

Анализ формальных понятий: от теории к практике

Д. И. Игнатов

dignatov@hse.ru

^{1,2}НИУ ВШЭ, Россия, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

Аннотация. В работе даются основные определения анализа формальных понятий (АФП), рассказывается о его роли в математике и компьютерных науках, а также приводится краткий обзор его основных приложений.

Ключевые слова: анализ формальных понятий, разработка данных (Data Mining), приложения.

Введение

Анализ формальных понятий (АФП) является прикладной ветвью алгебраической теории решеток, в рамках которой предложен математический формализм, описывающий на языке алгебры понятие и иерархии понятий. Основные идеи АФП были сформулированы Рудольфом Вилле в его работе [50], а наиболее полной монографией по АФП является книга Гантера и Вилле [23].

Фактически анализ формальных понятий имеет дело с данными в объектно-признаковой форме, а формальные понятия, определенные с помощью соответствия Галуа, представляют собой пары множеств вида (объем, содержание), им в точности до перестановки строк и столбцов соответствуют максимальные прямоугольники в таблице объект-признак. Основными достоинствами такого определения понятия явля-

Игнатов Д.И., Яворский Р.Э. (ред.): Анализ Изображений Сетей и Текстов, Екатеринбург, 16-18 марта, 2012

© Открытые системы, 2012

ются соответствие традиционным представлениям о понятиях используемым в философии: 1) понятие — это пара вида (объем, содержание), 2) при уменьшении объема понятия увеличивается его содержание и наоборот, 3) понятия иерархически упорядочены по отношению «быть более общим понятием».

За последние 30 лет АФП прошел значительный путь от первоначальных теоретических изысканий к разнообразным многочисленным приложениям (только на английском языке издано около 900 научных работ по тематике АФП, более половины из которых посвящены приложениям), что позволяет полноправно назвать его прикладной математической дисциплиной. Основными приложениями АФП, которым мы уделим внимание в этой работе, являются анализ данных (машинное обучение и разработка данных), представление знаний (онтологии и таксономии), информационный поиск, анализ неструктурированных данных (в частности, текстов), программная инженерия, социология и образование. В настоящее время существуют три наиболее репрезентативных международных конференции по тематике АФП: International Conference on Formal Concept Analysis, International Conference on Concept Lattices and Their Applications и International Conference on Conceptual Structures. Первая в списке конференция является наиболее представительной и служит для обсуждения значительных теоретических и практических результатов в области, вторая посвящена преимущественно приложениям АФП, а третья, помимо АФП-сообщества, призвана собрать исследователей в области представления знаний и онтологического моделирования (например, сооснователем этой серии конференций является создатель понятийных графов Джон Сова).

Основные определения анализа формальных понятий

Контекстом в АФП называют тройку $K = (G, M, I)$, где G — *множество объектов*, M — *множество признаков*, а отношение $I \subseteq G \times M$ говорит о том, какие объекты какими признаками обладают. Для произвольных $A \subseteq G$ и $B \subseteq M$ определены *операторы Галуа*:

$$A' = \{m \in M \mid \forall g \in A (g I m)\};$$

$$B' = \{g \in G \mid \forall m \in B (g I m)\}.$$

Оператор " (двукратное применение оператора ') является *оператором замыкания*: он идемпотентен ($A'''' = A''$), монотонен ($A \subseteq B$ влечет $A'' \subseteq B''$) и экстенсивен ($A \subseteq A''$). Множество объектов $A \subseteq G$, такое, что $A'' = A$, называется *замкнутым*. Аналогично для замкнутых множеств признаков — подмножеств множества M . Пара множеств (A, B) , таких, что $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $A' = B$ и $B' = A$, называется *формальным понятием*

контекста K . Множества A и B замкнуты и называются *объемом* и *содержанием* формального понятия (A, B) соответственно. Для множества объектов A множество их общих признаков A' служит описанием сходства объектов из множества A , а замкнутое множество A'' является кластером сходных объектов (с множеством общих признаков A'). Отношение “быть более общим понятием” задается следующим образом: $(A, B) \geq (C, D)$ тогда и только тогда, когда $A \supseteq C$. Понятия формального контекста $K = (G, M, I)$, упорядоченные по вложению объемов образуют решетку $\mathfrak{B}(G, M, I)$, называемую *решеткой понятий*. Для визуализации решеток понятий используют т.н. диаграммы Хассе, т.е. граф покрытия отношения “быть более общим понятием”.

АФП в машинном обучении и разработке данных

В этом разделе мы кратко опишем основные приложения и методы на основе АФП в области современного анализа данных, в частности в разработке данных (Data Mining).

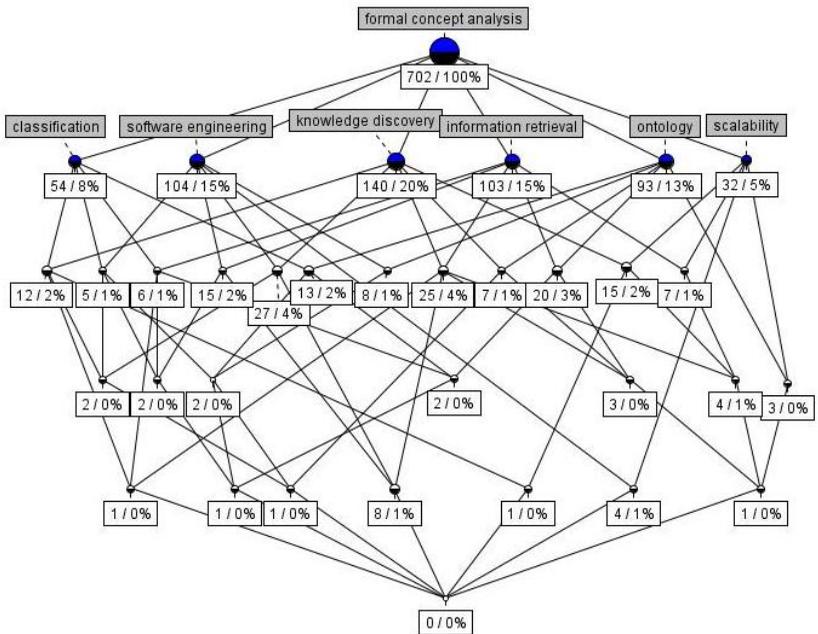


рис. 1. Диаграмма решетки понятий для 702 статей по АФП, охватывающих 2003 — 2009 годы.

Классификация

Соответствия Галуа также использовались некоторыми исследователями в СССР, например, ДСМ-метод автоматического порождения гипотез, применяемый для решения задач классификации довольно естественно формулируется в терминах решеток понятий как метод машинного обучения по положительным и отрицательным примерам [11]. Переход в данном случае с языка математической логики к алгебраическим формулировкам позволил разработать эффективные программные реализации ДСМ-метода. На языке формальных понятий и соответствий Галуа переформулированы такие методы машинного обучения как пространства версий и деревья решений (см. [22]). Более поздняя работа [14] по применению решеток понятий для порождения деревьев решений на основе решеток формальных понятий показала улучшение результатов по сравнению с известными методами, такими как C4.5 и IB1.

Отбор признаков

Отбор признаков (feature selection), сокращение или редуцирование признаков на этапе предварительного анализа данных существенно помогают сократить не только вычислительные затраты, но и улучшить точность классификации. Сплав идей анализа формальных понятий и неточных множеств (Rough Sets) убедительно демонстрирует такое сокращение [25].

Частые (замкнутые) множества признаков

Поиск частых множеств признаков возник как направление в разработке данных в начале 90-х годов для решения задач анализа корзины покупок в крупных продуктовых супермаркетах. Анализ формальных понятий и поиск (замкнутых) множеств признаков (Frequent Itemset Mining) объединяет идея замыкания. Фактически решетка понятий некоторого формального контекста в АФП изоморфна решетке замкнутых множеств, если требование быть частым множеством не учитывать. В АФП было введено понятие решетки-айсберга [47], которое позволило максимально сблизить терминологию двух сообществ FIM и FCA.

Поиск закономерностей: импликации, ассоциативные правила и функциональные зависимости

Импликацией формального контекста $K = (G, M, I)$ в анализе формальных понятий называется признаковая зависимость вида $A \rightarrow B$, где $A, B \subseteq M$, при условии, что все объекты, обладающие A , также облада-

ют всеми признаками из B , т.е. $A' \subseteq B'$. Импликация в АФП является частным случаем такой признаковой зависимости как ассоциативное правило в разработке данных, это в точности ассоциативное правило с достоверностью (confidence) равной 1. В свою очередь, ассоциативные правила изучались в АФП задолго до их появления в сообществе разработки данных под названием частичные импликации [37]. Связь импликаций и функциональных зависимостей позволила использовать т. н. базис импликаций Дюкена-Гига для компактного представления функциональных зависимостей (см. теорию баз данных) в виде их ограниченного множества, из которого все оставшиеся функциональные зависимости данного многозначного контекста (таблицы данных) выводимы по правилам Армстронга [23]. Достаточно полный обзор по поиску ассоциативных правил на основе АФП можно найти в работе [36].

Модели мультимодальной кластеризации

Недостатки традиционных методов кластеризации, связанные с потерей признакового описания сходства объектов, при установлении факта их числового сходства требуют новых методов кластерного анализа во многих приложениях, таких как анализ данных геной экспрессии и Интернет-данных. Формальные понятия могут быть рассмотрены как своего рода бикластеры, в которых описание сходства объектов сохраняется в признаковой компоненте бикластера — содержании [6, 8]. Стоит отменить многочисленные попытки ослабления определения формального понятия и его обобщения на многомерный случай. Одними из успешных таких попыток являются разработка метода поиска мультимодальных кластеров DataPeeler [38] и плотных би- [6, 8] и трикластеров [4, 5, 30].

Рекомендательные системы

Рекомендательные системы также потенциальные кандидаты для применения АФП, первые шаги в этом направлении были сделаны в работах [1, 7, 28].

Приложения в анализе текстов

Анализ формальных понятий помогает также в анализе неструктурированных данных. Например, для выявления (почти) дубликатов по большим коллекциям веб-документов [9, 10, 29] и анализа текстов полицейских отчетов [41]. Основное преимущество перед методами кластеризации на основе попарного сравнения документов в хорошей эмпирической временной сложности при кластеризации текстовых коллекций благодаря разреженности данных. Во втором приложении важным для

экспертов являются таксономические возможности решеток понятий, позволяющих удобно изучать коллекции полицейских отчетов по диаграмме решетки понятий, построенной по таблице отчеты – ключевые слова [41].

Приложения в программной инженерии

Пожалуй, впервые систематическое обсуждение приложений АФП в программной инженерии было дано в книге [25]. В основном АФП применяется для поддержки разработки ПО и объектно-ориентированного моделирования иерархий классов на ранних стадиях проекта, а также для улучшения и рефакторинга кода на более поздних этапах (см. статьи [26, 27, 46, 49]). Позднее появился обзор 47 статей по программной инженерии на основе АФП [48]. Авторы разбили эти статьи по 10 категориям на основании стандарта программной инженерии ISO 12207 и визуализировали результаты анализа с помощью диаграммы решетки понятий.

АФП в онтологическом моделировании и представлении знаний

Таксономические свойства решеток понятий, представление множества понятий в виде иерархии с отношением «быть более общим понятием» ставят естественный вопрос насколько тесно АФП связан с онтологиями. Ответ на него был дан достаточно давно в работах Ф. Симиано и А. Хотхо (исследователь из университета Касселя, Германия) [17]. Было установлено как можно получить частичный порядок менее строгий, чем решеточный, из решеток понятий, и, наоборот, как по имеющейся онтологии, представленной в виде частичного порядка на понятиях, построить решетку понятий. АФП тесно связан с описательными логиками (Descriptive Logic), например, так называемое исследование признаков (Attribute Exploration), как метод пополнения баз знаний был позаимствован сообществом DL из АФП [13].

Важной темой в работах по АФП является вопрос построения онтологий эффективным образом. Этой теме посвящено около 30% всех статей по АФП (всего 93 статьи за период с 2003 по 2009 год). Авторы используют АФП преимущественно как средство извлечения онтологических понятий и их иерархий. Большинство из них имеют дело с неструктурированными текстами, такими как медицинские отчеты, RSS потоки, научные статьи и т.п. Анализируя неструктурированные тексты авторы как правило используют средства обработки естественного языка (NLP). С помощью NLP они извлекают из текстовых коллекций ключевые слова, фразы, лексико-синтаксический контекст и т.п. По таким

данных можно построить решетки понятий и извлекать онтологические классы ключевых слов, иерархически упорядочивать эти понятия, выявлять зависимости между классами и т.п. В итоге новое онтологическое знание может быть сохранено, например, в формате OWL, а новые тексты могут быть классифицированы с использованием уже этой онтологии. Именно с появлением работ Симиано, Хотхо и др. (см. [17] и [18]) АФП стал популярным инструментом для построения онтологий. Работа [17] обсуждает как АФП может быть использован для поддержки построения онтологий и как онтологии могут быть использованы в приложениях АФП. Ричардс [43] предлагает использовать АФП для построения небольших персональных и ad hoc, которые могут помочь пониманию области исследований.

Таксономические свойства АФП оказались удобными для представления знаний, например, при анализе посещаемости сайтов в сети Интернет для построения таксономий аудиторий веб-сайтов [33].

Информационный поиск

Среди приложений АФП по информационному поиску можно отметить мета-поисковые системы для Интернета [16, 19, 32]. Для более детального знакомства с предметом рекомендуется обратиться к книге Карпинето и Романо [15] или еще вполне актуальному обзору Уты Присс [42].

Социологические приложения и анализ образовательных данных

Ключевыми фигурами по приложениям АФП в социологии являются Линтон Фриман и Винсент Дюкен. Линтоном Фриманом изучались возможности решеток понятий для определения сообществ в анализе социальных групп и сетей [21], а Винсентом Дюкеном сделано немало для социологических и антропологических исследований на основе опросных данных [20, 39 и 40]. Исследованием эпистемических сообществ интенсивно занимались Сергей Обьедков и Камий Рот [45]. Анализу результатов социологических опросов и данных в области образования посвящены работы автора этой статьи [2, 3, 31 и 44]. Работа [4] посвящена изучению три-сообществ в социальных Интернет-сервисах.

Заключение

Таким образом, можно сделать вывод, что АФП является бурно развивающейся дисциплиной на стыке прикладной математики и компьютерных наук, а математическая формализация понятия оказала свое бла-

готовящее влияние на анализ данных, представление знаний и различные разделы информатики, породив при этом в исследователях желание экспериментировать и находить все новые интересные и востребованные приложения.

Благодарности

Работа выполнена в рамках проектно-учебной группы НИУ ВШЭ «Алгоритмы интеллектуального анализа данных (Data Mining) для Интернет-форумов обсуждения инновационных проектов».

Литература

1. Игнатов Д.И., Кузнецов С.О. Методы разработки данных (Data Mining) для рекомендательной системы Интернет-рекламы // Одиннадцатая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием (КИИ-2008, 28 сентября – 3 октября 2008 г., г. Дубна, Россия): Труды конференции. Т.2. – М.: Ленанд, 2008. – 392 с.
2. Игнатов Д.И., Кононыхина О.Н. Решетки формальных понятий для анализа данных социологических опросов// Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сборник научных трудов V-й Международной научно-технической конференции (Коломна, 20-30 мая 2009 г.). В 2-х томах. Т1. – М.: Физматлит, 2009. – 546 с.
3. Игнатов Д.И., Хавенсон Т.Е. Изучение ресурсной обеспеченности российских школ с помощью методов, основанных на решетках понятий// Социологические методы в современной исследовательской практике: Сборник статей, посвященный памяти первого декана факультета социологии НИУ ВШЭ А.О. Крыштановского / Отв. ред. и вступит. ст. О.А. Оберемко; НИУ ВШЭ, ИС РАН, РОС. М.: НИУ ВШЭ, 2011.
4. Игнатов Д.И., Магизов Р.А. Анализ тримодальных данных на примере Интернет-сервисов социальных закладок// Социологические методы в современной исследовательской практике: Сборник статей, посвященный памяти первого декана факультета социологии НИУ ВШЭ А.О. Крыштановского / Отв. ред. и вступит. ст. О.А. Оберемко; НИУ ВШЭ, ИС РАН, РОС. М.: НИУ ВШЭ, 2011.
5. Игнатов Д. И., Кузнецов С. О., Пульманс Й. Разработка данных систем совместного пользования ресурсами: от трипонятий к трикластерам //Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция. г. Петрозаводск, 11–17 сентября 2011 г.: Сборник докладов. — М.: МАКС Пресс, 2011. — 618 с. (ISBN 978-5-317-03787-1)
6. Игнатов Д.И., Кузнецов С.О. Бикластеризация объектно-признаковых данных на основе решеток замкнутых множеств// Труды 12-й национальной конференции по искусственному интеллекту, М., Физматлит, Т. 1., С.175-182, 2010.

7. Игнатов Д.И., Каминская С.Ю., Магизов Р.А. Метод скользящего контроля для оценки качества рекомендательных Интернет-сервисов// Труды 12-й национальной конференции по искусственному интеллекту, М., Физматлит, Т. 1., С.183-191, 2010.
8. Игнатов Д.И., Каминская А.Ю, Кузнецов С.О., Магизов Р. А. Метод бикластеризации на основе объектных и признаковых замыканий// Интеллектуализация обработки информации: 8-я международная конференция. Республика Кипр, г. Пафос, 17-24 октября 2010 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс, 2010. – С. 140 – 143.
9. Игнатов Д.И., Кузнецов С.О. О поиске сходства Интернет-документов с помощью частых замкнутых множеств признаков // Труды 10-й национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием (КИИ'06). – М.:Физматлит, 2006, Т.2, стр.249-258
10. Кузнецов С.О., Игнатов Д.И., Обедков С.А., Самохин М.В. Порождение кластеров документов дубликатов: подход, основанный на поиске частых замкнутых множеств признаков. Интернет-математика 2005. Автоматическая обработка веб-данных. Москва: “Яндекс”, 2005, стр. 302 – 319
11. С.О. Кузнецов, ДСМ-метод как система автоматического обучения, Итоги науки и техники. Сер. Информатика. 1991, Т. 15, С.17-54.
12. С.О. Кузнецов, Формальный анализ понятий с помощью ДСМ-метода, 6-я Национальная Конференция по Искусственному Интеллекту (КИИ-98), т.2, Пушкино, АИИ, 1998,С. 591-592.
13. F. Baader and B. Sertkaya. Applying formal concept analysis to description logics. In P. Eklund, editor, Proceedings of the 2nd International Conference on Formal Concept Analysis (ICFCA 2004), volume 2961 of Lecture Notes in Computer Science, pages 261-286. Springer-Verlag, 2004.
14. Belohlavek, Radim and De Baets, Bernard and Outrata, Jan and Vychodil, Vilem. Inducing decision trees via concept lattices. J. International Journal of General Systems, 2009, Volume 38, 4, Pages 455–467(2011)
15. Carpineto, C., Romano, G. (2004a) Concept data analysis: Theory and applications. John Wiley & Sons.
16. Carpineto, C., Romano, G. (2004b) Exploiting the Potential of Concept Lattices for Information Retrieval with CREDO. J. of Universal Computing, 10, 8, 985-1013.
17. Philipp Cimiano, Andreas Hotho, Gerd Stumme, and Julien Tane. Conceptual Knowledge Processing with Formal Concept Analysis and Ontologies. Proceedings of the The Second International Conference on Formal Concept Analysis ICFCA 04, (2961) Springer, 2004.
18. Cimiano, P.; Hotho, A. & Staab, S. Learning Concept Hierarchies from Text Corpora using Formal Concept Analysis. Journal of Artificial Intelligence Research, 2005, 24, 305-339
19. Dau, F., Ducrou, J., Eklund, P. (2008) Concept Similarity and Related Categories in SearchSleuth. P. Eklund et al. (Eds.): ICCS. LNAI 5113, 255-268. Springer.
20. Vincent Duquenne: Latticial Structures in Data Analysis. Theor. Comput. Sci. 217(2): 407-436 (1999)

21. L. Freeman Cliques, Galois Lattices, and the Structure of Human Social Groups. *Social Networks*, 18, 1996, 173-187
22. B. Ganter and S.O. Kuznetsov, Hypotheses and Version Spaces, Proc. 10th Int. Conf. on Conceptual Structures, ICCS'03, A. de Moor, W. Lex, and B.Ganter, Eds., Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol. 2746 (2003), pp. 83-95.
23. B. Ganter and R. Wille, Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations, Springer, 1999.
24. Bernhard Ganter, Sergei O. Kuznetsov, Scale Coarsening as Feature Selection, In: R.Medina, S.Obiedkov, Eds., Proc. International Conference on Formal Concept Analysis, Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol. 4933, pp. 217-228.
25. Bernhard Ganter, Gerd Stumme, Rudolf Wille: Formal Concept Analysis, Foundations and Applications Springer 2005
26. R. Godin, P. Valtchev. Formal Concept Analysis-Based Class Hierarchy Design in Object-Oriented Software Development. In.: B. Ganter, G. Stumme, and R. Wille. (Eds.) Formal Concept Analysis, Foundations and Applications, LNAI volume 3626, pages 209–231. Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
27. W. Hesse, T. Tilley. Formal Concept Analysis Used for Software Analysis and Modelling. In.: B. Ganter, G. Stumme, and R. Wille. (Eds.) Formal Concept Analysis, Foundations and Applications, LNAI volume 3626, pages 259–282. Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
28. D.I. Ignatov, S.O. Kuznetsov. Concept-based Recommendations for Internet Advertisement// In proceedings of The Sixth International Conference Concept Lattices and Their Applications (CLA'08), Radim Belohlavek, Sergei O. Kuznetsov (Eds.): CLA 2008, pp. 157–166 ISBN 978–80–244–2111–7, Palacky University, Olomouc, 2008.
29. D.I. Ignatov, S.O. Kuznetsov. Frequent Itemset Mining for Clustering Near Duplicate Web Documents// In proceedings of The 17th International Conference on Conceptual Structures, S. Rudolph, F. Dau, and S.O.Kuznetsov (Eds.): ICCS 2009, LNCS (LNAI) 5662, pp. 185–200, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009
30. Dmitry I. Ignatov, Sergei O. Kuznetsov, Ruslan A. Magizov and Leonid E. Zhukov. From Triconcepts to Triclusters// In proceedings of 13th International Conference on ROUGH SETS, FUZZY SETS, DATA MINING AND GRANULAR COMPUTING, Kuznetsov et al. (Eds.): RSFDGrC 2011, LNCS/LNAI Volume 6743/2011, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 257-264, 2011
31. Dmitry Ignatov and Serafima Mamedova and Nikita Romashkin and Ivan Shamshurin. What can closed sets of students and their marks say?// In proceedings of 4th International Conference on Educational Data Mining, Mykola Pechenizkiy et al. (Eds.), EDM-2011, TU/e Eindhoven, 223-228, 2011
32. Koester, B. (2006) Conceptual Knowledge Retrieval with FooCA: Improving Web Search Engine Results with Contexts and Concept Hierarchies. P. Perner (Ed.): ICDM, LNAI 4065, 176-190. Springer.

33. Sergei O. Kuznetsov, Dmitrii I. Ignatov, Concept Stability for Constructing Taxonomies of Web-site Users// Proc. Satellite Workshop "Social Network Analysis and Conceptual Structures: Exploring Opportunities" at ICFCA'07, Clermont-Ferrand, France, P. 19-24.
34. S.O. Kuznetsov and S.A. Obiedkov, Comparing Performance of Algorithms for Generating Concept Lattices, *Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence*, vol. 14 (2002), pp. 189-216.
35. S.O. Kuznetsov, Galois Connections in Data Analysis: Contributions from the Soviet Era and Modern Russian Research, in *Formal Concept Analysis: Foundations and Applications*, B. Ganter, G. Stumme, R. Wille, Eds., *Lecture Notes in Artificial Intelligence, State-of-the Art Ser.* (2005), vol. 3626, pp. 196-225.
36. Lakhal, L., Stumme, G. (2005) Efficient Mining of Association Rules Based on Formal Concept Analysis. B. Ganter et al. (Eds.): *Formal Concept Analysis, LNAI 3626*, 180-195. Springer
37. Michael Luxemburger. Partielle Implikationen und partielle Abhängigkeiten zwischen Merkmalen. Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1988.
38. Loïc Cerf, Jérémy Besson, Céline Robardet, Jean-François Boulicaut: Data Peeler: Constraint-Based Closed Pattern Mining in n-ary Relations. *SDM 2008*: 37-48
39. Mohr, J., Duquenne, V.: The duality of culture and practice: Poverty relief in New-York City, 1888-1917. *Theory and Society* 26, 305–356 (1997)
40. Mohr, J., Bourgeois, M., Duquenne, V.: The Logic of Opportunity: A Formal Analysis of the University of California's Outreach and Diversity Discourse. *Center for Studies in Higher Education, UC Berkeley, Research and Occasional Papers Series* (2004)
41. Jonas Poelmans, Paul Elzinga, Stijn Viaene, Guido Dedene: A Case of Using Formal Concept Analysis in Combination with Emergent Self Organizing Maps for Detecting Domestic Violence. *ICDM 2009*: 247-260
42. Priss, U. (2000) Lattice-based Information Retrieval. *Knowledge Organization*, 27, 3, 132-142.
43. Richards, D. (2006) Ad-Hoc and Personal Ontologies: A Prototyping Approach to Ontology Engineering. A. Hoffmann et al. (Eds.): *PKAW, LNAI 4303*, 13-24. Springer.
44. Nikita Romashkin, Dmitry Ignatov and Elena Kolotova. How university entrants are choosing their department? Mining of university admission process with FCA taxonomies// In proceedings of 4th International Conference on Educational Data Mining, Mykola Pechenizkiy et al. (Eds.), *EDM-2011, TU/e Eindhoven*, 229-234, 2011
45. Roth, C., Obiedkov, S., Kourie, D. (2008a) Towards Concise Representation for Taxonomies of Epistemic Communities. S.B. Yahia et al. (Eds.): *CLA 2006, LNAI 4923*, 240-255. Springer.
46. G. Snelting. Concept Lattices in Software Analysis. In.: B. Ganter, G. Stumme, and R. Wille. (Eds.) *Formal Concept Analysis, Foundations and Applications, LNAI volume 3626*, pages 151–167. Springer, 2005.

47. Stumme, G., Taouil, R., Bastide, Y., Pasquier, N. and Lakhal, L. Computing Iceberg Concept Lattices with Titanic. *J. on Knowledge and Data Engineering*, (42)2:189–222, 2002
48. Tilley, T., Eklund, P. (2007) Citation analysis using Formal Concept Analysis: A case study in software engineering. 18th int. conf. on database and expert systems applications (DEXA).
49. T. Tilley, R. Cole, P. Becker, P. Eklund A Survey of Formal Concept Analysis Support for Software Engineering Activities. In.: B. Ganter, G. Stumme, and R. Wille. (Eds.) *Formal Concept Analysis, Foundations and Applications*, LNAI volume 3626, pages 250–271. Springer, 2005.
50. Wille R. Restructuring Lattice Theory: an Approach Based on Hierarchies of Concepts // *Ordered Sets* / Ed. by I. Rival. — Dordrecht; Boston: Reidel, 1982.— P. 445–470.