

© 2012г. А.Ю. Голубин, канд. физ.-мат. наук,
В.Н. Гридин, д-р техн. наук

(Центр информационных технологий в проектировании РАН,
Московская обл., г. Одинцово)

Оптимизация страхования и перестрахования в динамической модели Крамера–Лундберга

В работе найдены оптимальные с точки зрения страховщика стратегии страхования и перестрахования в управляемом процессе риска Крамера–Лундберга, описывающем динамику капитала страховой компании на длительном временном интервале. В качестве минимизируемого критерия оптимальности использовался стационарный коэффициент вариации, были учтены дополнительные ограничения на остаточные риски как страхователей, так и перестраховщика. Установлено, что наиболее выгодным будет применение «stop-loss» перестрахования с верхним пределом и страхования, представляющего собой комбинацию «stop-loss» стратегии и франшизы. Найдены уравнения, определяющие параметры оптимальных стратегий.

1. Введение

Исходный неуправляемый процесс риска Крамера–Лундберга (см., например, [1]), описывающий динамику капитала страховой компании (страховщика), имеет вид

$$X_t = x_0 + c(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

где $x_0 > 0$ — начальный капитал, $\{Y_i\}$ — независимые одинаково распределенные страховые выплаты с функцией распределения $F(x)$ и конечным вторым моментом $EY^2 < \infty$. Процесс исков на выплаты, т.е.

число страховых случаев, $\{N(t)\}$ есть неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t)$, причем такой, что интегральная интенсивность $\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \lambda(x)dx \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Неоднородность $N(t)$ позволяет учесть эффект сезонности, а условие на $\lambda(t)$ неограничительно, поскольку выполняется, например, если $\lambda(t) \geq a$ для некоторого $a > 0$. Размер премии, получаемой страховщиком на $[0, t]$, определяется принципом среднего значения (см., например, [1, 2]), суммарная премия на $[0, t]$ равна $c(t) = (1 + \alpha)E X_t$, где суммарный ущерб $X_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ и $\alpha > 0$ – заданный коэффициент нагрузки – надбавка в процентах над средним риском $E X_t$. Поскольку $EN(t) = \Lambda(t)$, то $c(t) = (1 + \alpha)\Lambda(t)E Y$.

Задачи оптимального управления процессом риска Крамера–Лундберга изучались в [3]–[9]. В [3] исследована проблема минимизации вероятности разорения страховой компании выбором перестрахования в классе «stop-loss» дележей, применяемых к риску каждого отдельного страхователя. Работа [4] посвящена решению той же задачи, но в случае, когда страховщику доступны пропорциональное перестрахование и инвестирование в рисковый актив. В близкой постановке, но без управления перестрахованием минимизация вероятности разорения исследовалась в [5] с нахождением асимптотики целевого функционала. Процесс риска, возникающий как диффузионная аппроксимация процесса Крамера–Лундберга, изучался в [6], где оптимальные стратегии инвестиций и пропорционального перестрахования получены как при отсутствии бюджетного ограничения на инвестирование (использование коротких продаж), так и при его наличии. Задача с иным критерием оптимальности, а именно с ожидаемой полезностью потребления страхователя решена в [7], где были найдены оптимальные стратегии инвестиций и страхования.

Основные отличия данной работы от предыдущих исследований: одновременный выбор страховщиком стратегий страхования и перестрахования (управление инвестициями не рассматривается); наличие ограничения (сверху) с вероятностью единица на риск, остающийся у клиента после страхования. Такие ограничения представляются естественными с точки зрения страхователя, который хотел бы избавиться от "больших" ущербов. Интересно отметить, что в то время как основным инструментом построения оптимальной стратегии в перечисленных работах является уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана, которое очень редко допускает аналитическое решение и требует обычно привлечения численных методов, в настоящей статье при выбранном критерии оптимальности удастся свести задачу оптимального управления к статическому случаю и получить решение в аналитическом виде. Близкие по постановке задачи рассматривались в [8]–[10], где страховщик имел возможность оптимизации страхования и/или перестрахования. Но в [10] изучена лишь статическая модель, а в [8] в отличие от настоящей работы минимизируемым критерием для процесса были средние максимальные потери страховщика, причем ограничение было наложено на среднее значение риска страхователя, а дополнительное ограничение с вероятностью единица не принималось в расчет. Существенное отличие модели в [9] от рассматриваемого авторами случая состоит в использовании только одного инструмента управления риском – страхования, возможность перестрахования не рассматривалась.

2. Описание модели

Формальное описание исследуемого управляемого процесса риска состоит в следующем. В момент выплаты $t = t_i$ ($i \geq 0$, $t_0 = 0$) стра-

ховщик принимает решение, т.е. выбирает функции дележа риска страхования $I_t(\cdot)$ и перестрахования $A_t(\cdot)$. Тогда $I_t(Y_{i+1})$ – доля от следующей выплаты, возмещаемая клиенту, $A_t(I_t(Y_{i+1}))$ – доля риска страховщика после перестрахования. С учетом перестрахования скорость накопления остающейся у страховщика премии становится равной

$$(1) \quad c_t = \lambda(t)\{(1 + \alpha)E I_t(Y) - (1 + \alpha_1)E [I_t(Y) - A_t(I_t(Y))]\},$$

где $\alpha_1 > \alpha$ – коэффициент нагрузки перестраховщика. Управляемый процесс риска тогда

$$(2) \quad X_t = x_0 + \int_0^t c_s ds - \sum_{j=1}^{N(t)} A_{t_{j-1}}(I_{t_{j-1}}(Y_j)),$$

где в качестве допустимых стратегий $I = \{I_t\}$ и $A = \{A_t\}$ рассматриваются неупреждающие управления, измеримые относительно естественной фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}$ и удовлетворяющие стандартным неравенствам $0 \leq I_t(x) \leq x$ и $0 \leq A_t(x) \leq x$ на $[0, \infty)$ (другими словами, возмещение всегда неотрицательно и не превосходит размера ущерба).

Предположим также, что при каждом (фиксированном) t должно выполняться с вероятностью единица неравенство на остаточный риск клиента: $Y - I_t(Y) \leq q$, здесь $q > 0$ – заданная страхователем константа. Это означает, что в любом допустимом для клиента договоре остающийся у него после страхования ущерб никогда не должен превышать величину q . Эквивалентное ограничение на риск, принимаемый страховщиком, можно записать как $I_t(x) \geq (x - q)_+$, $x \in [0, \infty)$, где $(y)_+$ обозначает $\max\{y, 0\}$. Аналогичное ограничение наложим на риск перестраховщика. Пусть его требование состоит в том, чтобы максимальный размер возмещения перестраховщиком не превышал бы заданной суммы $Q > 0$ с вероятностью единица, $I_t(Y) - A_t(I_t(Y)) \leq Q$. В эквивалентном виде

это ограничение можно записать как $A_t(x) \geq (x - Q)_+$. В частности, формально можно положить $Q = \infty$ или/и $q = \infty$, что будет означать отсутствие дополнительных ограничений на стратегии перестраховщика или/и страхователя.

Пусть минимизируемый функционал есть верхний предел

$$(3) \quad J[I, A] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D X_t / E X_t$$

или, по аналогии с известным в теории страхования термином, "стационарный коэффициент вариации".¹ В актуарной математике (см., например, [2]) коэффициент вариации достаточно часто используется как показатель финансовой устойчивости страховщика: чем меньше его значение, тем лучше сбалансирован страховой портфель. Исследуемая задача оптимального управления имеет вид

$$(4) \quad \min J[I, A],$$

где минимум берется по множеству определенных выше допустимых стратегий $\{I, A\}$.

Процесс исков $N(t)$ в управляемом процессе риска (2) есть неоднородный пуассоновский процесс и, следовательно, $N(t) = N^0(\Lambda(t))$ почти наверное (п.н.), где $N^0(t)$ — стандартный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t) \equiv 1$. Обозначая через X_t^0 процесс риска, соответствующий процессу исков $N^0(t)$, получим $X_t = X_{\Lambda(t)}^0$ п.н. Тогда

$$J[I, A] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D X_t / E X_t = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D X_{\Lambda(t)}^0 / E X_{\Lambda(t)}^0.$$

¹Обычно под этим понимается отношение стандартного отклонения $\sqrt{D\xi}$, а не дисперсии к математическому ожиданию $E\xi$. В рассматриваемом случае, как будет показано, дисперсия и среднее X_t имеют одинаковый порядок роста, поэтому в качестве критерия здесь выбран модифицированный коэффициент вариации (3).

Учитывая, что $\Lambda(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, имеем

$$J[I, A] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D X_t^0 / E X_t^0.$$

Таким образом, исходная задача (4) свелась к эквивалентной задаче с процессом X_t^0 , который по построению является однородным управляемым марковским процессом с бесконечным горизонтом (см., например, [11]). Но минимизируемый «дробный» целевой функционал не является функционалом «беллмановского» типа, поскольку выражение под знаком предела не является математическим ожиданием некоторой функции от X_t^0 . В рамках стандартной теории нет результата, гарантирующего достаточность для его минимизации класса марковских стратегий. Поэтому всюду далее аргіогі рассматриваются только марковские стратегии $\{I, A\}$, удовлетворяющие введенным ранее ограничениям, игнорируя остальные неупреждающие стратегии.

Определим функцию $V(t, x) = \inf_{I, A} J[I, A]$ для процесса на интервале $[t, \infty)$ с начальным состоянием $X_t^0 = x$, где инфимум берется по множеству марковских допустимых стратегий. В силу специфики рассматриваемого критерия $J[I, A]$, имеем $V(t, x) = V(0, x)$ и $V(t, x) = V(t, 0)$. Отсюда получаем: минимум в задаче (4) можно искать в классе постоянных стратегий $I_t(\cdot) = I(\cdot)$ и $A_t(\cdot) = A(\cdot)$, не зависящих ни от момента принятия решения t , ни от текущего состояния x .

В классе этих стратегий суммарный ущерб страховщика (см. (2)) есть сложно-пуассоновская случайная величина $\sum_{j=1}^{N^0(t)} A(I(Y_j))$, поэтому

$$E X_t^0 = x_0 + t\alpha_1 \{E A(I(Y)) - \delta E I(Y)\} \text{ и } D X_t^0 = tE A^2(I(Y)),$$

где параметр $\delta \stackrel{def}{=} 1 - \alpha/\alpha_1 \in (0, 1)$. Тогда из (3) следует, что исходная задача (4) принимает вид

$$(5) \quad J[I, A] \equiv \frac{E A^2(I(Y))}{\alpha_1 \{E A(I(Y)) - \delta E I(Y)\}} \rightarrow \min.$$

Условие положительности знаменателя $E A(I(Y)) > \delta E I(Y)$ известно в актуарной математике под названием "условие безопасной нагрузки" (safety loading condition) и означает возрастание процесса риска в среднем, поскольку $E X_t^0 = x_0 + t\alpha_1\{E A(I(Y)) - \delta E I(Y)\}$. Множество допустимых дележей $\{I, A\}$ — здесь множество борелевских функций $I(\cdot)$ и $A(\cdot)$, удовлетворяющих неравенствам $(x - q)_+ \leq I(x) \leq x$, $(x - Q)_+ \leq A(x) \leq x$, $E A(I(Y)) > \delta E I(Y)$.

Всюду ниже совпадение дележей $(I', A') = (I'', A'')$ понимается как равенство $I'(Y) = I''(Y)$ и $A'(I'(Y)) = A''(I''(Y))$ п.н.

В п. 3.1 приведено решение варианта задачи (5) в случае, когда страховщику доступен выбор только стратегий перестрахования, удовлетворяющих введенному ограничению сверху; в п. 3.2 задача (5) решена для случая, когда страховщик выбирает стратегии страхования I и перестрахования A , причем на остаточный риск страхователя наложено ограничение сверху. В первом случае оптимальной оказывается стратегия «stop-loss» перестрахования с верхним пределом, где возмещение ограничено суммой Q . Во второй задаче оптимальным будет «stop-loss» перестрахование (или перестрахование эксцедента убытка), а оптимальной стратегией страхования является комбинация «stop-loss» стратегии и франшизы. Полученные результаты иллюстрированы численным примером для случая равномерного распределения выплат.

3. Минимизации стационарного коэффициента вариации

Исследование задачи (5) начнем с леммы, устанавливающей существование оптимальных стратегий.

Лемма 1 *Задача (5) имеет решение.*

Доказательство леммы 1 приведено в приложении.

3.1. Оптимальный выбор перестрахования. Рассмотрим частный случай описанной выше задачи оптимального управления, когда стационарный коэффициент вариации в (5) минимизируется только выбором функции дележа перестрахования $(x - Q)_+ \leq A(x) \leq x$, а функция $I(x) \equiv x$ — ущерб каждого клиента страхуется целиком:

$$(6) \quad J[A] \equiv \frac{E A^2(Y)}{\alpha_1 \{E A(Y) - \delta E Y\}} \rightarrow \min, \quad E A(Y) > \delta E Y.$$

Ниже нам понадобится специальный тип функции дележа перестрахования (см. Рис. 1), т.н. "stop loss" перестрахование с верхним пределом $A_{a,Q}(x) = (x \wedge a) \vee (x - Q)$ (здесь и ниже $x \wedge y = \min\{x, y\}$ и $x \vee y = \max\{x, y\}$), которое представляет собой известный в практике перестрахования договор с верхней границей ответственности перестраховщика: если ущерб клиента Y не превосходит уровня удержания страховщика a , то он оплачивается страховщиком полностью; если $a + Q > Y > a$, то возмещение страховщика равно a и остаток $Y - a$ оплачивается перестраховщиком; если же $Y \geq a + Q$, то перестраховщиком выплачивается только оговоренная сумма Q , страховщик возмещает остальной ущерб.

Обозначим через $a' \in (0, \infty)$ корень уравнения $E A_{a,Q}(Y) = \delta E Y$ или $\int_0^a \bar{F}(x) dx + \int_a^\infty \bar{F}(x + Q) dx = \delta E Y$, где, напомним, $\delta = 1 - \alpha/\alpha_1 \in (0, 1)$, и $\bar{F}(x)$ обозначает $1 - F(x)$. Иными словами, a' — уровень удержания в "stop loss" перестраховании с верхним пределом, при котором знаменатель в (6) обращается в ноль. Положим $a_0 = a' \vee 0$, учитывая возможный случай, когда $E A_{0,Q}(Y) = E (Y - Q)_+ > \delta E Y$.

Теорема 1 *Задача (6) имеет единственное решение, "stop loss" перестрахование с верхним пределом $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - Q)$, где a^* явля-*

ется единственным корнем на (a_0, ∞) уравнения

$$(7) \quad \int_0^a (a-x)\bar{F}(x)dx + \int_a^\infty (a-x)\bar{F}(x+Q)dx - a\delta EY = 0.$$

Доказательство. В силу леммы 1 задача (6) имеет решение A^* . Множество допустимых дележей выпукло, поскольку если $A_1(x)$ и $A_2(x)$ – допустимые дележи, т.е. удовлетворяющие ограничениям $(x-Q)_+ \leq A_i(x) \leq x$, $E A_i(Y) > \delta EY$, то, очевидно, $\rho A_1(x) + (1-\rho)A_2(x)$ удовлетворяет этим ограничениям для любого $\rho \in [0, 1]$. Тогда необходимое условие оптимальности A^* имеет вид

$$\left. \frac{d}{d\rho} J[\rho A^* + (1-\rho)A] \right|_{\rho=1} \leq 0$$

для любой (допустимой) функции дележа A . После подстановки в выражение для J (см. (6)) и формального дифференцирования по ρ получаем, что левая часть неравенства равна

$$\int_0^\infty \eta(x)(A^*(x) - A(x))dF(x).$$

Функция $\eta(x) = 2\beta A^*(x) - \gamma$, где $\beta > 0$ и $-\gamma < 0$ есть частные производные J по $E[A_\rho(Y)]^2$ и $E[A_\rho(Y)]$ соответственно. Существование производной по направлению $dJ[\rho A^* + (1-\rho)A]/d\rho|_{\rho=1}$ гарантируется конечностью математического ожидания $E A^*(Y)A(Y) \leq EY^2 < \infty$. Таким образом, $A^*(x)$ является решением задачи минимизации интеграла

$$(8) \quad \min_A \int_0^\infty \eta(x)A(x)dF(x)$$

на множестве измеримых функций $\{A : (x-Q)_+ \leq A(x) \leq x\}$. Условия оптимальности для такого типа задач даются известной в теории моментов (см., например, [12]) обобщенной леммой Неймана-Пирсона: $A^*(x)$

оптимальна в (8) тогда и только тогда, когда

$$(9) \quad A^*(x) = \begin{cases} (x - Q)_+, & \eta(x) > 0, \\ x, & \eta(x) < 0 \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры F . Покажем, что $\eta(x)$ сначала возрастает до нуля, остается нулевой на некотором интервале, и затем снова возрастает. В силу того, что $\eta(0) < 0$, при возрастании x от 0 значение $\eta(x)$ возрастает (при этом $A^*(x) = x$ в силу (9)). После касания оси абсцисс в некоторой точке a функция $\eta(x)$ не может принимать отрицательных значений, поскольку в противном случае для таких x (см. (9)) значение $A^*(x) = x$, и тогда приходим к противоречию: $\eta(x) > 0$. Возрастание $\eta(x)$ от 0 также исключено, так как для таких x выполнено $A^*(x) = 0$, что влечет $\eta(x) < 0$. Значение $\eta(x)$ остается нулевым вплоть до точки $x = a + Q$ достижения нижней границы допустимых дележей. В силу (9) $A^*(x) = x - Q$ при $x > a + Q$. В итоге, $A^*(x)$ имеет вид $(x \wedge a) \vee (x - Q)$. После подстановки этой функции дележа, получим уравнение для определения точки касания на интервале (a_0, ∞) : $2\beta a - \gamma = 0$. Нетрудно показать, что $E[A^*(Y)]^2 = 2\{\int_0^a x \bar{F}(x) dx + \int_a^\infty x \bar{F}(x + Q) dx\}$ и $E A^*(Y) = \int_0^a \bar{F}(x) dx + \int_a^\infty \bar{F}(x + Q) dx$, тогда легко видеть, что функция $2\beta a - \gamma$ с точностью до положительного множителя совпадает с левой частью уравнения (7), которую обозначим как $\psi(a)$. Учитывая вид $\psi(a)$ и определение a_0 , имеем $\psi(a_0) < 0$. Поскольку $\psi'(a) = \int_0^a \bar{F}(x) dx + \int_a^\infty \bar{F}(x + Q) dx - \delta E Y > 0$ на (a_0, ∞) и $\psi'(a) \rightarrow (1 - \delta) E Y > 0$ при $a \rightarrow \infty$, получим: искомая точка касания есть единственный корень уравнения (7). $\square$

Замечание 1. Если обозначить через $T \leq \infty$ верхнюю грань носителя распределения F , т.е. наибольшее возможное значение выплаты Y , то возможна ситуация, когда при $T < \infty$ (выплата ограничена) найденное в теореме 1 значение уровня a^* превысит T . В этом случае $A^*(Y) = Y$ п.н.,

страховщик удерживает весь риск клиента, не обращаясь к перестраховщику. Для распределения F с неограниченным носителем (например, для экспоненциального распределения) $a^* < T = \infty$ – страховщик всегда обращается за перестрахованием.

3.2. Оптимальный выбор страхования и перестрахования.

Пусть выбор перестрахования свободен от дополнительных ограничений, а допустимыми дележами страхования считаются только те функции, которые удовлетворяют ограничению сверху на риск клиента (см. п.2), $I(x) \geq (x - q)_+$. Тогда исследуемая задача (5) принимает вид

$$(10) \quad J[I, A] \equiv \frac{E A^2(I(Y))}{\alpha_1 \{E A(I(Y)) - \delta E I(Y)\}} \rightarrow \min, \\ x \geq I(x) \geq (x - q)_+, x \geq A(x) \geq 0, E A(I(Y)) - \delta E I(Y) > 0.$$

Аналогично п. 3.1, введем двухуровневую функцию дележа но не перестрахования, а страхования $I_{k,q}(x) = (x \wedge k) \vee (x - q)$, и "stop loss" перестрахование $A_a(x) = x \wedge a$. Пусть $k = a(1 - \delta)$, где, напомним, $\delta = 1 - \alpha/\alpha_1$. Обозначим через $a^0 \in (0, \infty)$ корень уравнения, которое получается приравниванием к нулю знаменателя в (10): $E A_a(I_{k,q}(Y)) = \delta E I_{k,q}(Y)$ или

$$z(a) \stackrel{def}{=} (1 - \delta) \left[\int_0^k \bar{F}(x) dx + \int_k^a \bar{F}(x + q) dx \right] - \delta \int_a^\infty \bar{F}(x + q) dx = 0.$$

Таким образом, a^0 — уровень удержания в "stop loss" перестраховании, которое, вместе с использованием страхования $I_{k,q}$ при $k = a^0(1 - \delta)$, обращает знаменатель (10) в ноль. (Строго говоря, $z(a)$ может иметь более одного нуля, поскольку $z(0) < 0$, $\lim_{a \rightarrow \infty} z(a) > 0$ и $z'(a) = (1 - \delta)^2 [\bar{F}(k) - \bar{F}(k + q)] + \bar{F}(a + q) \geq 0$. В такой ситуации положим a^0 максимальным нулем $z(a)$.)

Теорема 2 *Оптимальным перестрахованием в (10) является "stop loss" перестрахование $A^*(x) = x \wedge a^*$. Оптимальным страхованием является*

комбинация *stop-loss* страхования и франшизы, $I^*(x) = (x \wedge k^*) \vee (x - q)$.
Здесь $k^* = a^*(1 - \delta)$, параметр a^* есть единственный корень на (a^0, ∞)
уравнения

$$(11) \quad (1 - \delta) \left[\int_0^k (k - x) \bar{F}(x) dx + \int_k^a (k - x) \bar{F}(x + q) dx \right] - \\ - k\delta \int_a^\infty \bar{F}(x + q) dx = 0, \quad \text{где } k = a(1 - \delta).$$

Доказательство. Пусть (I^*, A^*) – решение (10), существующее в силу леммы 1. Функция $A^*(x)$ оптимальна в задаче $\min_A J[I^*, A]$ поэтому, повторяя рассуждения в теореме 1, где отсутствие дополнительного ограничения на A формально означает $Q = \infty$, получаем $A^*(x) = x \wedge a^*$. Значение a^* определяется как точка касания оси абсцисс функцией

$$(12) \quad \eta^*(x) = 2\beta x - \gamma,$$

где $\beta > 0$ и $-\gamma < 0$ есть частные производные $J[I^*, A]$ по $E[A(I^*(Y))]^2$ и $E[A(I^*(Y))]$ соответственно, вычисленные при $A = A^*$.

Рассмотрим теперь задачу $\min_I J[I, A^*]$. Необходимое условие оптимальности

$$\frac{d}{d\rho} J[I_\rho, A^*]|_{\rho=1} \leq 0$$

для любой допустимой I , где $I_\rho = \rho I^* + (1 - \rho)I$. После дифференцирования получаем, что I^* есть решение задачи

$$\min_I \int_0^\infty \theta(x) I(x) dF(x), \quad (x - q)_+ \leq I(x) \leq x,$$

где $\theta(x) = \mathbf{I}\{I^*(x) < a^*\}[2\beta I^*(x) - \gamma] + \delta\gamma$, $\mathbf{I}\{\cdot\}$ обозначает индикаторную функцию, $\delta\gamma > 0$ – частная производная J (см. (10)) по $E I(Y)$ при $I = I^*$. Применение леммы Неймана-Пирсона дает необходимые и достаточные

условия оптимальности в этой задаче:

$$(13) \quad I^*(x) = \begin{cases} (x - q)_+ & \text{при } \theta(x) > 0 \\ x & \text{при } \theta(x) < 0 \end{cases}$$

Поскольку $\theta(0) < 0$, при возрастании x от 0 функция $I^*(x) = x$ в силу (13), значение $\theta(x)$ при этом возрастает. Индикатор $\mathbf{I}\{I^*(x) < a^*\} = \mathbf{I}\{x < a^*\}$ остается равным единице вплоть до точки k^* касания оси абсцисс функции $\theta(x)$. Действительно, функция $\theta^*(x) \stackrel{def}{=} 2\beta x - \gamma + \delta\gamma > \eta^*(x) = 2\beta x - \gamma$ (см.(12)), поэтому $k^* < a^*$. При движении x от k^* значение $\theta(x)$ остается нулевым вплоть до точки $x = k^* + q$ достижения нижней границы допустимых дележей страхования: $\theta(x)$ не может принимать отрицательных значений, поскольку в противном случае для таких x (см. (13)) значение $I^*(x) = x$, и тогда $\theta(x) > 0$ – приходим к противоречию. Возрастание $\theta(x)$ от 0 также исключено, так как для таких x выполнено $I^*(x) = 0$, что влечет $\theta(x) < 0$. В силу (13) $I^*(x) = x - q$ при $x > k^* + q$. В итоге, $I^*(x) = (x \wedge k^*) \vee (x - q)$. После подстановки этой функции дележа и $A^*(x) = x \wedge a^*$ в выражения для моментов $E A^2(I(Y))$, $E A(I(Y))$ и $E I(Y)$, получим пару уравнений оптимальности для определения уровней a^* и k^* : $\eta^*(a) \stackrel{def}{=} 2\beta a - \gamma = 0$ и $\theta^*(k) \stackrel{def}{=} 2\beta k - (1 - \delta)\gamma = 0$. Отсюда сразу же следует, что для их корней выполнено $k = a(1 - \delta)$. После подстановки выражения для k во второе уравнение нетрудно видеть, что это уравнение с точностью до положительного множителя в левой части совпадает с уравнением (11). Докажем единственность решения (11) на интервале (a^0, ∞) . Обозначим через $\phi(a)$ левую часть (11), тогда $\phi(a) = kz(a) - (1 - \delta)[\int_0^k x \bar{F}(x) dx + \int_k^a x \bar{F}(x + q) dx]$, где $k = a(1 - \delta)$ и $z(a)$ – знаменатель в (10). Поэтому $\phi(a^0) < 0$, а поскольку $\phi'(a) = (1 - \delta)z(a) > 0$ на (a^0, ∞) и $\phi(a) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow \infty$, имеем, что решение (11) единственно. $\square$

Полученная в теореме 2 функция $I^*(x)$ это своего рода обобщение франшизы $I(x) = (x - q)_+$, поскольку "хвост" распределения ущерба остается страховщику; при этом мелкие ущербы делятся в соответствии со stop-loss страхованием, $I(x) = x \wedge k^*$, и ущерб клиента полностью оплачивается страховщиком, если он не превосходит k^* . Вид $I^*(x)$, как и дележа "stop-loss" перестрахования $A^*(x)$, приведен на Рис. 2.

На долю клиента остается "средняя" часть его исходного риска, $Y - I^*(Y) = (Y - k^*)_+ \wedge q$. После заключения сделки на перестрахование доля риска, оплачиваемая страховщиком, есть кусочно-линейная функция $A^*(I^*(Y)) = I^*(Y) \wedge a^*$, «срезанная» уровнем удержания страховщика $a^* (> k^*)$, – максимальной суммой, которую он возмещает клиенту.

Замечание 2. Если дополнительно предположить, что перестраховщик, как и в п. 3.1, устанавливает верхнюю границу Q своего допустимого риска, т.е. функция дележа страховщика $A(x) \geq (x - Q)_+$, то повторением рассуждений в теореме 1 легко показать, что оптимальный дележ A^* в (10) будет иметь вид "stop loss" перестрахования с верхним пределом $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - Q)$. При этом вид оптимального дележа страхования останется прежним, $I^*(x) = (x \wedge k^*) \vee (x - q)$, а параметры k^* и a^* связаны тем же соотношением $k^* = a^*(1 - \delta)$.

4. Пример

Рассмотрим численный пример, иллюстрирующий теорему 2 для случая, когда выплаты имеют равномерное распределение на интервале $[0, 10]$. Пусть заданы коэффициенты α и α_1 нагрузки страховщика и перестраховщика, и задано значение верхней границы q риска клиента, остающегося после страхования, $Y - I(Y) \leq q$ п.н. Определение параметров k^* и a^* оптимального страхования и перестрахования в за-

даче (10) состоит в решении уравнения (11), в котором сейчас интегралы легко выражаются через элементарные функции. Получив решение a^* этого уравнения (после подстановки $k = (1 - \delta)a$, где $\delta = 1 - \alpha/\alpha_1$ и $\bar{F}(x) = 1 - 0,1x$, $x \in [0, 10]$), находим уровень удержания страховщика $k^* = (1 - \delta)a^*$. Согласно теоремы 2, минимум коэффициента вариации достигается на "stop loss" перестраховании $A^*(x) = x \wedge a^*$ и комбинации "stop-loss" страхования и франшизы $I^*(x) = (x \wedge k^*) \vee (x - q)$. Результаты численного расчета при $\alpha_1 = 1$ и различных значениях q и α приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\alpha = 0,6$							
q	1	2	3	4	5	6	7
k^*	3,409	2,932	2,465	2,010	1,570	1,151	0,760
a^*	5,681	4,887	4,108	3,350	2,617	1,918	1,268
J^*	8,632	7,298	6,028	4,824	3,695	2,651	1,709
$\alpha = 0,7$							
q	1	2	3	4	5	6	7
k^*	2,624	2,196	1,789	1,407	1,053	0,733	0,453
a^*	3,749	3,137	2,556	2,010	1,504	1,046	0,647
J^*	5,991	4,966	4,007	3,117	2,306	1,584	0,966

Как видно из табл. 1, с ростом верхней границы q риска клиента, остающегося после страхования, уменьшается значение J^* оптимального (т.е. минимального) коэффициента вариации. Действительно, такой рост q означает расширение множества допустимых дележей страхования $\{I(x) : (x - q)_+ \leq I(x) \leq x\}$ и, как следствие, уменьшение оптимального J^* .

С увеличением коэффициента α нагрузки страховщика увеличивается знаменатель в выражении (10) для целевого функционала $J[I, A]$

или, иными словами, увеличивается среднее значение капитала страховщика в единицу времени. Это позволяет уменьшить значение оптимума J^* , уменьшая снижением уровней k^* и a^* как оплачиваемый страховщиком риск клиента $I^*(Y) = (Y \wedge k^*) \vee (Y - q)$, так и остаточный риск $A^*(I^*(Y)) = I^*(Y) \wedge a^*$ страховщика после перестрахования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Пусть $\{I_n, A_n\}$ — минимизирующая последовательность допустимых дележей в задаче (5), т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[I_n, A_n] = J^* \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{(I, A)} J[I, A].$$

Применяя теорему Хэлли отдельно к числителю и знаменателю в целевом функционале, получаем, что существует подпоследовательность пар случайных величин $\{I_m(Y), A_m(I_m(Y))\}$, слабо сходящаяся к некоторому пределу (ρ, ξ) . Для доказательства того, что $(\rho$ и $\xi)$ есть собственные случайные величины, иными словами $P\{\rho < \infty, \xi < \infty\} = 1$, достаточно заметить, что в силу определения функций дележа $I_m(Y) \leq Y$ и $A_m(I_m(Y)) \leq Y$ п.н. Поскольку ρ измерима относительно сигма-алгебры $\sigma(Y)$ и $(Y - q)_+ \leq \rho \leq Y$, то эта случайная величина может быть представлена как $\rho = I^*(Y)$ для некоторой борелевской функции $(x - q)_+ \leq I^*(x) \leq x$. Аналогично другой предел может быть представлен в виде $\xi = A^*(I^*(Y))$, где $(x - Q)_+ \leq A^*(x) \leq x$ — дележ перестрахования.

Покажем, что найденные дележи допустимы в смысле положительности знаменателя в (5). Предположим противное, $E A^*(Y^*) - M = 0$, где $Y^* = I^*(Y)$ и $M = \text{del} E Y^* > 0$. Найдем решение задачи

$$(14) \quad \inf_{A: E A(Y^*) = M} E A^2(Y^*).$$

Повторяя рассуждения в теореме 1 с учетом того, что $E A^2(Y^*)$ выпукла

по A , получим: оптимальный в (14) дележ $A_M(x)$ совпадает с решением задачи

$$\min_I \int_0^\infty A_M(x) A(x) dF^*(x) \text{ с ограничением } \int_0^\infty A(x) dF^*(x) = M,$$

где $F^*(x) \stackrel{def}{=} P\{Y^* \leq x\}$. Согласно обобщенной лемме Неймана-Пирсона (см. [12]), допустимая функция дележа A_M оптимальна в такой задаче тогда и только тогда, когда существует константа a такая, что

$$A_M(x) = \begin{cases} (x - Q)_+ & \text{если } A_M(x) - a > 0 \\ x & \text{если } A_M(x) - a < 0 \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой F^* -меры. Аналогично рассуждениям в теореме 1 легко показать, что единственной функцией, удовлетворяющей этому условию, будет $A_M(x) = (x \wedge a) \vee (x - Q)_+$, где a определяется уравнением $E[(Y^* \wedge a) \vee (Y^* - Q)_+] = M$. Таким образом, $E[A^*(Y^*)]^2 \geq E[A_M(Y^*)]^2 > 0$ и $E A_m^2(I_m(Y)) \geq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ равномерно по m . Но тогда предположение $E A_m(I_m(Y)) - \delta E I_m(Y) \downarrow 0$ противоречит тому, что $\{I_m, A_m\}$ является минимизирующей последовательностью для $J[I, A]$.

Равенство $J^* = J[I^*, A^*]$ теперь следует из слабой сходимости $\{I_m(Y), A_m(I_m(Y))\}$ и конечности математических ожиданий $E[A^*(I^*(Y))^2]$, $E A^*(I^*(Y))$ и $E I^*(Y)$. $\square$

Список литературы

- [1] *Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J.*
Actuarial Mathematics. Itaca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986.
- [2] *Голубин А.Ю.* Математические модели в теории страхования: построение и оптимизация. М.: АНКЛ, 2003.

- [3] *Hipp C., Vogt M.* Optimal Dynamical XL Reinsurance // ASTIN Bulletin. 2003. V. 33. P. 193-207.
- [4] *Schmidli H.* On Minimizing the Ruin Probability by Investment and Reinsurance // Annals of Applied Probability. 2002. V. 12. P. 890-907.
- [5] *Белкина Т.А., Чеканина С.В.* Оптимальное управление инвестициями в динамической модели страхования // В сб. «Моделирование механизмов функционирования экономики России на современном этапе». Вып. 5. С. 101-118. М.: ЦЭМИ РАН, 2001.
- [6] *Luo Sh., Taksar M., Tsoi A.* On Reinsurance and Investment for Large Insurance Portfolios // Insurance Math. Econom. 2008. V. 42. P. 434-444.
- [7] *Gollier, C.* Insurance and Precautionary Capital Accumulation in a Continuous-Time Model // Journal of Risk and Insurance. 1994. V. 61. P.78-95.
- [8] *Golubin A.Y.* Optimal Insurance and Reinsurance Policies in the Risk Process // ASTIN Bulletin. 2008. V. 38. No. 2 P. 383-398.
- [9] *Голубин А.Ю., Гридин В.Н.* Оптимальные стратегии страхования в процессе риска с ограничениями на риски страхователей // Автоматика и телемеханика. 2010. Т. 71. В. 8 С. 79-91.
- [10] *Голубин А.Ю., Гридин В.Н., Газов А.И.* Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием // Автоматика и телемеханика. 2009. Т. 70. В. 8 С. 133-144.
- [11] *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978.

[12] *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.

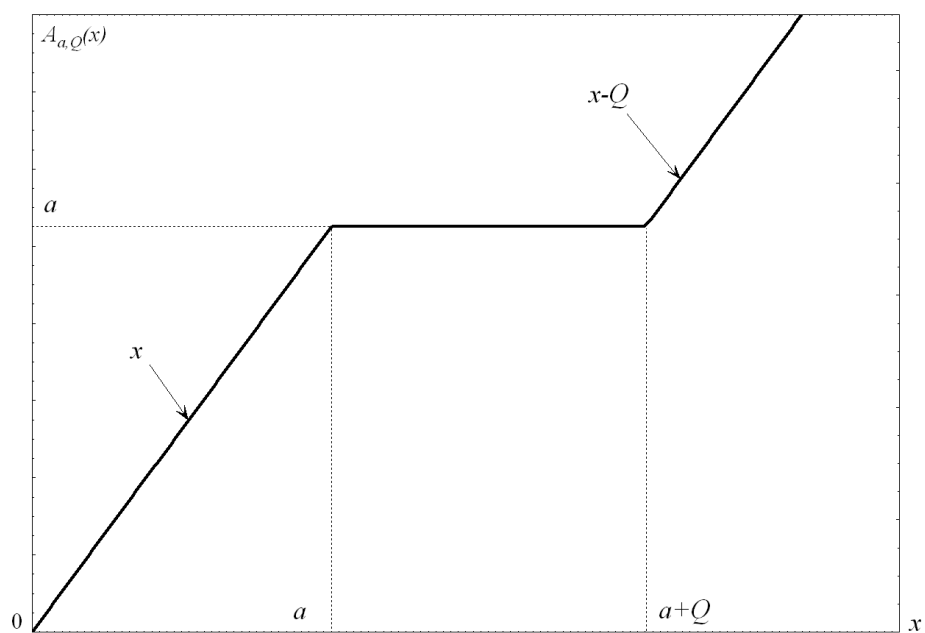


Рис. 1: Функция дележа "stop loss" перестрахования с верхним пределом.

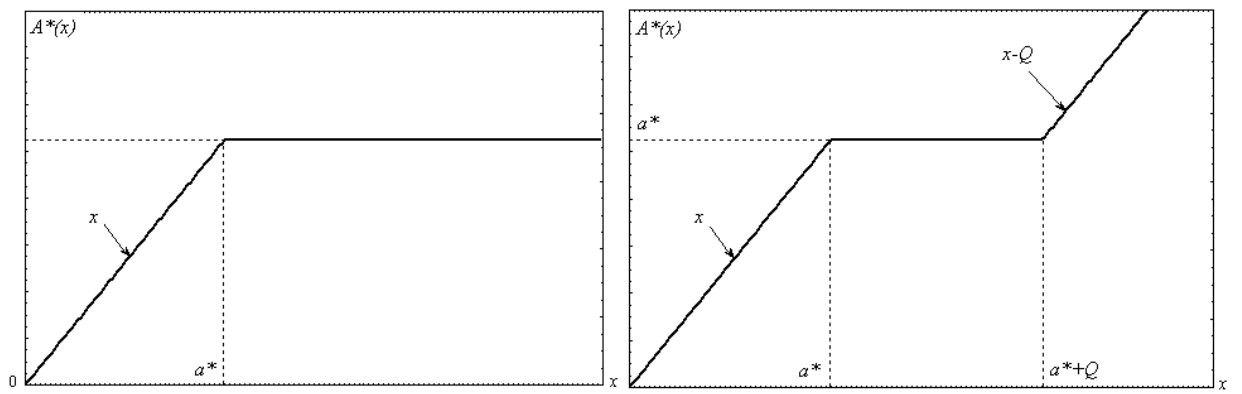


Рис. 2: Оптимальные функции дележа: перестрахования $A^*(x)$ и страхования $I^*(x)$.