

УДК 519.866

Современные математические модели влияния на цену: приложение к задаче оптимального управления портфелем на рынке, движимом заявками

© 2012 г. Н. А. Андреев

nandreev@cs.msu.su

Кафедра системного анализа ВМК МГУ

1 Введение

Основной задачей при управлении портфелем является динамическое определение его структуры с целью максимизации прибыли и/или достижения определенного уровня риска. В связи с меняющимся состоянием рынка необходимо постоянное наблюдение за стоимостью портфеля и его перестройка в случае необходимости, что сводится к покупке или продаже некоторого количества активов. В современной финансовой математике при описании цен финансовых инструментов стандартным предположением является предпосылка о *совершенном рынке* (*perfect market*) — в любое время можно торговать любым активом в неограниченном объеме, без влияния на рыночную цену и комиссии. На практике гипотеза совершенного рынка не подтверждается в силу наличия транзакционных издержек и ограниченного доступного объема активов. Данная проблема может казаться несущественной для относительно активного рынка и небольших сделок. Совершение

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2011 году.

сделки достаточно большого объема приводит к значительному отклонению ее итоговой стоимости от рыночной. При необходимости совершения серии сделок возникает риск движения цены в неблагоприятную сторону, что приводит к необходимости учитывать как волатильность рынка, так и влияние уже совершенных сделок на будущую цену, которое особенно заметно при транзакциях большого объема.

Рассмотренным проблемам было уделено значительное внимание, особенно в последние годы, с появлением доступных высокочастотных данных о торгах внутри дня. Повышенный интерес к моделям динамики рынка связан с актуальностью задачи управления крупным портфелем, особенно на низколиквидном рынке или рынке с малым объемом торговли. Данная проблема актуальна в первую очередь для институциональных инвесторов, для которых незначительная реструктуризация портфеля влечет сделки больших объемов. В данной работе приводится обзор основных моделей влияния на цену для рынка, движимого заявками. Приводится классификация и взаимосвязь основных подходов, проводится анализ сделанных предположений и границ применимости моделей. Также рассматриваются смежные вопросы, касающиеся динамики книги заявок и приводится краткий обзор современных результатов.

2 Транзакционные издержки и ликвидность рынка

В данной работе рассматривается только динамика *рынка, движимого заявками* (*order-driven market*), который представляется в виде *книги лимитированных заявок* (*limit order book*) — множеств заявок на покупку (*bid orders*) и продажу (*ask orders*), доступных в данный момент. Каждая заявка в книге содержит информацию о своей цене и соответствующем объеме. При сделке объема V происходит исполнение лучших

(по цене) заявок суммарным объемом V , т.е. данные заявки изымаются из книги. В любой момент игроки могут выставить и снимать свои заявки по усмотрению.

Отказ от предпосылки о совершенном рынке приводит к возникновению дополнительного риска рыночной ликвидности: реальная цена сделки на рынке будет отличаться от расчетного значения. Достаточно учесть, что на рынке не существует цены актива как таковой, существуют лишь цены заявок на покупку/продажу. Разумное предположение о том, что цена $P(t)$ находится между лучшими ценами обеих сторон: $P(t) \in (B(t), A(t))$, где $A(t)$ — лучшая цена продажи, $B(t)$ — лучшая цена покупки, — приводит к тому, что продажа актива, например, будет в лучшем случае осуществляться по цене $B(t) < P(t)$. Обычно в качестве цены берется $P(t) = \frac{A(t)+B(t)}{2}$. При этом, если объем сделки превышает объем лучшей заявки, то остаток исполнится по худшей цене и средняя цена сделки отклонится от рыночной еще больше. Допустим, продажа происходит в момент времени t_0 . Сразу после исполнения лимитированных заявок лучшая цена покупки становится $B(t_0 + 0) < B(t)$. Прокси рыночной цены принимает меньшее значение $P(t_0 + 0) = \frac{A(t_0+0)+B(t_0+0)}{2} < P(t_0)$, тем не менее формальное падение цены не было вызвано какой-либо информацией об активе, а связано с устройством самого рынка. Поскольку мнение рынка о цене не изменилось, при необходимости совершить серию сделок инвестору выгодно выждать определенное время, за которое книга заявок восстановится и цена актива вернется на прежний уровень.

Рассмотренный пример показывает важность понятия ликвидности рынка и транзакционных издержек. Тем не менее не существует четкого определения *рыночной ликвидности* (*market liquidity*). Неформально можно сказать, что «ликвиден тот рынок, на котором участники совершают крупные сделки часто и с незначительным влиянием на цену» [14]. Изучение процесса торговли и организации рынков привело к созданию

теории рыночной микроструктуры и появлению целого класса микроструктурных моделей. К сожалению, на данный момент нет единого мнения о наборе характеристик, описывающих функционирование рынка, вследствие чего наблюдается их вольная интерпретация и методы измерения. В данной работе рассматривается одна из точек зрения на природу риска ликвидности, введенная Кайлом [8]. Согласно данной теории, изменение цены вызвано асимметрией информации между участника рынка: объем и цена заявки воспринимаются остальными участниками как дополнительная информация об истинной цене актива, вследствие чего формируется новое представление рынка. Как следствие, в работе [8] возникает понятие *постоянного влияния на цену* (*permanent price impact*) — изменение в представлении рынка о рыночной цене p_t после прихода новой информации (о новых заявках или сделках). В частности, для случая дискретного времени

$$p_t = p_{t-1} + \lambda q_t,$$

где q_t — дисбаланс заявок на покупку/продажу в текущем аукционе. Параметр λ был назван «лямбдой Кайла» и является первой численной характеристикой ликвидности.

С целью измерения рыночной ликвидности необходимо представление данного сложного понятия в виде набора простых характеристик. Общепринятым является подход Кайла, выделившего следующие аспекты (атрибуты) ликвидности:

1. *сжатость* (*tightness*) — затраты на открытие и закрытие позиции за короткий период времени. В данной работе под сжатостью будет подразумеваться *котируемый спред* (*quoted spread*), т.е. разность между лучшей ценой продажи и лучшей ценой покупки.
2. *глубина* (*depth*) — минимальный объем сделки, который ведет к сдвигу цен. Из определения понятно, что глубина — это объем лучшей заявки в книге лимитированных заявок.

3. *релаксация* (*resiliency*) — способность цен возвращаться в нормальное состояние после возмущения, не вызванного приходом новой информации (неинформативного шока). Под временем релаксации понимается время, за которое произошло возвращение.

Несложно видеть, что три характеристики отвечают за возможные издержки в рассмотренном выше примере с продажей. Абсолютно ликвидный рынок должен обладать нулевой сжатостью, бесконечной глубиной и нулевым временем релаксации. Третий аспект является самым нечетким в плане определения, так как формализуется через такие понятия как «нормальное состояние», «возмущение» и «неинформативный шок». Вследствие этого исследования данного аспекта начали появляться совсем недавно, при этом в достаточно вольной интерпретации.

3 Модели влияния на цену

Одной из основных задач при управлении портфелем является моделирование влияния конкретной сделки агента на цену актива. При этом принято разделять постоянный эффект (*permanent price impact*) и временный (*temporary price impact*). Постоянное изменение цены непосредственно связано с тем, как информация о сделке воспринимается рынком. В дальнейшем $S(t)$ обозначает фундаментальную рыночную цену актива (*fundamental price*), $P(t)$ — подразумеваемую рынком цену актива. Обычно в качестве $P(t)$ берут среднее между ценами лучших заявок, как было сделано выше. Важно понимать разницу между фундаментальной и подразумеваемой ценой: $S(t)$ — ненаблюдаемая величина, зависящая от фундаментальной информации об активе (в случае акций — это состояние компании); $P(t)$ — цена, определяемая рынком на основании торгов и отражающая мнение рынка об истинном значении $S(t)$. Обозначим за $g(\cdot)$ постоянное изменение подразумеваемой цены в

ходе торгов, за $\rho(\cdot)$ — временное изменение цены в результате конкретной сделки. Всюду далее подразумевается наличие одного крупного инвестора, который решает задачу оптимального управления портфелем. Только данный агент имеет возможность совершать сделки достаточно крупного размера, для которых необходимо учитывать влияние на цену. Современные модели рассматривают несколько подходов к формальному описанию динамики цены.

В работе Альмгрена и Крисса [3] рассматривается задача ликвидации/открытия позиции в дискретном времени с шагом Δt . Динамика подразумеваемой цены тогда описывается следующим уравнением:

$$P(t_k) = S(t_k) + \Delta t g(\xi_{t_k}),$$

где $x_{i_{t_k}}$ — средняя скорость торговли агента за прошедший период времени. Реальная цена сделки будет отличаться от $P(t_k)$ при достаточно большом объеме. Это формализуется в модели следующим образом: средняя цена сделки за единицу объема равна

$$\tilde{P}(t_k) = P(t_k) + \rho(\xi_{t_k}).$$

Таким образом, в модели присутствуют как постоянное, так и временное изменение цены. Влияние на цену зависит лишь от интенсивности торгов. Авторы не рассматривают задачу ликвидации позиции в общем виде, а лишь для линейных g и ρ , получая решение в аналитическом виде. Такое же упрощение встречается и в более ранней работе Бертсимаса и Ло [4], впервые применивших метод динамического программирования для данной задачи. Авторы предполагают, что цена после сделки объема v_{t_k} ($v_{t_k} > 0$ означает покупку, $v_{t_k} < 0$ — продажу) удовлетворяет уравнению

$$P(t_k) = S(t_k) + \Delta t v_{t_k}.$$

Модель Бертсимаса и Ло является, с одной стороны, упрощением модели Альмгрена и Крисса в том смысле, что не учитывает

временное влияние на цену, что эквивалентно предположению о бесконечной глубине рынка. С другой стороны, постоянное влияние на цену в ней зависит от объема сделки, что эквивалентно предыдущему подходу лишь в случае равномерного разбиения по времени или линейности $g(\cdot)$. Ни одна из моделей не учитывает релаксацию цены, предполагая, что агент входит в рынок с интервалами, большими времени восстановления.

Более общая модель динамики для задачи открытия позиции описана в работе Обижаевой и Вана [10]. Авторы разделяют фундаментальную цену $S(t)$, подразумеваемую цену $P(t)$ и лучшую цену продажи $A(t)$, описывая динамику каждой из них в непрерывном времени. Выход агента на рынок происходит конечное число раз за фиксированный период (импульсное управление портфелем). Существенным упрощением является предположение плоской стационарной структуры книги заявок: пусть объем, доступный в момент t по ценам в интервале $[P, P + dP)$, равен $q(t, P) dP$; предполагается, что

$$q(t, P) = q = \text{const}.$$

Динамика $S(t)$ не специфицируется и рассматривается в общем виде. Постоянное влияние на цену проявляется в динамике $P(t)$:

$$P(t) = S(t) + \lambda X(t),$$

где $X(t)$ — объем позиции агента в момент t . Таким образом, постоянное влияние описывается линейной функцией, зависящей от объема сделки. Временное изменение цены также линейно зависит от времени, что следует из предположения о блочной структуре. Важным преимуществом модели Обижаевой и Вана является учет релаксации лучшей цены. Обозначим как

$$D(t) = A(t) - P(t) - \frac{s}{2}$$

отклонение от справедливой цены продажи в момент t , где s — текущий спрэд. Модель предполагает неизменное значение спр-

эда, т.е. сжатость рынка не меняется со временем. Пусть в момент t_0 произошла сделка объема v_0 . Согласно [10], до наступления следующей сделки отклонение описывается следующей формулой:

$$D(t) = v_0 \kappa e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (1)$$

где $v_0 \kappa$ — начальное отклонение, соответствующее мгновенному изменению цены в результате сделки. Экспоненциальный закон сходимости следует из стационарности рынка, в частности, интенсивности поступления новых заявок.

Подход Обижаевой и Вана используется во многих современных работах при решении задачи оптимальной ликвидации/открытия позиции. Модель имеет несколько обобщений в двух направлениях: обобщение законов релаксации и введение сложной функции плотности заявок. В работе Альфонси, Шиды и Шульца [2] закон убывания отклонения $D(t)$ в прежних обозначениях имеет вид

$$D(t) = v_0 \kappa e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} \alpha(\tau) d\tau}, \quad (2)$$

где $\alpha(t)$ — положительная измеримая функция на рассматриваемом интервале. Очевидно, что (1) является частным случаем (2) при $\alpha(t) \equiv \text{const}$. Данная модель допускает общий закон релаксации, который не является стационарным. Недостатком метода является то, что скорость релаксации $\alpha(t)$ является динамической характеристикой самого рынка и не зависит от конкретного момента наступления шока.

Другая формализация релаксации введена Альфонси, Фрутом и Шидом в [1]. Рассматривается модель рынка в рамках подхода Обижаевой и Вана со сложной стационарной плотностью распределения заявок $q(P)$. Рассматривается непрерывная положительная функция плотности в терминах отклонения от справедливой цены, которая связана с отклонением от справедливой цены после сделки следующим образом:

$$\int_0^{D(t_0+0)} q(D) dD = v_0, \quad (3)$$

если книга в момент t_0 находилась в невозмущенном состоянии ($D(t_0) = 0$). На рисунке 1 приводится иллюстрация к динамике книги до и после сделки. Таким образом можно рассматри-

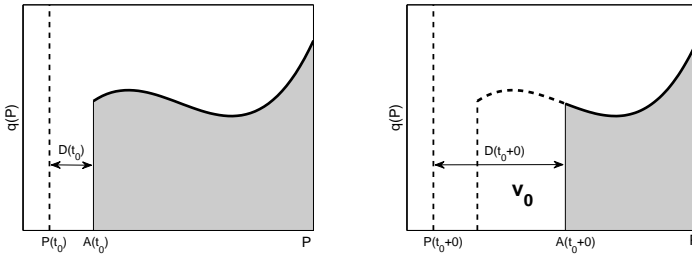


Рис. 1. Динамика книги заявок в момент перед наступлением сделки объема v_0 (слева) и сразу после (справа).

вать взаимнооднозначное отображение $D_0(v) : v \rightarrow D(t_0 + 0, v)$. Из уравнения (3) несложно видеть, что функция мгновенного изменения цены $D_0(\cdot, v)$ является линейной функцией от объема только при условии $q(D) \equiv \text{const}$. Таким образом, модель допускает нелинейное мгновенное влияние на цену. Предположение о стационарности функции плотности интерпретируется следующим образом: рынок стремится воссоздать некоторую установленную форму книги заявок. После прихода очередной сделки или снятия заявки часть объема удаляется из книги, что приводит к постепенному восполнению, пока не будет достигнуто исходное состояние. При фиксированной форме книги заявок обозначим недостающий объем в момент t как $E(t)$.

Тогда верно равенство

$$E(t) = \int_0^{D(t)} q(D) dD.$$

Отображение $D(t) \rightarrow E(t)$ является взаимнооднозначным в силу положительности $q(D)$. [1] рассматривает две возможных формализации релаксации рынка:

1. восстановление цены происходит по экспоненциальному закону:

$$D(t + s) = D(t)e^{-\alpha_1 s}. \quad (4)$$

2. восстановление недостающего объема происходит по экспоненциальному закону:

$$E(t + s) = E(t)e^{-\alpha_2 s}. \quad (5)$$

В случае $q(D) \equiv \text{const}$ получаем $E(t) = qD(t)$, что означает эквивалентность подходов (4) и (5). Значит, подход к релаксации в [10] имеет два естественных и равноправных обобщения в случае сложной формы книги заявок. Более того, подходы эквивалентны лишь при этом условии.

Наиболее общей из рассмотренных работ является [11], описывающая влияние на цену и издержки для книги заявок с учетом дискретности цен и релаксации. Главным предположением является, как и ранее, стационарная структура книги заявок. Задача оптимального управления ставится принципиально другим образом: вместо максимизации прибыли ставится задача минимизации издержек при достижении целевого состояния позиции (приобретение/ликвидация). Новая постановка избавляет от необходимости моделировать цену актива и, в частности, цену лучшей заявки, оставаясь в терминах отклонения $D(t)$. Тем самым уменьшается количество сделанных предположений. Рассматривается одна сторона книги, далее будет

описываться сторона заявок на продажу. Форма книги описывается с помощью функции суммарного объема: для достаточно большого числа M вводится бесконечная σ -конечная мера μ и непрерывная слева функция

$$F(x) = \mu([0, x]).$$

Константа M имеет смысл максимально возможного отклонения от лучшей цены, бесконечность меры интерпретируется как возможность провести сделку сколь угодно большого объема, что является классическим предположением, которое можно считать формально верным, так как в подавляющем большинстве случаев единственная сделка не покрывает все имеющиеся заявки, если рынок относительно ликвиден. σ -конечность меры запрещает концентрацию бесконечного объема на конкретной цене. Функция $F(x)$ имеет смысл суммарного объема по ценам с отклонением $D \in [0, x)$. Данная формализация позволяет рассматривать реальную форму книги, в которой распределение заявок не бывает непрерывным. В непрерывном случае модель сводится к предыдущим работам:

$$\mu(A) = \int_A q(x) dx,$$

где $q(\cdot)$ — производная Радона-Никодима.

Модель Шрева учитывает релаксацию в терминах динамики недостающего объема, но в более общем случае, нежели [1]:

$$\frac{d}{dt} E(t) = -h(E_t), \tag{6}$$

где $h(E)$ — строго-монотонно возрастающая локально липшицева функция, характеризующая скорость восполнения объема. Видим, что [1] есть частный случай (6) при $h(E) = \alpha_2 E$. Отклонение $D(t)$ цены лучшей заявки от справедливой цены связано с $E(t)$ следующим соотношением:

$$D(t) = \psi(E(t)),$$

$$\psi(y) = \sup \{x \geq 0 \mid F(x) < y\}, \quad y > 0.$$

4 Обсуждение основных предположений

4.1 Временное влияние на цену

Вопрос о моделировании временного влияния активно обсуждается в современной литературе, но на данный момент не существует единого мнения на этот счет. Эффект временного влияния логично разделить на мгновенное влияние и релаксацию. Функцией мгновенного влияния назовем величину, на которую изменится лучшая цена сразу после исполнения сделки. Таким образом, рассматривается функция от объема сделки $f(v)$, где $v > 0$ соответствует покупке актива, $v < 0$ — продаже. Как было видно, большинство из рассмотренных работ предполагает линейную функцию влияния. Данное предположение неоднократно подвергалось критике и зачастую отвергается реальными данными. На рисунке 2 приведены графики $f(v)$ для разных моментов времени в течение одного торгового дня для акций ОАО «Лукойл» на бирже ММВБ. Видим, что поведение функции не обязательно линейно, могут наблюдаться выпуклая, вогнутая и выпукло-вогнутая формы. Объяснение и исследование класса возможных форм кривой зависит от модели динамики всей книги заявок. Микроструктурную модель, дающую обоснование приведенным формам кривой, можно найти, например, в [12].

4.2 Учет арбитражных возможностей

В сложных моделях, начиная с Обижаевой и Вана, рассматривалась лишь одна сторона книги заявок. Интерпретация данного предположения сводится к тому, что агент, управляющий позицией, имеет возможность либо покупать, либо продавать актив. Таким образом, модель применима лишь к частной задаче управления — открытию или ликвидации позиции.

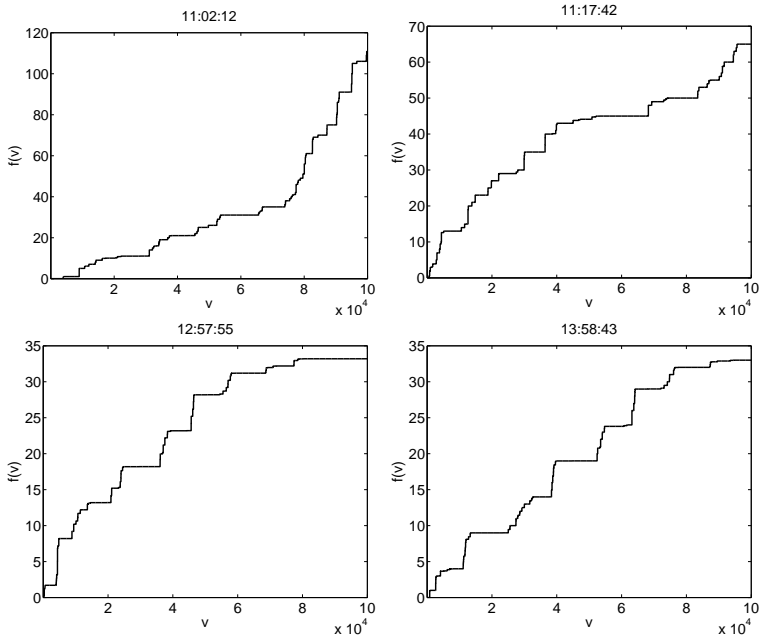


Рис. 2. Графики функции влияния $f(v)$ в зависимости от объема сделки для разных моментов времени в течение одного торгового дня.

Ограничение на стратегию агента может показаться слишком жестким, так как стратегия даже при открытии позиции может включать кратковременную продажу с целью извлечения дополнительной прибыли. С другой стороны, подобное ограничение обосновано по двум причинам:

1. продажа при необходимости покупки может рассматриваться как манипулирование рыночной ценой в личных интересах и введение рынок в заблуждение, что рассматривается регулятором как недопустимое поведение.
2. если задачей агента является не извлечение прибыли, а минимизация издержек при проведении операций, то совершение сделок противоположной направленности не со-

ответствует задаче агента.

Совместное рассмотрение двусторонней книги заявок и стратегий, допускающих покупку и продажу в рамках одной стратегии, накладывает дополнительные ограничения на динамику книги и функцию влияния $f(v)$. Связано это в первую очередь с принципом отсутствия арбитражных возможностей на рынке — фундаментальным принципом финансовой математики, говорящим о том, что невозможно извлечение безрисковой прибыли на конечном горизонте. Данное условие может быть формализовано различными способами и налагает дополнительные ограничения на функцию влияния. Не ограничивая общности, рассмотрим случай непрерывной торговли агента. Пусть x_t — объем позиции агента, при этом возможно открытие т. н. «короткой позиции», т. е. $x_t < 0$. В общем случае, модель динамики лучшей цены с релаксацией в непрерывном времени записывается в виде

$$D(t) = D(0) + \int_0^t f(\dot{x}_s)G(t-s) ds, \quad (7)$$

к которому сводятся модели [1, 3, 4, 10]. Издержки при торговле с использованием стратегии $X = x_t$, $t \in [0, T]$, равны

$$C(X) = \int_0^T \dot{x}_t dt \int_0^t f(\dot{x}_s)G(t-s) ds. \quad (8)$$

В работе [7] говорится, что рынок не должен допускать квази-арбитраж, т. е. не существует стратегии, не изменяющей объема позиции

$$X: \int_0^T \dot{x}_t dt = 0,$$

но приносящей положительный доход. Показано, что в рамках введенной микроструктурной модели данное ограничение влечет $f(v) = \kappa v$. Гатерал [5] накладывает на рынок более слабое

условие, говорящее об отсутствии динамического арбитража: для любой стратегии, не изменяющей объем позиции, издержки неотрицательны:

$$X: \int_0^T \dot{x}_t dt = 0 \Rightarrow C(X) \geq 0.$$

Условие является более слабым, нежели в [7], и является аналогом отсутствия статистического арбитража. В целом, оно говорит о том, что невозможно манипулирование ценой, т. е. влияние на цену при отсутствии фактической покупки или продажи актива. Таким образом, появляется дополнительное условие, устанавливающее связь между возможной функцией f и функцией затухания G , которую необходимо задавать априорно или калибровать на данных. В частности, при $G(t) \equiv 1$ (только постоянное влияние на цену) имеем результат, полученный также в [7]: $f(-v) = -f(v)$. Это означает, что заявки на обеих сторонах книги должны быть расположены симметрично, что чаще всего подтверждается данными.

4.3 Стационарность формы книги заявок

Модели [1, 2, 10, 11] построены для случая стационарной книги заявок. Необходимость данного предположения вызвана трудностью моделирования и прогнозирования структуры книги заявок. Итоговая форма является достаточно сложным математическим объектом — результатом совместной игры многих игроков, имеющих в общем случае индивидуальные адаптивные стратегии выставления лимитированных и рыночных заявок, а также обменивающихся информацией с различной частотой. Предположение о постоянстве формы, с одной стороны, позволяет свести динамику всего объекта к динамике одной характеристики (лучшей цены или недостающего объема). В то же время гипотеза оправдывает себя на небольшом горизонте для относительно ликвидных рынков. В этом случае

форма книги достаточно инерционна и не успевает существенно измениться. Тем самым накладывается естественное ограничение на применимость данного класса моделей — управление портфелем для короткого горизонта.

Создание динамической модели книги заявок является актуальной проблемой рыночной микроструктуры и активно обсуждается в литературе. На данный момент можно выделить два подхода к моделированию структуры книги. Один из них направлен на создание микроструктурной модели динамического равновесия рынка и определения стратегий игроков. Данный подход является фундаментальным и направлен на выявление процессов, задающих динамику рынка. Естественно, подобная модель опирается на многочисленные предположения, проверка которых на практике бывает затруднительна, обоснование предположений базируется в основном на наличии косвенных признаков. Пример подобной модели приведен, например, в [12].

Второе направление ставит своей задачей построение эмпирической модели, позволяющей с заданной точностью моделировать и предсказывать процессы на рынке. При этом основные предположения вытекают из анализа входных сигналов. Большинство подобных эмпирических моделей опирается на совместное моделирование интенсивностей прихода заявок определенного типа (например, приход лимитированной заявки на покупку/продажу, отмена заявки), а также объемов событий. Так, в [13] считается, что суммарный объем поступивших лимитированных и рыночных заявок в единицу времени постоянен во времени, вероятность отмены заявки считается стационарной и не зависит от времени. Хасбрук [6] предлагает моделировать совместное наступление событий k типов с помощью k -мерного пуассоновского процесса. Данный подход предполагает независимость протекающих процессов от предыстории, что может быть актуально только в случае отсутствия долгосрочной памяти в стратегиях игроков, например, на высоколиквид-

ном рынке, где информация о заявке мгновенно усваивается участниками. На практике зачастую наблюдаются лавинообразные всплески интенсивностей событий определенного вида. Для моделирования подобного рода эффектов Ларж [9] предложил использовать не пуассоновские потоки, а многомерный процесс Хокса (Hawkes process) $N(t)$, использующийся для моделирования хаотических лавинообразных явлений: $N(t)$ — k -мерный точечный процесс, интенсивность λ которого зависит от времени согласно следующей формуле:

$$\lambda(t; \theta) = \mu(t; \theta) + \int_0^t W(t - s; \theta) dN(s),$$

где θ — вектор параметров модели, $\mu(t; \theta): \mathbb{R}_+ \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+^k$ — детерминированная функция, позволяющая учитывать среднюю интенсивность наступления событий в течение дня, $W(t; \theta): \mathbb{R}_+ \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+^{k \times k}$ — детерминированная функция затухания. Процесс Хокса является, таким образом, самовозбуждающимся — каждое наступившее событие повышает вероятность наступления событий в будущем. Данный подход имеет много преимуществ, но требует сложной процедуры оценки вида неизвестных функций и калибровки параметров, что возможно лишь на достаточно ликвидных рынках. В остальных случаях необходимо вводить априорные предположения о классе функций и зависимостях между событиями.

5 Заключение

Были рассмотрены основные модели влияния на цену и связанные с ними смежные вопросы. Проведен анализ сделанных предположений и изучена взаимосвязь рассмотренных подходов. На основании рассуждений можно утверждать, что наиболее общей статической моделью, допускающей реально наблюдаемую форму книги заявок и учитывающей релаксацию,

является модель Шрева [11]. Принципиально другой подход к моделированию релаксации приведен в [2], где скорость восстановления вводится как характеристика рынка, не зависящая от событий, приведших к шоку. Также дана классификация подходов к динамическому моделированию книги заявок и приведены некоторые эмпирические модели, наиболее распространенные на данный момент.

Список литературы

- [1] Alfonsi A., Fruth A., Schied A. Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions // Quantitative Finance. — 2009. — Vol.10, 2. — pp.143 —157.
- [2] Alfonsi A., Schied A., Schulz A. Constrained portfolio liquidation in a limit order book model. — 2009. — Working paper.
- [3] Almgren R., Chriss N. Optimal execution of portfolio transactions // Journal of Risk. — 2001. — №1. — pp.5 —39.
- [4] Bertsimas D., Lo A. W. Optimal control of execution costs // Journal of Financial Markets. — 1998. — №1. — pp. 1 —50.
- [5] Gatheral J. No-Dynamic-Arbitrage and Market Impact // Quantitative Finance. — 2010. — №10. — pp. 749 —759.
- [6] Hasbrouck J. Trading fast and slow: security market events in real time // Working paper, Stern School of Business, New York University. — 1999.
- [7] Huberman G., Stanzl W. Price manipulation and quasiarbitrage // Econometrica. — 2004. — №72. — pp. 1247 —1275.
- [8] Kyle A. Continuous auctions and insider trading // Econometrica. — 1985. — №53. — pp. 1315 —1336.

-
- [9] Large J. Measuring the resiliency of an electronic limit order book // Journal of Financial Markets. — 2007. — Vol.10, 1. — pp.1 —25.
- [10] Obizhaeva A., Wang J. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics — 2005. — Available at SSRN: papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=686168.
- [11] Predoiu S., Shaikhet G., Shreve S. Optimal execution of a general one-sided limit-order book // SIAM Journal on Financial Mathematics. — 2011. — №2. — pp. 183 —212.
- [12] Rosu I. A dynamic model of the limit order book // Review of Financial Studies. — 2009. — Vol.22, 11. — pp. 4601 —4641.
- [13] Smith E., Farmer J. D., Gillemot L., Krishnamurthy S. Statistical theory of the continuous double auction // Quantitative Finance. — 2003. — №3(6). — pp. 481 —514.
- [14] Bank for International Settlements, 1999, «Market Liquidity: Research Findings and Selected Policy Implications», Bank for International Settlements – Monetary and Economic Department, Committee on the Global Financial System, Basel, May.