

е) $f(x,y,z)=\sin\dfrac{xy}{z}$

3.6. Покажите, что если $u = xz + e^{yz} + y$, то $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

3.7. Покажите, что если $u = xz + e^{yz} + y$, то $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial z \partial y \partial x}$.

3.8. Найдите все производные третьего порядка

а) $z = x^4 + 5y^3 + 3x - y$

б) $z = xe^y + ye^x$

в) $z = \sin(3x - 2y)$

г) $z = x^2 y^3$

3.9. Найдите вторые дифференциалы

а) $z = e^{3x-2y}$

б) $z = y \ln x$

в) $z = x \ln \frac{x}{y}$

г) $z = e^{x+y^2}$

д) $u = xy + yz + xz$

е) $u = x^4 + 2y^3 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$

3.10. Найдите точки, в которых $grad\, f(x, y) = 0$ если

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$

б) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

в) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$

3.11. Найдите точки, в которых первый дифференциал функции f равен нулю

а) $f(x, y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2 + xy + y^2)}$

б) $f(x, y, z) = 2y^2 + z^2 - xy^2 - yz + 4x + 1$

3.12. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A) = 2$, $f(B) = 2{,}03$, $f(C) = 1{,}92$, где A(2; 6), B(2; 6,01), C(2,02; 6). Найдите приближенно частные производные в точке A. В ответе укажите значение производной по направлению вектора $\vec{l} = (3;\ 4)$.

3.13. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A) = 5$, $f(B) = 5{,}03$, $f(C) = 5{,}08$, где A(3; 7), B(3; 7,01), C(3,02; 7). Найдите приближенно частные производные в точке A. В ответе укажите значение производной по направлению вектора $\vec{l} = (3;\ 4)$.

3.14. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A) = 3$, $f(B) = 2{,}97$, $f(C) = 3{,}08$, при этом A(3; 6), B(3; 6,01), C(3,02; 6). Найдите приближенно частные производные в точке А. В ответе укажите значение производной по направлению вектора $\vec{l}=(3;\ 4)$.

3.15. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\dfrac{x^2}{2}-y^2$ в точке (2;-1; 1).

3.16. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ в точке (1; 1; 1).

3.17. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке (1; 0; 0).

3.18. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x(y+z)(z-xy)=8$ в точке (2; 1; 3).

3.19. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2-y^2-z^2=1$ в точке (3; 2; 2).

3.20. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$ в точке (1; 1; 2).

3.21. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $e^z-z+xy=3$ в точке (2; 1; 0).

3.22. Напишите уравнение плоскости, касательной к поверхности $3x^2+2y^2+z^2=21$, параллельной плоскости $6x-4y-z=0$.

3.23. Напишите уравнение плоскости, касательной к поверхности $xy+z^2+xz=1$, параллельной плоскости $x+2z-y=0$.

3.24. Напишите уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2+y^2+z^2=2x$, перпендикулярной плоскостям $x-y-z=2$ и $x-y-\frac{1}{2}z=2$.

3.25 Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P)=f(x;y)$, у которой известны значения $f(A)=-7$, $f(B)=-7.02$, $f(C)=-7.04$ в точках $A(6;4)$, $B(6.01;4)$, $C(6;3{,}98)$. Найдите приближенно:

а) Частные производные и первый дифференциал в точке A.

б) Значение функции в точке $D(5.95;4.02)$.

в) Касательную плоскость к поверхности $z=f(P)$ в точке А.

г) Нормаль к поверхности графика $z=f(P)$ в точке А.

д) Градиент в точке А.

е) Производную в точке A по направлению, составляющему угол $\frac{\pi}{6}$ с градиентом.

ж) Производную в точке A по направлению к точке D (с помощью градиента и по определению).

з) Линию уровня, равного $f(A)$, в окрестности точки A (при дополнительном предположении, что в этой окрестности функция $f(P)$ имеет непрерывные частные производные).

4. Приближенные вычисления. Формула Тейлора.

4.1. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенное значение $\exp(2{,}05^3 + 0{,}9^4 - 9)$, исходя из значения функции $z = \exp(x^3 + y^4 - 9)$ при $x = 2$, $y = 1$.

4.2. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенное значение $\sqrt{3{,}61 - 0{,}05^2}$, исходя из значения функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ при $x = 2$, $y = 0$.

4.3. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$

4.4. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$

4.5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\dfrac{(1{,}98)^3}{(2{,}01)^2}$

4.6. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{(0{,}98)\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$

4.7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$

4.8. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $0{,}97^{1{,}05}$

4.9. На сколько изменится диагональ и площадь прямоугольника со сторонами $x = 6$ м и $y = 8$ м, если первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм.

4.10. При заданной производственной функции Кобба-Дугласа $Q = AK^{0,9}L^{0,5}$ ($A = const$) установите, как изменится объем выпуска продукции Q (в процентах) при увеличении затрат капитала K и уменьшении трудовых ресурсов L соответственно на 5% и 7%.

4.11. На сколько процентов приближенно изменится спрос, описываемый функцией $z = 5474e^{-\sqrt{n+p^2}}$, где n - число производителей товара, а p- цена товара, если число производителей товара уменьшится на 1%, а цена возрастет на 1%. На рынке товара имеется 7 производителей, цена товара составляет 3 ед.

4.12. Разложите функцию $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ по формуле Тейлора в окрестности точки (1;-2).

4.13. Разложите функцию $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ по формуле Тейлора в окрестности точки (-2; 1).

4.14. Разложите функцию $f(x, y, z) = x^2 + 3z^2 - 2yz - 3z$ по формуле Тейлора в окрестности точки (0; 1; 2).

4.15. Разложите функцию $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1; 1) с точностью до членов второго порядка малости.

4.16. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки (0; 2) до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$, функцию $f(x, y) = \sin x \ln(y)$.

4.17. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки (0; 0; 1) до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$, функцию $f(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$.

4.18. Разложите функцию $f(x, y) = x^y$ по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1) с точностью до членов второго порядка малости.

4.19. Разложите функцию $f(x, y) = atctg\dfrac{1+x}{1+y}$ по формуле Тейлора в окрестности точки (0; 0) с точностью до членов второго порядка малости.

4.20. Разложите функцию $f(x, y) = \ln(\pi - 4arctg(x) + \dfrac{x^2}{y})$ по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1) с точностью до членов второго порядка малости.

5. Локальный экстремум функции нескольких переменных.

Найдите локальные экстремумы функций

5.1. $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$

5.2. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

5.3. $u = x^3 - 2y^2 - 3x + 8y$

5.4. $u = x^2 - 2xy + 4y^3$

5.5. $u = y^3 - 3x^2 - 27y + 12x$

5.6. $u = x^2 - 4xy + 8y^3$

5.7. $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$

5.8. $f\left(x, y, z\right) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

5.9. $f\left(x, y, z\right) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

5.10. $f\left(x, y, z\right) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$

5.11. $f\left(x, y, z\right) = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$

5.12. $u(x,y,z) = 2x^3 - 4xy + 2y^2 + 2xz + 0,5z^2 - 8y + 1$

5.13. $f(x,y,z) = 2x^3 + 2xy + 2xz + y^2 + z^2 + 2y - 8$

5.14. $u = x^2 + xy + y^2 + z^3 - 12x - 3y - 3z$

5.15. $u = 3 + 2x - y - 12z - x^2 + xy - y^2 + z^3$

5.16. $u = 2x^2 + xy + y^2 - z^3 - 9x - 4y + 27z$

5.17. $u = 1 + 4x + 2y + 24z - x^2 + 2xy - 4y^2 - 2z^3$

5.18. $u = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$

6. Локальный условный экстремум функции нескольких переменных.

6.1. Используя метод Лагранжа и метод исключения переменной, найдите условные локальные экстремумы функции $z = x^2 y$ при условии $x + y - 2 = 0$.

6.2. Используя метод Лагранжа и метод исключения переменной, найдите условные локальные экстремумы функции $z = \dfrac{y}{x^2}$ при условии $y - x + 1 = 0$.

6.3. Используя метод Лагранжа и метод исключения переменной, найдите условные локальные экстремумы функции $z = xy^2$ при условии $x + y - 3 = 0$.

6.4. Используя метод Лагранжа и метод исключения переменной, найдите условные локальные экстремумы функции $z = \dfrac{x}{y^2}$ при условии $x - y + 2 = 0$.

6.5. Найдите условные локальные экстремумы функции $z = x^2 + y^2 + xy$ при $x^2 + y^2 = 2$.

6.6. Найдите условные локальные экстремумы функции $z = 2x - 3y$ при $x^2 + y^2 - 13 = 0$.

6.7. Найдите условные локальные экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - 4xy$ при $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

6.8. Найдите условные локальные экстремумы функции $z=-x-y$ при $\frac{x^2}{4}+y^2=5$.

6.9. Найдите условные локальные экстремумы функции $z=e^{x+y}$ при условии $x^2+y^2=2$.

6.10. Найдите условные локальные экстремумы функции $z=e^{2x-3y}$ при условии $x^2+y^2=13$.

6.11. Найдите условные локальные экстремумы функции $z=e^{-x-y}$ при условии $\frac{x^2}{4}+y^2=5$.

6.12. Найдите условные локальные экстремумы функции $z=e^{xy}$ при условии $x^2+y^2=2$.

6.13. Найдите условные локальные экстремумы функции $z=6-5x-4y$ при условии $x^2-y^2=9$.

6.14. Найдите условные локальные экстремумы функции $z=1-4x-8y$ при условии $x^2-8y^2=8$.

6.15. Найдите условные локальные экстремумы функции $f\left(x,y\right)=2x+16y$ при условии $xy+y^2-7=0$.

6.16. Найдите условные локальные экстремумы функции $f\left(x,y\right)=2x+4y$ при условии $2xy+y^2-3=0.$

6.17. Найдите условные локальные экстремумы функции $f(x,y)=3x-6y$ при условии $y^2-xy-1=0$.

6.18. Найдите условные локальные экстремумы функции $f(x,y)=4x+8y$ при условии $y^2-2xy+5=0$.

6.19. Исследуйте точку A на условный экстремум, если в этой точке первый дифференциал функции Лагранжа $L(A,\lambda)$ равен нулю, а второй: $d^2L(A,\lambda) = 7(dx)^2 - 4dxdy - 5(dy)^2 - 2dxd\lambda + 6dyd\lambda$.

6.20. Исследуйте точку A на условный экстремум, если в этой точке первый дифференциал функции Лагранжа $L(A,\lambda)$ равен нулю, а второй: $d^2L(A,\lambda) = 2(dx)^2 - 20dxdy - 5(dy)^2 + 4dxd\lambda - 10dyd\lambda$.

6.21. Градиент функции $f(x;y)$ задан на оси Oy: $grad\, f(x;y)=(\cos y; y^4+3y^3+2y^2)$. Найдите в точках на оси Oy производные функции $f(x;y)$ по направлению оси Oy и исследуйте функцию $f(x;y)$ на условный экстремум на линии условия $x=0$.

6.22. Градиент функции $f(x;y)$ задан на оси Ox: $grad\, f(x;y)=(4x^2+3x^3-x^4; 1+\sin x)$. Найдите в точках на оси Ox производные функции $f(x;y)$ по направлению оси Ox и исследуйте функцию $f(x;y)$ на условный экстремум на линии условия $y=0$.

6.23. На линии условия $\varphi(x;y) = 2x + y - 1 = 0$ в семи точках даны градиенты функции двух переменных $f(P) = f(x;y)$: в точке $A(-3;7)$ градиент равен (3;1), в точке $B(-2;5)$ – (2;1), в $C(-1;3)$ – (3;1), в $D(0;1)$ – (4;2), в $E(1;-1)$ – (1;1), в $F(2;-3)$ – (6;3), в $G(3;-5)$ – (3;1). Все точки “подозрительные” на условный экстремум находятся среди указанных. Найдите эти точки и исследуйте их на условный экстремум.

6.24. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z=5x^2-4xy+2y^2$ в области, задаваемой неравенством $x^2+y^2\le 5$.

6.25. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x + 2y$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 \le 1$.

6.26. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = 4xy + 3y^2$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 \le 1$.

6.27. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 \le 2x$.

6.28. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в области, ограниченной осями координат и прямой $x + y - 4 = 0$.

6.29. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области, ограниченной осями координат и прямой $x + y + 3 = 0$.

6.30. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - 4x$ в области, ограниченной осями координат и прямой $2x + 3y - 12 = 0$.

6.31. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy + x + y$ в области, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

6.32. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

6.33. Найдите наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 - 6y$ в области, определяемой неравенствами $x \ge -4$, $y \le 4$, $y - x \ge 4$.

6.34. Найдите наибольшее значение функции $z = x - y^2 + 4y$ в области, определяемой неравенствами $x \le 3$, $y \ge 0$, $y - x \le 0$.

6.35. Найдите наименьшее значение функции $z = x^2 - 4x + y^2$ в области, определяемой неравенствами $x \le 3$, $y \ge -3$, $y - x \le -3$.

6.36. Найдите наименьшее значение функции $z = x^2 + 2x - y$ в области, определяемой неравенствами $x \le 0$, $y \ge 0$, $y - x \le 2$.

6.37. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 2x - 2y$ при условиях $3x - 2y \ge -6$, $3x + y \ge 3$, $0 \le x \le 3$, $y \ge 0$. Сделайте рисунок.

6.38. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = 3x + y$ при условиях $x + y \ge 4$, $x - y \le 0$, $x \ge 1$, $y \le 8$. Сделайте рисунок.

6.39. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 3 - x - y$ при условиях $3x + 2y \ge 6$, $2x - y \ge -3$, $0 \le x \le 4$, $y \ge 0$. Сделайте рисунок.

6.40. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = 3 + x + 2y$ при условиях $x + y \ge 6$, $y - x \ge 0$, $x \ge 2$, $y \le 10$. Сделайте рисунок.

6.41. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 2x + 3y$, если $x + 2y \le 10$, $x + y \le 6$, $2x + y \le 9$, $x \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Сделайте рисунок.

7. Двойной интеграл.

Найдите интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Сравните результат с объемом соответствующего тела.

7.1. $D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$, $f(x,y)=3$.

7.2. $D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le x\}$, $f(x,y)=3$.

7.3. $D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le x\}$, $f(x,y)=3y$.

7.4. $D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le x\}$, $f(x,y)=3x$.

7.5. $D=\{0\le x\le 2,\ -x\le y\le x\}$, $f(x,y)=3y$.

7.6. $D=\{0\le x\le 2,\ -x\le y\le x\}$, $f(x,y)=3x$.

7.7. $D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6x$.

7.8. $D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6y$.

7.9. $D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6(1-x-y)$.

7.10. $D=\{0\le x\le 1,\ x-1\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6x$.

7.11. $D=\{0\le x\le 1,\ x-1\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6y$.

7.12. $D=\{0\le x\le 1,\ x-1\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6(1-x-y)$.

Изобразите область D и найдите интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Объясните совпадение ответов в пунктах а и б.

7.13.

а) $D=\left\{0\le x\le 3,\ 0\le y\le x^2\right\}$, $f(x,y)=4x+1$.

б) $D=\left\{0\le y\le 9,\ \sqrt{y}\le x\le 3\right\}$, $f(x,y)=4x+1$.

7.14.

а) $D=\left\{0\le x\le 1,\ x^2-1\le y\le 0\right\}$, $f(x,y)=15y$.

б) $D=\left\{-1\le y\le 0,\ 0\le x\le \sqrt{y+1}\right\}$, $f(x,y)=15y$.

7.15.

а) $D=\left\{0\le x\le 3,\ -x\le y\le x^2\right\}$, $f(x,y)=5y$.

б) $D=\{-3\le y\le 0,\ -y\le x\le 3\}\cup\left\{0\le y\le 9,\ \sqrt{y}\le x\le 3\right\}$, $f(x,y)=5y$.

7.16.

а) область D ограничена линиями $x=3y$, $x=0$, $y=1$, $f(x,y)=2x+y$.

б) область D ограничена линиями $y=3x$, $y=0$, $x=1$, $f(x,y)=x+2y$

7.17.

а) область D ограничена линиями $x=6y$, $x=0$, $y=1$, $f(x,y)=x+2y$.

б) область D ограничена линиями $y=6x$, $y=0$, $x=1$, $f(x,y)=2x+y$

Изобразите область интегрирования на плоскости. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле

7.18. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-x}^{1}f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x}f(x,y)dy$.

7.19. $\int\limits_{-3}^{0} dy \int\limits_{y^2}^{9} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{3y}^{9} f(x,y)dx$.

7.20. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x+1} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{1} f(x,y)dy$.

7.21. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2y-2}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)dx$.

7.22. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f\left(x,y\right)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-1}^{-y} f\left(x,y\right)dx$

7.23. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^3} f\left(x,y\right)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\left(x,y\right)dx$

7.24. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{\sqrt{-y}}^{2} f\left(x,y\right)dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} f\left(x,y\right)dx$

7.25. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f\left(x,y\right)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f\left(x,y\right)dy$

7.26. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_{4}^{6} dx \int\limits_{0}^{6-x} f(x,y)dy$

Изобразите область интегрирования на плоскости. Измените порядок интегрирования и найдите интеграл.

7.27. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{y} f'(x^2)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f'(x^2)dx$.

7.28. $\int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{1/y}^{2} f'(\ln x)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_1^{2/y} f'(\ln x)dx$.

8. Дополнительные задачи.

8.1. Найдите все точки B, для которых векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{c}(1;\,2;\,3)$ коллинеарны и $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\vec{c}\right|$, если задана точка $A(3;\,2;\,1)$.

8.2. Найдите время t, необходимое для перехода из точки $A(0;\,2;\,1)$ в точку $B(4;\,2;\,3)$ объекта, движущегося со скоростью $\vec{v}(2;\,0;\,1)$.

8.3. Объект, двигаясь по плоскости последовательно со скоростями $\overrightarrow{v_1}(1;\,-2)$ и $\overrightarrow{v_2}(2;\,3)$, попадает из точки $A(-1;\,3)$ в точку $B(7;\,1)$. Найдите соответствующие временные интервалы t_1 и t_2, а также точку B_{12} смены скоростей $\overrightarrow{v_1}$ на $\overrightarrow{v_2}$.

8.4. Объект, двигаясь последовательно со скоростями $\overrightarrow{v_1}(1;\,0;\,-1)$, $\overrightarrow{v_2}(-1;\,1;\,3)$ и $\overrightarrow{v_3}(-1;\,-1;\,1)$, попадает из точки $A(2;\,3;\,-2)$ в точку $B(1;\,2;\,3)$. Найдите соответствующие временные интервалы t_1, t_2 и t_3, а также точки B_{12} и B_{23} смены скоростей $\overrightarrow{v_1}$ на $\overrightarrow{v_2}$ и $\overrightarrow{v_2}$ на $\overrightarrow{v_3}$.

8.5. Найдите величину параметра $\alpha \in [0;\pi]$, если угол между векторами $\vec{a}(3\cos\alpha;-5\sin\alpha;3\sin\alpha;5\cos\alpha)$ и $\vec{b}(3;0;0;5)$ равен $\dfrac{\pi}{7}$.

8.6. Найдите величину параметра $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, если угол между векторами $\vec{a}(5\cos\alpha;2\sin\alpha;5\sin\alpha;2\cos\alpha)$ и $\vec{b}(0;2;5;0)$ равен $\dfrac{3\pi}{4}$.

8.7. Найдите величину параметра $\alpha \in [0;\pi]$, если угол между векторами $\vec{a}(-3\cos\alpha;5\sin\alpha;-3\sin\alpha;5\cos\alpha)$ и $\vec{b}(3;0;0;-5)$ равен $\dfrac{\pi}{7}$.

8.8. Найдите величину параметра $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, если угол между векторами $\vec{a}(5\cos\alpha; -2\sin\alpha; 5\sin\alpha; -2\cos\alpha)$ и $\vec{b}(0; 2; -5; 0)$ равен $\frac{3\pi}{4}$.

8.9. Найдите косинус угла между вектором $\vec{a}(3; -4; 5)$ и вектором $\vec{b}$ – проекцией вектора $\vec{a}$ на координатную плоскость *xOy*.

8.10. Найдите каноническое уравнение прямой, полученной отражением прямой
$\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ относительно координатной плоскости *yOz*.

8.11. Найдите параметрическое уравнение прямой, полученной отражением прямой $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{3}$ относительно координатной оси *Oz*.

8.12. Найдите уравнение плоскости, полученной отражением плоскости $2(x-3) - 3(y-1) + 4(z+3) = 0$ относительно координатной плоскости *xOz*.

8.13. Найдите уравнение плоскости, полученной отражением плоскости $3(x+1) - 2(y-3) - 4(z+2) = 0$ относительно координатной оси *Ox*.

8.14. На прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z+1}{-5}$ взяты две точки *A* и *B* на расстоянии $\sqrt{104}$ друг от друга. На каком расстоянии друг от друга лежат их проекции A' и B' на ось Oz?

8.15. При каких значениях параметра *x* площадь параллелограмма, построенного на векторах (*x*; 3) и (3; 4), больше площади параллелограмма, построенного на векторах (2; 3) и (3; 4)?

8.16. При каких значениях параметра p объем параллелепипеда, построенного на векторах $(2;3;0)$, $(3;4;0)$ и $(7;8;p)$ меньше объема параллелепипеда, построенного на векторах $(2;3;0)$, $(3;4;0)$ и $(7;8;-4)$?

8.17. Найдите расстояние от сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$ до точки $A(3;\,6;\,1)$.

8.18. Найдите расстояние от сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$ до сферы $(x-3)^2+(y-6)^2+(z-1)^2=1$.
.

8.19. Найдите расстояние от сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=64$ до сферы $(x-3)^2+(y-6)^2+(z-1)^2=1$.

8.20. Найдите точку A касания сфер $(x-3)^2+(y-6)^2+(z-1)^2=9$ и $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

8.21. Найдите точку A касания сфер $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=36$ и $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

8.22. Найдите расстояние от сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$ до плоскости $x-2y+2z-6=0$.

8.23. При каких значениях параметра D плоскость $x-2y+2z+D=0$ касается сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$.

8.24. Найдите радиус r окружности, по которой сфера $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$ пересекается с плоскостью $x-2y+2z-3=0$.

8.25. Дан бесконечный конус с вершиной $A(1;\,2;\,3)$, осью $\{\,x=1+2t$; $y=2+t$; $z=3-2t$; $t\in[0+\infty)\,\}$ и углом при вершине 2α таким, что $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$. Найдите

а) уравнение поверхности (боковой) этого конуса.

б) условие на координаты точек его внутренней части.

8.26. Найдите $\mathbf{A}^{-1}$, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (Указание: считайте матрицу $\mathbf{A}$ матрицей коэффициентов систем линейных уравнений, с соответствующими правыми частями).

8.27. Исследовать совместность следующих систем уравнений в зависимости от параметра λ

$$a)\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 10 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = \lambda \end{cases}$$

$$б)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 5 \end{cases}$$

8.28. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5}{n^2+7}\right)^{f\left(\frac{1}{n}\right)}$, если $f(x) \sim \dfrac{5}{x^2}$ при $x \to 0$.

8.29. Используя только определение производной, действия с ней и табличные производные, найдите $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3^{2+\Delta x}-9}{\Delta x}$.

8.30. Используя только определение производной, действия с ней и табличные производные, найдите $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{f(\mathrm{tg}\, x) - f(1)}{x - \pi/4}$, если $f(\pi/4) = 2$, $f(1) = 3$, $f'(\pi/4) = 4$, $f'(1) = 5$.

8.31. Используя только определение производной, действия с ней и табличные производные, найдите $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{f(x)\cdot\mathrm{tg}\,x - f(1)}{4x-\pi}$, если $f(\pi/4) = 2$, $f(1) = 3$, $f'(\pi/4) = 4$, $f'(1) = 5$.

8.32. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+2x^2}{4-x^2}\right)^{f\left(\frac{1}{x}\right)}$, если $f(x)\sim 4x^2$ при $x\to\infty$.

8.33. Дана эластичность функции $\mathrm{E}_x(y)=\dfrac{dy}{y}:\dfrac{dx}{x}=\dfrac{y'\cdot x}{y}$. Найдите предел эластичности $\mathrm{E}_x(y)$ при $x\to+\infty$, если $y=\dfrac{x^{10}+3}{x^6+x^3}$. Сравните результат с эластичностью $\mathrm{E}_x(z)$, где $z=x^n\sim y$ при $x\to+\infty$.

8.34. Найдите предел эластичности $\mathrm{E}_x(y)$ при $x\to+0$, если $y=\dfrac{2-x^4}{x^7+x^3}$. Сравните результат с эластичностью $\mathrm{E}_x(z)$, где $z=x^n\sim y$ при $x\to+0$.

8.35. Известно, что $g'(a)=\alpha$, $h'(a)=\beta$ и $f(x)=g(h(x))$. Чему равно значение $f'(a)$?

8.36. Известно, что $g'(b)=\alpha$, $h'(a)=\beta$, $h(a)=b$ и $f(x)=g(h(x))$. Чему равно значение $f'(a)$?

8.37. Найдите $g'(1)$, если $g(x)=f(f(f(x)))$, где $f(x)=x^6-x+1$.

8.38. Найдите $g'(1)$, если $g(x)=f(f(f(x)))$, где $f(x)=x^3+1$.

8.39. Вычислите дробь $\dfrac{h'(x)}{g'(3^x)}$, если $h(x)=g(3^x)$.

8.40. Вычислите дробь $\dfrac{h'(x)}{g'(x)}$, если $g(x) = \ln h(x)$.

8.41. Зависимость y от x задана параметрически, причем $\dfrac{d^{10}y}{dx^{10}} = \dfrac{e^t}{t}$ и $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^t}{t^3}$. Найдите $\dfrac{d^{11}y}{dx^{11}}$ при $t = 2$.

8.42. Зависимость y от x задана параметрически, причем $\dfrac{d^7y}{dx^7} = \sin^{10} t$ и $\dfrac{dx}{dt} = \sin^9 t$. Найдите $\dfrac{d^8y}{dx^8}$ при $t = \dfrac{\pi}{3}$.

8.43. К графику функции $y = 0{,}5\,(x - 2)^6$ в точке $M(3;\,0{,}5)$ проведена касательная. На касательной взяты точки A и B с разностью проекций на ось Ox равной 5.
а)Найдите разность их проекций на ось Oy.

б) Найдите квадрат расстояния между точками A и B.

в) Найдите тангенс угла наклона касательной к оси Ox при выборе разного масштаба на координатных осях: $|OB| = |OA|$, если $A(20,0)$, $B(0,30)$.

8.44. Прямая $\boldsymbol{l}$ получена зеркальным отражением касательной из предыдущей задачи относительно прямой $y = x$. Найдите квадрат расстояния между точками A и B, находящимися на прямой $\boldsymbol{l}$, если разность их проекций на ось Ox равна 6.

8.45. Зависимость $y = f(x)$ задана неявно уравнением $x \cdot g(y) + y \cdot h(x) - 15 = 0$. Найдите параметр b в уравнении $y = kx + b$ касательной к графику $y = f(x)$ в точке $A(2;3)$, если $g(3) = -3$, $g'(3) = -12$, $h(2) = 7$, $h'(2) = 2$.

8.46. Найдите точку минимума функции $f(x^3 - 9x^2 + 24x + 10)$, если $f(x)$ – монотонно убывающая функция, не имеющая критических точек.

8.47. Найдите точку максимума функции $f(5+45x-3x^2-x^3)$, если $f(x)$ – монотонно убывающая функция, не имеющая критических точек.

8.48. Найдите множество всех возможных значений $f(180)$, если $f(0)=0$ и $1 \le f'(x) \le 2$ при всех $x \in [0;\ 180]$.

8.49. Найдите множество всех возможных значений $f(180)$, если $f(400)=500$ и $1 \le f'(x) \le 2$ при всех $x \in [180;\ 400]$.

8.50. Найдите множество всех возможных значений $f(180)$, если $f(0)=0$, $f(400)=500$ и $1 \le f'(x) \le 2$ при всех $x \in [0;\ 400]$.

8.51. Найдите сумму ординат всех точек пересечения асимптот графика $y=\dfrac{2x^3-3x^2}{x^2-3x+2}$.

.

8.52. Найдите сумму ординат всех точек пересечения асимптот графика $y=\dfrac{3x^2-2x^3}{x^2+2x-8}$.

8.53. Найдите множество всех возможных значений $f(2)$, если $f(0)=0$, $f'(0)=1$ и $1 \le f''(x) \le 6x^2+1$ при всех $x \in [0;\ 2]$.

8.54. Функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную вторую производную при всех $x \in (-\infty;+\infty)$. График функции $y=f(x)$ имеет асимптоту $y=1-x$ при $x \to +\infty$ и $y=2x+1$ при $x \to -\infty$. Кроме того, $(x-2)\cdot f''(x)>0$ при всех $x \ne 2$. Изобразите эскиз графика $y=f(x)$ и оцените возможные значения $f(2)$.

8.55. Функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную вторую производную при всех $x \in (-\infty;+\infty)$. График функции $y=f(x)$ имеет асимптоту $y=x+3$ при $x \to -\infty$ и $y=2x-2$ при $x \to +\infty$. Кроме того, $(x-2)\cdot f''(x)>0$ при всех $x \ne -1$. Изобразите эскиз графика $y=f(x)$ и оцените возможные значения $f(-1)$.

8.56. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$ по степеням $x-10$, используя формулу Тейлора. Найдите $P''(10)$, если $P(10)=4$, $P'(10)=1$, $P'''(10)=18$, $P^{(4)}(10)=48$ и $P(11)=11$.

8.57. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$ по степеням $x-11$, используя формулу Тейлора. Найдите $P'''(11)$, если $P(11)=5$, $P'(11)=4$, $P''(11)=6$, $P^{(4)}(11)=72$ и $P(10)=5$.

8.58. Используя стандартные разложения функций $\ln(1+t)$, e^t, $(1+t)^\alpha$ по формуле Маклорена по степеням $t=\dfrac{1}{x}$, найдите наклонные асимптоты следующих функций

а) $f(x)=x^3\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-x^2$

б) $f(x)=x^2\left(e^{\frac{2x+1}{x}}-e^2\right)$

в) $f(x)=\sqrt[10]{x^{20}+10x^{19}}-x^2$

8.59. Вычислив производную $\left(\cos x^5\right)'$, найдите $\int x^4\sin x^5dx$.

8.60. Вычислив производную $\left(\ln(1-x^4)\right)'$, найдите $\int\dfrac{x^3}{1-x^4}dx$.

8.61. Известно, что $\int\dfrac{\pi^{3/2}\cos x}{x^2+\pi^2}dx=F(x)+C$ и $g(x)=F(x^2)$. Найдите $g'\left(\sqrt{\pi}\right)$.

8.62. Известно, что $\int\dfrac{5^x}{x^2+9}dx=F(x)+C$ и $g(x)=F\left(x^2\right)$. Найдите $g'(2)$.

8.63. Известно, что $F'(x)=f(x)$ и $G(x)$ – первообразная функции $\cos 2x\cdot f(\sin 2x)$. Найдите $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $F(0)=2$, $F(1)=3$ и $G(0)=2$.

8.64. Известно, что $G'(x) = \sin 3x \cdot f(\cos 3x)$ и $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Найдите $F(0)$, если $G(0) = 2$, $G\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ и $F(1) = 3$.

8.65. Известно, что $F'(x) = x^3 g'(x)$ и $G'(x) = x^2 g(x)$. Найдите $F(2)$, если $F(0) = 1$, $g(0) = 1$, $G(0) = 1$, $g(2) = 2$, $G(2) = 2$.

8.66. Известно, что $F'(x) = \sin x \cdot g'(x)$ и $G'(x) = \cos x \cdot g(x)$. Найдите $F(\pi)$, если $F(0) = 1$, $G(0) = 1$, $G(\pi) = 3$.

8.67. Известно, что $\int \dfrac{g(x)}{x^2 + 3x + 2} dx = a \cdot G(x,b) + c \cdot G(x,d) + C$, где $G(x, x_0)$ – первообразная функции $\dfrac{g(x)}{x - x_0}$. Найдите *a*, *b*, *c*, *d*, если $b > d$.

8.68. Выразите через определенный интеграл и найдите $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если $S_n = \dfrac{1}{n}\left(f'\left(\dfrac{5n+1}{n}\right) + f'\left(\dfrac{5n+2}{n}\right) + f'\left(\dfrac{5n+3}{n}\right) + \ldots + f'\left(\dfrac{6n}{n}\right)\right)$, а функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную и $f(n) = n!$ при $\forall n \in N$.

8.69. Выразите через определенный интеграл и найдите

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{\sin\frac{k}{n}} \cdot \left(\sin\frac{k}{n} - \sin\frac{k-1}{n} \right).$$

8.70. Выразите через определенный интеграл и найдите

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{k\pi}{4n}} \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{k\pi}{4n} - \operatorname{tg}\frac{(k-1)\pi}{4n} \right).$$

8.71. Функция $f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает на отрезке $[0;6]$. Найдите интервал $(A;B)$ возможных значений $I(f) = \int\limits_0^6 f(x)dx$, если $f(0) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, $f(6) = 5$. Укажите графически функцию $f(x)$ так, чтобы:

а) $I(f) \approx A$;
б) $I(f) \approx B$;
в) $I(f) = (A+B)/2$.

8.72. Функция $f(x)$ непрерывна и монотонно убывает на отрезке $[0;6]$. Найдите интервал $(A;B)$ возможных значений $I(f) = \int\limits_0^6 f(x)dx$, если $f(0)=5$, $f(1)=4$, $f(3)=3$, $f(4)=2$, $f(6)=0$. Укажите графически функцию $f(x)$ так, чтобы:
а) $I(f) \approx A$;
б) $I(f) \approx B$;
в) $I(f) = (A+B)/2$.

8.73. Найдите экстремумы функции $F(x) = \int\limits_a^x \frac{t^4 - 3t^3 + 2t^2}{g^2(t)+1} dt$ ($g(x)$ – непрерывная функция).

8.74. Известно, что $f(x)$ – непрерывная функция, $f(0)=2$, $f(1)=3$, $G(x) = \int\limits_a^{2x+1} f(t)dt$ и $G'(x) = g(x)$. Найдите $g(0)$.

8.75. Известно, что $f(x)$ – непрерывная функция, $f(2)=2$, $f(4)=3$, $G(x) = \int\limits_a^{x^2} f(t)dt$ и $G'(x) = g(x)$. Найдите $g(2)$.

8.76. Известно, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cdot f(\cos 3x)dx = -1$. Найдите $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

8.77. Известно, что $G'(x) = x^2 g(x)$. Найдите $\int\limits_0^2 x^3 g'(x)dx$, если $g(0)=1$, $G(0)=1$, $g(2)=2$, $G(2)=2$.

8.78. Известно, что $G'(x)=\cos x\cdot g(x)$. Найдите $\int\limits_0^{\pi}\sin x\cdot g'(x)dx$, если $G(0)=1$, $G(\pi)=3$.

8.79. Найдите $\int\limits_1^3 x^2 f(x^3)dx$, если $\int\limits_1^3 f(x^3)dx=3$, $\int\limits_1^3 f(x)dx=6$ и $\int\limits_3^{27} f(x)dx=9$.

8.80. Найдите $\int\limits_0^2 xf(4-x^2)dx$, если $\int\limits_0^2 f(4-x^2)dx=2$, $\int\limits_0^2 f(x)dx=4$ и $\int\limits_0^4 f(x)dx=6$.

8.81. Найдите определенный интеграл $\int\limits_2^3 e^{-4t^2}dt$, если $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt=F(x)$, где $F(x)$ – заданная функция.

8.82. Известно, что $\Phi(x)=\int\limits_0^x f(t,0,1)dt$, где $f(x,a,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$ и $\Phi(0.5)\approx 0.1915$, $\Phi(1)\approx$ 0.3413, $\Phi(1.5)\approx 0.4332$, $\Phi(2)\approx 0.4772$, $\Phi(+\infty)\approx 0.5$.

а) Найдите параметр a, если $\int\limits_{-\infty}^{5} f(x,a,4)dx\approx 0.9332$.

б) Найдите параметр a, если $\int\limits_2^{\infty} f(x,a,6)dx\approx 0.9772$.

в) Найдите параметр σ, если $\int\limits_{-\infty}^{2} f(x,6,\sigma)dx\approx 0.1587$.

г) Найдите параметр σ, если $\int\limits_2^{\infty} f(x,-2,\sigma)dx\approx 0.3085$.

8.83. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема. Докажите, что $f(x+at)-f(x)=k\cdot t+o(t)$ при $t\to 0$ и найдите k.

8.84. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) \neq 0$. Докажите, что $f(x+at)-f(x) \sim k \cdot t$ при $t \to 0$ ($a \neq 0$). Найдите k.

8.85. Известно, что $f(x+at)-f(x) \sim k \cdot t$ при $t \to 0$ ($k \neq 0$, $a \neq 0$). Докажите, что функция $f(x)$ дифференцируема и найдите $f'(x)$.

8.86. Пусть функция $f(x;y)$ дифференцируема. Докажите, что $f(1+2t;2+3t)-f(1;2)=k \cdot t+o(t)$ при $t \to 0$ и найдите k.

8.87. Пусть функция $f(x;y)$ дифференцируема, и все ее частные производные первого порядка положительны. Докажите, что $f(1+2t;2+3t)-f(1;2) \sim k \cdot t$ при $t \to 0$ и найдите k.

8.88. Пусть функция $f(x;y;z)$ дифференцируема. Докажите, что $f(4+2t;5t;-2+t)-f(4;0;-2)=k \cdot t+o(t)$ при $t \to 0$ и найдите k.

8.89. Пусть функция $f(x;y;z)$ дифференцируема, и все ее частные производные первого порядка отрицательны. Докажите, что $f(4+2t;5t;-2+t)-f(4;0;-2) \sim k \cdot t$ при $t \to 0$ и найдите k.

8.90. Используя определение дифференциала, найдите частные производные $f'_x(0;2)$ и $f'_y(0;2)$, если $f(2t;2-3t)-f(0;2)=-8t+o(t)$ и $f(3t;2+2t)-f(0;2)=t+o(t)$.

8.91. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P)=f(x,y)$. Известно, что $f(A)=2$, $f(B)=2{,}01$, $f(C)=1{,}92$, где A(2; 6), B(2.03; 6,02), C(2,02; 5.97). Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно частные производные точке в A.

8.92. Пусть функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка в точке $A(0;1)$, и $f'_x(A)=f'_y(A)=0$. Докажите, что $f(2t;1+3t)-f(0;1)=k\cdot t^2+o(t^2)$ при $t\to 0$ и найдите k.

8.93. Пусть функция $f(x;y)$ имеет положительные непрерывные частные производные 2-го порядка в точке $A(0;1)$, и $f'_x(A)=f'_y(A)=0$. Докажите, что $f(2t;1+3t)-f(0;1)\sim k\cdot t^2$ при $t\to 0$ и найдите k.

8.94. Функция $f(x;y)$ имеет отрицательные непрерывные частные производные 2-го порядка в точке $A(0;1)$, и $f'_x(A)=f'_y(A)=0$. Докажите, что функция $g(t)=f(2t;1+3t)-f(0;1)$ имеет локальный максимум при $t=0$.

8.95. Известно, что $f(1+2t;2+3t)-f(1;2)=13t+o(t)$ при $t\to 0$. Найдите производную функции $f(x;y)$ в точке $A(1;2)$ по направлению вектора $\vec{l}=(2;3)$.

8.96. Известно, что $f(1+2t;2+3t)-f(1;2)\sim 13t$ при $t\to 0$. Найдите производную функции $f(x;y)$ в точке $A(1;2)$ по направлению вектора $\vec{l}=(2;3)$.

8.97. Известно, что $f(5;6)-f(5+3t;6-4t)=10t+o(t)$ при $t\to 0$. Найдите производную функции $f(x;y)$ в точке $A(5;6)$ по направлению вектора $\vec{l}=(3;-4)$.

8.98. Известно, что $f(5;6)-f(5+3t;6-4t)\sim 10t$ при $t\to 0$. Найдите производную функции $f(x;y)$ в точке $A(5;6)$ по направлению вектора $\vec{l}=(3;-4)$.

8.99. Известно, что $f(5-3t;6+4t)-f(5;6)=15t+o(t)$ при $t\to 0$. Найдите производную функции $f(x;y)$ в точке $A(5;6)$ по направлению вектора $\vec{l}=(3;-4)$.

8.100. Известно, что $f(5-3t;6+4t)-f(5;6)\sim 15t$ при $t\to 0$. Найдите производную функции $f(x;y)$ в точке $A(5;6)$ по направлению вектора $\vec{l}=(3;-4)$.

8.101. Найдите производную функции $z=f(x^2+xy+2x+2y-1)$, по направлению $\vec{l}=(3;2)$ в точке $M(1;1)$, если $f'(5)=-2\sqrt{13}$.

8.102. Найдите производную функции $z=f(y^2-xy+3x-2y-2)$, по направлению $\vec{l}=(2;-4)$ в точке $M(2;3)$, если $f'(1)=2\sqrt{5}$.

8.103. Градиент функции $f(x;y)$ задан на оси Oy:
$gard\, f(x;y)=(\cos y; y^4+3y^3+2y^2)$. Найдите в точках оси Oy производные функции $f(x;y)$ по направлению оси Oy и исследуйте функцию $f(x;y)$ на условный экстремум на линии условия $x=0$.

8.104. Градиент функции $f(x;y)$ задан на оси Ox:
$gard\, f(x;y)=(4x^2+3x^3-x^4;1+\sin x)$. Найдите в точках оси Ox производные функции $f(x;y)$ по направлению оси Ox и исследуйте функцию $f(x;y)$ на условный экстремум на линии условия $y=0$.

8.105. Исследуйте, используя “окаймленный” гессиан, точку A на условный экстремум, если в этой точке первый дифференциал функции Лагранжа $L(A,\lambda)$ равен нулю, а второй: $d^2L(A,\lambda) = 7(dx)^2 + 4dxdy - 5(dy)^2 - 2dxd\lambda + 6dyd\lambda$.

8.106. Исследуйте точку A на условный экстремум, если в этой точке первый дифференциал функции Лагранжа $L(A,\lambda)$ равен нулю, а второй:
$d^2L(A,\lambda) = 2(dx)^2 - 20dxdy - 5(dy)^2 + 4dxd\lambda - 10dyd\lambda$.

8.107. На линии условия $\varphi(x;y) = 2x + y - 1 = 0$ в семи точках даны градиенты функции двух переменных $f(P) = f(x;y)$: в точке $A(-3;7)$

градиент равен (3;1), в точке B(-2;5) – (2;1), в C(-1;3) – (3;1), в D(0;1) – (4;2), в E(1;-1) – (1;1), в F(2;-3) – (6;3), в G(3;-5) – (3;1). Все точки "подозрительные" на условный экстремум находятся среди указанных. Найдите эти точки и исследовать их на условный экстремум.

Найдите общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

8.108.

а) $3y^2y' = g'(x)$

б) $3y^2y' = 2xg'(x^2)$

в) $y' = \dfrac{g'(x)}{(\arccos(y))'}$

г) $y' = \dfrac{3\cos(3x)}{g'(y)}$, если из соотношения $g(y) = z$ следует, что $y = e^z + z$

Решите задачу Коши

8.109.

а) $3y^2y' = g'(x)$, $y(7) = 2$, если $g(7) = 3$.

б) $3y^2y' = 2xg'(x^2)$, $y(2) = -2$, если $g(2) = -2$, $g(4) = 1$.

в) $y' = \dfrac{g'(x)}{(\arccos(y))'}$, $y(3) = 0$, если $g(3) = -2$.

8.110. Найдите общее решение однородного дифференциального уравнения $y' = {}^{y}\!/_{x} + \dfrac{g\left(\frac{y}{x}\right)}{g'\left(\frac{y}{x}\right)}$, если

а) $g(z) = \arcsin(z)$

б) $g(z) = \operatorname{arctg}(z)$

8.111. Проверьте, что общее решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения $y' + p(x)y = q(x)$ имеет вид $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$, где $y_0(x)$ – частное решение исходного уравнения, а $\tilde{y}(x)$ – общее решение уравнения $y' + p(x)y = 0$.

8.112. Используя результат предыдущей задачи, найдите общее решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения

а) $y' + 3y = \left(4^{\sin x}\right)' + 3 \cdot 4^{\sin x}$

б) $y' - \dfrac{g'(x)}{g(x)} y = \left(\cos x^3\right)' - \dfrac{g'(x)}{g(x)} \cos x^3$

8.113. При каких значениях k_1 и k_2 функция $C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ является общим решением уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$?

8.114. Найдите общее решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 3y' + 2y = \left(e^{x^2}\right)'' - 3\left(e^{x^2}\right)' + 2e^{x^2}$

8.115. Найдите решение задачи Коши: $y'' - 4y = \left(x^2 g(x)\right)'' - 4x^2 g(x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, если $g(x) \in C^2(R)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике. М.: Наука, 1986.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.

3. Зимина О.В., и др. Высшая математика. Решебник. М.: Физико-математическая литература, 2001.

4. Самовол В.С. Основы математического анализа для политологов.
Ч. I, Ч. II. Учебное пособие. М.: ГУ-ВШЭ, 2001.

5. Сборник задач по математическому анализу. Т.1-3, Под ред. Л.Д.Кудрявцева, М.:Физматлит, 2003.

6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие. Под ред. В.И.Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2005.

7. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001.

Ответы

2.49. $-2(1+e\ln 2)$. **2.50.** $13/4$. **2.51.** 2. **2.52.** -1. **2.53.** $z'_x=1$, $z'_y=0$. **2.54.** $z'_x=0$, $z'_y=\dfrac{\ln 2}{2}$. **2.55.** $z'_x=-2$, $z'_y=\dfrac{10}{3}$. **2.56.** $z'_x=-1$, $z'_y=-\dfrac{14}{9}$. **2.57.** $z'_x=1$, $z'_y=\dfrac{2}{2+\pi}$. **2.58.** $-11/\sqrt{2}$. **2.59.** -3/25. **2.60.** 27/5. **2.61.** $20\sqrt{3}/9$. **2.62.** $-\sqrt{6}/3$. **2.63.** $2\sqrt{2}/9$. **2.64.** $-1/\sqrt{2}$. **2.65.** $-1/\sqrt{3}$. **2.66.** $-42=-2\sqrt{13}\cdot(21/\sqrt{13})$. **2.67.** $-8=2\sqrt{5}\cdot(-4/\sqrt{5})$. **2.68.** $\dfrac{-4\vec{i}+5\vec{j}}{\sqrt{41}}$. **2.69.** $\dfrac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$. **2.70.** $\dfrac{\vec{i}-6\vec{k}}{\sqrt{37}}$. **2.71.** 26. **2.72.** 7. **2.73.** ≈ 2. **2.74.** $f(B)\approx 6.08$.

3.1 $\Delta f=2dx+dy+(dx)^2+2dx\,dy+(dx)^2dy$, $df=2dx+dy$.

3.2 $\Delta f=3dx-dy+(dx)^2+dx\,dy-(dy)^2$, $df=3dx-dy$. **3.3. а)** $dx-dy$.

3.3. б) $\dfrac{1}{2}dx$. **3.3. в)** $-\dfrac{dz}{2}$. **3.3. г)** $\dfrac{2dx+3dy-12dz}{37}$.

3.3. г) $2dx+\ln 4\,dz$. **3.10. а)** (2; 0). **3.10. б)** (0; 0), (1; 1).

3.10. в) (7; 2; 1). **3.11. а)** $(1;3)$, $(-1/26;-3/26)$. **3.11. б)** $(7/4;2;1)$, $(7/4;-2;-1)$. **3.12.** 0. **3.13.** 24/5. **3.14.** 0. **3.15.** $2x+2y-z-1=0$, $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. **3.16.** $x-2y+z=0$, $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

3.17. $2x-z-2=0$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-1}$. **3.18.** $2x+7y-5z+4=0$, $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{-5}$. **3.19.** $3x-2y-2z=1$, $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$.

3.20. $2x+y+11z=25$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{11}$. **3.21.** $x+2y=4$, $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$. **3.22.** $6x-4y-z=\pm 21$. **3.23.** $x-y+2z=\pm\sqrt{5}$.

3.24. $x+y=1\pm\sqrt{2}$. **3.25.** а) $f'_x(A)\approx -2$, $f'_y(A)\approx 2$,

$df(A) \approx -2dx + 2dy$. **3.25.** б) $f(D) \approx -6.86$. **3.25.** в) $z = -2x + 2y - 3$.

3.25. г) $\frac{x-6}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-1}$. **3.25.** д) $gradf(A) \approx (-2;2)$. **3.25.** е) $\sqrt{6}$.

3.25. ж) $\frac{14}{\sqrt{29}}$. **3.25.** з) $-2x + 2y + 4 = 0$.

4.1. 1,2. **4.2.** 1,9. **4.3.** 1,00. **4.4.** 4,998. **4.5.** 1,92. **4.6.** 1,055. **4.7.** 2,95. **4.8.** 0,97. **4.9**. Диагональ уменьшится на 3 мм, площадь уменьшится на 140 см^2. **4.10.** Вырастет на 1%. **4.11.** 1,375%.

4.12. $f(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

4.13. $f(x,y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$.

4.14. $f(x,y) = 2 - 4(y-1) + 7(z-2) + x^2 + 3(z-2)^2 - 2(y-1)(z-2)$.

4.15. $f(x,y,z)=3(x-1)^2+3(y-1)^2+3(z-1)^2-3(x-1)(y-1)-3(x-1)(z-1)-3(y-1)(z-1)+o(\rho^2)$,

$\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$.

4.16. $f(x,y) = x\ln 2 + 0{,}5x(y-2) + o(\rho^2)$.

4.17. $f(x,y) = 2(z-1) - (z-1)^2 + xy + o(\rho^2)$.

4.18. $f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + o(\rho^2)$.

4.19. $f(x,y) = \frac{\pi}{4} + 0{,}5(x-y) - 0{,}25(x^2 - y^2) + o(\rho^2)$.

4.20. $f(x,y) = -(y-1) + 2(x-1)^2 + 0{,}5(y-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + o(\rho^2)$.

5.1. (1; 2) – max. **5.2.** (0; 3)- max. **5.3.** (1, 2) – нет экстремума, (-1, 2) –max. **5.4.** (0, 0) –нет экстремума, (1/6, 1/6) –min. **5.5.** (2, -3) -- max; (2, 3)-- нет экстремума. **5.6.** (0, 0) – нет экстремума, (2/3, 1/3) – min. **5.7.** (3, 2) – min, (-3, -2) – max. **5.8.** (-1;-2; 3) – min. **5.9.** $(0;0;1)$ -- нет экстремума, (24;-144;-1) – min. **5.10.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ -- min;

$\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ -- нет экстр. **5.11.** $\left(1,-2,\frac{1}{2}\right)$ -- min; $\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$ -- нет экстр. **5.12.** (2; 4;-4) -- min; $\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ -- нет экстр.

5.13. (1;-2;-1) -- min; $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ -- нет экстр. **5.14.** (7, -2, 1) – min, (7, -2, -1) – нет экстремума. 5.**15** (1, 0, -2) – max, (1, 0, 2) – нет экстремума. **5.16.** (2, 1, -3) – min, (2, 1, 3) – нет экстремума. **5.17.** (3, 1, 2) – max, (3, 1, -2) – нет экстремума. **5.18.** (2, -6, 1) – min, (0, 0, 1) – нет экстремума.

6.1. (0, 2) – min, (4/3, 2/3) – max. **6.2.** (2, 1) – max. **6.3.** (3, 0) – min, (1, 2) – max. **6.4.** (2, 4) – max. **6.5.** (1, 1), (-1, -1) – max, (-1, 1), (1, -1) – min. **6.6.** (2, -3) – max, (-2, 3) – min. **6.7.** (-1; 1) (1;-1) – max, (1; 1) (-1;-1) – min. **6.8.** (-4, -1) – max, (4, 1) – min. **6.9.** (1, 1) – max, (-1, -1) – min. **6.10.** (2, -3) – max, (-2, 3) – min. **6.11.** (4, 1) – min, (-4, -1) – max. **6.12.** (1, 1) (-1, -1) – max, (-1, 1) (1, -1) – min. **6.13.** (-5, 4) – min, (5, -4) – max. **6.14.** (-4, 1) – min, (4, -1) – max. **6.15.** (6, 1) – min, (-6, -1) – max . **6.16.** (1, 1) – min, (-1, -1) – max . **6.17.** (0, -1) – min, (0, 1) – max. **6.18.** (3, 1) – min, (-3, -1) – max. **6.19.** $-\Delta=70 \Rightarrow$ A – условный минимум. **6.20.** $-\Delta=-170 \Rightarrow$ A – условный максимум. **6.21.** (0,-2) – условный максимум, (0,-1) – условный минимум, (0,0) – критическая точка. **6.22.** (-1,0) – условный минимум, (4,0) – условный максимум, (0,0) – критическая точка. **6.23.** Точка B критическая, D – условный максимум, F – условный минимум. **6.24.** (-2; 1), (2;-1) – max, (1; 2), (-1;-2) – min. **6.25.** наибольшее значение $z(1/\sqrt{5},\, 2/\sqrt{5})=\sqrt{5}$, наименьшее значение $z(-1/\sqrt{5},\,-2/\sqrt{5})=-\sqrt{5}$. **6.26.** наибольшее значение $z(1/\sqrt{5};\, 2/\sqrt{5})=z(-1/\sqrt{5};\,-2/\sqrt{5})=4$, наименьшее значение

$z(-2/\sqrt{5};1/\sqrt{5}) = z(2/\sqrt{5};1/\sqrt{5}) = 12/5$. **6.27.** наибольшее значение $z(2;\,0) = 4$, наименьшее значение $z(1/2;\pm\sqrt{3}/2) = -1/2$.

6.28. наибольшее значение $z(4;\,0) = 13$, наименьшее значение $z(1;\,2) = -4$. **6.29.** наибольшее значение: 6, наименьшее значение: -1.

6.30. наибольшее значение 16, наименьшее значение -16/3.

6.31. наибольшее значение 11, наименьшее значение 5.

6.32. наибольшее значение $z(2,-1) = 13$, наименьшее значение $z(1,1) = z(0,-1) = -1$. **6.33.** наименьшее значение $z(-0.5,3.5) = -8.5$.

6.34. наибольшее значение $z(3,2) = 7$, **6.35.** наименьшее значение $z(2.5,-0.5) = -3.5$. **6.36.** наименьшее значение $z(-0.5,1.5) = -2.25$.

6.37. $f(3,0) = 6$. **6.38.** $f(1,3) = 6$. **6.39.** $f(2,0) = 1$. **6.40.** $f(3,3) = 12$.

6.41. $f(2,\ 4) = 16$.

7.1. 6. **7.2.** 6. **7.3.** 4. **7.4.** 8. **7.5.** 0. **7.6.** 16. **7.7.** 1. **7.8.** 1. **7.9.** 1. **7.10.** 2. **7.11.** 0. **7.12.** 4. **7.13.** 90. **7.14.** -4. **7.15.** 99. **7.16.** 4.

7.17. 10. **7.18.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{1-y} f(x,y)dx$. **7.19.** $\int\limits_0^9 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\frac{x}{3}} f(x,y)dy$.

7.20. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$. **7.21.** $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_{-x/2-1}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$.

7.22. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{x^3}^{-x} f\left(x,y\right)dy$. **7.23.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{2-x} f\left(x,y\right)dy$.

7.24. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-x^2}^{x} f\left(x,y\right)dy$. **7.25.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f\left(x,y\right)dx$.

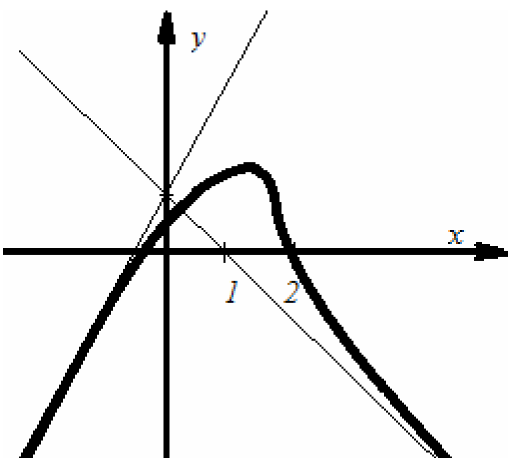
7.26. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{6-y} f(x,y)dx$. **7.27.** $\frac{1}{2}(f(4) - f(0)) = \int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f'(x^2)dy$.

7.28. $f(\ln 2) - f(0) = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{2/x} f'(\ln x)dy$.

8.1. $B_1(5;6;7)$, $B_2(1;-2;-5)$. **8.2.** $t=2$. **8.3.** $t_1=4$; $t_2=2$; $B_{12}(3;-5)$. **8.4.** $t_1=4$; $t_2=2$; $t_3=3$; $B_{12}(6;3;-6)$; $B_{23}(4;5;0)$. **8.5.** $\frac{\pi}{7}$. **8.6.** $-\frac{\pi}{4}$. **8.7.** $\frac{6\pi}{7}$. **8.8.** $\frac{\pi}{4}$. **8.9.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **8.10.** $\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-2}$. **8.11.** $\begin{cases} x=-3-4t \\ y=2+2t \\ z=1+3t \end{cases}$. **8.12.** $2x+3y+4z+9=0$. **8.13.** $3x+2y+4z+1=0$. **8.14.** 10. **8.15.** $x\in(-\infty;2)\cup(2{,}5;\infty)$. **8.16.** $|p|<4$. **8.17.** 2. **8.18.** 1 **8.19.** 1. **8.20.** $A(2;4;-1)$. **8.21.** $A(2;0;-1)$. **8.22.** 2. **8.23.** $D_1=-6$, $D_2=24$. **8.24.** $r=3$. **8.25. а)** $2(x-1)+(y-2)-2(z-3)=2\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+z-3)^2}$. **8.25. б) 8.25. б)** $2(x-1)+(y-2)-2(z-3)>2\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+z-3)^2}$.

8.26. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **8.27.** а)Совместна при $\lambda=0$, несовместна при $\lambda\neq 0$. **8.27.** б)Совместна при $\lambda\neq 5$, несовместна при $\lambda=5$. **8.28.** e^{-10}. **8.29.** $9\ln 3$. **8.30.** $f'(\text{tg}\,\pi/4)\cdot(\cos\pi/4)^{-2} = f'(1)\cdot 2 = 10$. **8.31.** $(f'(\pi/4)\cdot\text{tg}\,\pi/4+f(\pi/4)\cdot(\cos\pi/4)^{-2})/4=2$. **8.32.** e^3. **8.33.** 4. **8.34.** –3. **8.35.** Неизвестно. **8.36.** $\alpha\cdot\beta$. **8.37.** 125. **8.38.** 8748=$(3\cdot 9^2)\cdot(3\cdot 2^2)\cdot(3\cdot 1^2)$. **8.39.** $3^x\ln 3$. **8.40.** $h(x)$. **8.41.** 2 ($\frac{d^{11}y}{dx^{11}}=t^2-1$). **8.42.** 5 ($\frac{d^8y}{dx^8}=10\cos t$) **8.43. а)** $y_B-y_A=\text{k}\cdot(x_B-x_A)=3\cdot 5=15$. **8.43. б)** 250. **8.43. в)** 2. **8.44.** 40. **8.45.** –3. **8.46.** x=2 (x=4 максимум). **8.47.** x= –5 (x=3 минимум). **8.48.** [180; 360]. **8.49.** [60; 280]. **8.50.** [180; 280]. **8.51.** 12 **8.52.** 18. **8.53.** [4; 12] $(1+x\le f'(x)\le 1+x+2x^3 \Rightarrow x+\frac{x^2}{2}\le f(x)\le x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2})$.

8.54.



$f(2)\in(-1;5)$.

8.55. $f(-1)\in(-4;2)$. **8.56.** $P''(10)=2$. **8.57.** $P'''(11)=12$. **8.58. а)** $y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$. **8.58. б)** $y=e^2x+e^2/2$. **8.58. в)** $y=x-4.5$. **8.59.** $-\frac{1}{5}\cos x^5+C$.

8.60 $-\frac{1}{4}\ln|1-x^4|+C$. **8.61.** -1. **8.62.** 100. **8.63.** 2.5. **8.64.** 6. **8.65.** 14.

8.66. -1. **8.67.** 1, -1, -1, -2. **8.68.** 600=6! –5!. **8.69.** $e^{\sin 1}-1\approx 1.3198$. **8.70.** 0.75. **8.71.** $A=15$, $B=21$. **8.72.** $A=12$, $B=20$. **8.73.** $x_{\max}=1$, $x_{\min}=2$. **8.74.** 6=2*3. **8.75.** 12=4*3. **8.76.** 3. **8.77.** 13. **8.78.** -2. **8.79.** 5=(6+9)/3. **8.80.** 3=(-6)/(-2). **8.81.** $\frac{1}{2}\left(F(6)-F(4)\right)$. **8.82. а)** $a=-1$. **8.82. б)** $a=14$. **8.82. в)** $\sigma=4$. **8.82. г)** $\sigma=8$. **8.83.** $a\cdot f'(x)$. **8.84.** $a\cdot f(x)$. **8.85.** k/a **8.86.** $2f'_x(1;2)+3f'_y(1;2)$. **8.87.** $2f'_x(1;2)+3f'_y(1;2)$.

8.88. $2f'_x(4;0;-2)+5f'_y(4;0;-2)+f'_z(4;0;-2)$.

8.89. $2f'_x(4;0;-2)+5f'_y(4;0;-2)+f'_z(4;0;-2)$. **8.90.** $f'_x(0;2)=-1$, $f'_y(0;2)=2$. **8.91.** $f'_x(A)\approx-1$, $f'_y(A)\approx 2$.

8.92. $\frac{1}{2}\left(4f''_{xx}(0;1)+12f''_{xy}(0;1)+9f''_{yy}(0;1)\right)$.

8.93. $\frac{1}{2}\left(4f''_{xx}(0;1)+12f''_{xy}(0;1)+9f''_{yy}(0;1)\right)$. **8.95.** $\sqrt{13}$. **8.96.** $\sqrt{13}$.

8.97. -2. **8.98.** -2. **8.99.** -3. **8.100.** -3. **8.101.** $-42=-2\sqrt{13}*(21/\sqrt{13})$. **8.102.** $-8=2\sqrt{5}*(-4/\sqrt{5})$. **8.103.** (0,-2) – максимум, (0,-1) – минимум, (0,0) – крит. точка. **8.104.** (-1,0) – минимум, (4,0) – максимум, (0,0) – крит. точка. **8.105.** -Δ=70 ⇒ A – минимум. **8.106.** -Δ=-170 ⇒ A – максимум. **8.107.** Точка *B* – критическая, *D* – условный максимум, *F* – условный минимум. **8.108.** а) $y=\sqrt[3]{g(x)+C}$. **8.108.** б) $y=\sqrt[3]{g(x^2)+C}$.

8.108. в) $y=\cos(g(x)+C)$. **8.108.** г) $y=e^{\sin 3x+C}+\sin 3x+C$.

8.109. а) $y=\sqrt[3]{g(x)+5}$. **8.109.** б) $y=\sqrt[3]{g(x^2)-9}$.

8.109. в) $y=\cos(g(x)+2+\frac{\pi}{2}+\pi n), n\in\mathbb{Z}$. **8.110.** а) $y=x\sin(Cx)$.

8.110. б) $y=x\,\mathrm{tg}(Cx)$. **8.112.** а) $y=4^{\sin x}+Ce^{-3x}$.

8.112. б) $y=\cos x^3+Cg(x)$. **8.113.** $\{k_1;k_2\}=\{1;2\}$.

8.114. $y=e^{x^2}+C_1e^x+C_2e^{2x}$. **8.115.** $y=x^2g(x)+2,5e^{2x}+0,5e^{-2x}$.

Учебное издание

Логвенков Сергей Алексеевич,
Мышкис Петр Анатольевич,
Самовол Владимир Симхович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и социологии.

Учебное пособие

Редактор
Корректор
Оригинал-макет
Оформление

Лицензия
Подписано в печать . Формат
Усл. печ. .л . Тираж 500 экз.