граммирования с линейными и выпуклыми квадратичными вспомогательными функциями $g(x)$.

Список литературы

[1] *Булатов В. П.* Методы погружения в задачах оптимизации. — Новосибирск: Наука, 1977.

[2] *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование. — М.: Сов. радио, 1973.

[3] *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1966. — Т. 6, № 5. — С. 787–823.

[4] *Немировский А. С., Юдин Д. Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. — М.: Наука, 1979.

[5] *Заботин И. Я.* Одна общая схема решения задачи математического программирования и ее использование в алгоритмах минимизации псевдовыпуклых функций // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Шестого Всероссийского семинара. — Казань: Казанский государственный университет, 2005. — С. 83–86.

[6] *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988.

Оценка числа графов в наследственных классах с запрещенными графами маленького порядка

В. А. Замараев

viktor.zamaraev@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Введение

Рассматриваются обыкновенные, помеченные графы с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$. Множество графов X называется *наследственным классом графов*, если любой граф, изоморфный порожденному подграфу графа из X, также принадлежит X. Известно [1], что для любого бесконечного наследственного класса графов X, отличного от класса всех графов, справедливо следующее соотношение:

$$\log_2 |X_n| = \left(1 - \frac{1}{c(X)}\right)\frac{n^2}{2} + o(n^2), \qquad (1)$$

где $c(X)$ — натуральное число, называемое индексом класса X, а X_n — множество всех n-вершинных графов из класса X. Множество классов, соответствующих определенному индексу, называется *слоем*. Так, множество классов с индексом, равным 1, образует *унитарный* слой. Для классов из унитарного слоя соотношение (1) не дает асимптотической оценки величины $\log_2 |X_n|$, знание которой важно, например, при экономном кодировании графов из класса X [2]. Для исследования поведения величины $\log_2 |X_n|$ для классов X из унитарного слоя используется понятие равновеликости. Два класса графов X и Y называются *равновеликими*, если существуют положительные числа c_1, c_2 и n_0, такие, что $|Y_n|^{c_1} \leqslant |X_n| \leqslant |Y_n|^{c_2}$ для любого $n > n_0$. Очевидно, что равновеликость является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности на множестве наследственных классов графов называются *ярусами*. Унитарный слой состоит из бесконечного числа ярусов.

В [3] были выделены первые четыре яруса унитарного слоя, для которых $\log_2 |X_n|$ по порядку совпадает с 1, $\log n$, n, $n \log n$. Эти ярусы называются константным, полиномиальным, экспоненциальным и факториальным, соответственно. В каждом из четырех этих ярусов найдены все минимальные элементы [4]. Кроме того, для первых трёх ярусов в [4] дана полная структурная характеризация. Факториальный ярус является наименьшим, для которого такой характеризации неизвестно. В то же время этому ярусу принадлежат многие известные классы: рёберные графы, интервальные графы, леса, планарные графы, кографы и др.

Данная работа является логическим продолжением исследования факториального яруса, начатого в работах [5, 6].

Основные результаты

Хорошо известно, что любой наследственный класс графов X можно определить с помощью множества M запрещённых порожденных подграфов, при этом принято писать, что $X = Free(M)$. В [5, 6] исследование факториального яруса начато с изучения конечноопределённых классов, то есть таких, у которых множество запрещённых подграфов конечно. До сих пор класс $Free(\{K_{1,3}, C_4\})$ был единственным классом, определяемым двумя запрещенными подграфами с четырьмя вершинами, для которого вопрос о принадлежности факториальному ярусу был открыт. В данной работе дается ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Класс* $Free(\{K_{1,3}, C_4\})$ *является факториальным.*

Этот результат в совокупности с результатами работ [5, 6] позволяет выделить все факториальные классы, у которых множество запрещённых подграфов состоит из графов с не более чем четырьмя вершинами. Обозначим через $\mathcal{B}, \overline{\mathcal{B}}, \mathcal{S}$ класс двудольных, кодвудольных и расщепляемых графов соответственно.

Теорема 2. *Пусть* M *— множество графов с числом вершин не более четырёх и* $Free(M)$ *— не менее чем факториальный класс.* $Free(M)$ *факториальный тогда и только тогда, когда ни одно из следующих множеств не пусто:* $M \cap \mathcal{B}$, $M \cap \overline{\mathcal{B}}$, $M \cap \mathcal{S}$, $M \cap Free(\{C_4, K_3\})$, $M \cap Free(\{\overline{C_4}, \overline{K_3}\})$.

Список литературы

[1] *Алексеев В. Е.* Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, № 2. — С. 148–157.

[2] *Алексеев В. Е.* Наследственные классы и кодирование графов // Проблемы кибернетики. Вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 151–164.

[3] *Scheinerman E. R., Zito J.* On the size of hereditary classes of graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1994. — V. 61. — P. 16–39.

[4] *Алексеев В. Е.* О нижних ярусах решётки наследственных классов графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Серия 1. — 1997. — Т. 4. — С. 3–12.

[5] *Замараев В. А.* Оценка числа графов в некоторых наследственных классах // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 1–6 февраля 2010). — С. 301–303.

[6] *Алексеев В. Е., Замараев В. А., Лозин В. В., Мэйхил К.* Некоторые факториальные классы графов, определяемые двумя запрещёнными графами // Тезисы докладов XV Нижегородской сессии молодых ученых — математические науки (Красный плес, 25–28 мая 2010). — С. 16–17.