Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.1, с. 32–54

УДК 519.83
ББК 22.18

РЕШЕНИЕ ОДНОШАГОВОЙ ИГРЫ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ*

Марина С. Сандомирская
Виктор К. Доманский
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, д. 1
e-mail: sandomirskaya_ms@mail.ru, doman@emi.nw.ru

Исследуется модель однократных биржевых торгов между двумя различно информированными рыночными агентами (игроками) за одну рисковую ценную бумагу (акцию). Случайная ликвидная цена акции может принимать два значения: положительное целое m с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$. Цена известна Игроку 1 (инсайдеру). Оба игрока знают вероятность p. Игрок 2 осведомлен о том, что Игрок 1 является инсайдером. Игроки одновременно делают ставки и тот, чья ставка выше, покупает за эту цену акцию у соперника. Допустимы любые целочисленные ставки. Модель сводится к антагонистической игре с неполной информацией. Получено решение этой игры при любых p и m: найдены оптимальные стратегии игроков, разработан рекурсивный механизм нахождения значения игры. Результаты проиллюстрированы с помощью компьютерного моделирования.

Ключевые слова: биржевые торги, асимметричная информация, выравнивающие стратегии, оптимальные стратегии.

* Работа поддержана грантом РФФИ 10-06-00348-а

1. Введение

В статье Де Мейера и Салей [5] вводится упрощенная модель биржевых торгов рисковыми ценными бумагами (акциями) с различной информированностью агентов о ликвидной цене торгуемого актива.

Случайная ликвидная цена акции, которая может принимать два значения – высокое и низкое, определяется «состоянием природы». Перед началом торга случайный ход определяет состояние природы и, тем самым, ликвидную цену акции. Вероятность p выбора высокой цены акции известна обоим игрокам. Помимо этого, Игрок 1 (инсайдер) получает информацию об исходе случайного хода, Игрок 2 этой информацией не обладает. Игрок 2 знает об осведомленности Игрока 1.

На каждом шаге торгов оба игрока одновременно и независимо предлагают некоторую сумму денег за акцию. Игрок, предложивший большую цену, приобретает у оппонента акцию по этой цене. После этого ставки объявляются обоим игрокам. Игроки помнят историю наблюдения ставок на всех предыдущих этапах торга. Задачей игроков является максимизация приращения стоимости своего итогового портфеля (деньги плюс акции по их ликвидной цене).

Де Мейер и Салей сводят модель к повторяющейся игре с нулевой суммой с неполной информацией и, решая эту игру при любом конечном числе шагов, описывают оптимальное поведение обоих игроков и ожидаемую прибыль инсайдера.

В модели Де Мейера и Салей допустимы произвольные вещественные ставки.

Представляется более реалистичным допускать в модели дискретные ставки, пропорциональные денежной единице, в которой ведутся торги. В работах [1, 6] рассматриваются n-шаговые игры торгов $G_n^m(p)$ с высоким значением цены, равным целому положительному m, и низким значением, равным нулю и с целочисленными допустимыми ставками. Решение n-шаговой игры оказывается комбинаторно чрезвычайно сложным. Получено решение игры $G_\infty^m(p)$ неограниченной продолжительности.

Решение конечно-шаговых игр торгов с дискретными допустимыми ставками остается открытой проблемой. Решение известно лишь при малой, не превосходящей три разности между высокой и низкой ценами акции ($m \leq 3$) [4].

В настоящей работе при произвольном фиксированном значении высокой цены акции m дается решение одношаговой игры торгов $G_1^m(p)$ для всех вероятностей p.

На основе анализа структуры ставок, используемых игроками в оптимальных стратегиях при различных p, разработан рекурсивный подход к вычислению оптимальных стратегий неинформированного игрока для всех вероятностей p. Грубо говоря, рекурсия проводится по числу чистых стратегий, которые неинформированный Игрок 2 использует в своей оптимальной смешанной стратегии.

Оптимальная стратегия инсайдера выравнивает спектр найденной оптимальной стратегии Игрока 2, функция распределения весов в ней найдена как решение системы разностных уравнений, полученных из условий выравнивания. Базой для расчета элементов решений служат решения на «краях» отрезка $[0,1]$: при вероятностях p достаточно близких к нулю или единице, игра решается в чистых стратегиях. При отдалении до некоторого уровня этой вероятности от нуля или от единицы в оптимальных смешанных стратегиях игроков появляются две чистые стратегии и так далее.

В работе [3] приведен иной способ получения решения одношаговой игры торгов, который дает решение лишь для значений p, принадлежащих счетному, зависящему от m подмножеству отрезка $[0,1]$.

Стоит отметить, что выбор модели во многом определяется математическими особенностями постановки. Ряд модельных предположений не носит принципиальных ограничений (таких как наличие двух игроков, двух состояний природы, одной акции), пути их преодоления показаны в ряде работ В.К. Доманского и В.Л. Крепс.

В настоящее время нами начата разработка моделей, в которых игрокам позволено назначать различные цены покупки и продажи акции. Эти исследования показывают, что решение данной базовой одношаговой модели составляет необходимую основу для дальнейшего развития теоретико-игровых моделей торгов и их конструктивного уточнения.

2. Модель одношагового торга с произвольными ставками

В этом разделе мы приводим явное решение одношаговой игры торгов $G_1(p)$ с произвольными допустимыми ставками. Для упрощения формул высокую цену акции (состояние L) будем полагать равной единице ($m = 1$). Из результата работы [5] следует равенство для значения одношаговой игры $V_1(p) = p(1-p)$ и неявная форма для оптимальных стратегий игроков в игре $G_1(p)$.

Отметим, что оптимальная стратегия Игрока 1 при любой априорной вероятности p должна предписывать выбор действия 0 в состоянии L и рандомизацию действий в состоянии H. Это наблюдение позволяет свести решение одношаговой игры $G_1(p)$ с неполной информацией к решению игры на единичном квадрате с функцией выигрыша

$$K_p(x,y) = \begin{cases} (1-p)y + p(1-x) & \text{при } x > y\,, \\ (1-p)y & \text{при } x = y\,, \\ (1-p)y - p(1-y) & \text{при } x < y\,. \end{cases}$$

Применяя для решения этой игры известные эвристические методы решения игр на единичном квадрате с функцией выигрыша, имеющей разрыв на главной диагонали [2], мы получаем как стратегию информированного Игрока 1, так и стратегию неинформированного Игрока 2. Затем в Теореме 2.1 мы устанавливаем оптимальность этих стратегий.

Одной и той же буквой будем обозначать смешанную стратегию игрока и соответствующую ей функцию распределения: F_p – смешанная стратегия Игрока 1 и G_p – смешанная стратегия Игрока 2. Выпишем выигрыш Игрока 1 при применении им смешанной стратегии F_p и чистой стратегии y Игроком 2:

$$K_p(F_p, y) = (1-p)y - p(1-y)F_p(y) + p(1 - F_p(y)) - \int_y^1 x dF_p(x)\,.$$

Из общей теории [2] следует, что оптимальная стратегия Игрока 1 должна быть выравнивающей для точек спектра оптимальной стратегии Игрока 2.

В предположении, что оптимальные стратегии игроков имеют один и тот же спектр, продифференцировав функцию $K_p(F_p, y)$ по y и приравняв нулю производную, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dF_p(x)}{dx} 2p(1-x) = pF_p(x) + (1-p)\,. \tag{2.1}$$

Естественно полагать $F_p(0) = 0$. Тогда уравнение (2.1) приводит к решению

$$F_p^*(x) = \frac{1-p}{p}((1-x)^{-1/2} - 1) \text{ при } x \in [0, 1-(1-p)^2] .$$

Проведем аналогичные рассуждения для смешанной стратегии G_p Игрока 2, получаем

$$G_p^*(y) = \frac{1-p}{\sqrt{1-y}}, \text{ при } y \in [0, 1-(1-p)^2] .$$

Заметим, что при этой стратегии неинформированный Игрок 2 выбирает ставку 0 с положительной вероятностью, $G_p^*(0) = 1-p$.

Теорема 2.1. *В состоянии L оптимальная стратегия Игрока 1 предписывает выбор действия 0. В состоянии H она предписывает рандомизацию действий в соответствии с зависящей от p функцией распределения на отрезке $[0,1]$*

$$F_p^*(x) = \begin{cases} \frac{(1-p)(1-\sqrt{1-x})}{p\sqrt{1-x}} & \textit{при } x \le (1-(1-p)^2) , \\ 1 & \textit{при } x > (1-(1-p)^2) . \end{cases}$$

Оптимальная стратегия Игрока 2 предписывает рандомизацию действий в соответствии с функцией распределения

$$G_p^*(y) = \begin{cases} \frac{1-p}{\sqrt{1-y}} & \textit{при } y \le (1-(1-p)^2) , \\ 1 & \textit{при } y > (1-(1-p)^2) . \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно проверить, что стратегия F_p^* Игрока 1 является выравнивающей для точек спектра стратегии G_p^* Игрока 2, то есть для всех $y \in [0, 1-(1-p)^2]$ величина $K_p(F_p^*, y)$ постоянна и гарантирует Игроку 1 выигрыш $p(1-p)$.

Доказательство для стратегии G_p^* проводится аналогично. □

Замечание 2.1. Непрерывное распределение, соответствующее оптимальной стратегии Игрока 1 в случае высокой цены акции и непрерывная часть распределения, соответствующего оптимальной стратегии Игрока 2, имеют один и тот же спектр $(0, 1-(1-p)^2)$ и одинаковые с точностью до коэффициента плотности вида

$$(1-x)^{-3/2}.$$

Замечание 2.2. При переходе к модели с высокой ценой акции, равной m, изменив масштаб, получаем формулу для значения игры

$$V_1(p) = m \cdot p(1-p)\,,$$

следующие выражения для функций распределения: для оптимальной стратегии Игрока 1 в состоянии H

$$F_p^*(x) = \begin{cases} \frac{(1-p)(\sqrt{m}-\sqrt{m-x})}{p\sqrt{m-x}} & \text{при } x \le m(1-(1-p)^2)\,, \\ 1 & \text{при } x > m(1-(1-p)^2)\,, \end{cases}$$

для оптимальной стратегии Игрока 2

$$G_p^*(y) = \begin{cases} \frac{(1-p)\sqrt{m}}{\sqrt{m-y}} & \text{при } y \le m(1-(1-p)^2)\,, \\ 1 & \text{при } y > m(1-(1-p)^2)\,. \end{cases}$$

Плотности (одинаковые с точностью до коэффициента) этих распределений, имеющих один и тот же спектр $(0, m(1-(1-p)^2))$, приобретают вид

$$(m-x)^{-3/2}.$$

3. Модель одношаговых торгов с целочисленными ставками

По сравнению с моделью Де Мейера меняется масштаб: в состоянии природы H акция имеет высокую цену, равную целому положительному числу m, в состоянии L цена акции равна нулю.

В рассматриваемой нами модели допустимы любые целочисленные ставки, пропорциональные денежной единице, в которой ведутся торги. Осмысленными являются только ставки $0, 1, \ldots, m-1$.

Эта модель описывается антагонистической игрой $G_1^m(p)$ с неполной информацией у второго игрока. Пространство состояний $S = \{L, H\}$, множества действий обоих игроков $I = J = \{0, 1, \ldots, m–1\}$.

В состоянии L (ликвидная цена акции равна 0) выигрыши инсайдера задаются матрицей $A^{L,m}$

$$A^{L,m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & m-1 \\ -1 & 0 & 2 & \ldots & m-1 \\ -2 & -2 & 0 & \ldots & m-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ -m+1 & -m+1 & -m+1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

При высокой ликвидной цене акции, т.е. в состоянии природы H, матрица выигрышей инсайдера $A^{H,m}$

$$A^{H,m} = \begin{pmatrix} 0 & -m+1 & -m+2 & \dots & -1 \\ m-1 & 0 & -m+2 & \dots & -1 \\ m-2 & m-2 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Строки – это ставки Игрока 1, причем нумерация начинается с нулевой ставки, столбцы – ставки Игрока 2.

Очевидно, что при выборе случаем низкой ликвидной цены акции инсайдер делает ставку 0 при любой вероятности p, а при высокой ликвидной цене акции инсайдер не ставит 0 ни в каком случае. Поэтому в дальнейшем нас будет интересовать стратегия первого игрока в состоянии H.

Стратегия второго игрока не зависит от состояния природы.

Эти наблюдения позволяют свести решение игры $G_1^m(p)$ с неполной информацией к решению игры с полной информацией с матрицей выигрышей инсайдера

$$A^m(i,j) = \begin{cases} (1-p)j + p(m-i), & i > j\,, \\ (1-p)j, & i = j\,, \\ (1-p)j + p(-m+j), & i < j\,, \end{cases}$$

где $i \in I$ – ставка инсайдера в состоянии H, $j \in J$ – ставка неинформированного игрока.

Матрица выигрышей инсайдера в состоянии L свелась к более простому виду

$$A^{L,m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m-1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^m записывается в компактном виде:

$$A^m(p) = A^{L,m} \cdot (1-p) + A^{H,m} \cdot p\,.$$

Обозначим через $V_1^m(p)$ значение игры $G_1^m(p)$, т. е. ожидаемый выигрыш инсайдера, через $v^{H,m}$ и $v^{L,m}$ – его выигрыши в состояниях природы H и L соответственно:

$$V_1^m(p) = v^{L,m} \cdot (1-p) + v^{H,m} \cdot p\,.$$

Логика построения оптимальных стратегий обоих игроков в зависимости от вероятности выбора высокой цены следующая: при возрастании p ставки обоих игроков тоже растут. Так при малых, близких к нулю p, ставки обоих игроков минимальны. При увеличении p рост ставок обеспечивает расширение спектра выбираемых стратегий.

При p близких к $1/2$ у второго игрока наибольшая неопределенность, а значит, наибольший спектр ставок. Неопределенность минимальна при p близких к нулю или единице.

Из общей теории игр с неполной информацией следует, что функция значения игры $V_1^m(p)$ является вогнутой кусочно-линейной с конечным числом промежутков линейности. Более того, на каждом из этих промежутков оптимальная стратегия неинформированного игрока постоянна.

Начнем с p близких к нулю. Тогда (из соображений доминирования) имеется ситуация равновесия в чистых стратегиях, и оптимальной стратегией Игрока 2 будет ставка 0, а первого – ставка 1.

При увеличении вероятности p выбора высокой цены акции, начиная с некоторого p_1, ставка 1 второго игрока перестает доминироваться. Тогда Игроку 2 целесообразно включить в спектр своих действий ставку 1, а первому рандомизировать ставки 1 и 2. Вероятность p_1, при которой Игрок 2 меняет свою стратегию, и есть первая точка излома функции $V_1^m(p)$.

Неинформированный игрок на каждом этапе выравнивает выигрыши инсайдера при использовании инсайдером определенного набора ставок, исключая нулевую. Следя за изменениями наборов используемых ставок одним из игроков (что приводит к смене стратегии Игрока 2), мы получаем точки излома кусочно-линейной функции $V_1^m(p)$.

Аналогичным образом при p близких к 1 добавляются ставки, начиная с наибольшей $m-1$. Это позволяет найти все точки излома функции $V^m(p)$ на $[0,1]$.

4. Анализ используемых игроками ставок

Рассмотрим подробно вероятности, лежащие, грубо говоря, в первой половине отрезка $[0,1]$. Проанализируем оптимальное поведение игроков для этих вероятностей.

Фиксируем вероятность p. Будем обозначать через x стратегии инсайдера, через y стратегии Игрока 2.

Вероятность (вес), с которой игрок использует ставку i в данной стратегии, обозначим через $x(i)$ и $y(i)$, соответственно.

Определение 4.1. *Спектром стратегии игрока будем называть набор ставок, которые он использует в этой смешанной стратегии с положительной вероятностью.*

Обозначение: $\operatorname{Spec} x$, $\operatorname{Spec} y$.

Определение 4.2. *Будем говорить, что стратегия y Игрока 2 выравнивает подмножество ставок B Игрока 1, если при использовании чистых стратегий (ставок) из множества B Игрок 1 получает одинаковый выигрыш, т. е. выполняется*

$$\sum_j A^m(i,j)y(j) = v \quad \text{для всех } i \in B\,,$$

где v – значение выравнивания, одно и тоже для всех $i \in B$.

Если в дальнейшем мы не уточняем множество B, то мы имеем в виду $B = \operatorname{Spec} x$. Аналогичное определение дается для случая, когда стратегия x Игрока 1 является выравнивающей для ставок Игрока 2.

Рассмотрим смешанную стратегию y Игрока 2, пусть k_2 – наибольшая ставка, используемая вторым игроком. Пусть инсайдер использует максимальную ставку k_1.

Пусть рассматриваемая пара стратегий (x, y) оптимальна. Тогда спектры игроков связаны следующим образом.

Теорема 4.1. *Пусть вероятность p не является точкой излома функции $V_1^m(p)$. Тогда максимальная ставка в спектре оптимальной стратегии инсайдера равна или на единицу больше максимальной ставки в оптимальной стратегии неинформированного игрока, т. е.*

$$k_1 = k_2 \text{ или } k_1 = k_2 + 1\,.$$

Доказательство основывается на соображениях доминирования, вытекающих из оптимальности стратегий.

Чтобы упростить запись, будем писать вместо k_1 просто k, а максимальную ставку k_2 в спектре стратегии Игрока 2 уточнять по мере надобности (k или $k-1$).

Обозначим значение игры $V_1^m(p)$ через $v_k(p)$ в случаях, когда в спектре соответствующей оптимальной стратегии инсайдера максимальная ставка это k. К выигрышам инсайдера в состояниях L и H также припишем индекс k

$$v_k(p) = v_k^H \cdot p + v_k^L \cdot (1-p)\,.$$

Рассмотрим такие вероятности p, при которых максимальная ставка в спектрах оптимальных стратегий обоих игроков совпадает и равна k. Обозначим функцию распределения весов в стратегии y Игрока 2 через G_k:

$$G_k(i) = \sum_{j=1}^{i} y(j), \quad G_k(k) = 1\,,$$
$$y(k) > 0, \quad y(k+1) = \ldots = y(m-1) = \ .$$

Пусть спектр инсайдера максимален, т. е. содержит все ставки от 1 до k без пропусков. Поскольку в спектрах оптимальных стратегий обоих игроков должно быть одинаковое число ставок (игра на квадратной матрице), то среди ставок Игрока 2 от 0 до k должна найтись неиспользуемая.

Теорема 4.2. *Пусть инсайдер использует максимальный спектр ставок в оптимальной стратегии, т. е.* $1, 2, \ldots, k$ *без пропусков. Пусть Игрок 2 также использует максимальный спектр с наибольшей ставкой* k. *Тогда Игрок 2 в своей оптимальной стратегии пропускает ставку* 1 *или* 2.

Доказательство. Из теоремы Сноу и Шепли [2, Глава 2] следует, что оптимальная стратегия второго игрока должна являться выравнивающей для ставок инсайдера. Условие выравнивания порождает систему разностных уравнений на функцию распределения G_k второго игрока:

$$(m-j)G_k(j-1) = (m-j-1)G_k(j+1), \quad j = \overline{1, k-1}\,. \qquad (4.1)$$

Итого имеем $k-1$ уравнение и k неизвестных: $G_k(0), G_k(1), \ldots,$ $G_k(k-1)$ ($G_k(k) = 1$ – известно).

Следовательно, *решением системы является однопараметрическое семейство.*

Далее показываем, что множество выравнивающих стратегий Игрока 2 можно параметризовать условием

$$y(1) + y(2) = c \geq 0\,.$$

Оптимальным стратегиям соответствуют граничные точки $y(1) = 0$ или $y(2) = 0$. $\square$

На рис. 1 изображен пример оптимальных стратегий игроков с максимальным спектром.

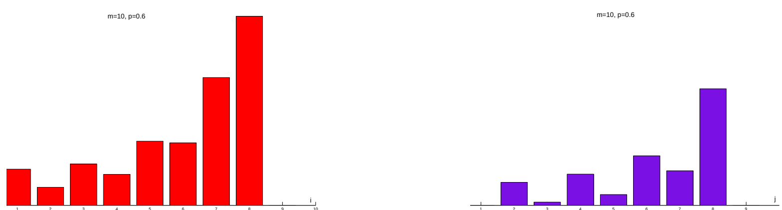

Рисунок 1. Вероятности ставок в оптимальной стратегии Игроков 1 и 2 соответственно при $m = 10$, $p = 0.6$

Случай «без пропусков» является не единственным возможным вариантом устройства спектров игроков. При некоторых вероятностях p спектры оптимальных стратегий обоих игроков могут содержать пропуски ставок. В следующей теореме мы описываем структуру возможных пропусков.

Теорема 4.3. *В оптимальных стратегиях обоих игроков максимальная длина пропуска ставок в спектре не превосходит 1, если игроки используют ставки, меньшие $m - 1$. Больший пропуск возможен только перед ставкой $m - 1$.*

Доказательство проводится от противного.

Полные доказательства можно изучить на сайте http://emi.nw.ru/ в разделе публикаций авторов.

На рис. 2 проиллюстрирован пример оптимальных стратегий игроков, содержащих пропуски ставок.

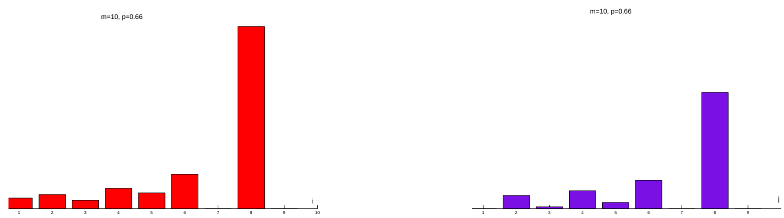

Рисунок 2. Вероятности ставок в оптимальной стратегии Игроков 1 и 2 соответственно при $m = 10$, $p = 0.66$

5. Методика вычисления цены игры

Рассмотрим функцию $V_1^m(p) = v_k(p)$ значения игры. Если вероятность p не является точкой излома функции $V_1^m(p)$, то значение игры (а оно является значением выравнивания) можно однозначно определить по спектрам оптимальных стратегий обоих игроков для данной вероятности p. Поэтому имеет место запись

$$v_k(p) = v_k(\operatorname{Spec} x, \operatorname{Spec} y)\,,$$

где k – максимальная ставка в $\operatorname{Spec} x$.

Рассмотрим стратегии игроков при малых вероятностях высокой цены акции.

1) Пусть вероятность p близка к нулю. Тогда игра со сведенной матрицей $A^m(p)$ имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях. Оптимальной стратегией второго игрока является ставка 0, у инсайдера – ставка 1. Векторный выигрыш инсайдера в данном случае равен

$$v_1^H = m - 1\,, \;\; v_1^L = 0\,.$$

Значение игры составляет

$$v_1 = (m-1)p\,.$$

2) Вероятность случайного выбора высокой цены акции возрастает. Тогда от чистых стратегий игроки переходят к смешанным.

Инсайдер добавляет в спектр своих ставок ставку 2, а неинформированный игрок – ставку 1 с таким весом, чтобы выровнять выигрыш инсайдера на ставках 1 и 2. Тогда оптимальной стратегией второго игрока является смешанная стратегия с весами

$$y = \left(\frac{m-2}{m-1}, \frac{1}{m-1}, 0, 0, \ldots, 0\right) ,$$

т. е. $\operatorname{Spec} y = \{0,\, 1\}$.

Векторный выигрыш инсайдера и значение игры тогда составляют

$$v_2^H = m-2\,,\ \ v_2^L = \frac{1}{m-1}\,,$$

$$v_2(p) = (m-2)p + \frac{1}{m-1}(1-p)\,.$$

Легко найти первую точку излома p_1 функции $v_k = v(p)$. Достаточно приравнять значения игры из случаев 1) и 2):

$$(m-1)p = (m-2)p + \frac{1}{m-1}(1-p)\,,$$

откуда

$$1 - p_1 = \frac{m-1}{m}\,.$$

3) Вероятность p возрастает. Тогда второй игрок добавляет в спектр своей стратегии ставку 2. По теореме 4.1 он не может использовать ставки 1 и 2 одновременно, поэтому он пропускает ставку 1. Инсайдер при этом по-прежнему использует две своих ставки (по теореме Сноу и Шепли) 1 и 2, взвешенные иначе (чтобы выровнять новые ставки второго игрока).

Оптимальная стратегия второго игрока – это

$$y = \left(\frac{m-2}{m-1}, 0, \frac{1}{m-1}, 0, \ldots, 0\right).$$

Векторный выигрыш инсайдера и значение игры:

$$v_2^H = \frac{(m-2)^2}{m-1}\,,\ \ v_2^L = \frac{2}{m-1}\,,$$

$$v_2 = \frac{(m-2)^2}{m-1}p + \frac{2}{m-1}(1-p)\,.$$

Вторая точка излома p_2 при переходе от стратегий пункта 2) к 3) вычисляется по формуле:

$$1 - p_2 = \frac{m-2}{m-1}\,.$$

Предположим, что нам известны выравнивающие стратегии Игрока 2 для всех возможных спектров, в которых максимальная ставка инсайдера меньше k. Покажем, как изменяются выравнивающие стратегии при добавлении инсайдером ставки k.

Из выравнивающих стратегий инсайдера и неинформированного игрока выбирается пара оптимальных при данной вероятности. В разделе 4 мы описали свойства, которыми обладают спектры оптимальных стратегий игроков. Поскольку оптимальные стратегии являются выравнивающими, то среди выравнивающих стратегий нас будут интересовать только те, спектры которых удовлетворяют теоремам 4.1, 4.2, 4.3.

Введем операцию отбрасывания последней ставки в стратегии неинформированного игрока следующим образом: если стратегия y имеет спектр $\operatorname{Spec} y$ с максимальной ставкой k (будем для определенности приписывать индекс: y_k), то после отбрасывания последней ставки новая стратегия (обозначим $\bar{y}_{k-1}$) будет иметь спектр $\operatorname{Spec} \bar{y}_{k-1} = \operatorname{Spec} y_k \setminus \{k\}$, причем веса $\bar{y}_{k-1}(j)$ в стратегии $\bar{y}_{k-1}$ пропорциональны соответствующим весам в исходной стратегии. Введем коэффициент пропорциональности α_k

$$y_k(j) = \bar{y}_{k-1}(j) \cdot \alpha_k, \quad j = 0, \ldots, k-1\,.$$

Отсюда сразу следует

$$y_k(k) = 1 - \alpha_k\,.$$

5.1. Случай, когда максимальная ставка в спектрах меньше $m-1$

1) Рассмотрим подробно случай, когда максимальная ставка в спектрах оптимальных стратегий обоих игроков совпадает и равна k ($k < m-1$). Пусть инсайдер использует ставку $k-1$.

Будем обозначать через i чистую стратегию игрока, использующего i-ую ставку.

Игрок 2 выравнивает спектр ставок Игрока 1. Условие выравнивания с учетом обозначений в матричной форме запишется так

$$(iA^m(p), (y_k)^t) = v_k, \quad i = 1, \ldots, k\,,$$

(выравниваются только строки, соответствующие ставкам, задействованным инсайдером в спектре). Здесь v_k – строго говоря, еще не значение игры, а значение выравнивания.

Учитывая, что все строки в матрице $A^{L,m}(p)$ одинаковы, перепишем систему в виде

$$(iA^{H,m}(p), (y_k)^t) = v_k^H, \tag{5.1}$$

причем в матрице $A^{H,m}(p)$ используются только соответствующие строки и столбцы.

Заметим, что для выравнивания спектра ставок инсайдера, не превосходящих $k-1$, Игроку 2 достаточно использовать ставки, *меньшие* k. Другими словами, k-ый столбец в матрице (т. е. k-ая ставка Игрока 2) никак не влияет на выравнивание «меньшего» спектра инсайдера $\operatorname{Spec} x_k \setminus \{k\}$. Можем отбросить от стратегии Игрока 2 последнюю ставку, перейдя к рассмотрению стратегии $\bar{y}_{k-1}$.

Стратегия $\bar{y}_{k-1}$ выравнивает спектр инсайдера

$$\operatorname{Spec} x_{k-1} = \operatorname{Spec} x_k \setminus \{k\},$$

значение выравнивания – это $v_{k-1} = v_{k-1}^H p + v_{k-1}^L (1-p)$.

Система (5.1) приводится к виду

$$\begin{cases} v_{k-1}^H \alpha_k + (-m+k) y_k(k) = v_k^H\,, \\ (m-k)\alpha_k = v_k^H\,, \\ y_k(k) = 1 - \alpha_k\,. \end{cases} \tag{5.2}$$

Поскольку мы знаем v_{k-1}^H, если игроки 1 и 2 используют спектры $\operatorname{Spec} x_k \setminus \{k\}$ и $\operatorname{Spec} y_k \setminus \{k\}$ соответственно (знаем для всех возможных комбинаций), то систему легко решить, получив рекуррентные зависимости для v_k^H:

$$\alpha_k = \frac{m-k}{v_{k-1}^H}\,, \;\; y_k(k) = 1 - \frac{m-k}{v_{k-1}^H}\,,$$

$$v_k^H = \frac{(m-k)^2}{v_{k-1}^H}\,, \;\; v_k^L = (v_{k-1}^L - k)\frac{m-k}{v_{k-1}^H} + k\,.$$

Поскольку найден коэффициент пропорциональности α_k и вес максимальной ставки $y_k(k)$, тем самым найдена выравнивающая стратегия Игрока 2.

Значение выравнивания:

$$v_k(p) = \frac{(m-k)^2}{v_{k-1}^H}\cdot p + \left((v_{k-1}^L - k)\frac{m-k}{v_{k-1}^H} + k\right)\cdot(1-p)\,.$$

2) Теперь рассмотрим случай, когда максимальная ставках в спектрах стратегий обоих игроков равна k и при этом оба игрока пропускают ставку $k-1$.

Запретив инсайдеру делать ставку k и проведя аналогичные рассуждения, получаем рекурсивные соотношения с шагом 2, а именно:

$$y_k(j) = \bar{y}_{k-2}(j)\cdot\alpha_k, \quad i = 1,\ldots,k-2\,, \;\; y_k(k-1) = 0\,,$$

$$\alpha_k = \frac{m-k}{v_{k-2}^H}\,, \;\; y_k(k) = 1 - \frac{m-k}{v_{k-2}^H}\,,$$

$$v_k^H = \frac{(m-k)^2}{v_{k-2}^H}\,, \;\; v_k^L = (v_{k-2}^L - k)\frac{m-k}{v_{k-2}^H} + k\,,$$

$$v_k(p) = \frac{(m-k)^2}{v_{k-2}^H}\cdot p + \left((v_{k-2}^L - k)\frac{m-k}{v_{k-2}^H} + k\right)\cdot(1-p)\,.$$

3) Следующий возможный вариант спектров игроков: максимальная ставка инсайдера k, у неинформированного игрока $k-1$. Перед максимальными ставками также возможны пропуски, длины не более 1. Механизм анализа этих спектров таков же, как и в приведенных выше случаях.

Механизм рекурсии. *По виду спектров стратегий игроков определяем число d таким образом, чтобы последние d ставок неинформированного игрока никак не влияли на выравнивание «укороченного» спектра ставок инсайдера* $\operatorname{Spec} x \setminus \{k, k-1, \ldots, k-(d-1)\}$.

Из всех возможных d выбирается минимальное. Значение выравнивания на «коротких» спектрах игроков есть v_{k-d}^H. Веса последних d ставок неинформированного игрока однозначно определяются из условий выравнивания строк $k, k-1, \ldots, k-(d-1)$.

Из теорем 4.1–4.3 следует, что максимальная глубина рекурсии d не превосходит 3.

5.2. Случай, когда игроки используют ставку $m-1$

Из теоремы 4.3 следует, что стратегии, спектры которых содержат ставку $m-1$, имеют такую структуру: перед ставкой $m-1$ может быть «большой» (длины больше 1) набор неиспользуемых ставок, например до ставки $\tilde{k}$, а среди ставок от нуля до $\tilde{k}$ нет пропусков больше 1.

В наших обозначениях для весов стратегий (запишем для инсайдера): существует $\tilde{k} < m-1$, такое, что

$$x_{m-1}(m-1) > 0, \quad x_{m-1}(m-2) = x_{m-1}(m-3) = \ldots = x_{m-1}(\tilde{k}+1) = 0,$$

$$x_{m-1}(\tilde{k}) > 0, \quad x_{m-1}(j) \geq 0 \text{ для всех } j = 1, 2, \ldots, \tilde{k}-1\,.$$

Пусть у неинформированного игрока максимальная ставка, меньшая $m-1$, равна $\tilde{l}$. Тогда, по аналогии с теоремой 4.1, доказывается, что имеет место либо $\tilde{l} = \tilde{k}$, либо $\tilde{l} = \tilde{k} - 1$.

Будем обозначать стратегии инсайдера x_{m-1}, спектр которых содержит ставку $m-1$, через $\tilde{x}_k$, а спектр таких стратегий через

$$\operatorname{Spec} \tilde{x}_k = \operatorname{Spec} x_{\tilde{k}} \cup \{m-1\}.$$

Аналогично для Игрока 2.

Значение игры, получаемое инсайдером при использовании в оптимальной стратегии спектра $\operatorname{Spec} \tilde{x}_k$, обозначим через $\tilde{v}_k$.

Запишем условие выравнивания Игроком 2 спектра оптимальной стратегии Игрока 1:

$$(iA^m(p), (\tilde{y}_l)^t) = \tilde{v}_k, \quad i \in \operatorname{Spec} \tilde{x}_k\,.$$

Из структуры матрицы следует, что ставка $m-1$ Игрока 2 не влияет на выравнивание спектра стратегии инсайдера с отброшенной последней ставкой $\operatorname{Spec} x_{\tilde{k}}$.

Как в случае $k < m-1$, вводим коэффициент пропорциональности и используем значения выравнивания для случая, когда ставки обоих игроков не превосходят $\tilde{k}$. Получаем рекурсии для значения игры.

$$\tilde{v}_k^H = \frac{1}{v_{\tilde{k}}^H}\,, \;\; \tilde{v}_k^L = (v_{\tilde{k}}^L - m + 1) \cdot \frac{1}{v_{\tilde{k}}^H} + m - 1\,,$$

$$\tilde{v}_k = \frac{1}{v^H_{\tilde{k}}} \cdot p + \left((v^L_{\tilde{k}} - m + 1) \cdot \frac{1}{v^H_{\tilde{k}}} + m - 1 \right) \cdot (1-p)\,.$$

В особый случай выделим ситуацию, когда $\tilde{k}$ не существует, т. е. когда оптимальной стратегией обоих игроков является чистая стратегия – ставка $m-1$. Это возможно в случае, когда вероятность p высокой цены акции очень высока (близка к 1), а именно при $p \in [\frac{m-1}{m}, 1]$.

Когда рекурсия доходит до шага 2, то вступают в силу начальные условия, найденные выше. В итоге мы получим все веса для случая, когда оба игрока используют максимальные спектры. Поскольку при $k = 2$ имеются два различных набора выравнивающих стратегий у неинформированного игрока, то на каждом шаге рекурсии получаются 2 семейства выравнивающих стратегий.

Количество возможных комбинаций спектров выравнивающих стратегий ограничено (согласно теоремам 4.1, 4.2, 4.3). Значит, количество выравнивающих стратегий для каждого p (а следовательно, для целых промежутков линейности по p функции $V_1^m(p)$) ограничено. Из них в качестве оптимальной выбирается та, которая дает инсайдеру наименьший гарантированный выигрыш, значение выравнивания при этом – это значение игры для данного p.

Имеется в виду следующее. Поскольку один и тот же спектр инсайдера при данном p можно выровнять не единственным образом, то Игрок 2 выбирает такую стратегию, которая дает минимальный выигрыш инсайдеру. При этом инсайдер выбирает стратегию с таким спектром, чтобы этот минимум был для него наибольшим из всех минимумов (по всем выборам неинформированного игрока). Таким образом, выбор реализуется посредством применения теоремы о минимаксе, но уже для «маленького» множества выравнивающих стратегий (по сравнению со множеством всех стратегий).

6. Точки излома функции $V_1^m(p)$

В теореме 4.2 было показано, что если игроки используют максимальные возможные спектры, то Игрок 2 может выровнять спектр Игрока 1 двумя различными способами: используя все ставки кроме 1 или кроме 2. Обозначим эти выравнивающие стратегии Игрока 2

y_k^1 (если используется ставка 1) и y_k^2 (если – ставка 2), k – максимальная ставка в спектрах обоих игроков.

Получили два семейства выравнивающих стратегий. Обозначим вероятности, в которых происходит смена стратегий y_k^1 и y_k^2 (для $k < m-1$), через p_k, $\{p_k\} = P^m$. Вероятности, в которых происходит смена стратегий $\tilde{y}_k^1$ и $\tilde{y}_k^2$ (в них используется ставка $m-1$), обозначим через q_k, $\{q_k\} = Q^m$.

Эти вероятности мы явно вычисляем. Выше, в разделе 5, были вычислены p_1 и p_2. При $k > 2$ получена рекуррентная формула

$$1 - p_1 = \frac{m-1}{m}, \quad 1 - p_2 = \frac{m-2}{m-1}, \quad 1 - p_k = (1 - p_{k-2})\frac{m-k}{m-k+1}\,.$$

Аналогично для семейства Q^m:

$$1 - q_1 = \frac{1}{m}, \quad 1 - q_2 = \frac{1}{m-1}, \quad 1 - q_k = (1 - p_{k-2})\frac{1}{m-k+1}\,.$$

Эти формулы определяют в точности те же семейства вероятностей, что были получены в работе В.Л. Крепс [3]. Эти наборы вероятностей обладают рядом свойств, описанных в [3]. Приведем здесь их формулировки.

Теорема 6.1. *При вероятностях $p \in P^m \bigcup Q^m$ значение игры с допустимыми дискретными ставками совпадает со значением игры с допустимыми вещественными ставками (модель B.De Meyer):*

$$V_1^m(p) = m \cdot p \cdot (1-p) \quad \text{для всех } p \in P^m \bigcup Q^m\,.$$

Теорема 6.2. *При $m \to \infty$ множество $P^m \bigcup Q^m$ становится всюду плотным на отрезке $[0,1]$. Имеет место равенство*

$$\lim_{m\to\infty} V_1^m(p)/m = p(1-p)\,.$$

Таким образом, вероятности множества $P^m \bigcup Q^m$ обладают тем удивительным свойством, что в этих точках для игроков нет разницы играть ли в игру с целочисленными или произвольными ставками, в то время как в остальных случаях инсайдер предпочтет играть в игру с произвольными ставками, т. к. в ней у него больше свободы действий, что гарантирует ему больший выигрыш.

7. Об оптимальной стратегии инсайдера

Рассмотрим стратегию инсайдера x_k с максимальной ставкой в спектре, равной k. Обозначим функцию распределения весов в стратегии x_k инсайдера через F_k. Подробнее:

$$F_k(i) = \sum_{j=1}^{i} x_k(j), \quad F_k(k) = 1\,,$$

$$y(k) > 0, \quad y(k+1) = \ldots = y(m-1) = 0\,.$$

В разделе 5 для фиксированного p нами была найдена оптимальная стратегия y неинформированного игрока (соответственно и $\operatorname{Spec} y$), определено значение игры $v_k(p)$, а также определен спектр $\operatorname{Spec} x$ оптимальной стратегии x инсайдера в состоянии природы H.

Стратегия инсайдера выравнивает активные ставки второго игрока. Если две активные ставки Игрока 2 следуют подряд (между ними нет пропуска ставки), то условие выравнивания инсайдером $j-1$-ой и j-ой ставок неинформированного игрока представляет собой разностное уравнение на функцию распределения с шагом 2:

$$F_k(j-2) - \frac{m-j}{m-j+1} F_k(j) + \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{1-p}{p} = 0\,.$$

Если между активными ставками j и $j-2$ (это чистые стратегии) Игрока 2 пропуск длины 1, то требуется использовать условие «склейки»:

$$(x_k \cdot A^m(p), (j)^t) = (x_k \cdot A^m(p), (j-2)^t) \quad (= v_k(p))\,.$$

Преобразуя его, получаем разностное уравнение на функцию распределения уже с шагом 3:

$$F_k(j-3)(m-j) + (F_k(j-2) - F_k(j+1))(m-j+1) - F_k(j)(m-j) + 2\frac{1-p}{p} = 0.$$

В случае, если $k = m-1$, аналогично записывается условие склейки на ставки $m-1$ и $\tilde{k}$.

Еще ряд условий на функцию распределения F_k можно получить из анализа $\operatorname{Spec} x$. Если ставка i не входит в $\operatorname{Spec} x$, то это равносильно такому условию на функцию распределения:

$$F_k(i) = F_k(i-1).$$

Таким образом, получено достаточное количество линейных уравнений, чтобы однозначно определить функцию распределения весов инсайдера. Решение системы этих уравнений описывает оптимальную стратегию инсайдера.

8. Результаты компьютерного моделирования

В этом разделе мы скажем несколько слов о значении игры, описанном в разделе 5. На рис. 3 изображена функция $V_1^m(p)$ для $m = 3, 4, 5$ и 6.

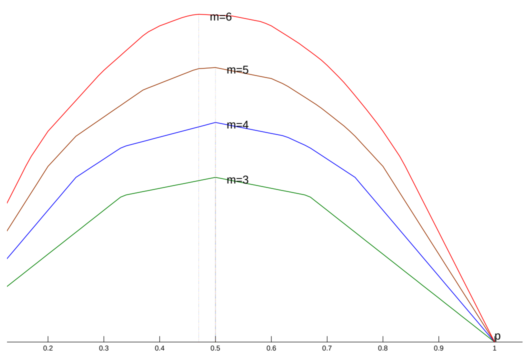

Рисунок 3. Значение одношаговой игры при m от 3 до 6

При эвристическом анализе игры естественным кажется соображение, что наибольшая неопределенность у Игрока 2 наблюдается при вероятности случайного выбора высокой цены акции равной $1/2$. Это значит, что максимальный ожидаемый выигрыш инсайдер получает при $p = 1/2$. Более того, в этом нас убеждают и результаты, полученные для непрерывной модели Де Майера и Салей. В этой модели значение игры квадратично зависит от вероятности p:

$$V^m(p) = mp(1-p).$$

Максимум этой функции находится в точке $p = 1/2$.

В дискретной модели при маленьких m ($m \leq 5$) максимум функции значения игры также наблюдается в точке $p = 1/2$. Однако, начиная с $m = 6$, максимум $V_1^m(p)$ смещается (что изображено пунктиром на графике). Это значит, что максимум неопределенности не обязан наблюдаться при $p = 1/2$. Это первое контринтуитивное свойство модели.

Другим контринтуитивным свойством модели является наблюдающаяся несимметричность значения игры относительно вероятности $1/2$. Это означает, что в общем случае значения игры при вероятностях p и $1 - p$ не совпадают.

Также нетривиальным эффектом дискретной модели является описанное выше наличие пропусков ставок в спектрах оптимальных значений. В непрерывной модели никаких пропусков в промежутке от минимальной до максимальной (при фиксированной вероятности p) ставки не наблюдалось.

Следует отметить, что аппроксимация дискретной модели непрерывной моделью ведет к небольшой потери точности (погрешность не меньше $1/4$) вычисления ожидаемого выигрыша инсайдера. Однако при такой замене совершенно пропадает специфика структуры оптимальных стратегий игроков, содержащих пропуски ставок, что не позволяет в дальнейшем использовать эту модель при анализе моделей с различными назначаемыми ценами покупки и продажи.

Исходя из всех аргументов, мы делаем вывод, что дискретная модель обладает рядом уникальных особенностей, отличающих ее от непрерывных моделей. Поэтому и методы анализа этих моделей принципиально иные. Разработанный нами рекурсивный подход демонстрирует сложность и нестандартность решения такого класса моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доманский В.К., Крепс В.Л. *Момент обнаружения «инсайдерской» информации на торгах с асимметричной информированностью агентов* // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2007. Т. 14. № 3. С. 399–416.

2. Карлин С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике.* М.: Мир, 1964.

3. Крепс В.Л. *Модель одношагового биржевого торга* // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16. № 6. С. 1086–1087.

4. Крепс В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. Вып. 4. С. 109–120.

5. De Meyer B., Moussa Saley H. *On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance* // Int. Journal of Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319.

6. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int. J. Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257.

SOLUTION FOR ONE-STAGE BIDDING GAME WITH INCOMPLETE INFORMATION

Marina S. Sandomirskaia, Institute for Economics and Mathematics RAS, St. Petersburg, PhD student (sandomirskaya_ms@mail.ru),
Victor K. Domansky, Institute for Economics and Mathematics RAS, St. Petersburg, Dr.Sc. (doman@emi.nw.ru).

Abstract: We investigate a model of one-stage bidding between two differently informed stockmarket agents where one unit of risky asset (share) is traded. The random liquidation price of a share may take two values: the integer positive m with probability p and 0 with probability $1 - p$. Player 1 (insider) is informed about the price, Player 2 is not. Both players know probability p. Player 2 knows that Player 1 is an insider. Both players propose simultaneously their bids. The player who posts the larger price buys one share from his opponent for this price. Any integer bids are admissible. The model is reduced to zero-sum game with lack of information on one side. We construct the solution of this game for any p and m: we find optimal strategies of both players and describe recurrent mechanism for calculating game value. The results are illustrated by means of computer simulation.

Keywords: bidding, asymmetric information, equalizing strategies, optimal strategies.