ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2012. Том 19, № 3. С. 58–64

УДК 519.178

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ В КЛАССЕ ГРАФОВ БЕЗ ПОРОЖДЁННЫХ ПРОСТЫХ ПУТИ И ЦИКЛА С ПЯТЬЮ ВЕРШИНАМИ И БОЛЬШОЙ КЛИКИ *)

Д. С. Малышев

Аннотация. Предлагается алгоритм, определяющий число независимости n-вершинного графа из класса $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_p\})$ за время $O(n^{p+O(1)})$.

Ключевые слова: задача о независимом множестве, вычислительная сложность, эффективный алгоритм.

Введение

Независимым множеством в обыкновенном графе называется множество попарно не смежных вершин. Независимое множество называется *наибольшим*, если оно содержит максимальное количество вершин. Размер наибольшего независимого множества графа G называется *числом независимости* и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* для данного графа состоит в нахождении его наибольшего независимого множества. Хорошо известно, что задача о независимом множестве полиномиально эквивалентна задаче вычисления числа независимости. Для краткости задачу о независимом множестве будем называть задачей НМ. Хорошо известно, что эта задача NP-полна в классе всех графов и остаётся таковой даже при значительных сужениях этого класса графов. В то же время известны и некоторые «области эффективности», т. е. классы графов, для которых задача о независимом множестве имеет полиномиальную сложность.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ (грант правительства РФ, дог.11.G34.31.0057), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11–01–00107 и 12–01–00749–а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.» (гос. контракт № 16.740.11.0310).

Класс графов $\mathcal{X}$ называется *наследственным*, если он замкнут относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный класс (и только наследственный класс) графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{S}$. В этом случае принята запись $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S})$.

Если $|V(G)| \leqslant 4$, то сложностной статус задачи НМ в классе $\mathrm{Free}(\{G\})$ известен. Именно, задача НМ полиномиальна для графов из этого класса тогда и только тогда, когда G — лес. Более того, среди всех связных графов G с пятью вершинами случай простого пути является единственным, для которого статус задачи НМ в классе $\mathrm{Free}(\{G\})$ остаётся открытым вопросом [9]. Имеются многочисленные примеры работ, в которых к графу P_5 добавляется один или несколько других запрещённых порождённых подграфов и доказывается полиномиальная разрешимость задачи НМ для полученного класса [2–10]. Доказано, что для любого графа G с не более чем пятью вершинами, отличного от P_5 и C_5, в классе графов $\mathrm{Free}(\{P_5, G\})$ задача НМ полиномиально разрешима [9]. Вопрос для класса $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5\})$ пока остаётся открытым. Имеется ряд результатов о собственных подклассах класса $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5\})$ с полиномиально разрешимой задачей НМ.

Основной результат этой работы — доказательство полиномиальной разрешимости задачи о независимом множестве для бесконечного семейства наследственных подклассов вида $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_p\})$, $p>2$, класса $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5\})$. Именно, для любого n-вершинного графа из $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_p\})$ задача НМ может быть решена за время $O(n^{p+O(1)})$. Отметим, что для любого $p > 2$ задача НМ NP-полна в классе графов $\mathrm{Free}(\{C_5, K_p\})$, и её вычислительный статус в $\mathrm{Free}(\{C_5, K_p\})$ неизвестен.

Используются следующие обозначения:

$P_k = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — простой путь с k вершинами такой, что

$$(x_1, x_2) \in E(P_k), (x_2, x_3) \in E(P_k), \ldots, (x_{k-1}, x_k) \in E(P_k),$$

$G \setminus S$ — граф, получаемый удалением из G всех вершин, принадлежащих $S \subseteq V(G)$, $S_k(x)$ — множество вершин графа, отстоящих от x в точности на расстоянии k.

1. Результаты работы

Будем говорить, что вершина a *смежно поглощает* вершину b, если вершины a и b смежные и $N(b)\setminus\{a\} \subseteq N(a)\setminus\{b\}$. Значение этого понятия состоит в том, что при удалении любой смежно поглощающей вершины из графа не изменяется число независимости.

Лемма 1 [1]. *Если a — смежно поглощающая вершина в графе G, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{a\})$.*

Из леммы 1 следует, что задача НМ для любого наследственного класса полиномиально сводится к той же задаче для *несжимаемых* графов из этого класса, т. е. графов без смежно поглощающих вершин.

Лемма 2. *В графе $G \in \mathrm{Free}(\{P_5, C_5\})$, содержащем порождённый путь $P_3 = (x, y, z)$, либо $N(x) \subseteq N(y) \cup N(z)$, либо $N(z) \subseteq N(y) \cup N(x)$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существуют такие вершины u и v, что $u \in N(x) \setminus (N(y) \cup N(z))$ и $v \in N(z) \setminus (N(x) \cup N(y))$. Тем самым вершины u, x, y, z, v порождают в G либо подграф P_5 (если $(u, v) \notin E(G)$), либо подграф C_5 (если $(u, v) \in E(G)$); противоречие. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что в несжимаемом графе без порождённых подграфов P_5 и C_5, содержащем простой путь P_3, можно так обозначить вершины этого пути переменными x, y, z, что вершина y будет смежна с вершинами x, z и выполняется включение $N(x) \setminus N(y) \supseteq N(z) \setminus N(y)$. Дополнительно к выполнению этого условия далее будем всегда предполагать, что для рассматриваемого пути P_3 множество $N(x) \cup N(y) \cup N(z)$ имеет наибольшую мощность.

Лемма 3. *Для любых несжимаемого графа $G \in \mathrm{Free}(\{P_5, C_5\})$, содержащего порождённый путь $P_3 = (x, y, z)$, и вершины $v \in N(x) \setminus (N(y) \cup \{y\})$ выполнено включение*

$$N(v) \subseteq N(x) \cup N(y) \cup N(z).$$

Доказательство. Предположим, что для $v \in N(x) \setminus (N(y) \cup \{y\})$ существует смежная с ней вершина $u \notin N(x) \cup N(y) \cup N(z)$. Поскольку $N(x) \setminus N(y) \supseteq N(z) \setminus N(y)$, имеем

$$N(x) \cup N(y) \supseteq N(x) \cup N(y) \cup N(z).$$

Вместе с тем вершины y, x, v образуют порождённый путь P_3 и $u \in N(v) \setminus (N(x) \cup N(y) \cup N(z))$. Поэтому

$$N(x) \cup N(y) \cup N(v) \supset N(x) \cup N(y) \cup N(z),$$

т. е. выбранный путь P_3 доминирует не максимальное число вершин; противоречие с выбором P_3. Значит, предположение неверно. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что множество

$$\Phi = \{u \mid u \text{ находится на расстоянии 2 от } x,\\ \exists v \in N(x) \setminus (N(y) \cup \{y\}) :\ (u, v) \in E(G)\}$$

является подмножеством множества $N(y)$. Действительно, по лемме 3 $\Phi \subseteq N(x) \cup N(y) \cup N(z)$. Вместе с тем, ни один элемент из Φ не принадлежит множеству $N(x)$ и $N(z) \subseteq N(x) \cup N(y)$, поэтому $\Phi \subseteq N(y)$. Таким образом, каждая смежная с x вершина $u \neq y$ либо сама смежна с y, либо все смежные с ней вершины смежны с y.

Лемма 4. *Для любого несжимаемого графа $G \in \mathrm{Free}(\{P_5, C_5\})$, содержащего порождённый путь (x, y, z), имеет место включение*

$$N(y) \subseteq N(x) \cup \Phi \cup N(z).$$

Доказательство. Предположим, напротив, что существует вершина $v \in N(y)$, не принадлежащая множеству $N(x) \cup \Phi \cup N(z)$. При этом, поскольку граф G несжимаемый, существуют вершины $u \in N(x) \setminus N(y)$ и w, отстоящая от y на расстоянии 2, такая, что $(v, w) \in E(G)$. Вершины u и w не могут совпадать, так как в противном случае $v \in \Phi$. По тем же причинам вершины u и v несмежны. Поэтому совокупность $\{u, x, y, v, w\}$ порождает в G либо подграф P_5, либо подграф C_5 (в зависимости от смежности вершин u и w). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для любого несжимаемого графа $G \in \mathrm{Free}(\{P_5, C_5\})$, содержащего порождённый путь (x, y, z), выполнено включение*

$$\Psi = \{u \mid u \neq y,\ u \neq z,\ \exists v \in (N(y) \cap N(z)) \setminus N(x) :\\ (u, v) \in E(G),\ (y, u) \notin E(G)\} \subseteq N(x).$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует вершина u, не смежная с x и y (следовательно, отличная от x и y) и смежная с вершиной $v \in (N(y) \cap N(z)) \setminus N(x)$. Ясно, что вершина u не может быть смежна с вершиной z, так как иначе $N(x) \setminus N(y) \supseteq N(z) \setminus N(y)$. Вершина v в графе G не смежна с x, поэтому вершины x, y, v порождают в G путь P_3. Поскольку $N(x) \setminus N(y) \not\supseteq N(z) \setminus N(y)$, имеем

$$N(x) \cup N(y) \cup N(z) = N(x) \cup N(y).$$

Вместе с тем $u \in N(v) \setminus (N(x) \cup N(y))$ и поэтому

$$N(x) \cup N(y) \cup N(v) \supset N(x) \cup N(y) \cup N(z).$$

Получили противоречие с выбором пути (x, y, z). Таким образом, предположение неверно. Лемма 5 доказана.

Пусть G — связный несжимаемый граф из класса $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_p\})$, содержащий путь (x, y, z). Рассмотрим граф H, получающийся из G удалением вершины y и её окрестности. Из лемм 3 и 5 следует, что H представляется в виде объединения двух графов H_1 и H_2 с непересекающимися множествами вершин. Совокупность вершин графа H_1 образуют вершины G, смежные с x и не принадлежащие множеству $N(y) \cup \{y\}$. Граф H_2 образуют остальные вершины H. Поскольку все вершины H_1 в G смежны с вершиной x и G не содержит полного графа с p вершинами, $H_1 \in \mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_{p-1}\})$. Покажем, что и $H_2 \in \mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_{p-1}\})$.

Лемма 6. *Граф H_2 не содержит порождённой клики K_{p-1}.*

Доказательство. Предположим напротив, что граф H_2 содержит клику K_{p-1}. В графе G рассмотрим кратчайший путь P среди всевозможных путей, соединяющих вершину клики и вершину из окрестности y. Ясно, что этот путь содержит только одну вершину u из $N(y)$ (ввиду того, что P кратчайший). Путь P содержит вершину $v \neq u$, принадлежащую клике K_{p-1}. Существует вершина w этой клики, не смежная ни с одной вершиной пути, кроме v, поскольку противное означало бы, что либо G содержит порождённую клику K_p, либо путь P не является кратчайшим. Длина пути P не больше 1, так как иначе в множестве вершин $V(P) \cup \{y, w\}$ найдутся пять вершин, порождающих в G подграф P_5. Таким образом, путь P образуют вершины u и v.

Напомним, что в силу следствия из леммы 3 каждая смежная с x вершина $u \neq y$ либо сама смежна с y, либо все смежные с ней вершины смежны с y. Вместе с тем $N(y) \cap V(K_{p-1}) = \varnothing$. Поэтому ни вершина x, ни одна из вершин её окрестности не смежна ни с одной вершиной из $V(K_{p-1})$. Ясно также, что z не смежна ни с одной вершиной клики K_{p-1}.

Покажем, что вершина u смежна с вершинами x и z и что ни одна из вершин клики K_{p-1} не смежна ни с одной вершиной из Φ. Тогда $u \notin \Phi \cup (N(y) \cap N(z)) \setminus N(x)$ ввиду леммы 5. Если существует не смежная с u вершина $a \in \{x, z\}$, то G содержит порождённый множеством вершин $\{a, y, u, v, w\}$ путь P_5. Поэтому такой вершины a нет. Если существует вершина $b \in \Phi$, смежная с вершиной $v' \in V(K_{p-1})$, то эта клика содержит вершину w', с которой b несмежна. Но тогда граф G содержит порождённый вершинами w', v', b, y, x путь P_5. Поэтому такой вершины b нет.

Покажем, наконец, что каждая вершина из $\Phi \cup N(x) \setminus N(y)$ смежна с u.

Если существует не смежная с u вершина $x' \in N(x) \setminus N(y)$, то в графе G вершины x', x, u, v, w порождают путь P_5. Поэтому все вершины из $N(x) \setminus N(y)$ смежны с u. Если существует не смежная с u вершина $x'' \in \Phi$, то в графе G вершины x'', x', u, v, w порождают путь P_5, где x' — смежная с x'' вершина из $N(x) \setminus N(y)$.

Таким образом, $\Phi \subseteq N(u)$ и по лемме 4 $N(y) \subseteq N(x) \cup N(z) \cup \Phi$. Значит, $N(y) \subseteq N(x) \cup N(u) \cup N(z)$. Вместе с тем $v \in N(u) \setminus (N(x) \cup N(y) \cup N(z))$. Следовательно, $N(x) \cup N(u) \cup N(z) \supset N(x) \cup N(y) \cup N(z)$, но это включение противоречит выбору пути $P_3 = (x, y, z)$, так как вершины x, u, z порождают в G более экстремальный путь (x, u, z). Таким образом, предположение неверно. Лемма 6 доказана.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Задача НМ для любого графа с n вершинами из класса* $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_p\})$ *может быть решена за время $O(n^{p+C})$, где C — константа, не зависящая от n и p.*

Доказательство. Отметим, что каждая компонента связности произвольного графа из класса $\mathrm{Free}(\{P_3\})$ является кликой. Поэтому задача НМ для графов из этого класса решается за квадратичное от числа вершин время. Вместе с тем для некоторой натуральной константы C' общее время сведения n-вершинного входного графа из $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_p\})$ к его несжимаемому подграфу (посредством удаления смежно поглощающих вершин), дальнейшее выделение компонент связности подграфа, поиск экстремальных путей P_3 в компонентах (содержащих P_3) и решение задачи НМ для компонент без порождённого P_3 выполняется за время $O(n^{C'})$. Пусть G — какая-нибудь компонента, содержащая экстремальный путь $P_3 = (x, y, z)$. Понятно, что

$$\alpha(G) = \max(\alpha(G \setminus \{y\}), \alpha(G \setminus N(y))).$$

По лемме 6 граф $G \setminus N(y)$ принадлежит классу $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_{p-1}\})$.

Пусть $T(n, p)$ — максимальное время поиска числа независимости для графов с n вершинами из $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_p\})$. Эта функция монотонна по обоим аргументам и поэтому

$$T(n, p) \leqslant T(n-1, p) + T(n, p-1) + O(n^{C'}).$$

Значит,

$$\sum_{i=2}^{n} (T(i, p) - T(i-1, p)) \leqslant \sum_{i=2}^{n} T(i, p-1) + O\left(\sum_{i=2}^{n} i^{C'} \right).$$

Ввиду монотонности функции $T(n,p)$

$$T(n,p) - T(1,p) \leqslant nT(n,p-1) + O(n^{C'+1}),$$

т. е. $T(n,p) \leqslant nT(n,p-1) + O(n^{C'+1})$. Применив последнее неравенство нужное число раз, получаем, что

$$T(n,p) \leqslant n^{p-5}T(n,5) + O(n^{C'+p-5}).$$

Задача НМ для графов из класса $\mathrm{Free}(\{P_5, C_5, K_5\})$ решается за полиномиальное время, поэтому для некоторой натуральной константы C'' выполняется $T(n,5) \in O(n^{C''})$. Значит,

$$T(n,p) \in O\bigl(n^{p+C}\bigr), \quad C = \max(C'-5, C''-5).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Таланов В. А.** Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений. — М.: Изд-во «ИНТУИТ.ру», 2006. — 320 с.
2. **Arbib C., Mosca R.** On $(P_5, \mathit{diamond})$-free graphs // Discrete Math. — 2002. — Vol. 250. — P. 1–22.
3. **Brandstadt A., Mosca R.** On the structure and stability number of P_5- and co-chair-free graphs // Discrete Appl. Math. — 2003. — Vol. 132. — P. 47–65.
4. **Brandstadt A., Le H.-O., Mosca R.** Chordal co-gem-free and (P_5, gem)-free graphs have bounded clique-width // Discrete Appl. Math. — 2005. — Vol. 145, N 2. — P. 232–241.
5. **Lozin V., Mosca R.** Maximum independent sets in subclasses of P_5-free graphs // Inf. Process. Lett. — 2009. — Vol. 109, N 6. — P. 319–324.
6. **Mosca R.** Polynomial algorithms for the maximum stable set problem on particular classes of P_5-free graphs // Inf. Process. Lett. — 1997. — Vol. 61, N 3. — P. 137–143.
7. **Mosca R.** Stable sets in certain P_6-free graphs // Discrete Appl. Math. — 1999. — Vol. 92. — P. 177–191.
8. **Mosca R.** Some results on maximum stable sets in certain P_5-free graphs // Discrete Appl. Math. — 2003. — Vol. 132. — P. 175–183.
9. **Mosca R.** Some observations on maximum weight stable sets in certain P // Eur. J. Oper. Res. — 2008. — Vol. 184, N 3. — P. 849–859.
10. **Simone C. D., Mosca R.** Stable set and clique polytopes of (P_5, gem)-free graphs // Discrete Math. — 2007. — Vol. 307, N 22. — P. 2661–2670.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
1 августа 2011 г.