Функциональный анализ и его приложения
2001, т. 35, вып. 3, с. 36–47

УДК 514.172.45+515.165.4

О многогранниках, простых в ребрах*

© 2001. В. А. Тиморин

Введение

В этой статье термин «многогранник» всегда означает выпуклый многогранник. Под *d-многогранником* мы понимаем многогранник в $\mathbb{R}^d$ с непустой внутренностью.

Обозначим через f_k число k-граней некоторого d-многогранника. Полезно рассматривать другой набор чисел $\{h_k\}$, полученный из $\{f_k\}$ линейным преобразованием:

$$h_k = \sum_{i\geqslant k} f_i(-1)^{i-k}\binom{i}{k}, \qquad f_k = \sum_{i\geqslant k} h_i\binom{i}{k}.$$

Набор чисел f_k называется *f-вектором*, а числа h_k составляют *h-вектор*.

Скажем, что вершина d-многогранника *простая*, если в ней сходится ровно d гиперграней. Многогранник называется *простым*, если все его вершины простые. Для простых многогранников выполнены следующие соотношения между компонентами h-вектора:

- *соотношения Дена–Соммервиля* [1, 2]: $h_0 = h_d = 1$, $h_k = h_{d-k}$,
- *условие унимодальности* [3–5]:

$$h_0 \leqslant h_1 \leqslant \dots \leqslant h_{[d/2]} \geqslant h_{[d/2]+1} \geqslant \dots \geqslant h_{d-1} \geqslant h_d.$$

В этой статье изучаются h-векторы для чуть более общего класса многогранников. Назовем d-многогранник *простым в ребрах*, если каждое его ребро примыкает ровно к $d-1$ гиперграням. Многогранники, простые в ребрах, возникают, например, в теории дискретных групп, порожденных отражениями в пространстве Лобачевского.

Мы докажем, что для многогранника, простого в ребрах, все числа $h_{[d/2]}$, $h_{[d/2]+1},\dots,$ h_d неотрицательны и $h_k \leqslant h_{d-k}$ при $k \leqslant d/2$. Эти соотношения дают непосредственное доказательство оценок Хованского [1]. Допустим, что непростые вершины многогранника, простого в ребрах, расположены достаточно далеко одна от другой. Это означает, что на каждой гиперграни имеется не более одной непростой вершины. Такие многогранники мы назовем *многогранниками с редкими особенностями*. Мы дадим элементарное геометрическое доказательство того, что неравенства

$$h_{[d/2]} \geqslant h_{[d/2]+1} \geqslant \dots \geqslant h_d$$

в этом случае сохраняются. Гипотеза Стенли [6] состоит в том, что эти неравенства верны для любых многогранников[1)].

---

*Работа частично поддержана грантами РФФИ 99-01-00245 и CRDF RM1-2086.

[1)] Недавно М. Исида анонсировал доказательство общей гипотезы Стенли. Насколько мне известно, его работа еще не завершена.

Комбинаторика выпуклых многогранников тесно связана с теорией торических многообразий. Многогранник называется *целочисленным*, если все его вершины принадлежат целочисленной решетке. С каждым целочисленным многогранником связано *торическое многообразие* [7, 8]. Когомологии (в смысле Горески–Макферсона) этого многообразия являются комбинаторными инвариантами многогранника [9].

В [10, 11] дано комбинаторное описание когомологий торических многообразий. Это описание имеет смысл для любых многогранников (не обязательно целочисленных), так что для каждого многогранника определены *комбинаторные когомологии*. Мы докажем вариант сильной теоремы Лефшеца в комбинаторных когомологиях многогранников с редкими особенностями.

Я очень благодарен В. А. Лунцу за существенную помощь (он сообщил мне утверждение предложения 4.6) и А. Г. Хованскому за полезные обсуждения.

§1. Когомологии простых многогранников

В этом разделе мы напомним геометрическое определение когомологий простых многогранников, данное в [12].

Пусть Σ есть d-многогранник. Говорят, что многогранник Σ' *аналогичен* многограннику Σ, если можно установить взаимно однозначное соответствие между гипергранями многогранников Σ и Σ', такое, что соответствующие гиперграни имеют одинаковые внешние нормали и становятся аналогичными после параллельного переноса в общую гиперплоскость. По определению любые два отрезка в $\mathbb{R}$ аналогичны. Аналогичные многогранники имеют один и тот же *комбинаторный тип*. Это значит, что грани аналогичных многогранников удовлетворяют одним и тем же соотношениям включения. В частности, многогранник, аналогичный простому, сам простой.

Зафиксируем простой d-многогранник Σ. Рассмотрим многогранник Σ', аналогичный многограннику Σ. Каждой гиперграни Γ многогранника Σ соответствует параллельная гипергрань Γ' многогранника Σ'. Пусть ξ_Γ — линейный функционал, максимум которого при ограничении на Σ достигается на гиперграни Γ. Обозначим через $H_\Gamma(\Sigma')$ максимум функционала ξ_Γ на Σ' (конечно, этот максимум достигается на Γ'). Число $H_\Gamma(\Sigma')$ называется *опорным числом* многогранника Σ'.

Слегка сдвинем все гиперграни многогранника Σ так, чтобы каждая гипергрань осталась параллельной себе. Мы получим аналогичный многогранник Σ'. Таким образом, мы можем менять опорные числа независимо (по крайней мере пока изменения достаточно малы). С другой стороны, многогранник Σ' однозначно определяется своими опорными числами. Поэтому мы можем воспринимать многогранник Σ' как функцию независимых параметров H_Γ.

Объем многогранника Σ' является многочленом от H_Γ. Обозначим этот многочлен через Vol_Σ. Рассмотрим кольцо Diff дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами относительно опорных чисел. Обозначим через ∂_Γ оператор дифференцирования по H_Γ. Кольцо Diff — не что иное, как кольцо многочленов от дифференцирований ∂_Γ. Пусть J — идеал в Diff, состоящий из операторов α, таких, что $\alpha\,\mathrm{Vol}_\Sigma = 0$. Идеал J однородный; поэтому факторалгебра $A(\Sigma) = \mathrm{Diff}/J$ наследует градуировку. Размерность однородной компоненты $A^k(\Sigma)$ равна $h_k(\Sigma)$ [5].

Кольцо $A(\Sigma)$ моделирует кольцо когомологий [12]. Если многогранник Σ целочисленный, то $A(\Sigma)$ действительно изоморфно кольцу когомологий соответствующего торического многообразия. Оператор умножения на $L_\Sigma = \sum H_\Gamma(\Sigma)\partial_\Gamma$ представляет оператор Лефшеца. Для простых многогранников имеет место следующий аналог сильной теоремы Лефшеца [4, 5]:

Теорема 1.1. *Умножение на L_Σ^{d-2k} устанавливает изоморфизм между $A^k(\Sigma)$ и $A^{d-k}(\Sigma)$.*

Отсюда вытекает, что h-вектор простого многогранника унимодален, т. е. $h_0 \leqslant h_1 \leqslant \dots \leqslant h_{[d/2]}$. Элемент $\alpha \in A^k(\Sigma)$ называется *примитивным*, если $\alpha L_\Sigma^{d-2k+1} = 0$ в $A(\Sigma)$ или, что то же самое, многочлен $\alpha \operatorname{Vol}_\Sigma$ имеет нуль порядка k в точке с координатами $H_\Gamma(\Sigma)$. Нетрудно видеть, что пространство всех примитивных элементов степени k имеет размерность $h_k - h_{k-1}$. Следующая теорема [4, 5] — аналог билинейных соотношений Ходжа–Римана:

Теорема 1.2. *Для каждого примитивного элемента $\alpha \in A^k(\Sigma)$*

$$(-1)^k \alpha^2 L_\Sigma^{d-2k}(\operatorname{Vol}_\Sigma) \geqslant 0.$$

Изучим связь между $A^k(\Sigma)$ и $A^k(\Gamma)$, где Γ — гипергрань многогранника Σ. Очевидно, что значение многочлена $\partial_\Gamma \operatorname{Vol}_\Sigma$ на опорных числах многогранника Σ дает $(d-1)$-мерный объем грани Γ. С другой стороны, опорные числа грани Γ линейно выражаются через опорные числа многогранника Σ. Следовательно, многочлен $\operatorname{Vol}_\Gamma$ отличается от $\partial_\Gamma \operatorname{Vol}_\Sigma$ линейной (необратимой) заменой переменных. Для всякого $\alpha \in A^k(\Sigma)$ найдется элемент $\alpha_{(\Gamma)} \in A^k(\Gamma)$, такой, что $\alpha_{(\Gamma)} \operatorname{Vol}_\Gamma$ получается из $\alpha\partial_\Gamma \operatorname{Vol}_\Sigma$ той же самой заменой переменных. Отображение $\alpha \mapsto \alpha_{(\Gamma)}$ — сюръективный гомоморфизм из $A^k(\Sigma)$ в $A^k(\Gamma)$. Нетрудно показать, что $(L_\Sigma)_{(\Gamma)} = L_\Gamma$.

Аналог теории Морса. *Общая линейная функция* на Σ — это линейная функция на $\mathbb{R}^d$, не постоянная ни на каком ребре многогранника Σ. Зафиксируем общую линейную функцию l. Мы будем считать, что l — вертикальная координата, и употреблять по отношению к ней слова «вверх» и «вниз». *Индексом вершины* v многогранника Σ называется число ребер, идущих вниз из v. Нетрудно доказать, что число вершин индекса k равно h_k [1]. В частности, оно не зависит от выбора функции l.

Пусть v — вершина многогранника Σ. *Сепаратриса* вершины v — это грань многогранника Σ, натянутая на все ребра, идущие вниз из v. Приведем явное описание базиса в когомологиях $A(\Sigma)$ в терминах дифференциальных операторов [5]. Пусть F — грань многогранника Σ. Обозначим через $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ все гиперграни, содержащие F, так что $F = \Gamma_1 \cap \dots \cap \Gamma_k$. Определим дифференциальный оператор $\partial_F = \partial_{\Gamma_1} \cdots \partial_{\Gamma_k}$, связанный с F.

Теорема 1.3. *Операторы ∂_F, где F — сепаратриса многогранника Σ, составляют базис векторного пространства $A(\Sigma)$.*

Разложение элемента $\alpha \in A(\Sigma)$ по этому базису называется *сепаратрисным разложением*. Пусть $\alpha = \sum a_F \partial_F$ — сепаратрисное разложение элемента α. Сепаратриса F называется *максимальной сепаратрисой* элемента α, если значение $\max(l|_F)$ является наибольшим среди таких значений для всех сепаратрис, входящих в разложение элемента α с ненулевыми коэффициентами.

§ 2. Многогранники, простые в ребрах

Рассмотрим d-многогранник Δ, простой в ребрах. Отрежем все непростые вершины многогранника Δ гиперплоскостями, достаточно близкими к этим вершинам. Получим простой многогранник Σ, включающийся в однопараметрическое семейство Σ_t, $t \in (0,1]$, аналогичных простых многогранников, такое, что $\Sigma_1 = \Sigma$ и $\Sigma_t \to \Delta$ при $t \to 0$ в метрике Хаусдорфа. Многогранник Σ назовем *стандартным разрешением* многогранника Δ. Гипергрань многогранника Σ, высеченную отрезающей гиперплоскостью, назовем *вставленной*. Многогранник Δ определяет оператор $L_\Delta = \lim_{t\to 0} L_{\Sigma_t}$ в $A(\Sigma)$. Для каждой гиперграни Γ многогранника Σ определено опорное число $H_\Gamma(\Delta) = \max(\xi_\Gamma|_\Delta)$. Оператор L_Δ выражается формулой $\sum H_\Gamma(\Delta)\partial_\Gamma$ (суммирование по всем гиперграням многогранника Σ). Заметим, что если Γ — вставленная грань, то $(L_\Delta)_{(\Gamma)} = 0$.

Лемма 2.1. *При $0 < k \leqslant d$ имеем $h_k(\Delta) = h_k(\Sigma) - \sum h_k(\Gamma)$, где суммирование ведется по всем вставленным гиперграням Γ многогранника Σ (мы считаем, что $h_d(\Gamma) = 0$).*

Доказательство. Это вытекает из аналогичной формулы для f-вектора: $f_m(\Delta) = f_m(\Sigma) - \sum f_m(\Gamma)$. □

Лемма 2.2. *Предположим, что $\sum \partial_\Gamma \alpha_\Gamma = 0$, где Γ пробегает вставленные гиперграни, а α_Γ — операторы порядка $k < (d-1)/2$. Тогда $\partial_\Gamma \alpha_\Gamma = 0$ для каждой гиперграни Γ.*

Доказательство. Умножим уравнение $\sum \partial_\Gamma \alpha_\Gamma = 0$ на ∂_Γ. Поскольку вставленные гиперграни не пересекаются, получаем $\partial_\Gamma^2 \alpha_\Gamma = 0$. Заметим, что оператор ∂_Γ опускается (со знаком минус) до оператора Лефшеца на Γ; поэтому $L_\Gamma(\alpha_\Gamma)_{(\Gamma)} = 0$. Из сильной теоремы Лефшеца 1.1 для Γ заключаем, что $(\alpha_\Gamma)_{(\Gamma)} = 0$, т. е. $\partial_\Gamma \alpha_\Gamma = 0$. □

Лемма 2.3. *При $k \leqslant d/2$ выполнено неравенство $h_k(\Sigma) - \sum h_{k-1}(\Gamma) \geqslant 0$.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство в $A^k(\Sigma)$, порожденное элементами $\partial_\Gamma \alpha$, где Γ — вставленная грань многогранника Σ, а $\alpha \in A^{k-1}(\Sigma)$. Из леммы 2.2 мы знаем, что размерность этого подпространства равна $\sum \dim(\partial_\Gamma A^{k-1}(\Sigma)) = \sum \dim(A^{k-1}(\Gamma)) = \sum h_{k-1}(\Gamma)$. Следовательно, $h_k(\Sigma) - \sum h_{k-1}(\Gamma) \geqslant 0$. □

Теорема 2.4. *Числа $h_k(\Delta)$ неотрицательны при всех $k \geqslant d/2$.*

Доказательство. Это следует из лемм 2.1 и 2.3 и соотношений Дена–Соммервиля для Σ и всех Γ. □

Заметим, что другие компоненты h-вектора могут быть отрицательными. Например, икосаэдр является простым в ребрах (как и всякий 3-мерный многогранник), однако $h_1 = -7$.

Теорема 2.5. *При $k \leqslant d/2$ имеем $h_k(\Delta) \leqslant h_{d-k}(\Delta)$.*

Доказательство. Для $k = 0$ это неравенство превращается в равенство, так как $h_0 = h_d = 1$ (это следует из теоремы Эйлера). Допустим, что $k > 0$. Тогда это неравенство вытекает из леммы 2.1, соотношений Дена–Соммервиля для Σ и условия унимодальности для вставленных гиперграней Γ. □

Известно, что теорема Эйлера $h_0 = 1$ и тривиальное уравнение $h_d = 1$ (эти уравнения верны для любых многогранников) — это все линейные соотношения на h-вектор многогранника, простого в ребрах [2]. Теорема 2.4 устанавливает некоторые соотношения типа неравенств.

Некоторые приложения. А. Г. Хованский в [1] оценил среднее число k-граней на l-грани d-многогранника, простого в ребрах $(1 \leqslant k < l \leqslant d/2)$. Оценка Хованского обобщает результат Никулина [13] (разобравшего случай простых многогранников) и завершает доказательство следующего утверждения: в пространстве Лобачевского размерности > 995 нет дискретных групп, порожденных отражениями, с фундаментальным многогранником конечного объема.

Мы выведем оценку Хованского из теорем 2.4 и 2.5. Следующее утверждение очевидно:

Лемма 2.6. *Для положительных чисел $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$*

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} \leqslant \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right\}.$$

Теорема 2.7. *Для d-многогранника Δ, простого в ребрах, при $1 \leqslant k < l \leqslant d/2$ имеется следующая оценка сверху для среднего числа k-граней, лежащих на l-грани многогранника Δ:*

$$\binom{n-k}{n-l} \frac{\binom{[d/2]}{k} + \binom{[(d+1)/2]}{k}}{\binom{[d/2]}{l} + \binom{[(d+1)/2]}{l}}\,.$$

Доказательство. Заметим, что любая k-грань F многогранника Δ $(k \geqslant 1)$ содержится ровно в $\binom{n-k}{n-l}$ гранях размерности l. Следовательно, достаточно оценить отношение f_k/f_l. Используя теорему 2.5 и соотношения между f- и h-векторами, получаем

$$f_k \leqslant \sum_{m \geqslant d/2} h_m \left[\binom{m}{k} + \binom{d-m}{k}\right], \qquad f_l \leqslant \sum_{m \geqslant d/2} h_m \left[\binom{m}{l} + \binom{d-m}{l}\right].$$

Воспользуемся леммой 2.6 для оценки сверху величины f_k/f_l:

$$\frac{f_k}{f_l} \leqslant \frac{\binom{[d/2]}{k} + \binom{[(d+1)/2]}{k}}{\binom{[d/2]}{l} + \binom{[(d+1)/2]}{l}}. \qquad \square$$

§ 3. Многогранники с редкими особенностями

Рассмотрим многогранник Δ с единственной непростой вершиной v. Обозначим через Σ простой многогранник, полученный из Δ отрезанием вершины v. Пусть Γ — вставленная грань многогранника Σ.

Лемма 3.1. *Пусть элемент $\alpha \in A^k(\Sigma)$ удовлетворяет условию $\partial_{\Gamma'}\alpha = 0$ для всякой гиперграни Γ', не пересекающей Γ. Тогда α делится на ∂_Γ в $A(\Sigma)$.*

Доказательство. Введем общую линейную функцию l на Σ, такую, что относительно нее все вершины грани Γ ниже всех остальных. Рассмотрим сепаратрисное разложение элемента α относительно l. Пусть F — максимальная сепаратриса элемента α. Предположим, что F не принадлежит Γ. Тогда найдется гипергрань Γ' многогранника Σ, проходящая через верхнюю вершину грани F, не содержащая F и не пересекающая Γ. Мы знаем, что $\partial_{\Gamma'}\alpha = 0$. С другой стороны, нетрудно видеть, что $F\cap\Gamma'$ — максимальная сепаратриса оператора $\alpha_{(\Gamma')}$ относительно общей линейной функции $l|_{\Gamma'}$. Противоречие.

Таким образом, любая грань F из сепаратрисного разложения элемента α принадлежит Γ. Значит, $\alpha = \partial_\Gamma\beta$ для некоторого β. □

Теорема 3.2. *Предположим, что $\alpha L_\Delta^{d-2k} = 0$, где $\alpha \in A^k(\Sigma)$. Тогда α делится на ∂_Γ.*

Доказательство. Поместим начало координат в точку v. Тогда $H_{\Gamma'}(\Delta)\neq 0$, только если гипергрань Γ' не пересекает Γ. Возьмем такую грань Γ'. Спроецируем равенство $\alpha L_\Delta^{d-2k}(\mathrm{Vol}_\Sigma) = 0$ на гипергрань Γ'. Получим $\alpha_{(\Gamma')}L_{\Gamma'}^{d-2k}(\mathrm{Vol}_{\Gamma'}) = 0$. Но это условие примитивности относительно Γ'. По теореме 1.2

$$(-1)^k\alpha_{(\Gamma')}^2 L_{\Gamma'}^{d-1-2k}(\mathrm{Vol}_{\Gamma'}) \geqslant 0.$$

Умножим это неравенство на $H_{\Gamma'}(\Delta) > 0$ и просуммируем по всем гиперграням Γ', не пересекающим Γ. Получим $(-1)^k\alpha^2 L_\Delta^{d-2k}(\mathrm{Vol}_\Sigma) \geqslant 0$. Но это неравенство обращается в равенство согласно нашему предположению об α. Следовательно, для всех Γ' (таких, что $\Gamma'\cap\Gamma = \varnothing$) имеем $(-1)^k\alpha_{(\Gamma')}^2 L_{\Gamma'}^{d-1-2k}(\mathrm{Vol}_{\Gamma'}) = 0$. Так как элемент $\alpha_{(\Gamma')}$ примитивен относительно Γ', то $\alpha_{(\Gamma')} = 0$ в $A^k(\Gamma')$ или, что то же самое, $\partial_{\Gamma'}\alpha = 0$. Согласно лемме 3.1, элемент α делится на ∂_Γ. □

Редкие особенности. Нам понадобится следующий простой факт (доказательство — простое упражнение):

Лемма 3.3. *Пусть P и Q — однородные полиномы на одном и том же векторном пространстве. Дифференциальный оператор β с постоянными коэффициентами, такой, что $P = \beta Q$, существует тогда и только тогда, когда равенство $\alpha Q = 0$ влечет за собой равенство $\alpha P = 0$ для каждого дифференциального оператора α с постоянными коэффициентами.*

Пусть Σ — простой многогранник. Допустим, мы хотим доказать, что многочлен P относительно опорных чисел многогранника Σ имеет вид $\beta\,\mathrm{Vol}$ для некоторого $\beta \in A(\Sigma)$. Тогда по лемме 3.3 достаточно проверить, что идеал J аннулирует P. Напомним, что этот идеал порожден следующими двумя группами дифференциальных операторов [5]:

- $\partial_{\Gamma_1}\cdots\partial_{\Gamma_k}$, где $\Gamma_1\cap\cdots\cap\Gamma_k = \varnothing$,
- $\sum H_\Gamma(a)\partial_\Gamma$, где $a\in\mathbb{R}^d$.

Следовательно, достаточно проверить, что все образующие, перечисленные выше, переводят многочлен P в нуль.

Пусть Δ — многогранник с редкими особенностями. Обозначим через Σ стандартное разрешение многогранника Δ. Определим пространство I^k как подпространство в $A^k(\Sigma)$, порожденное всеми элементами вида $\partial_\Gamma\alpha$, где Γ — вставленные гиперграни.

Теорема 3.4. *Если Δ — многогранник с редкими особенностями, то ядро оператора (умножения на) $L_\Delta\colon A^k(\Sigma)\to A^{k+1}(\Sigma)$ совпадает с I^k при $k < (d-1)/2$.*

Доказательство. Пусть Γ — вставленная грань. Тогда $L_\Delta\partial_\Gamma = 0$, поскольку $(L_\Delta)_{(\Gamma)} = 0$. Значит, подпространство I^k лежит в ядре оператора L_Δ.

Докажем обратное включение. Будем вести индукцию по числу непростых вершин многогранника Δ. Если непростая вершина только одна, то эта теорема следует из теоремы 3.2. Пусть теперь v — произвольная непростая вершина. Отрежем ее. Получим другой многогранник Θ с редкими особенностями. Можно считать, что Σ — стандартное разрешение многогранника Θ. Обозначим через Γ вставленную грань многогранника Σ, отвечающую вершине v.

Пусть $\alpha \in A^k(\Sigma)$ удовлетворяет равенству $L_\Delta \alpha = 0$. Заметим, что $L_\Delta - L_\Theta = c\partial_\Gamma$, где c — положительное число. Таким образом, $L_\Theta \alpha = -c\partial_\Gamma \alpha$.

Из равенства $L_\Delta \alpha = 0$ мы получаем аналогичное соотношение $(L_\Delta)_{(\Gamma')}\alpha_{(\Gamma')} = 0$ для каждой невставленной гиперграни Γ' многогранника Σ. Заметим, что оператор $(L_\Delta)_{(\Gamma')}$ соответствует многограннику с не более чем одной непростой вершиной и стандартным разрешением Γ'. По теореме 3.2 для каждой грани Γ', пересекающей Γ, элемент $\alpha_{(\Gamma')}$ делится на $(\partial_\Gamma)_{(\Gamma')}$, т. е. $\partial_{\Gamma'}\alpha$ делится на ∂_Γ. Положим $P_{\Gamma'} = \partial_{\Gamma'}\alpha \operatorname{Vol}$, если Γ' пересекает Γ, и $P_{\Gamma'} = 0$ в противном случае.

Легко проверить, что многочлены $P_{\Gamma'}$ связаны соотношением $\partial_{\Gamma'} P_{\Gamma''} = \partial_{\Gamma''} P_{\Gamma'}$. Следовательно, существует многочлен P, такой, что $P_{\Gamma'} = \partial_{\Gamma'} P$ для всех гиперграней Γ'. Мы хотим доказать, что $P = \beta \operatorname{Vol}$ для некоторого дифференциального оператора β с постоянными коэффициентами. Согласно лемме 3.3, достаточно показать, что

- $\partial_{\Gamma'_1} \cdots \partial_{\Gamma'_k} P = 0$, если $\Gamma'_1 \cap \cdots \cap \Gamma'_k = \varnothing$,
- $\sum H_{\Gamma'}(a)\partial_{\Gamma'} P = 0$ для всякой точки $a \in \mathbb{R}^d$.

Первое условие очевидно. Второе условие следует из уравнения $\sum H_{\Gamma'}(a)\partial_{\Gamma'}\alpha = 0$ в $A(\Sigma)$. Заметим, что по теореме 3.2 всякий оператор $\partial_{\Gamma'}\alpha$ делится на оператор какой-нибудь вставленной грани. Чтобы получить второе условие на P, приравняем к нулю члены с ∂_Γ (используя лемму 2.2).

Таким образом, $P = \beta \operatorname{Vol}$. Но $\partial_{\Gamma'} P = 0$ для всех Γ', не пересекающих Γ. Из леммы 3.1 следует, что β делится на ∂_Γ и, в частности, $L_\Delta \beta = 0$. По определению оператора β каждая производная многочлена $\alpha_{(\Gamma)}\operatorname{Vol}_\Gamma$ совпадает с соответствующей производной многочлена $\beta_{(\Gamma)}\operatorname{Vol}_\Gamma$. Следовательно, $\partial_\Gamma \alpha = \partial_\Gamma \beta$ и $L_\Theta \alpha = L_\Theta \beta$.

Пусть теперь $\gamma = \alpha - \beta$. Мы знаем, что $L_\Theta \gamma = 0$. По предположению индукции $\gamma \in I^k$. Таким образом, $\alpha = \beta + \gamma \in I^k$. $\square$

§ 4. Следствия для комбинаторных когомологий

В этом разделе мы увидим, что означает теорема 3.4 для комбинаторных когомологий. Сначала кратко напомним основные определения.

Вееры. С каждой гранью F многогранника Δ свяжем *нормальный конус* $C_F \subset \mathbb{R}^{d*}$, состоящий из линейных функционалов на $\mathbb{R}^d$, принимающих максимальные значения где-то на F. Множество нормальных конусов ко всем граням многогранника Δ называется *двойственным веером* многогранника Δ.

Веер в вещественном векторном пространстве V — это набор Φ выпуклых многогранных конусов с вершиной в начале координат, такой, что

- каждая грань каждого конуса из Φ принадлежит Φ,
- пересечение двух конусов из Φ — их общая грань.

Веер называется *симплициальным*, если все его конусы симплициальные. Веер *полный*, если объединение всех его конусов — все пространство V.

Двойственный веер d-многогранника — полный веер в $\mathbb{R}^{d*}$. Этот веер симплициален тогда и только тогда, когда многогранник простой.

Всякому рациональному вееру Φ соответствует торическое многообразие X. Когомологии Горески–Макферсона многообразия X описываются явно в терминах веера Φ [10, 11]. Описание имеет смысл, даже если Φ нерациональный.

Комбинаторные когомологии. Следуя [10, 11], мы определим (комбинаторные) когомологии веера. Веер Φ можно рассматривать как конечное топологическое пространство, в котором открытые подмножества — подвееры. Каждый конус $\sigma \in \Phi$ имеет единственную минимальную окрестность $[\sigma]$, состоящую из конуса σ и всех его граней.

Определим пучок колец $\mathscr{O}_\Phi$ на Φ. Сечения пучка $\mathscr{O}_\Phi$ над подвеером Υ — непрерывные функции на $\bigcup \Upsilon$, полиномиальные на каждом конусе. Нетрудно проверить, что пучок $\mathscr{O}_\Phi$ вялый тогда и только тогда, когда Φ симплициален.

Градуированный пучок $\mathscr{O}_\Phi$-модулей $\mathscr{M}_\Phi$ называется *основным*, если

- выполнено равенство $\mathscr{M}_\Phi([0]) = \mathbb{R}$;
- модуль $\mathscr{M}_\Phi[\sigma]$ — свободный $\mathscr{O}_\Phi[\sigma]$-модуль для всякого $\sigma \in \Phi$;
- пучок $\mathscr{M}_\Phi$ вялый; для этого достаточно потребовать, чтобы для каждого конуса $\sigma \in \Phi$ отображение ограничения $\mathscr{M}_\Phi[\sigma] \to \mathscr{M}_\Phi(\partial\sigma)$ было сюръективным;
- модуль $\mathscr{M}_\Phi[\sigma]$ — минимальный свободный $\mathscr{O}_\Phi[\sigma]$-модуль, удовлетворяющий предыдущему условию.

Ясно, что основной пучок существует и притом он только один с точностью до изоморфизма. Пространство глобальных сечений $M_\Phi = \Gamma(\Phi, \mathscr{M}_\Phi)$ — комбинаторный аналог эквивариантных когомологий торического многообразия.

Пусть $O_\Phi = \Gamma(\Phi, \mathscr{O}_\Phi)$ — пространство глобальных кусочно полиномиальных функций на Φ. Пространство M_Φ есть O_Φ-модуль. Рассмотрим идеал O_Φ^+ в O_Φ, порожденный всеми линейными функциями. Обозначим фактормодуль $M_\Phi / O_\Phi^+ M_\Phi$ через $\overline{M}_\Phi$. Это *когомологии* веера Φ.

Аналог сильной теоремы Лефшеца. Пусть Φ — двойственный веер d-многогранника Δ. Для каждого линейного функционала $\xi \in \mathbb{R}^{d*}$ обозначим через $S_\Delta(\xi)$ максимум его ограничения ξ на Δ. Функция S_Δ кусочно линейна относительно Φ. Значит, она лежит в O_Φ. Следующий аналог сильной теоремы Лефшеца выполняется для целочисленных многогранников [10, 11] и, должно быть, для любых многогранников.

Гипотеза 4.1. *При $k < d/2$ оператор умножения на S_Δ^{d-2k} устанавливает изоморфизм между $\overline{M}_\Phi^k$ и $\overline{M}_\Phi^{d-k}$. В частности, умножение на S_Δ — вложение пространства $\overline{M}_\Phi^k$ в $\overline{M}_\Phi^{k+1}$.*

Обозначим числа Бетти $\dim \overline{M}_\Phi^k$ через $Ih_k(\Delta)$. Если гипотеза 4.1 верна, то

$$Ih_0(\Delta) \leqslant Ih_1(\Delta) \leqslant \ldots \leqslant Ih_{[d/2]}(\Delta).$$

В [10, 11] доказано, что $Ih_k(\Delta) = Ih_{d-k}(\Delta)$ (аналог двойственности Пуанкаре).

Когомологии симплициального веера. Пусть Ψ — симплициальный веер. Основной пучок $\mathscr{M}_\Psi$ совпадает с $\mathscr{O}_\Psi$. Следовательно, $M_\Psi = O_\Psi$ — пространство всех кусочно полиномиальных функций на Ψ. Предположим, что Ψ двойствен к простому многограннику Σ.

Предложение 4.2. *Имеется естественный изоморфизм между* $\overline{O}_\Psi = O_\Psi/O_\Psi^+$ *и* $A(\Sigma)$. *Этот изоморфизм переводит* S_Σ *в* L_Σ.

Доказательство. Для луча $\rho \in \Psi$ обозначим через χ^ρ кусочно линейную функцию, обращающуюся в нуль на всех лучах веера Ψ, кроме ρ. Назовем функцию χ^ρ *характеристической функцией* луча ρ. Она единственна с точностью до постоянного множителя (конечно, предполагается, что $\chi^\rho \neq 0$). Из описания идеала J, приведенного в [5], вытекает, что соответствие $\partial_\Gamma \mapsto \chi^\rho$, где ρ — нормальный луч гиперграни Γ, опускается до изоморфизма между $A(\Sigma)$ и $\overline{O}_\Psi$. Очевидно, что при этом изоморфизме функция S_Σ соответствует оператору L_Σ. □

Когомологии конуса. Рассмотрим неполный веер $[\sigma]$, состоящий из d-мерного конуса σ и всех его граней. Предположим, что σ не содержит нетривиального векторного подпространства, так что это конус над $(d-1)$-мерным многогранником. Веер $[\sigma]$ соответствует (в рациональном случае) аффинному торическому многообразию. Кольцо $O_{[\sigma]}$ состоит из всех многочленов на $\mathbb{R}^{d*}$.

Изучим ограничение $M_{[\sigma]} \to M_{\partial\sigma}$. Веер $\partial\sigma$ можно спроецировать на полный веер $\bar\sigma$ в подходящей гиперплоскости, проходящей через начало координат. Легко видеть, что веер $\bar\sigma$ двойствен к некоторому многограннику Λ. Ограничение $\mathscr{M}|_{\partial\sigma}$ определяет основной пучок на веере $\bar\sigma$, причем $M_{\bar\sigma} = M_{\partial\sigma}$. Из условия минимальности для пучка $\mathscr{M}_{[\sigma]}$ и леммы Накаямы вытекает, что отображение

$$\overline{M}_{[\sigma]} = M_{[\sigma]}/O_{[\sigma]}^+ M_{[\sigma]} \to M_{\partial\sigma}/O_{[\sigma]}^+ M_{\partial\sigma}$$

является изоморфизмом векторных пространств над полем $\overline{O}_{[\sigma]} = O_{[\sigma]}/O_{[\sigma]}^+ = \mathbb{R}$.

Введем координаты $(x_1, \dots, x_d)$ в пространстве $\mathbb{R}^{d*}$, такие, что веер $\bar\sigma$ лежит в координатной гиперплоскости $x_d = 0$. Тогда линейная функция x_d, ограниченная на $\partial\sigma$ и спроецированная на $\bar\sigma$, переходит в оператор Лефшеца S_Λ.

Предложение 4.3. *Допустим, что веер* $\bar\sigma$ *удовлетворяет гипотезе* 4.1 (*относительно функции* S_Λ). *Ядро отображения ограничения* $M_{[\sigma]} \to M_{\bar\sigma}$ *не содержит элементов степени* $\leqslant d/2$.

Доказательство. Рассмотрим кольцо $o = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{d-1}]$ и в нем максимальный идеал o^+, порожденный всеми элементами степени 1, т. е. всеми линейными функциями. Пространство когомологий веера $\bar\sigma$ равно $\overline{M}_{\bar\sigma} = M_{\bar\sigma}/o^+ M_{\bar\sigma}$.

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ — свободные образующие модуля $M_{[\sigma]}$ над кольцом $O_{[\sigma]} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$. Обозначим через $\overline{\varphi}_i$ образ элемента φ_i при ограничении $M_{[\sigma]} \to M_{\partial\sigma}$. Элементы $\overline{\varphi}_i$, очевидно, задают базис векторного пространства $M_{\partial\sigma}/O_{[\sigma]}^+ M_{\partial\sigma} \cong \overline{M}_{[\sigma]}$.

Теперь предположим, что ограничение элемента $\varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_s\varphi_s$, однородного степени $k \leqslant d/2$, равно нулю, т. е. $a_1\overline{\varphi}_1 + \dots + a_s\overline{\varphi}_s = 0$ в $M_{\overline{\sigma}}$. Приведем последнее соотношение по модулю идеала o^+. После этого коэффициенты a_i станут многочленами от x_d. Пусть x_d^t — наименьшая степень переменной x_d, делящая все многочлены a_i. Так как $k \leqslant d/2$, оператор умножения на x_d^t — вложение пространства $\overline{M}_{\bar\sigma}^{k-t}$ в $\overline{M}_{\bar\sigma}^k$. Это следует из гипотезы 4.1 для $\bar\sigma$. Поэтому можно разделить наше соотношение на x_d^t. Получим $b_1\overline{\varphi}_1 + \dots + b_s\overline{\varphi}_s = 0$, где по крайней мере один коэффициент b_i не делится на x_d. Приведем это соотношение по модулю (x_d) и получим нетривиальную линейную комбинацию элементов

$\overline{\varphi}_i$ из $M_{\partial\sigma}/O^+_{[\sigma]}M_{\partial\sigma} = \overline{M}_{[\sigma]}$, равную нулю. Это противоречит утверждению, что элементы $\overline{\varphi}_i$ задают базис в векторном пространстве $\overline{M}_{[\sigma]}$. □

Сформулируем еще одно следствие сильной теоремы Лефшеца для веера $\bar{\sigma}$:

Предложение 4.4. *Допустим, что веер $\bar{\sigma}$ удовлетворяет гипотезе* 4.1. *Тогда $\overline{M}^k_{[\sigma]} = 0$ при $k > d/2$.*

Доказательство. В самом деле, $\overline{M}_{[\sigma]} = \overline{M}_{\bar{\sigma}}/(x_d)\overline{M}_{\bar{\sigma}}$. Из сильной теоремы Лефшеца вытекает, что все элементы степени $k > d/2$ в пространстве $\overline{M}_{\bar{\sigma}}$ лежат в образе оператора Лефшеца, т. е. в $(x_d)\overline{M}_{\bar{\sigma}}$. □

Те же рассуждения помогают подсчитать размерности однородных компонент $\overline{M}^k_{[\sigma]}$ $(k \leqslant d/2)$. Из разложения Лефшеца для многогранника Λ получаем

$$\dim(\overline{M}^k_{[\sigma]}) = Ih_k(\Lambda) - Ih_{k-1}(\Lambda), \qquad k \leqslant d/2.$$

Мы видим, что размерность векторного пространства $\overline{M}^k_{[\sigma]}$ — комбинаторный инвариант многогранника Λ. Обозначим эту размерность через $Ig_k(\Lambda)$. Таким образом,

$$Ig_k(\Lambda) = \begin{cases} Ih_k(\Lambda) - Ih_{k-1}(\Lambda), & k \leqslant d/2, \\ 0, & k > d/2. \end{cases}$$

Линки и вычисление чисел $Ih_k(\Delta)$. Пусть F — грань многогранника Δ. Обозначим через $N(F)$ ортогональное дополнение к плоскости грани F, проходящее через внутреннюю точку грани F. В малой окрестности этой точки пересечение $N(F) \cap \Delta$ выглядит как конус над многогранником $\Lambda(F)$. Многогранник $\Lambda(F)$ называется *линком* грани F. Пусть $\sigma = C_F$. Тогда двойственный веер многогранника $\Lambda(F)$ совпадает с $\bar{\sigma}$.

Рассмотрим производящую функцию $IH_\Delta(t) = \sum Ih_k(\Delta)t^k$. Для всякого многогранника Λ положим $IG_\Lambda(t) = \sum Ig_k(\Lambda)t^k$. В [10] доказано, что сильная теорема Лефшеца 4.1 для всех линков многогранника Δ влечет за собой следующую формулу:

$$IH_\Delta(t) = \sum_F (t-1)^{\dim F} IG_{\Lambda(F)}(t) \qquad (*)$$

(F пробегает все грани многогранника Δ). Доказательство этой формулы разбивается на две части. Первая часть — вычисление когомологий веера $[\sigma]$. Это вычисление уже проведено; оно опирается на сильную теорему Лефшеца. Вторая часть сводит глобальные когомологии к локальным, т. е. к когомологиям вееров $[\sigma]$. Эта часть не зависит от сильной теоремы Лефшеца.

Все линки многогранников, простых в ребрах, простые. Следовательно, для многогранника Δ, простого в ребрах, формула $(*)$ верна. Это означает, что для таких многогранников вектор Ih совпадает с обобщенным h-вектором Стенли [6]. Кроме того, $Ih_k(\Delta) = h_k(\Delta)$ при $k > d/2$, если Δ прост в ребрах. Это очевидно в силу формулы $(*)$.

Когомологии многогранников, простых в ребрах. Пусть Δ есть d-многогранник, простой в ребрах. Двойственный веер Φ многогранника Δ обладает следующим свойством: его $(d-1)$-остов Υ симплициален. Рассмотрим стандартное разрешение Σ многогранника Δ. Его двойственный веер Ψ — симплициальное подразбиение веера Φ. Простое упражнение — описать это подразбиение явно. Заметим, что Υ является подвеером как в Φ, так и в Ψ.

Мы уже знаем, как выглядят когомологии $\overline{M}_\Psi = \overline{O}_\Psi$. Нам понадобится следующая теорема, доказанная в [10, 11]:

Теорема 4.5. *Пусть $j\colon \Psi \to \Phi$ — отображение, переводящее каждый конус $\sigma \in \Psi$ в минимальный конус веера Φ, в котором лежит σ. Существует (неканоническое) вложение $\mathscr{M}_\Phi \to j_*\mathscr{O}_\Psi$, сохраняющее структуру $\mathscr{O}_\Phi$-модулей.*

Зафиксируем такое вложение. Тогда $\overline{M}_\Phi$ можно считать подпространством в $\overline{O}_\Psi = A(\Sigma)$. Обозначим через $\overline{N}$ ядро гомоморфизма ограничения $\overline{R}\colon \overline{O}_\Psi \to \overline{O}_\Upsilon$.

Предложение 4.6. *При $k \leqslant d/2$ имеется следующее разложение*:

$$\overline{O}_\Psi = \overline{M}^k_\Phi \oplus \overline{N}^k.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что при ограничении на $\overline{M}^k_\Phi$ оператор $\overline{R}$ является изоморфизмом. Более того, достаточно проверить только инъективность (сюръективность очевидна).

Рассмотрим элемент $\overline{\varphi} \in \operatorname{Ker}(\overline{R})$ степени k и его представитель $\varphi \in M^k_\Phi$. Функция φ, ограниченная на Υ, попадает в O^+_Υ, т. е. $\varphi = l_1\theta_1 + \dots + l_r\theta_r$ на Υ, где l_i — линейные функции на $\mathbb{R}^{d*}$ и $\theta_i \in O^{k-1}_\Upsilon$. Поскольку пучок $\mathscr{M}_\Phi$ вялый, каждая функция θ_i продолжается до $\varphi_i \in M^{k-1}_\Phi$. Функция $\varphi' = \varphi - l_1\varphi_1 - \dots - l_r\varphi_r \in M^k_\Phi$ представляет $\overline{\varphi}$ и обращается в нуль на Υ.

Пусть σ — конус размерности d из Φ, такой, что φ' не равна нулю на σ. Ограничение функции φ' на $[\sigma]$ — ненулевой элемент ядра отображения ограничения $M_{[\sigma]} \to M_{\partial\sigma}$. Но, согласно предложению 4.3, степень такого элемента не может быть $\leqslant d/2$. Противоречие. □

Предложение 4.7. *При отождествлении $\overline{O}_\Psi = A(\Sigma)$ подпространство $\overline{N}^k$ совпадает с I^k.*

Доказательство. Мы знаем, что оператор ∂_Γ соответствует функции χ^ρ, где $\rho = C_\Gamma$. Следовательно, достаточно показать, что $\overline{O}_\Psi$-модуль $\overline{N}$ порожден характеристическими функциями лучей $\rho \in \Psi - \Phi$. Ясно, что все эти функции лежат в $\overline{N}$.

Рассмотрим элемент $\overline{\varphi} \in \overline{N}$ и его представитель $\varphi \in O_\Psi$, такой, что $\varphi = 0$ на Υ (такой представитель, очевидно, существует). Определим *вставленный конус* как конус из $\Psi - \Phi$. Допустим, что функция φ не обращается в нуль на вставленном конусе ρ. Тогда мы можем вычесть из нее подходящее кратное функции χ^ρ (т. е. функцию вида $\psi\chi^\rho$, $\psi \in O_\Psi$) так, чтобы она обратилась в нуль на ρ и осталась прежней на всех остальных лучах веера Ψ. Таким образом, можно свести функцию φ (по модулю характеристических функций вставленных конусов) к функции φ', нулевой на всех лучах веера Ψ. Повторим эту процедуру с 2-мерными конусами. Пусть функция φ' не равна нулю на вставленном 2-мерном конусе τ, ограниченном лучами ρ_1 и ρ_2. Один из этих лучей вставленный. Вычтем из φ' подходящее кратное функции $\chi^{\rho_1}\chi^{\rho_2}$ и получим функцию, обращающуюся в нуль на τ и такую же, как φ', на всех остальных 2-мерных конусах веера Ψ. Продолжая этот процесс, мы сведем функцию φ к нулю по модулю характеристических функций вставленных лучей. □

Сильная теорема Лефшеца для многогранников с редкими особенностями. Комбинируя предыдущие результаты (теорема 3.4, предложения 4.6, 4.7), получаем такой результат:

ТЕОРЕМА 4.8. *Пусть* Δ *— многогранник с редкими особенностями, а* Φ *— двойственный веер. Умножение на* S_Δ *устанавливает вложение пространства* $\overline{M}^k_\Phi$ *в* $\overline{M}^{k+1}_\Phi$ *при* $k < d/2$. *В частности,*

$$Ih_0(\Delta) \leqslant Ih_1(\Delta) \leqslant \dots \leqslant Ih_{[d/2]}(\Delta),$$
$$h_{[d/2]}(\Delta) \geqslant h_{[d/2]+1}(\Delta) \geqslant \dots \geqslant h_d(\Delta).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенства на компоненты h-вектора можно доказать при помощи теории торических многообразий. Заметим, что любой многогранник с редкими особенностями можно сделать рациональным при помощи малого шевеления (сначала надо сделать рациональными все особые вершины, а потом — все гиперграни, примыкающие к этим вершинам). Следовательно, многогранники с редкими особенностями комбинаторно эквивалентны целочисленным. Теперь искомые неравенства вытекают из сильной теоремы Лефшеца и формулы для вычисления когомологий Горески–Макферсона торических многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хованский А. Г.* Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского. Функц. анализ и его прил., **20**, вып. 1, 50–61 (1986).
2. *Grünbaum B.* Convex polytopes. Interscience Publ., London, 1967.
3. *Stanley R. P.* The number of faces of a simplicial convex polytope. Adv. Math., **35**, 236–238 (1980).
4. *McMullen P.* On simple polytopes. Invent. Math., **113**, 419–444 (1993).
5. *Тиморин В. А.* Аналог соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников. УМН, **54**, вып. 2, 113–162 (1999).
6. *Stanley R. P.* Generalized H-vectors, Intersection Cohomology of Toric Varieties, and Related Results. Adv. Stud. Pure Math., **11**, 187–213 (1987).
7. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и торические многообразия. Функц. анализ и его прил., **11**, вып. 4, 56–67 (1977).
8. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий. УМН, **33**, вып. 2, 85–134 (1978).
9. *Fieseler K.-H.* Rational Intersection Cohomology of Projective Toric Varieties. J. Reine Angew. Math., **413**, 88–98 (1991).
10. *Bressler P., Lunts V.* Intersection cohomology on nonrational polytopes. http://xxx.lanl.gov/abs/math.AG/0002006.
11. *Barthel G., Brasselet G.-P., Fieseler K.-H., Kaup L.* Combinatorial Intersection Cohomology for Fans. http://xxx.lanl.gov/abs/math.AG/0002181.
12. *Пухликов А. В., Хованский А. Г.* Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам. Алгебра и анализ, **4**, вып. 4, 188–216 (1992).
13. *Никулин В. В.* Классификация арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. Изв. АН СССР, Сер. Мат., **45**, 113–142 (1981).

Математический институт им. В. А. Стеклова,
Университет Торонто

Поступило в редакцию
5 июня 2000 г.