

ВЕСТНИК
САРАТОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
2011

№3 (57)
Выпуск 1

Научно-технический журнал

Издается с 2003 г.
Выходит один раз в квартал
Сентябрь 2011 г.

*Журнал включен в перечень ведущих
рецензируемых журналов и научных изданий,
утвержденный президиумом ВАК
Министерства образования и науки РФ,
в которых публикуются основные научные
результаты диссертаций на соискание
ученых степеней доктора и кандидата наук*

Главный редактор д.и.н., профессор И.Р. Плева
Зам. главного редактора д.т.н., профессор А.А. Сытник
Ответственный секретарь д.ф.-м.н., профессор В.В. Астахов

Редакционный совет: д.т.н. В.И. Волчихин, д.т.н. В.А. Голенков, д.и.н. В.А. Динес,
д.х.н. В. Зеленский (Польша), д.т.н. В.А. Игнатьев, д.т.н. В.В. Калашников, д.т.н. И.А. Новаков,
д.и.н. И.Р. Плева (председатель), д.т.н. А.Ф. Резчиков, д. социол. н. С.Б. Суоров,
д.т.н. А.А. Сытник (заместитель председателя), д.ф.-м.н. Я. Аврейцевич (Польша),
д.э.н. У. Арнольд (Германия), д.ф.-м.н. Э. Мерсер (Великобритания), д.э.н. Э. де Соузе Феррейра
(Португалия), д.т.н. Т. Чермак (Чехия), д.э.н. Ю.В. Шленов

Редакционная коллегия: д.т.н. В.А. Крысько, д.ф.-м.н. В.В. Астахов, д.х.н. А.В. Гороховский,
д.т.н. В.Н. Ляников, д.ф.-м.н. Л.А. Мельников, д.т.н. Р.З. Аминов, д.т.н. Ю.Г. Иващенко,
д.т.н. А.С. Денисов, д.т.н. А.А. Сытник, д.т.н. А.А. Большаков, д.филос.н. Д.В. Михель,
д.биол.н. Е.И. Тихомирова, д.э.н. А.Н. Плотников, д.и.н. Г.В. Лобачева

Редактор Г.И. Мельникова
Компьютерная верстка М.И. Балакин

Адрес редакции:
Саратов, 410054, ул. Политехническая, 77
Телефон: (845 2) 99-88-27
E-mail: vestnik @ sstu. ru
<http://dni.sstu.ru/vestnik.nsf>
Факс: (845 2) 52-53-02

Подписано в печать 14.09.11
Усл. печ. л. 41,5 Уч.-изд. л. 19,0
Тираж 100 экз. Заказ 239
Отпечатано в Издательстве ГАУ
«Саратов-Медиа»,
410031 г., Саратов, ул. Волжская, 28

Полная электронная версия журнала размещена в системе РИНЦ
в открытом доступе на платформе eLIBRARY.RU

Подписной индекс 18378
(каталог «Газеты. Журналы» на 2-е полугодие 2011 г.)

ISSN 1999-8341

© Саратовский государственный
технический университет, 2011

**VESTNIK
SARATOV
STATE
TECHNICAL
UNIVERSITY
2011**

**№ 3 (57)
Issue 1**

Scientific Journal

Since 2003
Once in a quarter
September 2011

This journal is included into the list of leading reviewed journals and scientific publications approved by the presidium of Ministry of Education and Sciences of Russian Federation where major scientific thesis's results for academic degree competition for a doctor and a candidate of sciences

Editor-in-chief	Professor I.R. Pleva
Editor-in-chief assistant	Professor A.A. Sytnik
Executive secretary	Professor V.V. Astakhov

Drafting committee: Prof. V.I. Volchihin, Prof. V.A. Golenkov, Prof. V.A. Dines, Prof. V. Zelensky (Poland), Prof. V.A. Ignatyev, Prof. V.V. Kalashnikov, Prof. I.A. Novakov, Prof. I.R. Pleva (Chairman), Prof. A.F. Rezhnikov, Prof. A.A. Sytnik (Vice of the Chairman), Prof. S.B. Surovov, Prof. Y. Avreytsevich (Poland), Prof. U. Arnold (Germany), Prof. A. Merser (UK), Prof. E. D'Sousa Ferreira (Portugal), Prof. T. Chermak (Chezh Republic), Prof. Y.V. Shlenov

Editorial board: Prof. V.A. Krysko, Prof. V.V. Astakhov, Prof. A.V. Gorokhovski, Prof. V.N. Lyasnikov, Prof. L.A. Melnikov, Prof. R.Z. Aminov, Prof. Y.G. Ivashchenko, Prof. A.S. Denisov, Prof. A.A. Sytnik, Prof. A.A. Bolshakov, Prof. D.V. Mikhel, Prof. Y.I. Tikhomirova, Prof. A.N. Plotnikov, Prof. G.V. Lobacheva

Editor G.M. Melnikova
Computer- based page-proof M.I. Balakin

Editorial office: 77, Politechnicheskaya Street
Saratov, 410054
Russia
Telephone: +8452/99-88-27
E-mail: vestnik @ sstu. ru
<http://dni.sstu.ru/vestnik.nsf>
Fax: +8452/52-53-02

Signed for publishing: 15.06.11
Apr. tp. l. 41,5 Acc.-pbl. l. 19,0
Edition 100 psc. Order 239
Printed in publishing house
"Saratov-Media",
28, Volgskaya St., Saratov, 410031,
Russia

ISSN 1999-8341

© Saratov State Technical University, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Голованов А.И. Многослойный ортотропный конечный элемент оболочек средней толщины	9
Никитин А.А., Цимбалов Г.М. Приближенное аналитическое решение динамических уравнений классической теории упругости для наружного кольца подшипника	20
Кириченко В.Ф., Самаркин П.А. Качественный анализ эволюционных уравнений в неклассической теории пологих оболочек с начальными неправильностями	33
Савина Т.Ф. Вложения игр с отношениями предпочтения в игры с функциями выигрыша	41
Кондратова Ю.Н. Гидроупругость упругой цилиндрической трубы кольцевого сечения при различных ее закреплениях	50
Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании	59

ФИЗИКА, РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Мазеев Е.В., Фурсаев М.А. Проектирование СВЧ транзисторного генератора с варакторной перестройкой частоты и моделирование его электрических характеристик	68
Гестрин С.Г., Сальникова Е.А. Спиновые колебания, локализованные на точечном дефекте в ферродиелектрике (одномерный случай)	73
Гестрин С.Г., Пилипенко Е.А., Щукина Е.В. Математическое моделирование влияния дислокаций на спин-волновой резонанс в ферромагнетиках типа «легкая ось»	78
Пулин В.Ф., Элькин П.М., Степанович Е.Ю., Минаев Е.Н. Моделирование структуры и спектров циклозарина	86
Пулин В.Ф., Элькин П.М., Эрман М.А. Моделирование адиабатических потенциалов гидроксизамещенных бензола	91
Власов А.В., Корнилова Н.В. Оценка осевой компоненты электромагнитного поля при управлении магнитожидкостными сенсорами	96
Бондаренко А.Л., Сивяков Б.К., Самуйлов Г.П. Фазовращатели на волноводах сложного сечения с планарными петлями связи и p-i-n-диодами	103

ХИМИЯ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

Поздеева М.Г., Рябухова Т.О., Окишева Н.А., Ягудина Э.Р. Наномембраны для разделения вторичного молочного сырья	113
Рябухова Т.О., Окишева Н.А., Поздеева М.Г., Ягудина Э.Р. Термодинамика адсорбции β -аланина и альбумина на полимерных пленочных мембранах	118
Фоменко Л.А., Ловцова Л.Г., Серянов Ю.В. Кинетика локального электрохимического осаждения меди в узких каналах формообразующих углублений под влиянием ультразвуковой кавитации (теоретические исследования)	123

МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

Серегин А.А. Расчёт профиля эвольвентных зубьев с переменным значением диаметра основной окружности.....	133
Андронов С.П., Браилов И.Г. Переходная поверхность зуба цилиндрических зубчатых колес	136

ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ПРИБОРОСТРОЕНИЕ

Нагар Ю.Н., Ольшанский В.Ю., Серебряков А.В. Анализ переходного процесса в одной модели пьезогирискапа.....	143
Гаврилова М.С., Бутов А.А., Рузов В.И., Разин В.А. Стохастическая модель системы стабилизации систолического артериального давления в моменты стрессовых ситуаций	150

ЭНЕРГЕТИКА И ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Хачатрян В.С., Бадалян Н.П., Чашин Е. А. Расчет установившегося режима электроэнергетической системы сочетанием методов первого и второго порядков Ньютона.....	160
Шаронов Г.И., Шаманов Р.С. Алгоритмический метод измерения параметров пассивного комплексного двухполюсника многополюсной электрической цепи типа звезда.....	169

ТРАНСПОРТ

Денисов А.С., Асоян А.Р., Орлов Н.В. Анализ деформаций и теплонапряженности корпуса турбокомпрессора двигателей Камаз-евро.....	177
--	-----

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Безруков А.И., Жилина М.А., Кац А.М. Использование математических методов для оценки качества классификации объектов стандартизации	182
Сайкин А.И., Чурикова А.А. Приближенный метод расчета характеристик разомкнутой неэкспоненциальной сети систем массового обслуживания	188
Макуха У.К., Кушников В.А., Родичев В.А. Анализ выполнимости планов мероприятий по ликвидации наводнений	195
Маршаков Д.В., Фатхи Д.В. Модель аппаратной реализации искусственного нейрона на основе цветных временных сетей Петри	201
Митрофанов А.А. Об одном методе оптимизации выбора распознающих признаков при ограниченных ресурсах.....	209

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ

Зинаков И.Ю. Построение системы управления конфигурацией программного комплекса с применением интеллектуальных агентов	213
Ахмадинуров М.М., Тимофеева Г.А. Модели массового обслуживания в задаче оптимизации работы светофора.....	217
Вешнева И.В. Оценка качества социального объекта, основанная на построении многомерного «поля качества» сбалансированной системы показателей с использованием теории нечетких множеств	227
Ганюкова Н.П., Ханова А.А. Процессное управление системами корпоративного типа	235
Лукина С.В. Автоматизация процедур формирования и выбора структурных компоновок сборных режущих инструментов на этапе технической подготовки производства.....	241

ФИЛОСОФИЯ, СОЦИОЛОГИЯ И КУЛЬТУРОЛОГИЯ

Добрин К.Ю. Феномен социальной нормы.....	248
Смирнова Н.Б. Реализация компонентов содержания непрерывного художественно-педагогического образования Чувашии с использованием педагогического потенциала народного ДПИ.....	254
Захаров А.В. Подготовка мелиораторов в 1960-е – 1970-е гг. (На материалах Волгоградской и Саратовской областей).....	260
Дикун Н.А. Роль семьи в профессиональном образовании молодежи.....	273
Дубровина Н.В. Отражение советской и немецкой ментальности в системе топосов социалистического реализма.....	277
Краснощёков В.А. Особенности традиционных народных форм культуры индустриальных городов Среднего Поволжья на рубеже XIX – XX веков.....	287

ЭКОЛОГИЯ

Крупнова Т.Г., Кострюкова А.М., Ракова О.В., Григорьева Е.А. Применение алюмосиликатных сорбентов для доочистки сточных вод от ионов меди (2+) и никеля (2+).....	296
--	-----

ЭКОНОМИКА

Айриева А.Н. Развитие планирования бюджетных инвестиций на региональном уровне.....	305
Калугина Е.О. Общественное питание как сфера применения логистики	314
Подсумкова Л.А. К вопросу о развитии молодежного инновационного предпринимательства.....	320
Верещагина Л.С. Использование контроллинга в механизме управления резервами совершенствования реализационной деятельности промышленных предприятий.....	324
Верещагина Л.С. Выявление резервов повышения эффективности деятельности реализационных подразделений промышленных предприятий с использованием функционально-стоимостного анализа.....	331
Семенов А.И. Развитие методологического инструментария в исследовании национальной инновационной системы	336
Плотников А.П., Власова А.Е. Проблемы оценки инновационной активности торговых предприятий.....	346
Арсланов А.В. Формирование эффективной системы управления интеграционным объединением.....	351
Санкова Л.В., Косарева А.В. Оценка эффективности программ активной политики занятости: теория и методология	357
Плотников А.Н., Плотников Д.А. Логистика снабжения подрядных организаций материальными и техническими ресурсами	368

CONTENTS

MATHEMATICS AND MECHANICS

Berezhnoi D.V., Sagdatullin M.K., Golovanov A.I. Multilayer orthotropic finite element of shells of average thickness.....	9
Nikitin A.A., Tshymbalov G.M. The approached analytical decision of the dynamic equations classical theory of elasticity for the external ring of the bearing.....	20
Kirichenko V.F., Samarkin P.A. Qualitative analysis of the evolution equations in nonclassical theory of shallow shells with initial irregularities.....	33
Savina T.F. Inclusion maps of games with preference relations into games with payoff functions	41
Kondratova J.N. Hydroelasticity of the elastic cylindrical tube of ring section at its various fixing	50
Ankilov A.V., Vel'misov P.A. Investigation of dynamic and stability of elastic element of construction in supersonic flow	59

PHYSICS, RADIOENGINEERING AND ELECTRONICS

Maseev E.V., Fursaev M.A. The modelling of electrical characteristics of microwave transistor oscillator with a varactor frequency tuning	68
Gestrin S.G., Salnikova E.A. The spin oscillations localized on the dot defect in the ferroelectric (one-dimensional case).....	73
Gestrin S.G., Pilipenko E.A., Schukina E.V. Mathematical simulation of dislocations' influence on spin-wave resonance in ferromagnetic with the axis of slight magnetization	78
Pulin V.F., Elkin P.M., Stepanovith E. Yu., Minaev E.N. Structural-dynamic models of cyclozarine.....	86
Pulin V.F., Elkin P.M., Erman M.A. Modelling of adiabatic potential for hydroxy substituted benzenes.....	91
Vlasov A.V., Kornilova N.V. Assessment of axial component of electromagnetic fields by management of magnetic-fluid sensors.....	96
Bondarenko A.L., Sivyakov B.K., Samuilov G.P. Phase shifter based on complicated cross section waveguides with planar coupling loops and p-i-n-diodes	103

CHEMISTRY AND CHEMICAL TECHNOLOGIES

Pozdeeva M.G., Ryabuhova T. O., Okisheva N.A., Yagudina E.R. Nanomembranes for the separation of secondary raw milk	113
Ryabuhova T. O., Okisheva N.A., Pozdeeva M.G., Yagudina E.R. Thermodynamics of adsorption of β -alanine and albumin polymer film membranes.....	118
Fomenko L.A., Lovtsova L.G., Seryanov Yu.V. Kinetics of local electrochemical deposition of copper in narrow channels shaping the recesses under the influence of ultrasonic cavitation.....	123

ENGINEERING AND MACHINE-BUILDING

Seregin A.A. Profile calculation evolvent's teethes with variable value diameter of the basis circle	133
Androsov S.P., Brailov I.G. Fillet surface of cylindrical gears.....	136

MEASURING ENGINEERING AND INSTRUMENTATION ENGINEERING

Nagar Yu.N., Olshanskiy V.Yu., Serebryakov A.V. Analysis of the transition process in a piezogyroscope model	143
---	-----

Gavrilova M.S., Butov A.A., Ruzov V.I., Razin V.A. Stochastic model of stabilizing system of systolic blood pressure at the time of stress	150
---	-----

POWER ENGINEERING AND ELECTRICAL ENGINEERING

Hachatryan V. S., Badalyan N. P., Chaschin E. A. Calculation of being fixed mode electropower system combination of methods of first and second of orders of Newton	160
Sharonov G.I., Shamanov R.S. The algorithmic method of measurement of parameters of the passive complex dipole of multi-pole electrical circuit type-star	169

TRANSPORT

Denisov A.S., Asoyan A.R., Orlov N.V. Analysis of deformation and thermal stress shell of turbocarger of engines Kamaz-euro	177
--	-----

INFORMATION TECHNOLOGIES

Bezrukov A.I., Zhilina M.A., Katz A.M. Use of mathematical methods for a quality rating of standardization's objects classification.....	182
Saikin A.I., Churikova A.A. Approximate method of calculating of characteristics of open nonexponential network of queuing systems	188
Makukha U.K., Kushnikov V.A., Rodichev V.A. The analysis of feasibility of the plans of measures on liquidation of flooding	195
Marshakov D.V., Fatkhi D.V. The model of the hardware implementation of artificial neuron based on coloured timed Petri nets	201
Mitrofanov A.A. On one optimization method of the choice of recognizing signs at the limited resources.....	209

AUTOMATION AND CONTROL

Zinakov I.U. Construction of the system software configuration management platform using intelligent agents	213
Ahmadinurov M.M., Timofeeva G.A. Queuing theory models in optimization problem of traffic lights.....	217
Veshneva I.V. Estimation of the quality of social object based on the balanced score card multidimensional "quality field" construction using fussy sets theory	227
Ganyukova N.P., Khanova A.A. Process management of socio-economic systems of the corporate type.....	235
Lukina S.V. Automating procedures for formation and choice of structural component layout of modular cutting tools in step of technical preparation production.....	241

PHILOSOPHY, SOCIOLOGY AND CULTUROLOGY

Dobrin K.Yu. Phenomenon of social norm	248
Smirnova N.B. Realisation of the components of the content of the continuous art-pedagogical education with the use of the pedagogical potential of the national arts and crafts.....	254
Zaharov A.V. Preparation of reclamation in the 1960's – 1970's (on materials of volgograd and saratov regions).....	260
Dikun N.A. Role of family in professional education of youth.....	273
Dubrovina N.V. The soviet and german mentalities reflection in system of the topics of socialist realism.....	277
Krasnoschyokov V.A. Features of traditional national forms of culture of industrial cities of the central Volga region on the boundary XIX – the XX-th centuries	287

ECOLOGY

Krupnova T.G., Kostryukova A.M., Rakova O.V., Grigorieva E.A. Using aluminosilicate sorbents for tertiary wastewaters treatment from ion copper (2+) and nickel (2+)	296
---	-----

ECONOMICS

Ayrieva A.N. Development planning budget investments at the regional level.....	305
Kalugina E.O. Catering as a scope of application of logistics	314
Podsumkova L.A. About question of development of young people's innovative entrepreneurial activity	320
Vereschagina L.S. The controlling of the improving opportunities of the sales systems in the industrial enterprises.....	324
Vereschagina L.S. The analyze of the improving opportunities of the sales systems in the industrial enterprises using activity based costing	331
Semenov A.I. Development of methodological toolkit in research national innovative system.....	336
Plotnikov A.P., Vlasova A.E. Problems of the estimation of innovative activity of trade enterprises.....	346
Arslanov A.V. Building of the efficient corporation management system.....	351
Sankova L.V., Kosareva A.V. Evaluation of the active labor market policy: theory and methodology.....	357
Plotnikov A.N., Plotnikov D.A. Logistics supply contractors material and technical resources	368

УДК 519.83

Т.Ф. Савина

ВЛОЖЕНИЯ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ В ИГРЫ С ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫША

Введено понятие вложения игры с отношениями предпочтения в игру с функциями выигрыша. Указаны необходимые и достаточные условия вложимости игры в фактор-игру. Найдены необходимые, а также достаточные условия существования вложения игры с отношениями предпочтения в игру с функциями выигрыша.

Игра с отношениями предпочтения, гомоморфизм, конгруэнтность, вложение

T.F. Savina

INCLUSION MAPS OF GAMES WITH PREFERENCE RELATIONS INTO GAMES WITH PAYOFF FUNCTIONS

The concept of the inclusion map of game with preference relations into a game with payoff functions is introduced. Necessary and sufficient conditions of the embeddability of game in factor-game are indicated. A necessary condition and also sufficient conditions for the existence of the inclusion of game with preference relations into a game with payoff functions are found.

Game with preference relation, homomorphism, congruence relation, inclusion map

Введение

Игра с отношениями предпочтения представляет собой математическую модель конфликта, в которой интересы участвующих в ней сторон формализованы бинарными отношениями предпочтения. На практике обычно стремятся ввести оценку предпочтения в числовой форме так, чтобы более предпочтительный объект имел большую оценку, а одинаково предпочтительные – равные оценки. Соответствующая математическая конструкция называется вложением структуры предпочтения в числовую структуру предпочтений. Отметим, что игры с отношениями предпочтения являются алгебраическими системами, а для алгебраических систем условия их вложимости в определенные классы представляют традиционную алгебраическую проблему [1, 2].

В первой части настоящей работы доказан ряд структурных теорем, относящихся к вложениям игр с отношениями предпочтения. Во второй части найдены необходимые, а также достаточные условия вложимости игры с отношениями предпочтения в игру с функциями выигрыша. Приведен пример построения такого вложения. В работе используются некоторые результаты о вложимости структур предпочтения [3].

В частности, используем следующую символику: ρ^* – строгая часть, ρ^s – симметрическая часть отношения предпочтения ρ [3].

I. Структурные теоремы о вложении игр с отношениями предпочтения

Игра игроков $\{1, \dots, n\}$ с отношениями предпочтения определяется как система объектов

$$G = \langle X_1, \dots, X_n, A, \rho_1, \dots, \rho_n, F \rangle, \quad (1)$$

где X_i – множество стратегий игрока i ($i = 1, \dots, n$),

A – множество исходов,

ρ_i – бинарное отношение, выражающее предпочтения игрока i , заданное на A ;

F – функция реализации, т.е. отображение множества ситуаций игры $X = X_1 \times \dots \times X_n$ в множество исходов A .

Рассмотрим, наряду с игрой G , еще одну игру с отношениями предпочтения игроков $\{1, \dots, n\}$: $H = \langle U_1, \dots, U_n, B, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \Phi \rangle$.

Для игр с отношениями предпочтения как для алгебраических систем естественным образом определено понятие гомоморфизма [4].

Определение 1. Набор отображений $f = (\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi)$, где $\varphi_i : X_i \rightarrow U_i$ ($i = 1, \dots, n$) и $\psi : A \rightarrow B$, называется гомоморфизмом игры G в игру H , если выполняются следующие два условия:

для любого индекса $i = 1, \dots, n$ и любых элементов $a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \stackrel{\rho_i}{\leq} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \stackrel{\sigma_i}{\leq} \psi(a_2), \quad (2)$$

$$\psi(F(x_1, \dots, x_n)) = \Phi(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)). \quad (3)$$

Гомоморфизм f называется строгим гомоморфизмом, если условие (2) заменяется более сильной системой условий:

$$a_1 \stackrel{\rho_i^*}{<} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \stackrel{\sigma_i^*}{<} \psi(a_2), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4)$$

$$a_1 \stackrel{\rho_i^s}{\sim} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \stackrel{\sigma_i^s}{\sim} \psi(a_2) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Определение 2. Под вложением игры G в класс игр K будем понимать строгий гомоморфизм f игры G в некоторую игру $H \in K$. Вложение называется изоморфным, если в условиях (4) и (5) вместо \Rightarrow выполнена \Leftrightarrow .

Замечание. Для структуры предпочтений введено понятие представления [3]. Представлением структуры предпочтения $\langle A, \rho \rangle$ в числовую прямую называется строгий гомоморфизм $\psi : A \rightarrow R$, для которого выполняются условия:

$$a_1 \stackrel{\rho^*}{<} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) < \psi(a_2), \quad (6)$$

$$a_1 \stackrel{\rho^s}{\sim} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) = \psi(a_2). \quad (7)$$

Под ядром гомоморфизма $f = (\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi)$ понимается набор отношений эквивалентности $\bar{\varepsilon}_f = (\varepsilon_{\varphi_1}, \dots, \varepsilon_{\varphi_n}, \varepsilon_\psi)$, состоящий из ядер указанных отображений. Отношением конгруэнтности в игре G называется набор эквивалентностей $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon)$, где $\varepsilon_i \subseteq X_i^2$ ($i = 1, \dots, n$), $\varepsilon \subseteq A^2$, удовлетворяющее условию согласованности для функции реализации

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 \stackrel{\varepsilon_1}{\equiv} x_1 \\ x'_2 \stackrel{\varepsilon_2}{\equiv} x_2 \\ \dots \\ x'_n \stackrel{\varepsilon_n}{\equiv} x_n \end{array} \right\} \Rightarrow F(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \stackrel{\varepsilon}{\equiv} F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8)$$

Легко проверить:

Утверждение 1. Ядро всякого гомоморфизма является отношением конгруэнтности.

Пусть $\bar{\varepsilon}$ – отношение конгруэнтности в игре G , тогда корректно определена фактор-игра $G/\bar{\varepsilon} = \langle (X_i/\varepsilon_i)_{i=1, \dots, n}, A/\varepsilon, (\rho_i/\varepsilon)_{i=1, \dots, n}, F_\varepsilon \rangle$, где $F_\varepsilon([x_1]_{\varepsilon_1}, \dots, [x_n]_{\varepsilon_n}) \stackrel{df}{=} [F(x_1, \dots, x_n)]_\varepsilon$.

Сформулируем ряд теорем о строгих гомоморфизмах, необходимых для дальнейшего изложения.

Теорема 1. Пусть f – строгий гомоморфизм игры G в игру H . Тогда f может быть представлено в виде композиции строгого гомоморфизма игры G на фактор-игру $G/\bar{\varepsilon}_f$ и строгого инъективного гомоморфизма фактор-игры на игру H , т.е. $\varphi_1 = h_1 \circ \varphi_{\varepsilon_1}, \dots, \varphi_n = h_n \circ \varphi_{\varepsilon_n}, \psi = h \circ \psi_\varepsilon$ (в краткой записи $f = \bar{h} \circ f_\varepsilon$).

Доказательство теоремы 1.

Нужно доказать, что каноническое отображение f_ε игры G на фактор-игру $G/\bar{\varepsilon}_f$ будет строгим гомоморфизмом.

Возьмем пару элементов a_1, a_2 , для которой имеет место $a_1 \stackrel{\rho}{<} a_2$, а следовательно, и $a_1 \stackrel{\rho}{\leq} a_2$, тогда $[a_1]_\varepsilon \stackrel{\rho/\varepsilon}{\leq} [a_2]_\varepsilon$ по определению фактор-отношения. Предположим, что $[a_2]_\varepsilon \stackrel{\rho/\varepsilon}{\leq} [a_1]_\varepsilon$. Тогда для некоторых $a'_1, a'_2 \in A$, таких, что $\psi_\varepsilon(a'_1) = \psi_\varepsilon(a_1), \psi_\varepsilon(a'_2) = \psi_\varepsilon(a_2)$, будет выполнено $a'_2 \stackrel{\rho}{\leq} a'_1$. Так как f – строгий гомоморфизм, из $a_1 \stackrel{\rho}{<} a_2$ следует, что

$$\psi_\varepsilon(a_1) \stackrel{\rho/\varepsilon}{<} \psi_\varepsilon(a_2). \text{ Получаем следующую систему } \begin{cases} \psi_\varepsilon(a'_1) \stackrel{\rho/\varepsilon}{<} \psi_\varepsilon(a'_2), \\ \psi_\varepsilon(a'_2) \stackrel{\rho/\varepsilon}{\leq} \psi_\varepsilon(a'_1) \end{cases}.$$

Последняя система несовместна, следовательно, наше предположение не верно, значит, выполнено $[a_1]_\varepsilon \stackrel{\rho/\varepsilon}{<} [a_2]_\varepsilon$, т.е. гомоморфизм f_ε является строгим.

Аналогично доказывается, что \bar{h} является строгим гомоморфизмом. Инъективность гомоморфизма \bar{h} из фактор-игры на игру H доказана в работе [5].

Теорема 1 доказана.

Доказательство следующих двух теорем приведено в работе [5].

Теорема 2. Пусть $\bar{\varepsilon}$ – отношение конгруэнтности в игре G , тогда канонический гомоморфизм f_ε игры G на $G/\bar{\varepsilon}$ будет строгим тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\left. \begin{array}{l} a_1 \stackrel{\rho_i}{\leq} a_2 \\ a'_1 \stackrel{\varepsilon}{\equiv} a_1 \\ a'_2 \stackrel{\varepsilon}{\equiv} a_2 \\ a'_2 \stackrel{\rho_i}{\leq} a'_1 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 \stackrel{\rho_i}{\sim} a_2. \quad (9)$$

Теорема 3. Для того чтобы конгруэнтность $\bar{\varepsilon}$ в игре G совпадала с ядром некоторого гомоморфизма, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (9).

Условие (9) эквивалентно тому, что $\bar{\varepsilon}$ совпадает с ядром некоторого строгого гомоморфизма.

II. Условия вложимости игры с отношениями предпочтения в игру с функциями выигрыша

В этом разделе находятся как необходимые, так и достаточные условия вложимости игры с отношениями предпочтения в игру с функциями выигрыша.

Гомоморфизм игры $G = \langle X_1, \dots, X_n, A, \rho_1, \dots, \rho_n, F \rangle$ в игру с функциями выигрыша с теми же множествами стратегий игроков $\Gamma = \langle X_1, \dots, X_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$ может быть определен как набор отображений $\psi_1 : A \rightarrow R, \dots, \psi_n : A \rightarrow R$, такой что

$$a_1 \stackrel{\rho_i}{\leq} a_2 \Rightarrow \psi_i(a_1) \leq \psi_i(a_2);$$

при этом гомоморфизм будет *строгим* тогда и только тогда, когда для всех $i \in \{1, \dots, n\}$

$$a_1 < a_2 \stackrel{\rho_i}{\Rightarrow} \psi_i(a_1) < \psi_i(a_2).$$

Следующая теорема дает достаточное условие такой вложимости.

Теорема 4. Пусть G – конечная игра с отношениями предпочтения вида (1). Если для каждого игрока i ($i = 1, \dots, n$) структура предпочтений $\langle A, \rho_i \rangle$ ациклична, то существует вложение этой игры в некоторую игру с функциями выигрыша.

Доказательство теоремы 4 основано на следующей лемме.

Лемма 1. Ацикличная структура предпочтений на конечном множестве имеет представление в числовую прямую.

Доказательство леммы 1. Пусть $\langle A, \rho \rangle$ – структура предпочтений, где множество A конечно и ρ ациклично. Тогда его симметричная часть совпадает с тождественным отношением: $\rho^s = \Delta_A$ (в противном случае, если $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho$ и $b \neq a$, то получаем цикл $a \stackrel{\rho}{\rightarrow} b \stackrel{\rho}{\rightarrow} a$, что противоречит условию ацикличности отношения ρ). Асимметричная часть отношения ρ определяется здесь равенством: $\rho^* = \rho \setminus \Delta_A$, причем ρ^* будет строго ацикличным. Таким образом, в графе $\langle A, \rho^* \rangle$ отсутствуют циклы и петли, а так как множество A конечно, то все пути в графе $\langle A, \rho \rangle$ имеют конечную длину и их длины ограничены в совокупности. Для произвольного элемента $a \in A$ полагаем:

$h(a)$ – максимальная длина пути в графе $\langle A, \rho \rangle$, ведущего в вершину a .

Натуральное число $h(a)$ называется *высотой* элемента a , причем

$$0 \leq h(a) \leq n - 1, \tag{10}$$

где $n = |A|$.

Проверим, что функция h реализует строгий гомоморфизм структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ в числовую структуру.

Пусть $a_1 \stackrel{\rho^*}{<} a_2$. Положим $h(a_1) = k_1$. Тогда существует путь длины k_1 в графе $\langle A, \rho^* \rangle$, ведущий в вершину a_1 . Добавляя к нему дугу $a_1 \stackrel{\rho^*}{<} a_2$, получим путь длины $k_1 + 1$, ведущий в вершину a_2 , значит $h(a_2) \geq k_1 + 1 > k_1 = h(a_1)$, т.е. $h(a_1) < h(a_2)$. Показали справедливость импликации:

$$a_1 < a_2 \stackrel{\rho^*}{\Rightarrow} h(a_1) < h(a_2). \tag{11}$$

Учитывая, что в нашем случае структура предпочтения антисимметрична ($\rho^s = \Delta_A$), имеем очевидное следование

$$a_1 \sim^{\rho^s} a_2 \Rightarrow h(a_1) = h(a_2). \quad (12)$$

Формулы (11) и (12) показывают, что для ациклической структуры предпочтения на конечном множестве функция высоты h задает ее представление в числовую прямую.

Лемма 1 доказана.

Искомое вложение игры G строится так. Игра Γ с функциями выигрыша задается следующим образом: $\Gamma = \langle X_1, \dots, X_n, h_1 \circ F, \dots, h_n \circ F \rangle$, где h_i – функция высоты в $\langle A, \rho_i \rangle$ ($i = 1, \dots, n$). Набор отображений $\psi_i = h_i$ ($i = 1, \dots, n$) будет искомым вложением игры G с отношениями предпочтения в игру Γ с функциями выигрыша. Теорема 4 доказана.

Необходимое и достаточное условие такой вложимости дает следующая теорема.

Теорема 5. Для того чтобы конечная игра G была вложима в класс игр с функциями выигрыша, необходимо и достаточно, чтобы для каждого i отношение ρ_i было ациклическим относительно ρ_i^s .

Доказательство теоремы 5 основано на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 2. Для того чтобы структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$, заданная на конечном множестве A , имела представление в числовую прямую, необходимо и достаточно, чтобы отношение ρ было ациклическим относительно своей симметричной части ρ^s .

Доказательство леммы 2.

Необходимость условия леммы 2 может быть установлена даже без предположения конечности множества A . Действительно, пусть при некотором натуральном n выполнено $a_1 \stackrel{\rho}{\leq} a_2 \stackrel{\rho}{\leq} \dots \stackrel{\rho}{\leq} a_n \stackrel{\rho}{\leq} a_1$. Тогда для каждого $k = 1, \dots, n-1$ имеет место $a_k \stackrel{\rho^*}{<} a_{k+1}$ или $a_k \stackrel{\rho^s}{\sim} a_{k+1}$.

Предположим, что для некоторого $l = 1, \dots, n-1$ не выполнено $a_l \stackrel{\rho^s}{\sim} a_{l+1}$. Тогда $a_l \stackrel{\rho^*}{<} a_{l+1}$ значит, $a_1 \stackrel{\rho}{\leq} a_2 \stackrel{\rho}{\leq} \dots \stackrel{\rho}{\leq} a_l \stackrel{\rho^*}{<} a_{l+1} \stackrel{\rho}{\leq} \dots \stackrel{\rho}{\leq} a_n \stackrel{\rho}{\leq} a_1$.

Согласно (6), (7), получаем из последней цепочки соотношений:

$$\psi(a_1) \leq \psi(a_2) \leq \dots \leq \psi(a_l) < \psi(a_{l+1}) \leq \dots \leq \psi(a_n) \leq \psi(a_1).$$

Откуда $\psi(a_1) < \psi(a_1)$, что невозможно. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности основано на следующем вспомогательном утверждении.

Утверждение 2. Пусть отношение ρ ациклично относительно своей симметричной части ρ^s . Тогда каноническое отображение из A в A/ε_ρ будет строгим гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ на фактор-структуру $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho \rangle$.

Пояснение. Здесь ε_ρ есть отношение эквивалентности, классами которой являются циклы графа $\langle A, \rho \rangle$.

Известно [3], что фактор-отношение ρ/ε_ρ , полученное «стягиванием циклов», ациклично.

Доказательство утверждения 2.

Так как фактор-отношение ρ/ε_ρ ациклично, оно будет антисимметричным. Полагая для краткости $\rho_0 = \rho/\varepsilon_\rho$, получаем $\rho_0^s = \Delta, \rho_0^* = \rho_0 \setminus \Delta$. Пусть $a <^{\rho^*} a'$. Тогда выполняется

$[a]_{\varepsilon_\rho}^{\rho_0} \leq [a']_{\varepsilon_\rho}$. Предположим, что $[a]_{\varepsilon_\rho} = [a']_{\varepsilon_\rho}$. Тогда $a \equiv_{\varepsilon_\rho} a'$, и в графе $\langle A, \rho \rangle$ существует путь из вершины a' в вершину $a: a' \stackrel{\rho}{\leq} x_1 \stackrel{\rho}{\leq} \dots \stackrel{\rho}{\leq} x_k \stackrel{\rho}{\leq} a$. Добавляя к нему дугу $a \stackrel{\rho}{\leq} a'$, получаем в итоге цикл, и по свойству ацикличности ρ относительно ρ^s должно быть $a \sim_{\rho^s} a'$, что противоречит предположению $a <_{\rho^s} a'$. Итак, в соотношении $[a]_{\varepsilon_\rho} \leq [a']_{\varepsilon_\rho}$ равенство $[a]_{\varepsilon_\rho} = [a']_{\varepsilon_\rho}$ исключено; учитывая, что $\rho_0 \setminus \Delta = \rho_0^*$, получаем $[a]_{\varepsilon_\rho}^{\rho_0} < [a']_{\varepsilon_\rho}^{\rho_0}$ и в итоге показана справедливость импликации

$$a <_{\rho^s} a' \Rightarrow [a]_{\varepsilon_\rho}^{\rho_0^*} < [a']_{\varepsilon_\rho}^{\rho_0^*}. \quad (13)$$

Далее, так как условие $a \sim_{\rho^s} a'$ влечет $a \equiv_{\varepsilon_\rho} a'$ и $[a]_{\varepsilon_\rho} = [a']_{\varepsilon_\rho}$, то справедлива импликация

$$a \sim_{\rho^s} a' \Rightarrow [a]_{\varepsilon_\rho} = [a']_{\varepsilon_\rho}. \quad (14)$$

Утверждение 2 состоит в выполнимости формул (13), (14).

Перейдем к доказательству достаточности в лемме 2. Согласно утверждению 2, каноническое отображение из A в A/ε_ρ является строгим гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ на фактор-структуру $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho \rangle$. Поскольку последняя ациклична, функция высоты h будет ее строгим гомоморфизмом в числовую структуру предпочтений. Тогда их композиция задает строгий гомоморфизм из $\langle A, \rho \rangle$ в числовую структуру предпочтений, т.е. является представлением структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ в числовую прямую.

Завершение доказательства теоремы 5 проводится аналогично завершению доказательства теоремы 4. Теорема 5 доказана.

Рассмотрим теперь бесконечные игры, т.е. такие, в которых хотя бы один из игроков (или все) имеет бесконечное множество стратегий.

Теорема 6. Пусть G – игра с отношениями предпочтения вида (1). Если существует вложение этой игры в некоторую игру с функциями выигрыша, то для каждого игрока i отношение ρ_i должно быть ацикличным относительно своей симметричной части ρ_i^s .

Необходимость этого условия доказана в теореме 5.

Достаточное условие существования вложимости для игры со счетным множеством исходов дает следующая теорема.

Теорема 7. Пусть G – игра с отношениями предпочтения вида (1) и мощность множества A не более чем счетна. Если для каждого i отношение ρ_i ациклично относительно своей симметричной части ρ_i^s , то существует вложение игры G в некоторую игру с функциями выигрыша.

Доказательство теоремы 7.

Если для каждого i отношение ρ_i ациклично относительно своей симметричной части ρ_i^s , то верно включение $\rho_i \subseteq \hat{\rho}_i$, где $\hat{\rho}_i$ – отношение достижимости, которое здесь будет отношением порядка. Так как по теореме Шпильрайна [1] всякий порядок на множестве можно продолжить до линейного порядка на этом множестве, то $\hat{\rho}_i \subseteq \bar{\rho}_i$, где $\bar{\rho}_i$ – линейный порядок. По теореме 22 [5] существует строго изотонное отображение из $\langle A, \bar{\rho}_i \rangle$ во множество действительных чисел, снабженное естественным порядком. Таким образом,

обозначая через $(\psi_i)_{i=1,\dots,n}$ соответствующий набор строго изотонных отображений, получаем, что он будет определять вложение игры G в построенную игру с функциями выигрыша $\Gamma = \langle X_1, \dots, X_n, \psi_1 \circ F, \dots, \psi_n \circ F \rangle$.

Теорема 7 доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, когда A – произвольное бесконечное множество любой мощности. В этом случае главную роль играют следующие понятия.

Определение 3. Подмножество $S \subseteq A$ называется *мажорантно стабильным*, если оно удовлетворяет условию

$$a \in S, a' \stackrel{\rho}{\geq} a \Rightarrow a' \in S. \quad (15)$$

Будем говорить, что семейство F мажорантно стабильных подмножеств является *разделяющим*, если для любых $a' \stackrel{\rho^*}{>} a$ найдется $S \in F$, для которого $a \notin S$ и $a' \in S$.

Теорема 8. Для того чтобы бесконечная игра G вида (1) была вложима в некоторую игру с функциями выигрыша, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i = 1, \dots, n$ во множестве исходов A игры G существовало не более чем счетное разделяющее семейство мажорантно стабильных подмножеств относительно отношения ρ_i .

Доказательство теоремы 8 основано на следующей лемме.

Лемма 3. Для того чтобы структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$, заданная на множестве A , имела представление в числовую прямую, необходимо и достаточно, чтобы в $\langle A, \rho \rangle$ существовало не более чем счетное разделяющее семейство мажорантно стабильных подмножеств.

Доказательство леммы 3.

Необходимость. Пусть ψ – представление структуры предпочтений в числовую прямую. Рассмотрим нумерацию $(r_n)_{n=1,2,\dots}$ множества рациональных чисел. Для любого натурального $n \in N$ положим $S_n = \{a \in A : \psi(a) \geq r_n\}$. Каждое подмножество S_n мажорантно стабильно, и семейство $(S_n)_{n \in N}$ не более чем счетно. Пусть $a' \stackrel{\rho^*}{>} a$. Тогда согласно (6): $\psi(a') > \psi(a)$. Возьмем рациональное число r_k , для которого $\psi(a) < r_k < \psi(a')$. Тогда подмножество S_k разделяет элементы a и a' , т.к. $a \notin S_k$, $a' \in S_k$.

Достаточность. Пусть $F = (S_n)_{n \in N}$ – не более чем счетное разделяющее семейство мажорантно стабильных подмножеств. Обозначим через χ_n характеристическую функцию подмножества S_n . Положим

$$\psi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(a)}{2^n}. \quad (16)$$

Заметим, что числовой ряд, стоящий в правой части (16), является сходящимся при любом наборе подмножеств $(S_n)_{n \in N}$. Покажем, что функция ψ является искомым представлением. Пусть $a' \stackrel{\rho^*}{>} a$. Тогда согласно (15), всякое мажорантно стабильное подмножество, содержащее a , содержит также a' , откуда $\chi_n(a') \geq \chi_n(a)$ ($n = 1, 2, \dots$). Так как семейство F разделяющее, то найдется $k \in N$, для которого $a \notin S_k$ и $a' \in S_k$, т.е. $\chi_k(a) = 0$ и $\chi_k(a') = 1$, отсюда $\psi(a') - \psi(a) > \frac{1}{2^k}$, значит, $\psi(a') > \psi(a)$ и (6) доказано.

Для проверки (7) заметим, что если $a' \stackrel{\rho^*}{\sim} a$, то при любом $n \in N$ выполняется равносильность:

$$a' \in S_n \Leftrightarrow a \in S_n,$$

отсюда $\chi_n(a') = \chi_n(a)$, значит $\psi(a') = \psi(a)$. Лемма 3 доказана.

Для доказательства теоремы 8 достаточно в качестве строгого гомоморфизма взять функции ψ_i в виде (16) и положить функции выигрыша в игре Γ равными $\lambda_i = \psi_i \circ F$.

Пример.

Рассмотрим игру двух игроков $G = \langle X, Y, A, \rho_1, \rho_2, F \rangle$, в которой множество стратегий первого игрока $X = \{1, 2, 3\}$, второго игрока $Y = \{1, 2, 3\}$, множество исходов $A = \{p, q, r, s, u, v, w\}$, функция реализации задана табл. 1.

Таблица 1

Функция реализации игры

F	1	2	3
1	v	r	w
2	p	u	r
3	r	s	q

На рис. 1, 2 представлены отношения предпочтения игроков 1 и 2, заданные графами.

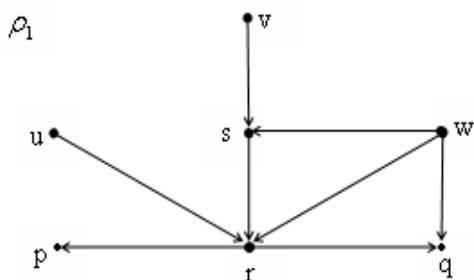


Рис. 1. Граф отношения предпочтения игрока 1

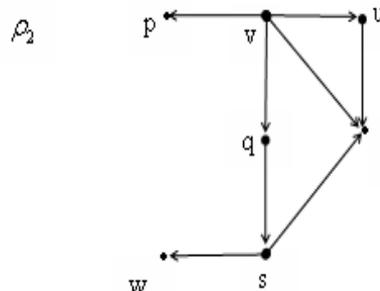


Рис. 2. Граф отношения предпочтения игрока 2

Так как в графах нет ни циклов (контуров), ни петель, то для каждого игрока отношение предпочтения является ациклическим относительно своей симметричной части, и по теореме 4 существует вложение этой игры в некоторую игру с функциями выигрыша. Для нахождения функций выигрыша требуется указать высоту каждого элемента в своем графе.

На рис. 3, 4 представлены диаграммы отношений предпочтения, которые представляют собой графы, вершины которых расположены по уровням в соответствии с их высотой.

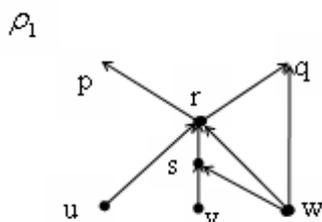


Рис. 3. Диаграмма отношения предпочтения игрока 1

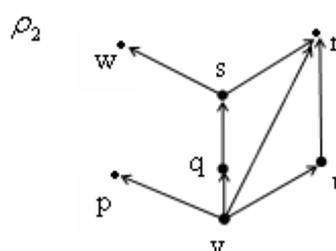


Рис. 4. Диаграмма отношения предпочтения игрока 2

Набор отображений $h_1, h_2 : A \rightarrow R$ представлен в табл. 2, 3.

Таблица 2

Отображение h_1 для игрока 1

Для игрока 1, функция высоты h_1							
исход	p	q	r	s	u	v	w
высота	3	3	2	1	0	0	0

Таблица 3

Отображение h_2 для игрока 2

Для игрока 2, функция высоты h_2							
исход	p	q	r	s	u	v	w
высота	1	1	3	2	1	0	3

Тогда на базе игры G построим игру $G_{(h_1, h_2)} = \langle X, Y, F \bullet h_1, F \bullet h_2 \rangle$, в которой выигрыш игрока в ситуации (x, y) равен высоте соответствующего исхода в графе.

Получаем биматричную игру с функциями выигрыша, заданную матрицей, представленной в табл. 4.

Таблица 4

Матрица функций выигрыша

$G_{(h_1, h_2)}$	1	2	3
1	(0,0)	(2,3)	(0,3)
2	(3,1)	(0,1)	(2,3)
3	(2,3)	(1,2)	(3,1)

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968. 431 с.
2. Розен В.В. Вложения упорядоченных множеств в упорядоченные линейные пространства // Известия высших учебных заведений. Математика. 1998. №7(434) С. 32–38.
3. Розен В.В. Структура отношений предпочтения: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во СГУ, 2007. 57 с.
4. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука. Физматлит, 1997. 368 с.
5. Savina T.F. Homomorphisms and Congruence Relations for Games with Preference Relations // Contributions to game theory and management. Vol. III. Collected papers on the Third International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2010, P. 387–398.
6. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.

Савина Татьяна Федоровна – ассистент кафедры «Менеджмент, Маркетинг, Логистика», Институт развития бизнеса и стратегий Саратовского государственного технического университета; аспирант кафедры геометрии механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Savina Tatiana Fedorovna – Assistant of the Department “Management, Marketing, Logistics”, Business and strategy development institute of Saratov State Technical University; Post-graduate Student of the Department “Geometry”, Saratov State University on name N.G. Chernyshevsky

Статья поступила в редакцию 02.03.2011, принята к опубликованию 18.07.2011