У Ч Е Б Н И К И
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

ВШЭ
HSE

УЧЕБНИКИ
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

ВШЭ
HSE

В. А. Тиморин

ГЕОМЕТРИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ И УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Допущено Научно-методическим советом
по математике Минобрнауки России
в качестве учебного пособия для направления 010100.62 «Математика»
подготовки бакалавров

Издательский дом Высшей школы экономики
Москва 2017

УДК 514.7
ББК 22.151
Т41

Рукопись подготовлена в рамках грантового проекта ВШЭ
по изданию авторских учебников

Р е ц е н з е н т ы:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, академик РАН, заместитель директора Математического института им. В.А. Стеклова РАН
Д.В. Трещев;
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории динамических систем МГУ имени М.В. Ломоносова
А.А. Давыдов

Т41 **Тиморин, В. А.** Геометрия гамильтоновых систем и уравнений с частными производными [Текст] : учеб. пособие / В. А. Тиморин ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2017. — (Учебники Высшей школы экономики). — 350, [2] с. — 1000 экз. — ISBN 978-5-7598-1184-8 (в пер.). — ISBN 978-5-7598-1624-9 (e-book).

Учебное пособие основано на материалах лекций, прочитанных автором в 2010/2011 и 2011/2012 учебных годах студентам факультета математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Цель пособия — ознакомить читателя с некоторыми основными идеями современной математики, имеющими механические или физические мотивировки. Его особенностью, отраженной в названии, является целенаправленное использование геометрических, наглядных образов. Много внимания автор уделяет разбору конкретных примеров.

Адресовано студентам третьего-четвертого годов обучения в бакалавриате по специальности «Математика». От читателей требуется владение материалом обычной программы первых двух курсов математических факультетов.

УДК 514.7
ББК 22.151

Опубликовано Издательским домом Высшей школы экономики
<http://id.hse.ru>

ISBN 978-5-7598-1184-8 (в пер.)
ISBN 978-5-7598-1624-9 (e-book)

Оглавление

Предисловие

Предлагаемый учебник написан главным образом для студентов-математиков. Отличие от других учебников состоит в том, что здесь много места уделено неформальным мотивировкам, существенная часть которых связана с физикой. Несмотря на это я не ставил целью изложение физических понятий и методов. Апелляция к физической интуиции и, возможно, к тем знаниям по элементарной физике, которые читатель получил в школе, служит лишь для того, чтобы подчеркнуть естественность и наглядность обсуждаемых математических идей. В этом смысле данная книга антиподальна многим физическим учебникам, в которых, наоборот, математика воспринимается исключительно как инструмент для изучения физических явлений и отличается от асимметричных ответов математиков, в которых физические мотивировки просто игнорируются.

Основу учебника составили записки лекций по двум семестровым курсам, которые я читал в 2010/2011 и 2011/2012 учебных годах студентам факультета математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Это курсы по гамильтоновым системам и по уравнениям с частными производными, рассчитанные на третий-четвертый годы обучения в бакалавриате по специальности «Математика». Они являются частью цикла «Динамические системы», который начинается на втором году обучения с обыкновенных дифференциальных уравнений и лагранжевой механики. Прочитанные мною курсы были задуманы как естественное продолжение последних.

От читателя предполагается владение материалом обычной программы первых двух курсов математических факультетов. В частности, требуется знание основ анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и лагранжевой механики. Впрочем, лагранжева механика как таковая в этой книге не используется. Просто было бы неправильно начинать изучение классической механики с гамильтонова формализма. В некоторых частях книги активно используются дифференциальные формы. Для удобства читателя я поместил краткое напоминание про дифференциальные формы на многообразиях. Однако для первоначального знакомства с теорией гладких многообразий и дифференциальных форм необходимо более обстоятельное и мотивированное изложение.

Книгу можно условно разделить на две части. Они примерно соответствуют двум разным курсам (гамильтоновы системы и уравнения с частными производными). Тем не менее части не являются независимыми: во второй части используются результаты и методы, изложенные в первой части. Кроме того, логическая граница между двумя частями проходит по теории уравнений с частными производными первого порядка и методу

Гамильтона–Якоби. Эти темы одинаково тесно связаны и с первой, и со второй частью.

Почему геометрия? Геометрия, алгебра и анализ — это не предметное разделение, а методологическое. В частности, геометрия может применяться для изучения любых математических дисциплин. Геометрия может служить и языком изложения. В этой книге используется геометрический язык. Каждый раз, когда с тем или иным уравнением, формулой, теоремой можно связать наглядный образ, я старался подчеркнуть это обстоятельство. «Геометрия» означает еще и «наглядность». Собственно, именно наглядность отличает геометрию от остальных разделов математики. Для геометрии картинки (неважно, нарисованные или только представленные читателем в воображении) настолько же важны, как слова и формулы. В этой книге не очень много картинок, но от воображения читателя требуется активная работа.

Книга содержит большое количество примеров. Напротив, общие теории, как правило, лишь намечены. Моя цель ограничилась тем, чтобы продемонстрировать, в каком направлении теория развивается, но из соображений экономии места и доступности изложения мы не можем проследить за развитием теории во всех подробностях. Кроме того, я исходил из того, что понимание конкретных примеров должно предшествовать освоению общей теории. Предлагаемая книга помогает пройти именно этот первый этап. К счастью, учебники, посвященные последовательному и строгому изложению намеченных здесь теорий, имеются в достаточном количестве.

Продвинутый читатель, конечно, заметит, что автор находится под сильным влиянием книг В.И. Арнольда (особенно «Математические методы классической механики» [Арн2] и «Уравнения с частными производными» [Арн1]), а также отчасти книг Р. Куранта и Д. Гильберта [КГ]. Как материал книги, так и характер его изложения, существенно перекликаются с указанными источниками. Тем не менее предлагаемый учебник рассчитан на конкретную студенческую аудиторию, отличную от тех, к которым обращались «классики», и в нем, соответственно, по-другому расставлены акценты, выбраны другой порядок и отчасти другой язык изложения. Основные источники, использованные при подготовке учебника, упомянуты в списке литературы. Среди неопубликованных источников я должен упомянуть материалы, подготовленные моими коллегами И. Маршаллом, П.Е. Пушкарем, О.Л. Ромаскевич, А.И. Эстеровым, в том числе прочитанные ими лекции.

Имеющиеся в книге биографические справки о великих математиках не следует воспринимать слишком серьезно. Они основаны на вторичных источниках, достоверность которых мной не проверялась.

Владлен Тиморин

1
ГЛАВА

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Основные идеи гамильтоновой механики пришли из геометрической оптики. Поэтому мы сначала обсудим основные принципы геометрической оптики, а потом сформулируем аналогичные принципы гамильтоновой механики.

1.1. ПРИНЦИП ФЕРМА

Будем рассматривать распространение света как движение частиц — фотонов. По какой траектории движется фотон? Оказывается, в большинстве случаев траектория может быть найдена исходя из следующего принципа, сформулированного Ферма в 1650 году: *свет выбирает такую траекторию между двумя данными точками, движение по которой занимает минимальное время*.

Принципу Ферма предшествовали как экспериментальные, так и теоретические исследования движения света. Очень много было сделано греками. Птолемей, отказавшись от греческой традиции изучать явления природы умозрительно и дедуктивно, проводил множество экспериментов. В частности, он составил таблицы зависимости углов преломления от углов падения. Герон Александрийский сформулировал принцип наименьшего расстояния, который применим к однородным и изотропным средам. Согласно принципу Герона, свет в таких средах должен распространяться по прямой. Но этот принцип не объяснял явление преломления. Принцип Ферма объясняет эффект преломления, а также множество других эффектов.

Например, для конструкции линз достаточно пользоваться только принципом Ферма. На закате, когда мы видим солнце у самого горизонта, оно на самом деле уже зашло, то есть прямая, соединяющая нас (наблюдателя) и солнце, пересекает земную поверхность. То, что мы все-таки видим солнце, связано с изгибанием лучей. Лучи изгибаются, чтобы минимизировать свой путь через плотные слои атмосферы, в которых скорость света ниже.

С изгибанием лучей связано еще и то, что видимая форма солнца на закате не круглая, а сплюснутая.

На горячем асфальте или горячем песке можно увидеть мираж. Лучи как бы отражаются от горячего потока воздуха. На самом деле это явление можно объяснить при помощи принципа Ферма: лучам выгодно изгибаться и проходить существенное расстояние через горячий воздух, потому что скорость света в горячем воздухе больше, чем в холодном.

Постараемся формализовать принцип Ферма. Мы предполагаем, что скорость света в данной точке зависит только от точки и от направления, в котором движется свет (но не от того, скажем, где расположен источник света и какова его интенсивность). Скорость света в данной среде тем самым полностью определяется физическими свойствами среды. Среда называется *изотропной*, если скорость света зависит только от точки, но не от направления (чтобы подчеркнуть, что речь идет только об оптических свойствах среды, мы иногда будем говорить «оптически изотропная среда»). Будем полагать для простоты, что среда изотропна. Тогда скорость света можно изобразить функцией точки.

Вообще-то свет распространяется в трехмерном пространстве, но мы будем считать, что он распространяется на плоскости. Пусть $v(x,y)$ — скорость света в точке с координатами x и y. Тогда световая траектория минимизирует интеграл

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \frac{ds}{v(x,y)}.$$

Этот интеграл взят по кривой, соединяющей точки (x_0,y_0) и (x_1,y_1) (эти точки зафиксированы), и называется *оптической длиной кривой*. Параметр s — натуральный параметр на кривой (то есть такой параметр, приращение которого на произвольной дуге кривой равно длине этой дуги). Интеграл можно воспринимать как одномерный интеграл

$$\int\limits_0^L \frac{ds}{v(x(s),y(s))},$$

где L — длина кривой, а $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрическое уравнение кривой через натуральный параметр s. Тем самым оптическая длина является функцией от кривой, и она определена на всех достаточно гладких кривых с фиксированными концами. Принцип Ферма утверждает, что свет движется по кривой, на которой эта функция достигает своего минимума.

Принцип Ферма нуждается в некоторых уточнениях. Например, нужно допускать не только такие пути, вдоль которых время прохождения минимально, но и пути, соответствующие любым критическим точкам функционала оптической длины[1]. Эта модификация аналогична тому, что вместо минимума какой-либо функции от одной действительной переменной мы рассматриваем такое значение переменной, при котором производная функции равна нулю. Точки минимума этому условию удовлетворяют, но не только они.

Рассмотрим однородную и изотропную среду, то есть такую среду, в которой скорость света не зависит ни от точки, ни от направления. Тогда оптическая длина кривой пропорциональна обычной евклидовой длине кривой. Таким образом, минимизировать время — то же самое, что минимизировать длину. Мы знаем, какие кривые в евклидовом пространстве имеют минимальную длину — это прямые линии. Таким образом, в однородной и изотропной среде распространение света происходит вдоль прямолинейных лучей.

Правда, эти лучи могут отражаться от поверхностей, что непосредственно не следует из принципа Ферма, если понимать его буквально. Скажем, если луч света выбирает между тем, чтобы пойти по прямой или отразиться, например, от поверхности озера, то, согласно принципу Ферма, он должен выбрать первое. В природе же выбираются оба варианта, хотя второй выбирается, так сказать, с меньшим весом, зависящим от отражающей способности поверхности. Почему так происходит — сложный вопрос, который мы не будем здесь обсуждать: нам пришлось бы для этого привлечь соображения из квантовой механики.

Допустим, что луч должен отразиться от гладкой поверхности. То, как именно луч это делает, описывается принципом Ферма. Рассмотрим для простоты плоскую задачу. Луч света выходит из точки A и отражается от прямой l. Наблюдатель находится в точке B и видит отраженный свет. По какой кривой идет свет от точки A до точки B?

Это математическая задача:

Задача 1.1. Найдите кривую наименьшей длины, соединяющую точки A и B и имеющую хотя бы одну общую точку с прямой l. Мы предполагаем, что A и B находятся по одну и ту же сторону от прямой l (иначе задача тривиальна) (см. рис. 1.1).

Эта задача красиво решается методом отражения, который иногда проходят в школе на геометрии. Но можно эту задачу решать и «в лоб». Для этого нужно заметить, что оптимальная кривая (если она существует)

[1] Если пути рассматривать как точки функционального пространства, то можно говорить о *критических точках* функционала, определенного на этом пространстве — точках, в которых дифференциал функционала равен нулю. Значения в критических точках называются *критическими значениями*. В классическом вариационном исчислении и теоретической механике критические значения функционалов называют *стационарными значениями*. Мы тоже иногда будем пользоваться этой терминологией.

должна состоять из двух прямолинейных отрезков, один из которых идет от точки A до точки X на прямой l, а другой от точки X до точки B. Таким образом, задача свелась к задаче с единственным параметром. В качестве параметра можно взять координату точки X на прямой l. Обозначим эту координату через u. Будем писать $X(u)$ вместо X, имея в виду точку на прямой l с координатой u. Мы, конечно, предполагаем, что координата u выбрана таким образом, что расстояние между точками $X(u)$ и $X(u')$ равно $|u - u'|$.

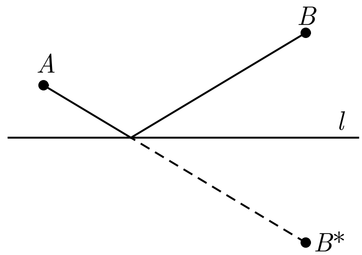

Рис. 1.1. Кривая наименьшей длины, соединяющая данные точки и имеющая общую точку с данной прямой

Задача 1.2. Посчитайте производную по u расстояния между точками A и $X(u)$ (выразите ответ через угол между отрезком $[A, X(u)]$ и прямой l).

Пусть α — угол между отрезком $[A, X(u)]$ и прямой l. Ответ в задаче такой: $\pm\cos\alpha$ (см. рис. 1.2, содержащий некоторые пояснения). Знак зависит от того, какой именно из двух возможных углов мы принимаем за α. Теперь, чтобы найти кратчайший отраженный луч, нам нужно найти минимум следующей функции одной переменной:

$$f(u) = |AX(u)| + |X(u)B|,$$

где $|AX|$ обозначает евклидово расстояние между точками A и X. Приравняв производную функции f к нулю, получаем, что угол падения должен быть равен углу отражения.

Переходя из одной однородной изотропной среды в другую, луч *преломляется*. Это явление связано с тем, что скорость света меняется при переходе из одной среды в другую. Предположим, что одна среда находится в верхней полуплоскости, и скорость света в этой среде равна c_1, а вторая

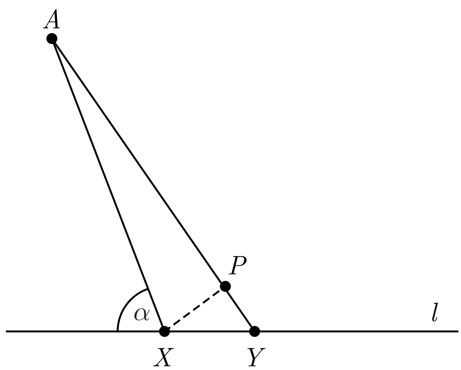

Рис. 1.2. Производная расстояния $|AX(u)|$ по u равна $\cos\alpha$. Отмечены точки $X = X(u)$ и $Y = X(u + \Delta u)$. Разность $|AY| - |AX|$ примерно равна $|PY|$, то есть примерно равна $|XY|\cos\alpha = (\Delta u)\cos\alpha$

среда — в нижней полуплоскости, и скорость света в этой среде равна c_2. Например, можно считать, что сверху находится воздух, а снизу — вода. Пусть l — горизонтальная прямая, разделяющая две наши среды. Как и раньше, обозначим через $X(u)$ точку на прямой l, координата которой равна u.

Допустим, что луч света пытается попасть из точки A в точку B, причем первая точка находится в воздухе, а вторая — в воде. Понятно, что сначала луч по прямолинейному отрезку пойдет из точки A в какую-то точку прямой l, а потом из этой точки в точку B, опять по прямолинейному отрезку. Мы приходим к задаче минимизации следующей функции:

$$f(u) = \frac{|AX(u)|}{c_1} + \frac{|X(u)B|}{c_2}.$$

Приравнивая производную функции f к нулю, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\cos\alpha_1}{c_1} = \frac{\cos\alpha_2}{c_2}.$$

Здесь α_1 — это угол между отрезком $[A, X(u)]$ и прямой l, а α_2 — угол между прямой l и отрезком $[X(u), B]$. Углы выбираются таким образом, что либо оба угла острые, либо оба угла тупые. Мы будем считать, что оба угла острые (см. рис. 1.3).

Полученное соотношение между $\cos\alpha_1$ и $\cos\alpha_2$ называется *законом Снелла*. Этот закон получил Снелл (вариант: Снеллиус) в 1621 году.

Следующее неформальное рассуждение позволяет обобщить закон Снелла на случай изотропной среды, в которой скорость света (как скалярная функция точки) зависит только от y-координаты. Сначала представим

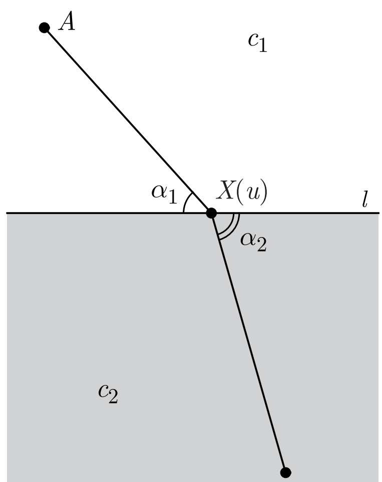

Рис. 1.3. Преломление света при переходе из среды, в которой скорость света равна c_1, в среду, в которой скорость света равна c_2

себе среду, состоящую из большого числа горизонтальных слоев. Каждый слой заключен между двумя параллельными горизонтальными плоскостями (точнее, если мы думаем про плоскость, между двумя параллельными горизонтальными прямыми). Допустим, что внутри каждого слоя среда однородная. Обозначим через c_i скорость света в i-м слое. Тогда закон Снелла говорит о том, что величина

$$\frac{\cos\alpha_i}{c_i}$$

постоянна (то есть не зависит от i). Теперь будем делать слои все тоньше и тоньше. Любая изотропная среда, в которой скорость света является гладкой функцией $v(y)$ одной только координаты y, может быть сколь угодно точно приближена средой, состоящей из конечного, но очень большого числа тонких горизонтальных слоев. Переходя к пределу (мы здесь допускаем физический уровень строгости и не обосновываем законность предельного перехода), получаем, что

$$\frac{\cos\alpha(t)}{v(y(t))} = \mathrm{const}$$

вдоль любого светового луча (то есть величина, написанная в левой части, не зависит от t). Здесь t — любой параметр на световом луче (например, можно считать, что $x(t)$ и $y(t)$ — это координаты фотона в момент времени t). Угол $\alpha(t)$ — это угол между световым лучом и горизонтальным направлением в точке $(x(t), y(t))$. Мы будем называть полученный закон *обобщенным законом Снелла*.

Обобщенный закон Снелла можно переписать как дифференциальное уравнение на траекторию. Обозначим

$$\varkappa = \frac{\cos\alpha(t)}{v(y(t))}.$$

Эта величина не зависит от t по обобщенному закону Снелла. Допустим, что световой луч является графиком некоторой функции $y = y(x)$. Тогда можно взять x вместо параметра t на световом луче. Угол $\alpha(x)$, то есть угол наклона светового луча (по отношению к горизонтальному направлению) связан с производной функции $y(x)$. А именно, как мы знаем, производная равна тангенсу угла наклона. Тангенс и косинус связаны следующей формулой:

$$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Таким образом, мы получаем следующее дифференциальное уравнение на световые лучи:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \varkappa^2 v^2(y)}}{\varkappa v(y)}.$$

Правая часть этого уравнения зависит только от y. Следовательно, мы получили уравнение с разделяющимися переменными.

ВИЛЛЕБРОРД СНЕЛЛ (1580–1626)

Голландский математик, физик и астроном, профессор Лейденского университета. Разработал метод триангуляции для геодезических измерений, в частности для вычисления радиуса Земли. В 1621 году открыл закон преломления света. Впрочем, как выяснилось, этот закон был известен еще персидскому математику и физику Ибн Салю (закон преломления фигурирует в его трактате о конструкции оптических линз, датируемом 984 годом).

ПЬЕР ДЕ ФЕРМА (1601–1665)

Советник парламента в Тулузе и математик-любитель. Известен своими математическими открытиями, изложенными главным образом в письмах к коллегам-математикам. Автор фундаментальных понятий и методов аналитической геометрии, теории чисел, анализа и теории вероятностей. Ферма сформулировал принцип наименьшего времени и вывел из него закон Снелла (1657). Впрочем, Ферма считал, что свет распространяется с бесконечной скоростью, поэтому формулировка принципа наименьшего времени у него была несколько запутанной.

ЗАДАЧА О БРАХИСТОХРОНЕ

Одно из самых интересных применений обобщенного закона Снелла — задача о брахистохроне. Дано две точки A и B, причем точка B находится ниже точки A, но не на той же самой вертикали. Рассмотрим различные кривые, соединяющие A с B. Представим себе частицу, скользящую без трения вдоль этих кривых. *Брахистохрона* — это такая кривая, время скольжения вдоль которой минимально. Все скольжения, которые мы рассматриваем, начинаются в точке A и заканчиваются в точке B; начальная скорость всегда нулевая (то есть мы не подталкиваем скользящие частицы).

Задача нахождения брахистохроны может быть формально сведена к задаче геометрической оптики. В самом деле, время скольжения вдоль кривой равно интегралу

$$\int \frac{ds}{v},$$

взятому вдоль этой кривой. Если окажется, что скорость v скольжения частицы зависит только от ее положения, но не от кривой, вдоль которой она скользит, то задача сведется к геометрической оптике.

Скорость v может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = 0.$$

(Мы направим ось y вниз, поэтому потенциальная энергия убывает с ростом y, отсюда знак минус. Мы также предполагаем, что точка A находится на высоте 0, поэтому потенциальная энергия равна mgy. В начальный момент скользящая точка находится на высоте 0, и ее скорость равна нулю, поэтому полная энергия равна нулю.) Находим:

$$v = \sqrt{2gy}\,.$$

Таким образом, v действительно зависит только от положения, но не от кривой. Более того, v зависит только от координаты y. Поэтому мы можем применить обобщенный закон Снелла.

Мы уже выяснили, что обобщенный закон Снелла можно переписать как дифференциальное уравнение на световые траектории с разделяющимися переменными. При этом световые траектории находим как графики функций $y = y(x)$. В нашем случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - 2g\varkappa^2 y}}{\varkappa\sqrt{2gy}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\int \frac{\sqrt{2g\varkappa^2 y}\;dy}{\sqrt{1 - 2g\varkappa^2 y}} = \int dx.$$

Чтобы вычислить интеграл в левой части, удобно сделать следующую замену переменной:

$$2g\varkappa^2 y = \sin^2\phi$$

(старая переменная y, новая переменная ϕ; эти переменные выражаются одна через другую из уравнения, выписанного выше). Интегрируя, получаем:

$$\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4} = g\varkappa^2 x + C.$$

Заменим 2ϕ на ϕ (это просто изменение параметризации кривой), x на $4g\varkappa^2 x$ и y на $4g\varkappa^2 y$ (это гомотетия, то есть изменение единицы длины). Получаем:

$$x = \phi - \sin\phi + \mathrm{const}, \quad y = 1 - \cos\phi.$$

Как нетрудно видеть, это уравнение описывает *циклоиду*, то есть траекторию точки, прикрепленной к колесу, которое равномерно и без проскальзывания катится по горизонтальной прямой. Точнее, мы получили траекторию точки на колесе, отраженную относительно горизонтальной прямой.

Циклоида — периодическая кривая со счетным числом каспов (клювов). Брахистохрона — это часть циклоиды, начинающаяся в каспе и заканчивающаяся не позже следующего каспа. Заметим, что в точке A касательная к брахистохроне вертикальна. Это соответствует интуитивным представлениям: в начальный момент нужно разогнаться как можно сильнее. Впрочем, это свойство брахистохроны делает ее непригодной к решению практических задач (таких как поиск оптимальной формы ледяной горки, туннеля и проч.).

ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ

Обобщенный закон Снелла можно также использовать для нахождения формы цепной линии. Эту форму принимает тонкая цепочка, свободно висящая между двумя закрепленными концами. Будем считать для определенности, что концы цепочки закреплены на одной и той же высоте. Направим ось y вниз и выберем начало координат так, чтобы закрепленные концы оказались на высоте 0.

Цепочка пытается минимизировать полную потенциальную энергию. Будем считать, что масса цепочки равномерно распределена по ее длине. Тогда потенциальная энергия маленького участка цепочки длины Δs примерно равна $-y\,\Delta s$, где $-y$ — высота этого участка (мы считаем плотность равной единице). Следовательно, полная потенциальная энергия цепочки выражается интегралом

$$U = -\int y\,ds.$$

Напомним, что буква s обозначает натуральный параметр на кривой. Однако цепочка не может менять длины. Поэтому интеграл потенциальной энергии нужно минимизировать при условии постоянства длины, то есть

$$\int ds = L,$$

где L — постоянная величина.

Таким образом, мы обсуждаем задачу нахождения условного экстремума. К этой задаче можно применить принцип множителей Лагранжа. Для нахождения условного экстремума некоторой функции f (определенной, в нашем случае, на бесконечномерном пространстве кривых) при условии $g = 0$ мы действуем так, как если бы искали безусловный экстремум функции $f + \lambda g$, то есть мы ищем критические точки этой функции. Здесь λ — константа, называемая *множителем Лагранжа*. После того как критические точки функции $f + \lambda g$ найдены, значение множителя λ для этих точек находится из условия $g = 0$.

В нашем случае мы должны действовать так же, как если бы мы хотели минимизировать интеграл

$$\int\limits_{\gamma} (-y + \lambda) ds$$

по всем кривым γ с данной парой закрепленых концов. Экстремум этого интеграла можно найти из обобщенного закона Снелла: сам интеграл имеет вид интеграла оптической длины пути для изотропной среды, в которой скорость света записывается формулой

$$v(y) = \frac{1}{\lambda - y}.$$

Как мы видим, скорость света зависит только от y. Из обобщенного закона Снелла получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(\lambda - y)^2}{\varkappa^2} - 1}$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{dy}{\sqrt{(\lambda - y)^2 - \varkappa^2}} = \frac{dx}{\varkappa}.$$

Введем замену переменных $\lambda - y = \varkappa \operatorname{ch} \phi$ (старая переменная y, новая переменная ϕ). Интегрируя при помощи этой замены, получаем:

$$y = \lambda - \varkappa \operatorname{ch}\left(\frac{x - x_0}{\varkappa}\right).$$

Таким образом, с точностью до аффинной замены координат, цепная линия — это график функции гиперболический косинус.

СУЩЕСТВОВАНИЕ СВЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ, СОЕДИНЯЮЩИХ ПАРЫ ТОЧЕК

Рассмотрим изотропную среду, скорость света в которой задается функцией $v(x, y)$. Сформулируем без доказательства следующую теорему: если функция $v(x, y)$ непрерывна, причем $v(x, y) > \varepsilon > 0$ вне некоторого шара, то для каждой пары точек плоскости найдется световой луч, проходящий через эти две точки (то есть такая траектория, на которой интеграл $\int \frac{ds}{v}$ достигает своего наименьшего значения). Существует обобщение этой теоремы на случай неизотропных сред.

ЗАДАЧИ

Задача 1.3. Выведите из принципа Ферма, что при отражении относительно любой гладкой кривой на плоскости (находящейся в однородной и изотропной среде) угол падения равен углу отражения.

Задача 1.4. Все стены комнаты зеркальные. Источник света помещен в одну точку комнаты. Можно ли подобрать форму комнаты и положение источника так, чтобы не все точки комнаты оказались освещенными?

Задача 1.5. Рассмотрим изотропную среду, занимающую верхнюю полуплоскость $y > 0$, скорость света в которой выражается формулой $v(x, y) = y$. Найдите форму световых лучей в этой среде.

Задача 1.6. Рассмотрим изотропную среду, занимающую внутренность единичного круга, скорость света в которой выражается формулой $v(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Найдите форму световых лучей в этой среде.

Задача 1.7. Плоскость заполнена однородной и изотропной средой. В плоскости расположено зеркало, форма которого совпадает с графиком функции f. Известно, что вертикальный поток световых лучей, падающих на зеркало сверху вниз, отражается таким образом, что отраженные лучи сходятся в некоторой точке (фокусе зеркала). Найдите все функции f, обладающие указанным свойством.

Задача 1.8. На плоскости имеются две различные однородные и изотропные среды. Граница раздела между средами имеет форму графика некоторой функции f. Известно, что вертикальный поток лучей, падающих сверху вниз, преломляется таким образом, что преломленные лучи собираются в одной точке. Перепишите это условие в виде дифференциального уравнения на функцию f. (Скорость света в верхней среде равна c_1, а скорость света в нижней среде равна c_2.) Считая, что $f'(0) = 0$, найдите параболу, лучше всего приближающую график функции f вблизи точки 0.

Задача 1.9. **Задача о соединенных стержнях**. Рассмотрим несколько стержней, длины которых равны l_1, ..., l_n. Допустим, что каждый стержень шарнирно соединен со следующим, и при этом свободный конец первого стержня и свободный конец последнего стержня подвешены в заданных точках. Полученная цепочка из шарнирно закрепленных стержней подвержена только действию силы тяжести (массы стержней даны). Найдите систему разностных уравнений, описывающую положение этой цепочки. Исследуйте предельный переход, в ходе которого длины стержней стремятся к нулю, и одновременно число звеньев увеличивается так, что суммарная длина цепочки остается неизменной. Каким образом в пределе получается дифференциальное уравнение на цепную линию? Является ли сама цепная линия пределом рассматриваемых цепочек? (См.: [Лан].)

1.2. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА

Мы пока занимались изучением траекторий отдельного фотона. Однако интересно также иметь описание движения пучка фотонов, или светового пятна. Обычно фотонов очень много. Настолько много, что невозможно следить за отдельными фотонами. Но можно смотреть, как распространяется световое пятно.

Предположим, что фотоны вылетают из точечного источника и движутся во всех возможных направлениях. Какова будет форма светового пятна за время t? Обозначим это световое пятно через $X(\mathbf{x}_0, t)$, где $\mathbf{x}_0$ — положение точечного источника. Более точно, $X(\mathbf{x}_0, t)$ — это множество тех точек, в которые свет может попасть за время $\leqslant t$. В отличие от прошлого раздела, мы сейчас не предполагаем, что среда изотропна. Среда может быть неоднородна и неизотропна.

Принцип Гюйгенса описывает закон изменения светового пятна $X(\mathbf{x}_0, t)$. Математически этот принцип можно выразить следующим образом:

Теорема 1.1 (принцип Гюйгенса). *Для всякого разложения $t = t_1 + t_2$ временного интервала t в сумму двух неотрицательных временных интервалов,*

$$X(\mathbf{x}_0, t) = \bigcup_{\mathbf{x}_1 \in X(\mathbf{x}_0, t_1)} X(\mathbf{x}_1, t_2).$$

Словами эта формула описывается так. Рассмотрим световое пятно за время t_1. Поместим в каждую точку этого светового пятна воображаемый источник света и дадим всем этим источникам светить в течение времени t_2. Получится много *вторичных световых пятен*. Нужно взять объединение всех этих вторичных световых пятен, чтобы получить световое пятно за время t. Мы докажем принцип Гюйгенса, предполагая, что принцип Ферма справедлив буквально, то есть свет движется только по таким траекториям, вдоль которых время прохождения минимально.

Заметим, что правая часть равенства, выражающего принцип Гюйгенса, включает в себя множество $X(\mathbf{x}_0, t_1)$. Дело в том, что $\mathbf{x}_1$ обязательно принадлежит световому пятну $X(\mathbf{x}_1, t_2)$.

Доказательство принципа Гюйгенса. Пусть $\mathbf{x}$ лежит в левой части формулы из принципа Гюйгенса, то есть $\mathbf{x} \in X(\mathbf{x}_0, t)$. Свет может дойти от точки $\mathbf{x}_0$ до точки $\mathbf{x}$ за время $s \leqslant t$. Если $s \leqslant t_1$, то точка $\mathbf{x}$ принадлежит множеству $X(\mathbf{x}_0, t_1)$, которое, как мы видели, является подмножеством правой части. Если же $s > t_1$, то $s = t_1 + s_2$, где $s_2 \leqslant t_2$. Рассмотрим траекторию фотона, идущего от $\mathbf{x}_0$ к $\mathbf{x}$. За время t_1 фотон доходит до некоторой точки $\mathbf{x}_1 \in X(\mathbf{x}_0, t_1)$, а затем за время $s_2 \leqslant t_2$ до точки $\mathbf{x}$, откуда получаем, что $\mathbf{x} \in X(\mathbf{x}_1, t_2)$. Следовательно, $\mathbf{x}$ лежит в правой части.

Допустим теперь, что $\mathbf{x}$ лежит в правой части формулы из принципа Гюйгенса. Это значит, что в $\mathbf{x}$ можно попасть, сначала пройдя вдоль истинной световой траектории от точки $\mathbf{x}_0$ до некоторой точки $\mathbf{x}_1 \in X(\mathbf{x}_0, t_1)$, а потом пройдя вдоль истинной световой траектории от точки $\mathbf{x}_1$ до точки $\mathbf{x} \in X(\mathbf{x}_1, t_2)$. Мы знаем, что время движения по первой из двух траекторий не превышает t_1, а время движения по второй траектории не превышает t_2. Объединение двух рассматриваемых истинных световых траекторий может и не быть истинной световой траекторией. Однако это объединение является некоторой кривой, вдоль которой свет может пройти за время t или меньше. Значит, на прохождение света от $\mathbf{x}_0$ до $\mathbf{x}$ по истинной световой траектории понадобится время $\leqslant t$. Это вытекает из принципа Ферма. $\square$

Пример. Рассмотрим однородную, но неизотропную, среду. В такой среде все световые пятна за время t отличаются лишь параллельным переносом. Поэтому есть такая фигура $X(t)$, зависящая только от t, что

$$X(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0 + X(t)$$

для всякой точки $\mathbf{x}_0$. Здесь $\mathbf{x}_0 + X$ означает параллельный перенос множества X на вектор $\mathbf{x}_0$, то есть множество точек $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in X$. *Сумма Минковского* двух множеств A, $B \subset \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом:

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in A,\ \mathbf{b} \in B\}.$$

Например, если B — шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в нуле, то $A + B$ есть не что иное, как ε-окрестность множества A.

Задача 1.10. Пусть A — это объединение двух отрезков на плоскости

$$[(0,0),(1,0)] \cup [(0,0),(0,1)].$$

Нарисуйте множества $A+A$, $A+A+A$, $A+A+A+A$ и сравните их с множествами $2A$, $3A$, $4A$.

Вернемся к обсуждению однородной неизотропной среды. Мы выяснили, что такая среда характеризуется одной функцией $X(t)$, принимающей значения в подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$. Принцип Гюйгенса перепишем как следующее функциональное уравнение:

$$X(t_1+t_2) = X(t_1) + X(t_2)$$

для любых неотрицательных t_1 и t_2. Интересно найти все решения этого функционального уравнения при достаточно общих предположениях относительно функции $X(t)$. Естественно считать, что $X(t)$ зависит от t в некотором смысле непрерывно. Заметим, что функция $t \mapsto tA$ является решением нашего уравнения только в том случае, когда множество A выпукло (докажите).

Вернемся к рассмотрению общей (то есть, вообще говоря, неоднородной и неизотропной) среды. Следуя Гамильтону, определим функцию

$$W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \inf\{t \mid \mathbf{x} \in X(\mathbf{x}_0, t)\}.$$

Если точка $\mathbf{x}_0$ имеет координаты (x_0, y_0), а точка $\mathbf{x}$ имеет координаты (x, y), то функцию $W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ можно записать как функцию от четырех координат: $W(x_0, y_0, x, y)$. Если принцип Ферма верен буквально, то $W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ — это просто время, за которое свет доходит от $\mathbf{x}_0$ до $\mathbf{x}$, и оно автоматически минимально. В реальности это утверждение верно, вообще говоря, только если точки $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}$ достаточно близки (и даже в этом случае не всегда). Заметим, что множество $X(\mathbf{x}_0, t)$ можно определить неравенством

$$W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \leqslant t.$$

Поверхность $\Gamma_t(\mathbf{x}_0)$, заданная равенством $W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = t$ при фиксированном t, называется *световым фронтом*. Принцип Гюйгенса часто формулируют для световых фронтов, а не для световых пятен. В этом случае нужно говорить об огибающей световых фронтов.

Приведем эту формулировку для плоскости. Пусть задано семейство кривых C_λ на плоскости, зависящих от одного параметра λ. Например, такое семейство можно задать параметрически, если кривую C_λ записать параметрическим уравнением $x = x(t,\lambda)$, $y = y(t,\lambda)$. Здесь t — это параметр на кривой, а λ — параметр, выделяющий кривую C_λ из рассматриваемого семейства (то есть вдоль одной и той же кривой семейства параметр λ не меняется). Кривая C называется *огибающей* семейства C_λ, если она касается всех кривых этого семейства, причем каждая точка кривой C является точкой касания с хотя бы одной кривой C_λ. В разделе 6.2 мы несколько ослабим это определение и обсудим свойства огибающих более подробно. Теперь мы можем сформулировать принцип Гюйгенса для световых фронтов.

Теорема 1.2. *Предположим, что все световые фронты на плоскости, заполненной данной средой, являются гладкими и выпуклыми. Предположим также, что через любые две точки проходит некоторый световой луч. Зафиксируем разложение* $t = t_1 + t_2$ *временного интервала* t *в сумму двух неотрицательных временных интервалов. Тогда световой фронт* $\Gamma_t(\mathbf{x_0})$ *является огибающей «вторичных» световых фронтов* $\Gamma_{t_2}(\mathbf{x}_1)$, *выпущенных из всех точек* $\mathbf{x}_1$ *светового фронта* $\Gamma_{t_1}(\mathbf{x}_0)$.

Доказательство. При сделанном предположении, световое пятно $X(\mathbf{x}_0, t)$ всегда является выпуклой оболочкой светового фронта $\Gamma_t(\mathbf{x}_0)$. Пусть $\mathbf{x}_1$ — произвольная точка светового фронта $\Gamma_{t_1}(\mathbf{x}_0)$. Заметим, что световой фронт $\Gamma_{t_2}(\mathbf{x}_1)$ имеет общую точку со световым фронтом $\Gamma_t(\mathbf{x_0})$, а именно точку, в которую луч, выпущенный из точки $\mathbf{x}_0$ и проходящий через точку $\mathbf{x}_1$, доходит за время t (или, что то же самое, из точки $\mathbf{x}_1$ за время t_2). Теперь достаточно воспользоваться следующим утверждением: если одна выпуклая гладкая кривая лежит в выпуклой оболочке другой выпуклой гладкой кривой, и при этом две кривые имеют общую точку, то они касаются в этой точке. Грубо говоря, если бы это было не так, то касательные к двум кривым пересекались бы под ненулевым углом, а отсюда следует, что и сами кривые пересекались бы под ненулевым углом. В этом случае одна кривая не могла бы лежать внутри другой (проведите это рассуждение подробно и строго). □

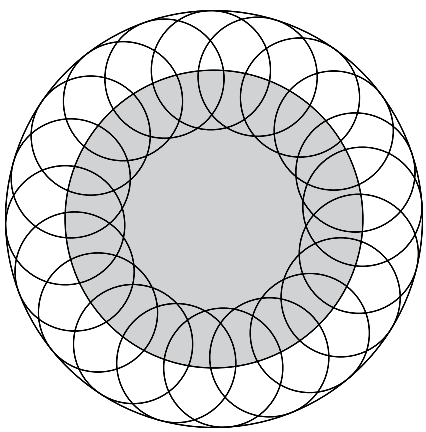

Рис. 1.4. Иллюстрация к теореме 1.2. Внутренность первичного светового фронта закрашена серым. Большая окружность — огибающая вторичных световых фронтов

Индикатрисой $I(\mathbf{x}_0)$ (данной сплошной среды) в точке $\mathbf{x}_0$ называется поверхность, образованная концами всех векторов $\mathbf{v}$, которые могут служить вектором скорости фотона, проходящего через точку $\mathbf{x}_0$. В каждом направлении выходит ровно один такой вектор. Например, если среда изотропна, то индикатриса является шаром. В общем случае мы будем предполагать, что индикатриса — гладкая выпуклая поверхность. Индикатрису можно понимать как форму бесконечно малого светового фронта. А именно, при некоторых естественных предположениях,

$$I(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\Gamma_t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\right).$$

Множество $(\Gamma_t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0)$ — это световой фронт, сдвинутый (при помощи параллельного переноса) таким образом, чтобы его центр попал в начало координат. Что такое предел семейства множеств, конечно, следовало бы уточнить. Но мы не будем формулировать строго ни самого утверждения, ни тех предположений, при которых оно выполняется. Это достаточно громоздко, а мы все равно сейчас обсуждаем только мотивировки. Ограничимся лишь тем замечанием, что всякая точка левой части может быть получена как предел точек из правой части. В самом деле, любой элемент индикатрисы — это вектор скорости $\mathbf{v}$ некоторого светового луча. За время t этот луч доходит до некоторой точки $\mathbf{x}(t) \in \Gamma_t(\mathbf{x}_0)$. По определению скорости имеем:

$$\mathbf{v} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0}{t}.$$

Теорема 1.3. *Рассмотрим световой луч, выходящий из точки* $\mathbf{x}_0$ *и проходящий через точку* $\mathbf{x}$, *а также световой фронт* $\Gamma = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid W(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = t\}$, *проходящий через точку* $\mathbf{x}$. *Пусть* $\mathbf{v}$ *— вектор скорости света в точке* $\mathbf{x}$, *касательный к данному световому лучу. Тогда касательная к индикатрисе* $I(\mathbf{x})$ *в точке* $\mathbf{v} \in I(\mathbf{x})$ *параллельна касательной к световому фронту в точке* $\mathbf{x}$.

Мы обсудим только очень нестрогое рассуждение, помогающее убедиться в том, что это должно быть правдой для большинства хороших (в оптическом смысле) сред. Рассмотрим очень маленький промежуток времени Δt. Световой фронт $\Gamma_{\Delta t}(\mathbf{x})$ достаточно хорошо приближается множеством $(\Delta t) I(\mathbf{x}) + \mathbf{x}$. Мы знаем, что касательная к фронту $\Gamma_{\Delta t}(\mathbf{x})$ в точке светового луча, проходящего через точку $\mathbf{x}$ со скоростью $\mathbf{v}$, совпадает с касательной к фронту $\Gamma_{t+\Delta t}(\mathbf{x}_0)$ в той же точке (напомним, что точка $\mathbf{x}_0$ — эта та точка, из которой выходит световой фронт $\Gamma = \Gamma_t(\mathbf{x}_0)$). При $\Delta t \to 0$ первая касательная стремится к касательной к индикатрисе $I(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{v}$, а вторая касательная — к касательной к фронту Γ в точке $\mathbf{x}$. Мы не будем давать более формального доказательства сформулированной теоремы (чтобы было формальное доказательство, нужно еще и формулировку уточнить), но интуитивно это должно быть ясно. Читателю рекомендуется порисовать картинки, чтобы убедить себя в правильности результата, а также попытаться формализовать этот результат и снабдить его строгим доказательством.

Теорема 1.4. *Предположим, что плоскость заполнена изотропной средой, в которой скалярная скорость света выражается гладкой функцией $v(x, y)$. Тогда скорость светового луча, выходящего из точки (x_0, y_0), в точке (x, y) равна*

$$\mathbf{v} = v(x, y)^2 \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y} \right),$$

где $W = W(x_0, y_0, x, y)$ (дифференцирование производится при фиксированных x_0 и y_0).

Например, если $v(x, y) = 1$ во всех точках (x, y), то $W(x_0, y_0, x, y)$ равно длине отрезка, соединяющего точки (x_0, y_0) и (x, y), то есть

$$W(x_0, y_0, x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,.$$

Положим $f(x, y) = W(0, 0, x, y)$. Ясно, что градиент функции f направлен от начала координат и имеет длину 1. Это соответствует тому, что свет, выходящий из начала координат, распространяется по прямолинейным лучам с постоянной скоростью.

Доказательство теоремы 1.4. Заметим, что вектор с координатами $\frac{\partial W}{\partial x}(x_0, y_0, x, y)$ и $\frac{\partial W}{\partial y}(x_0, y_0, x, y)$ — это вектор, перпендикулярный световому фронту в точке (x, y) (имеется в виду световой фронт, выпущенный из точки (x_0, y_0) и проходящий через точку (x, y)). Это вытекает из следующего общего утверждения: вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ перпендикулярен линии уровня функции f.

Пусть $\mathbf{v}$ — вектор скорости света в точке (x, y), направленный вдоль луча, выходящего из (x_0, y_0). Поскольку среда изотропна, все ее индикатрисы являются кругами. В частности, касательная к индикатрисе в точке $\mathbf{v}$ перпендикулярна вектору $\mathbf{v}$. Согласно теореме 1.3, касательная к фронту в точке (x, y) параллельна касательной к индикатрисе в точке $\mathbf{v}$, то есть перпендикулярна вектору $\mathbf{v}$. Таким образом, вектор $\mathbf{v}$ перпендикулярен световому фронту. Как мы уже выяснили, вектор с координатами $\frac{\partial W}{\partial x}(x_0, y_0, x, y)$ и $\frac{\partial W}{\partial y}(x_0, y_0, x, y)$ тоже перпендикулярен световому фронту. Следовательно, эти два вектора пропорциональны.

Осталось найти коэффициент пропорциональности. Для этого достаточно посчитать длину вектора с координатами $\frac{\partial W}{\partial x}(x_0, y_0, x, y)$

и $\dfrac{\partial W}{\partial y}(x_0, y_0, x, y)$. Это градиент функции W, равной времени, которое свет тратит на прохождение от точки (x_0, y_0) до точки (x, y). Таким образом, он приблизительно равен $\Delta t/\Delta s$, где Δs — длина малого участка светового луча около точки (x, y), а Δt — время, за которое фотон проходит этот малый участок (мы уже знаем, что градиент функции W направлен вдоль светового луча, выходящего из точки (x, y), — мы здесь этим пользуемся). Вместе с тем скорость света в точке (x, y) приблизительно равна $\Delta s/\Delta t$. Отсюда можно заключить, что длина вектора $\left(\dfrac{\partial W}{\partial x}, \dfrac{\partial W}{\partial y}\right)$ равна $1/v(x, y)$, где $v(x, y)$ — (скалярная) скорость света в точке (x, y).

Длина вектора $\mathbf{v}$ равна $v(x, y)$. Таким образом, коэффициент пропорциональности равен $v(x, y)^2$. □

Из приведенного доказательства вытекает, что функция W удовлетворяет следующему уравнению в частных производных (называемому *уравнением эйконала*):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v(x, y)^2}.$$

В самом деле, в левой части стоит квадрат длины градиента функции W (рассматриваемой как функция от x и y при фиксированных x_0 и y_0). Но мы уже выяснили, что длина градиента равна $1/v(x, y)$. Кстати, поэтому градиент функции W иногда называют *нормальной медлительностью светового фронта*.

ХРИСТИАН ГЮЙГЕНС (1629–1695)

Голландский математик, физик, астроном и инженер. Гюйгенс изобрел и усовершенствовал механизмы маятниковых часов, обнаружил кольца Сатурна. Работы Гюйгенса, в том числе и прикладного характера, отличаются математическим изяществом и строгостью.

ПОИСК КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ В ГРАФЕ

Обсудим задачу из совсем другой области, для решения которой оказываются полезными идеи из геометрической оптики. Задача состоит в том, чтобы в данном графе найти кратчайшее расстояние между двумя вершинами. Расстояние между вершинами — это длина кратчайшего пути по ребрам из одной вершины в другую, а длина пути по ребрам — это просто количество пройденных ребер. Задача нахождения кратчайшего пути в графе имеет большое практическое значение. Например, на сайте немецкой железнодорожной компании Deutsche Bahn можно найти, как проехать от одной железнодорожной станции до другой с наименьшим числом пересадок (есть еще оптимизация по времени). При этом система распознает все станции, включая остановки местных электричек и даже остановки городского транспорта в крупных городах, притом не только в Германии, а по всей Европе. Иногда минимальное количество пересадок оказывается равным 7 (например, от остановки голландской электрички до остановки местной электрички где-нибудь в Шварцвальде на юге Германии). Чтобы найти маршрут с минимальным количеством пересадок, система решает задачу о кратчайшем пути в графе. В каком именно графе? — упражнение.

Допустим, мы хотим найти кратчайшее расстояние от точки x некоторого графа до другой точки y. Пишем в точке x число 0. Во всех соседних точках, в которых еще ничего не написано, пишем 1. Для каждой точки, помеченной числом 1, проводим аналогичную процедуру: во всех соседних точках, в которых еще ничего не написано, пишем 2 и т.д. Рано или поздно в точке y окажется некоторое число. Это число и есть расстояние от точки x до точки y. Очевидна аналогия описанного процесса с процессом распространения светового фронта.

МЕТОД ГАМИЛЬТОНА НАХОЖДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим плоскость, заполненную изотропной (но необязательно однородной) средой. Как обычно, пусть $v(x, y)$ обозначает скорость света в точке (x, y). Предположим, что функция $W(x_0, y_0, x, y)$ известна, а нам хотелось бы найти световые траектории. Гамильтон нашел метод, при помощи которого это можно сделать, и обобщил этот метод на произвольные механические системы (обобщение называется методом Гамильтона–Якоби, и мы его подробно обсудим). Рассмотрим луч света, выходящий из точки (x_0, y_0) и попадающий в точку (x, y). Пусть $\mathbf{v}_0$ — скорость этого луча в точке (x_0, y_0), а $\mathbf{v}$ — скорость луча в точке (x, y). Очевидно, имеется и обратный луч, выходящий из точки (x, y) со скоростью $-\mathbf{v}$ и попадающий в точку (x_0, y_0) со скоростью $-\mathbf{v}_0$. Мы знаем, что

$$\mathbf{v} = v(x, y)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} W(x_0, y_0, x, y), \frac{\partial}{\partial y} W(x_0, y_0, x, y)\right),$$

$$-\mathbf{v}_0 = v(x_0, y_0)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_0} W(x_0, y_0, x, y), \frac{\partial}{\partial y_0} W(x_0, y_0, x, y)\right).$$

Отсюда следует, что для всех точек (x, y) светового луча, выходящего из (x_0, y_0), производная $\dfrac{\partial}{\partial x_0} W(x_0, y_0, x, y)$ имеет одно и то же значение. Таким образом, вдоль светового луча, выходящего из (x_0, y_0),

$$\frac{\partial}{\partial x_0} W(x_0, y_0, x, y) = \text{const}.$$

Константа, конечно, зависит от луча, но не зависит от выбора точки на луче. Это уравнение можно использовать для нахождения формы световых лучей, если известно, чему равна функция W. На самом деле, предположение о том, что среда изотропна, нам, по существу, не нужно.

Рассмотрим некоторую среду, не обязательно изотропную, но такую, для которой определена гладкая функция оптической длины пути $W(x_0, y_0, x, y)$. Пусть γ — настоящая световая траектория, соединяющая точки (x_0, y_0) и (x, y). Продолжим траекторию γ за пределы точки (x_0, y_0), то есть будем считать, что источник света расположен не в точке (x_0, y_0), а в некоторой другой точке (x_{-1}, y_{-1}), так что луч света выходит из точки (x_{-1}, y_{-1}) и проходит через точки (x_0, y_0) и (x, y). Пусть $\mathbf{v}_0 = (a_0, b_0)$ — вектор скорости света в точке (x_0, y_0), касательный к рассматриваемой траектории. Мы хотим доказать, что числа $\dfrac{\partial W}{\partial x_0}$ и $\dfrac{\partial W}{\partial y_0}$ не зависят от выбора точки (x, y). Для этого заметим следующее:

$$W(x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0) + W(x_0, y_0, x, y) = W(x_{-1}, y_{-1}, x, y).$$

Дифференцируя это равенство по x_0 и y_0, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} W(x_0, y_0, x, y) = -\frac{\partial}{\partial x_0} W(x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0).$$

Как видно из этой формулы, правая часть не зависит ни от x, ни от y.

ЗАДАЧИ

Задача 1.11. Выведите из принципа Ферма, что функция $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет неравенству треугольника

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leqslant W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + W(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Задача 1.12. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что равенство $(t + s)A = tA + sA$ выполнено при всех неотрицательных действительных значениях s и t тогда и только тогда, когда множество A выпукло.

Задача 1.13. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ — равносторонний треугольник со стороной 1. Найдите площадь фигуры $\Delta + (-\Delta)$. Здесь $-\Delta$ — это треугольник Δ, повернутый на 180 градусов.

Задача 1.14. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — подмножество, удовлетворяющее соотношению $A + A = 2A$. Докажите, что если A замкнуто или открыто, то A выпукло.

Задача 1.15. Проверьте, что функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1$$

всюду, кроме начала координат.

Задача 1.16. Пусть $f(x, y)$ равно минимальному расстоянию от точки (x, y) до эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Докажите, что для всех точек во внешности эллипса выполняется уравнение из предыдущей задачи. Найдите еще какие-нибудь решения этого уравнения с частными производными.

Решение. Рассмотрим произвольную выпуклую замкнутую кривую C. У этой кривой есть внешность и внутренность. Из каждой точки кривой C выпустим луч, перпендикулярный этой кривой. Выпуклость кривой C гарантирует, что все эти лучи не пересекаются. Как посчитать расстояние от точки (x, y) вне кривой C до кривой C? Точка (x, y) принадлежит какому-либо лучу R. Расстояние от (x, y) до кривой C равно длине отрезка луча R от его начала (которое принадлежит кривой C) до точки (x, y). Понятно, что если мы теперь пойдем вдоль луча R, то расстояние до кривой C увеличится ровно на пройденное нами расстояние. По неравенству треугольника, как бы мы ни шли, расстояние до кривой C никогда не может увеличиться больше, чем на пройденное расстояние. Отсюда вытекает, что если $f(x, y)$ — это расстояние от точки (x, y) до кривой C, то производная функции f по направлению единичного вектора вдоль луча R равна 1, а производные по направлению всех остальных единичных векторов не больше 1. Иначе говоря, максимальная скорость приращения функции f (относительно евклидовой длины) равна 1. Но модуль градиента — это как раз максимальная скорость приращения функции. Следовательно, модуль градиента функции f равен 1. Это утверждение можно переписать как следующее дифференциальное уравнение с частными производными на функцию f:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1. \qquad \square$$

Задача 1.17. Пусть Δ — равносторонний треугольник в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $W(x, y)$ расстояние от точки (x, y) до треугольника Δ. Докажите, что

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = 1$$

для почти всех точек (x, y) вне треугольника Δ. Найдите площадь множества $\{W \leqslant \varepsilon\}$.

Задача 1.18. Известно, что для некоторой среды

$$W(x_0, y_0, x, y) = \sqrt[4]{(x - x_0)^4 + (y - y_0)^4}\,.$$

Найдите форму световых лучей. Найдите индикатрисы. Те же вопросы для $W(x_0, y_0, x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2(y^2 + y_0^2)}\,.$

1.3. ЧЕТВЕРТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

Этот раздел можно пропустить при первом чтении. Его результаты нигде в дальнейшем не используются [1]. В этом разделе используются основы проективной геометрии.

Мы опишем геометрические идеи, связанные с задачами геометрической оптики. Рассмотрим среду, в которой свет распространяется согласно принципу Ферма. Для простоты ограничимся случаем плоскости. Однако среда не предполагается ни однородной, ни изотропной. Рассмотрим функцию оптической длины пути $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Согласно принципу Ферма, эта функция удовлетворяет неравенству треугольника

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leqslant W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + W(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

для любых трех точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Это значит, что функцию оптической длины пути можно воспринимать как функцию расстояния, то есть эта функция определяет некоторую геометрию на плоскости.

Напомним, что *метрикой* (функцией расстояния) на множестве X называется такая неотрицательная функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

- расстояние между точками равно нулю, если и только если точки совпадают, то есть если выполнено равенство $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ для всякой точки $\mathbf{x}$ множества X, а равенство $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ влечет равенство $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- расстояние симметрично, то есть $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$;
- расстояние удовлетворяет неравенству треугольника, то есть

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leqslant \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

  для любых трех точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in X$.

Множество X с введенной на нем функцией расстояния называется *метрическим пространством*.

В метрическом пространстве можно мерить длины путей. А именно, рассмотрим непрерывный путь $\gamma : [0, 1] \to X$, то есть такое отображение, что $\rho(\gamma(t), \gamma(s)) \to 0$ при $|t - s| \to 0$. Выберем конечную последовательность

$$\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1\}$$

значений параметра (будем называть ее *разбиением* отрезка $[0, 1]$) и составим сумму

$$L_\tau(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

[1] За исключением того, что модели геометрии Лобачевского, обсуждаемые здесь, упоминаются в связи с теорией гармонических функций.

Из неравенства треугольника вытекает, что для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 выполнено неравенство $L_{\tau_1\cup\tau_2}(\gamma) \geqslant \max(L_{\tau_1}(\gamma), L_{\tau_2}(\gamma))$. Следовательно, верхнюю грань $\operatorname{Len}(\gamma) = \sup\limits_{\tau} L_\tau(\gamma)$ можно интерпретировать как предел величин $L_\tau(\gamma)$ по последовательности измельчающихся разбиений τ. Величина $\operatorname{Len}(\gamma)$ называется *длиной пути* γ. Метрика ρ называется *внутренней*, если расстояние между любыми двумя точками x и y в этой метрике совпадает с нижней гранью длин всех путей, соединяющих точки x и y. Очевидно, оптическая длина пути в любой среде определяет внутреннюю метрику. В дальнейшем мы будем говорить только про внутренние метрики.

На международном математическом конгрессе в 1900 году Давид Гильберт сформулировал свой знаменитый список задач (проблем). Не все проблемы были четко поставлены. Примером такой проблемы служит *четвертая проблема Гильберта*, в которой спрашивается: какие бывают геометрии, в которых кратчайшие пути между парами точек — прямолинейные отрезки? Точнее, задача состоит в описании и классификации всех таких геометрий. Нечеткость состоит в том, что именно следует понимать под геометрией. Достаточно широкая интерпретация проблемы Гильберта состоит в том, что под геометрией следует понимать внутреннюю метрику. Например, какие бывают внутренние метрики на плоскости, в которых кратчайшие пути совпадают с прямолинейными отрезками? Эта задача имеет естественную оптическую интерпретацию: какие оптические свойства среды гарантируют, что свет будет распространяться по прямолинейным лучам? Приведем сначала простейшие примеры метрик с указанным свойством. Конечно, самый классический пример — это евклидова метрика, в которой расстояние между точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ выражается формулой

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\,.$$

Более точно: евклидовой метрикой на плоскости называется метрика, задаваемая выписанной выше формулой относительно некоторой (неважно, какой) системы координат. Евклидова метрика соответствует однородной и изотропной среде.

Другой пример доставляет сферическая метрика. Рассмотрим сферу в трехмерном пространстве и спроецируем поверхность этой сферы из центра на плоскость, не проходящую через центр сферы. Когда мы говорим о проекции из центра сферы, речь идет о таком соответствии между точками на сфере и точками на плоскости, при котором соответствующие точки принадлежат одной и той же прямой, проходящей через центр сферы. При таком соответствии почти каждая точка сферы изображается только одной точкой плоскости, а каждая точка плоскости, наоборот, — двумя точками сферы. Обозначим сферу через S, а плоскость через P. Те точки сферы S, которые не соответствуют никаким точкам плоскости P, образуют большую окружность C на сфере S — пересечение сферы S с плоскостью, параллельной плоскости P и проходящей через центр сферы Окружность C разбивает сферу на две полусферы. Каждая из двух полусфер взаимно однозначно отображается на плоскость. Выберем и зафиксируем одну из двух полусфер. Обозначим эту полусферу через S^+. Теперь мы можем определить метрику ρ_S на плоскости, объявив расстояние $\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равным длине кратчайшей дуги на сфере, соединяющей соответствующие точки полусферы S^+. Другими словами, мы просто переносим внутреннюю метрику полусферы S^+ на плоскость при помощи центральной проекции. Поскольку кратчайшими линиями на сфере являются дуги *больших окружностей* (то есть пересечений сферы с плоскостями, проходящими через центр сферы), кратчайшими линиями на плоскости относительно метрики ρ_S будут отрезки прямых. Таким образом, евклидова метрика — отнюдь не единственная метрика, в которой кратчайшими линиями являются отрезки прямых. Заметим, что построенные сферические метрики на плоскости зависят от одного параметра — радиуса сферы.

Еще один пример связан с *геометрией Лобачевского*, то есть с так называемой *гиперболической геометрией*. Опишем одну из моделей геометрии Лобачевского, которая называется *моделью Клейна*, или моделью *Кэли–Клейна*, или моделью *Бельтрами–Клейна*. На самом деле, впервые эту модель получил Бельтрами, занимаясь задачами геодезии. Об этом мы поговорим позже. Ф. Клейн [Kle] дал проективную интерпретацию модели Бельтрами. Про эту интерпретацию Клейна мы и поговорим. Напомним, что в проективной геометрии расстояния между точками не определены. Даже если мы каким-то образом определим расстояния, они поменяются, как только мы сделаем проективное преобразование. Дело в том, что проективным преобразованием проективной плоскости можно перевести любую пару различных точек в любую другую. Даже любую тройку различных коллинеарных (то есть принадлежащих одной прямой) точек можно перевести в любую другую, а вот четверки коллинеарных точек уже различимы. Проективный инвариант, различающий четверки коллинеарных точек, называется *двойным отношением*. Это самый главный проективный инвариант.

Двойное отношение достаточно определить для четырех точек x_0, x_1, x_2, x_3 на проективной прямой. Проективным преобразованием можно отправить точки x_0 и x_3 в 0 и ∞ соответственно. Проективные преобразования, оставляющие точки 0 и ∞ на месте, сводятся к гомотетиям с центром в нуле, поэтому искомый проективный инвариант должен быть функцией от x_2/x_1, если $x_0 = 0$, $x_3 = \infty$. Мы определим двойное отношение $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ как x_2/x_1 в такой системе координат, в которой $x_0 = 0$, $x_3 = \infty$. Следовательно, в любой системе координат имеем:

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_3} \Big/ \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_3}.$$

Рассмотрим на проективной плоскости конику C, то есть кривую второго порядка. Она разбивает проективную плоскость на две части — внешность и внутренность. Внешность и внутренность можно различить. Дело в том, что внутренность гомеоморфна диску, а внешность гомеоморфна листу Мёбиуса. Модель Клейна геометрии Лобачевского определена во внутренности кривой C. Обычно в качестве кривой C рассматривают окружность. Это оправдано, поскольку любая невырожденная коника на проективной плоскости отображается в окружность некоторым проективным преобразованием. Обозначим внутренность кривой C через D. Таким образом, множество D будет служить моделью геометрии Лобачевского. Точки множества D соответствуют точкам плоскости Лобачевского. Прежде чем определять расстояния, мы скажем, какие преобразования множества D являются изометриями. Изометрии — все проективные преобразования проективной плоскости, переводящие множество D в себя (это условие эквивалентно тому, что кривая C переходит в себя). Такое определение изометрий наводит на мысль определить расстояние через проективные инварианты, например, через двойные отношения. В самом деле, это можно сделать, положив расстояние $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равным числу $c \log |[\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{b}]|$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — две точки пересечения прямой, проходящей через точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ с коникой C, а c — некоторая положительная константа.

Задача 1.19. Проверьте, что определенная только что метрика Клейна удовлетворяет неравенству треугольника.

Метрику Клейна можно определить в проективном пространстве любой размерности, в котором задана невырожденная квадрика. Например, в пространстве размерности один, то есть на проективной прямой, невырожденная квадрика — это пара различных точек. Проективным преобразованием можно перевести эти точки в точки 0 и ∞. Тогда метрика Клейна примет вид $\rho(x, y) = c \log |y/x|$. Таким образом, экспоненциальное отображение переводит эту метрику в стандартную евклидову метрику на прямой. Из этого вытекает, в частности, что если точка y лежит между точками x и z, то выполнено равенство

$$\rho(x, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Рассмотрим теперь метрику Клейна во внутренности коники. Поскольку при ограничении на каждую прямую мы получаем метрику Клейна на прямой, для любых трех коллинеарных точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, таких что точка $\mathbf{y}$ расположена между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$, выполнено равенство

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Отсюда вытекает как то, что метрика ρ внутренняя, так и то, что кратчайшие пути относительно этой метрики совпадают с прямолинейными отрезками.

Мы обсудили несколько примеров геометрий, в которых кратчайшими являются отрезки прямых: это евклидова геометрия, сферическая геометрия (модель которой на плоскости получается стереографической проекцией) и геометрия Лобачевского в модели Клейна. Сферическая геометрия и геометрия Лобачевского зависят от одного параметра. На самом деле, сферическую геометрию можно формально получить как модель Клейна относительно мнимой коники (то есть такой коники, у которой вообще нет ни одной вещественной точки). Все эти геометрии объединяет то, что они являются *римановыми*, то есть в некотором приближении около каждой точки они совпадают с некоторой евклидовой метрикой. Выражаясь более точно, задание римановой метрики на многообразии эквивалентно заданию евклидовой метрики в каждом касательном пространстве к этому многообразию, причем требуется, чтобы эта евклидова метрика гладко зависела от точки. Чуть позже мы обсудим римановы метрики более подробно. Мы также обсудим результат замечательного итальянского геометра Эудженио Бельтрами, который доказал, что перечисленными римановыми метриками и исчерпывается список римановых метрик, в которых кратчайшими путями служат отрезки прямых. Этот результат был известен Гильберту.

Гильберт имел в виду более общие геометрии, чем римановы. Он привел примеры метрик, отличных от римановых, в которых кратчайшими путями являются отрезки прямых. Эти метрики, называемые *метриками Гильберта*, строятся так же, как и метрики Клейна, только вместо внутренности коники рассматривается произвольное открытое ограниченное выпуклое множество на (аффинной) плоскости. Еще один пример метрик, в которых кратчайшие пути — отрезки прямых, принадлежит Герману Миковскому. *Метрики Минковского* моделируют распространение света в однородной, но не изотропной среде. Условие однородности переписывается как свойство *трансляционной инвариантности метрики*: $\rho(\mathbf{x}+\mathbf{a},\mathbf{y}+\mathbf{a}) = \rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Кроме трансляционной инвариантности, имеет смысл наложить условие положительной однородности степени 1, то есть $\rho(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = \lambda\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Метрики Минковского — это метрики, являющиеся трансляционно инвариантными и однородными степени 1.

Рассмотрим единичный шар B в метрике Минковского, то есть множество точек $\mathbf{x}$, таких что $\rho(\mathbf{x},\mathbf{0}) \leqslant 1$. Здесь $\mathbf{0}$ обозначает точку, выбранную в качестве начала координат. Нетрудно проверить, что B является выпуклым множеством и содержит начало координат в своей внутренности. Кроме того, множество B должно быть симметрично относительно начала координат, то есть $B = -B$, что вытекает из симметричности метрики и трансляционной инвариантности. В самом деле,

$$\rho(-\mathbf{x},\mathbf{0}) = \rho(\mathbf{0},\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x},\mathbf{0}).$$

Первое равенство — следствие трансляционной инвариантности, а второе — следствие симметричности.

И наоборот, любое выпуклое множество B, содержащее начало координат в своей внутренности и симметричное относительно начала координат, задает некоторую метрику Минковского, относительно которой оно является единичным шаром. Метрика, связанная с множеством B, определяется в два этапа. Сначала определим расстояние от произвольной точки $\mathbf{x}$ до $\mathbf{0}$ как наименьшее число λ, такое что $\mathbf{x} \in \lambda B$ (нижняя грань таких чисел λ является минимумом в силу замкнутости множества B). Потом можно воспользоваться трансляционной инвариантностью и определить расстояние между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ как расстояние от точки $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ до нуля. Таким образом, множество B, являющееся единичным шаром некоторой метрики Минковского, несет всю информацию об этой метрике.

Мы определили два важных класса метрик (метрики Гильберта и метрики Минковского), в которых кратчайшими путями служат отрезки прямых. Все эти метрики относятся к так называемым *финслеровым метрикам*. Финслеровы метрики локально моделируются метриками Минковского в том же смысле, в каком римановы метрики локально моделируются евклидовыми метриками. Ниже, когда мы будем обсуждать лагранжианы и принцип наименьшего действия, у нас будет повод дать строгое определение финслеровых метрик. Естественная постановка четвертой проблемы Гильберта такая: описать все финслеровы метрики, в которых кратчайшие — это отрезки прямых. Многие естественные задачи, полученные формализацией четвертой проблемы Гильберта, решены (см.: [Amb, Ham]). Популярный обзор можно найти в [AlP].

ЭУДЖЕНИО БЕЛЬТРАМИ (1835–1900)

Итальянский геометр. Преподавал в Болонье, в Пизе и в Риме. Именно он впервые обнаружил модели геометрии Лобачевского. Те конструкции, которые сейчас известны как модель Клейна и как модель Пуанкаре, впервые появились в работах Бельтрами. Разумеется, Клейн и Пуанкаре тоже внесли весомый вклад: Клейн дал проективную интерпретацию модели Клейна, а Пуанкаре нашел замечательную связь между моделью Пуанкаре и фуксовыми уравнениями. Бельтрами также построил локальное изометрическое вложение плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство — поверхность Бельтрами. В комплексном анализе активно используются дифференциалы Бельтрами.

ДАВИД ГИЛЬБЕРТ (1862–1943)

Один из самых влиятельных математиков всех времен. Родился в Кенигсберге (ныне Калининград). В Университете Кенигсберга прошел все этапы научной карьеры, от студента до полного профессора. В 1895 году Гильберту предложили кафедру в Геттингене (в значительной степени благодаря усилиям Ф. Клейна), и ее он возглавлял до 1930 года. Многие области математики, такие как алгебраическая теория чисел, теория инвариантов, теория интегральных уравнений, функциональный анализ, вариационное исчисление, математическая физика, приобрели свой современный облик благодаря Гильберту. В области оснований геометрии Гильберту принадлежит следующий по величине шаг после Евклида: аксиоматизация классической евклидовой геометрии. В 1930 году Гильберт ушел на пенсию и вернулся в свой родной город Кенигсберг, где был признан почетным жителем.

ЗАДАЧИ

Задача 1.20. Выпишите формулу для сферической метрики на плоскости.

Задача 1.21. Проверьте, что метрики Гильберта и метрики Минковского являются внутренними.

Задача 1.22. Проверьте, что в метриках Гильберта и Минковского кратчайшие пути совпадают с прямолинейными отрезками.

Учебное издание

Серия «Учебники Высшей школы экономики»

Тиморин Владлен Анатольевич

Геометрия гамильтоновых систем и уравнений с частными производными

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*
Редактор *Н.М. Дмуховская*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *И.Г. Андреева*
Корректор *Н.М. Дмуховская*

Подписано в печать 15.12.2016. Формат 70×100/16
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 28,6. Уч.-изд. л. 27,9
Тираж 1000 экз. Изд. № 1775. Заказ №

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20
Тел.: (495) 772-95-90 доб. 15285

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
www.chpd.ru, e-mail: sales@chpd.ru
Тел.: 8 (499) 270-73-59