ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Е.В. Панов

СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ В СЛУЧАЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ РАЗЛИЧНОЙ ЧАСТОТНОСТИ

Препринт WP2/2005/05

Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Москва
ГУ ВШЭ
2005

УДК 519.246
ББК 22.172
П 16

П 16 **Панов Е.В.** Состоятельная оценка ковариационной матрицы в случае временных рядов различной частотности. Препринт WP2/2005/05. — М.: ГУ ВШЭ, 2005. — 24 с.

Предложено обобщение оценки ковариационной матрицы Ньюи и Веста на случай временных рядов различной частотности и/или с пропусками. Как и оценка Ньюи — Веста, предложенная оценка является одновременно и состоятельной и положительно полуопределенной при достаточно общих предположениях о свойствах исходных временных рядов (наложены некоторые ограничения на гетероскедастичность, авто- и кросс- коррелированность, а также на зависимость от случайного вектора параметров). Приведены примеры методического характера, иллюстрирующие полученные результаты.

Классификация JEL: C14, C32

Ключевые слова: ковариационная матрица, частотность, пропущенные данные.

УДК 519.246
ББК 22.172

Panov E.V. Consistent and positive semi-definite estimator of covariance matrix for the time series of different frequencies. Working paper WP2/2005/05. — Moscow: State University — Higher School of Economics, 2005. — 24 p. (in Russian).

The paper extends the Newey-West covariance matrix estimator to the case of time series of different frequencies and/or having gaps. Similarly to Newey — West matrix, the estimator proposed is consistent and positive semi-definite under fairly general assumptions about properties of time series (some restrictions are imposed on heteroskedasticity, auto- and cross- correlations as well as on dependence on a random parameter vector). An example of a methodic kind is given to illustrate the results reported.

JEL Classification: C14, C32
Key phrases: covariance matrix, frequency, omitted data.

Препринты ГУ ВШЭ размещаются на сайте: http://www.hse.ru/science/preprint

1. Введение и постановка задачи. Конструкция оценки ковариационной матрицы в случае, когда пропущенных данных нет

В практических задачах часто встречаются временные ряды различной частотности. К примеру, ВВП многих стран доступен в годовом выражении, а, скажем, в помесячном — недоступен. В то время как в помесячном выражении доступны, скажем, индексы цен производителей в России. Приросты индексов цен на жилье в США доступны в поквартальном выражении, а, скажем, доходности акций или изменения курсов валют или соответствующих индексов доступны с частотой намного превышающей раз в сутки. Для свопов на отказ от кредитных обязательств[1] котировки доступны, как правило, не для всех дней, а нерегулярно несколько раз в неделю[2].

Примером многомерного временного ряда, компоненты которого доступны с различной частотностью (символом $\bullet$ обозначены места, где значение ряда недоступно) может быть ряд

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \bullet \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ \bullet \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \end{pmatrix}...$$

Рассмотрим для примера задачу, с которой может столкнуться так называемый фонд фондов[3], сравнивая исторические доходности хедж-фонда с семейством индексов доходностей хедж-фондов[4]. Фонд фондов может интересоваться целесообразностью включения в свой портфель данного хедж-фонда. Он может рассматривать данную задачу с точки зрения многомерной CAPM (см., например, [Fama, French, 1992, 1993]). И для этого ему, в частности, будет нужна надежная оценка ковариационной матрицы доходностей данного фонда, рыночного индекса[5] и семейства индексов до-

---

[1] CDS (credit default swap) — производный финансовый инструмент, получивший развитие в США в конце1990-х гг. Котировки доступны нерегулярно, поскольку не существует бирж, на которых бы котировались эти инструменты, и вся торговля производится через дилеров.

[2] По информации ассоциации MarkIt Partners (http://www.markit.com/), одного из основных источников данных о котировках свопов на отказ от кредитных обязательств.

[3] Fund of funds — хедж-фонд, инвестирующий деньги в другие хедж-фонды.

[4] Одним из признанных семейств индексов доходностей хедж-фондов является CSFB/ Tremont Hedge Fund Index (http://www.hedgeindex.com/). Это семейство, например, включает индекс доходности арбитража с конвертируемыми облигациями и индекс доходности стратегий основанных на событиях.

[5] На практике для рынка акций в США в качестве рыночного индекса зачастую используется индекс S&P500 (http://www.sandp.com/). Более подробное исследование важности выбора рыночного индекса можно найти, например, в [Low, Nayak, 2005].

ходностей хедж-фондов. Несмотря на то, что доходности хедж-фондов и их индексы, как правило, доступны в ежедневном выражении, эти данные, по мнению экспертов, вряд ли могут считаться точными (см. например [Derman, 2002]). Поэтому на практике имеет смысл пользоваться недельными доходностями. Что же касается рыночного индекса, то в этом случае дневные доходности можно считать достаточно точными. Можно сопоставить доходностям индекса и фонда соответственно последовательности случайных величин r_t^i и r_t^f (последние доступны только раз в неделю, т.е. пять рабочих дней). Пусть множества $T_1 = \{0,1,2,...T\}$, $T_2 = \{0,5,10,...5[T/5]\}$, где T — некоторое целое положительное число (квадратные скобки обозначают взятие целой части). Как тогда построить оценку для ковариационной матрицы вектора $\frac{1}{T^{1/2}}\left(\sum_{t\in T_1} r_t^i, \sum_{t\in T_2} r_t^f\right)'$ (штрих обозначает транспонирование)? Заметим, что во второй сумме слагаемых значительно меньше, чем в первой.

В данной работе строится оценка ковариационной матрицы для случая, когда данные, по которым рассчитываются значения компонент вектора, для которого строится ковариационная матрица, имеют разную частотность. Построенная оценка является положительно полуопределенной и состоятельной при $T \to \infty$ для широкого класса авто- и кросс- коррелированных и гетероскедастичных последовательностей случайных векторов.

Многие часто используемые на практике математические методы и результаты опираются на оценку ковариационной матрицы (многомерный вариант CAPM, один из вариантов теста на «возвращение к среднему»[6], тестирование коинтеграционного соотношения[7] и др.). Поэтому обладающая хорошими свойствами оценка ковариационной матрицы, полученная для рядов различных частотностей, может иметь серьезное практическое значение, расширяя применимость известных методов на этот случай.

Для случая, когда ряды имеют одинаковую частотность, различные оценки ковариационных матриц изучаются во многих работах (см., например, [Basak, Jagannathan, Ma, 2004], [Ledoit, Wolf, 2003; 2003], [Litterman, Winkelman, 1998]).

Будем обозначать через N множество натуральных чисел, через Z множество целых чисел, через R^n — n-мерное евклидово пространство.

[6] См. [Lo, McKinlay, 1989].

[7] См. [Phillips, Ouliaris, 1988].

Для случая, когда ряды имеют одинаковую частотность, задача, аналогичная рассматриваемой в данной работе, ставится следующим образом.

Рассмотрим последовательность x_t зависящих от параметра случайных векторов. Более точно, пусть (Ω, F, P) — вероятностное пространство, т.е. для каждого подмножества A, входящего в σ-алгебру F, $A \in F$, определена вероятность $P(A)$. Пусть $\Theta \subseteq R^p$ — компактное выпуклое множество. При каждом $t \in Z$ рассматривается функция x_t: $\Omega \times \Theta \to R^n$, которая для любого $\theta \in \Theta$ является измеримой функцией аргумента $\omega \in \Omega$, т.е. является $(n \times 1)$ случайным вектором. Этот случайный вектор мы будем обозначать иногда как $x_t(\omega, \theta)$, иногда как $x_t(\theta)$, иногда как x_t.

Пусть для некоторого $\tau \in Z$, $\tau \geq 0$, определена измеримая функция

$$\Phi : R^{n(\tau+1)} \to R^q.$$

Будем использовать обозначение

$$\rho_t = \Phi(x_t, x_{t-1}, ..., x_{t-\tau}),$$

где $t \in Z$. Далее для упрощения изложения будем считать, что при любом $\theta \in \Theta$ $(q \times 1)$ случайные вектора ρ_t имеют нулевые ожидания:

$$E(\rho_t) = 0, \ \forall t \in Z.$$

Определим $(q \times 1)$ случайный вектор $R_T = \frac{1}{T^{1/2}}\left(\sum_{t=1}^{T} \rho_t\right)$ и рассмотрим его ковариационную матрицу S_T. Матрица S_T, ввиду того, что $E(\rho_t) = 0$, имеет вид

$$S_T = E\left(\left(\frac{1}{T^{1/2}}\sum_{t=1}^{T}\rho_t\right)\left(\frac{1}{T^{1/2}}\sum_{t=1}^{T}\rho_t\right)'\right). \tag{1}$$

Продолжая ряд исследований, Ньюи и Вест [Newey, West, 1987] строят оценку

$$\hat{S}_T = \hat{Q}_0 + \sum_{k=1}^{m} w_{km}\left(\hat{Q}_k + \hat{Q}_k'\right), \text{ где } \hat{Q}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}\rho_t\,\rho_{t-k}'.$$

При некоторых условиях, в частности, на веса w_{km} (точные формулировки приведены в разделе 3) матрица $\hat{S}_T$ является положительно полуопределенной и $\hat{S}_T - S_T \xrightarrow{P} 0$ при $T \to \infty$.

Отметим, что если последовательность случайных векторов x_t такова, что ковариационные матрицы S_T векторов R_T имеют предел[8] $S = \lim_{T\to\infty} S_T$ — некоторую $(q\times q)$ действительную матрицу[9], то только в этом случае можно говорить о состоятельности оценки при $T \to \infty$ в обычном смысле. Если этот предел не существует, то под состоятельностью оценки, следуя, например, работе [Newey, West, 1987], мы понимаем условие $\hat{S}_T - S_T \xrightarrow{p} 0$ при $T \to \infty$.

В разделе 2 дана конструкция оценки ковариационной матрицы $\hat{\Sigma}_T$ для случая временных рядов различной частотности. Если пропусков в данных нет, то оценка $\hat{\Sigma}_T$ совпадает с $\hat{S}_T$. В разделе 3 сформулированы теоремы, касающиеся положительной полуопределенности и состоятельности для оценки $\hat{S}_T$. В разделе 4 сформулированы и доказаны теоремы, касающиеся положительной полуопределенности и состоятельности для оценки $\hat{\Sigma}_T$. Примеры оценок $\hat{S}_T$ и $\hat{\Sigma}_T$ для конкретных временных рядов даны в разделе 5. Там же на примерах этих временных рядов обсуждаются вопросы сходимости.

Автор выражает благодарность А.С. Шведову за руководство работой.

2. Конструкция оценки ковариационной матрицы в общем случае

Для последовательности x_t, определенной так же, как и ранее, рассмотрим множество точек (i,t) с целыми координатами, $i = 1,2,\dots,n$; $t \in Z$. Пусть M_x — произвольное подмножество этого множества. Обозначим *i*-ю компоненту случайного вектора x_t как $x_t^{(i)}$. Будем говорить, что случайная величина $x_t^{(i)}$ доступна, если $(i,t) \in M_x$ и что не доступна, если $(i,t) \notin M_x$.

Запишем равенство $\rho_t = \Phi(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-\tau})$ покомпонентно:

$$\rho_t^{(j)} = \Phi^{(j)}\left(x_t^{(1)}, x_t^{(2)} \dots x_t^{(n)}, x_{t-1}^{(1)}, x_{t-1}^{(2)}, \dots, x_{t-k}^{(i)} \dots, x_{t-\tau}^{(n)}\right), \quad j = 1,..,q,$$

[8] Речь, для определенности, идет о пределе для $(q\times q)$-матриц, в метрике $\rho(M,L) = \sum_{i,j=1}^{q} \left|M_{ij} - L_{ij}\right|$.

[9] Матрица *S* является в этом случае симметричной и положительно полуопределенной.

и будем говорить, что функция $\Phi^{(j)}$ постоянна по $(nk+i)$-й компоненте, $k = 0,1,\dots,\tau$; $i = 1,2,\dots,n$ если для $\forall (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-\tau}) \in R^{n\tau}$ выполнено равенство:

$$\Phi^{(j)}\left(x_t^{(1)}, x_t^{(2)} \dots x_t^{(n)}, x_{t-1}^{(1)}, x_{t-1}^{(2)}, \dots, x_{t-k}^{(i)} \dots, x_{t-\tau}^{(n)}\right) =$$
$$= \Phi^{(j)}\left(x_t^{(1)}, x_t^{(2)} \dots x_t^{(n)}, x_{t-1}^{(1)}, x_{t-1}^{(2)}, \dots, 0, \dots, x_{t-\tau}^{(n)}\right)$$

Назовем случайную величину

$$\rho_t^{(j)} = \Phi^{(j)}\left(x_t^{(1)}, x_t^{(2)} \dots x_t^{(n)}, x_{t-1}^{(1)}, x_{t-1}^{(2)}, \dots, x_{t-k}^{(i)} \dots, x_{t-\tau}^{(n)}\right)$$

доступной, если для данных *t* и *j* функция

$$\Phi^{(j)}\left(x_t^{(1)}, x_t^{(2)} \dots x_t^{(n)}, x_{t-1}^{(1)}, x_{t-1}^{(2)}, \dots, x_{t-k}^{(i)} \dots, x_{t-\tau}^{(n)}\right)$$

постоянна по всем недоступным случайным величинам среди ее аргументов $x_{t-k}^{(i)}$, $k = 0..\tau$, $i = 1..n$. В противном случае назовем случайную величину $\rho_t^{(j)}$ недоступной.

Рассмотрим множество точек (j,t), $j = 1,2\dots q$, $t \in Z$. Пусть его подмножество M_ρ определено таким образом, что элемент (j,t) принадлежит M_ρ тогда и только тогда, когда случайная величина $\rho_t^{(j)}$ является доступной.

При построении оценки мы будем использовать лишь доступные случайные величины $\rho_t^{(j)}$, для которых $t = 1..T$. Это означает, что используются только те вектора x_t, для которых $t = 1-\tau..T$.

Набор случайных векторов x_t, $t = (1-\tau)..T$, будем обозначать $\{x_t\}_{1-\tau}^T$, набор случайных векторов ρ_t, $t = 1..T$, будем обозначать $\{\rho_t\}_1^T$.

Заметим, что каждый случайный вектор x_t в $\{x_t\}_{1-\tau}^T$ является функцией $\omega \in \Omega$ и $\theta \subseteq \Theta$, а каждый случайный вектор ρ_t из $\{\rho_t\}_1^T$ является функцией некоторых случайных векторов из $\{x_t\}_{1-\tau}^T$. Поэтому мы можем писать $x_t = x_t(\omega,\theta)$, $\rho_t = \rho_t(\omega,\theta)$.

Определим A_T как $(q\times 1)$ случайный вектор с компонентами

$$A_T^{(j)} = \frac{1}{T^{1/2}}\left(\sum_{\substack{(j,t)\in M_\rho \\ 1\le t\le T}} \rho_t^{(j)}\right), \quad j = 1..q \tag{2}$$

Заметим, что из условия $E\left(\rho_t^{(j)}\right) = 0$ при $(j,t) \in M_\rho$ следует $E(A_T) = 0$. При $M_\rho \supset (1..q)\times(1..T)$ (иными словами, когда все компоненты всех рассматриваемых векторов ρ_t доступны) случайный вектор A_T совпадает со случайным вектором R_T.

Пример

Пусть $n = 2$. Рассмотрим следующую последовательность $n \times 1$ случайных векторов x_t, компоненты элементов которой имеют различную частотность. Пусть некоторая реализация этой последовательности выглядит так:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$x_t^{(1)}$	1	–2	1	2	–3	4	–3	4	–4	3	–4	3	4	3	...
$x_t^{(2)}$	•	–1	•	•	•	•	–1	•	•	•	•	1	•	•	...

В этом случае множество M_x будет состоять из точек:

$(1,1),(1,2),(2,2),(1,3),(1,4)...(1,12),(2,12),(1,13),(1,14).$

Возьмем для примера преобразование Φ такое, что

$$\begin{cases} \Phi^{(1)}\left(x_t, x_{t-1}\right) = x_t^{(1)} \\ \Phi^{(2)}\left(x_t, x_{t-1}\right) = x_t^{(1)} \cdot x_{t-1}^{(2)} \\ \Phi^{(3)}\left(x_t, x_{t-1}\right) = x_t^{(2)} + x_{t-1}^{(2)} \end{cases}$$

Тогда реализация последовательности ρ_t будет выглядеть так:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$\rho_t^{(1)}$	1	–2	1	2	–3	4	–3	4	–4	3	–4	3	4	3	...
$\rho_t^{(2)}$	•	•	–1	•	•	•	•	–4	•	•	•	•	–4	•	...
$\rho_t^{(3)}$	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	...

множество M_ρ будет состоять из точек:

$(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(1,4)...(1,12),(1,13),(2,13),(1,14).$

Вектора $A_T\sqrt{T}$ будут следующими:

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$A_T^{(1)}\sqrt{T}$	1	–1	0	2	–1	3	0	4	0	3	–1	2	6	9	...
$A_T^{(2)}\sqrt{T}$	0	0	–1	–1	–1	–1	–1	–5	–5	–5	–5	–5	–9	–9	...
$A_T^{(3)}\sqrt{T}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

Отметим, что можно рассматривать и более общий вид различной частотности рядов, чем периодическая недоступность каких-то компонент случайного вектора. К примеру, следующего вида:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$x_t^{(1)}$	1	–2	•	2	–3	4	•	4	–4	3	–4	3	•	3	...
$x_t^{(2)}$	•	–1	–1	•	–1	•	–1	–1	•	1	•	1	0	•	...

Определим ковариационные матрицы случайных векторов A_T:

$$\Sigma_T = E\left(A_T A_T'\right) \tag{3}$$

(напомним, что $E\left(A_T\right) = 0$).

Заметим, что поскольку случайный вектор A_T является сложной функцией вида $A_T\left(\left\{\rho_t\left(\omega,\theta\right)\right\}_1^T\right)$, он зависит и от ω, и от θ ($A_T:\ \Omega\times\Theta\to R^q$). Поэтому матрица Σ_T тоже является функцией θ, т.е. $\Sigma_T = \Sigma_T\left(\theta\right)$.

Задача данной работы состоит в построении по доступным компонентам случайных векторов $\left\{\rho_t\right\}_1^T$ последовательности положительно полуопределенных случайных матриц $\hat{\Sigma}_T$, таких что $\hat{\Sigma}_T - \Sigma_T \xrightarrow{p} 0$ при $T\to\infty$.

В этой работе построена оценка вида

$$\hat{\Sigma}_T = \hat{\Psi}_0 + \sum_{k=1}^{m} w_{km}\left(\hat{\Psi}_k + \hat{\Psi}_k'\right),$$
$$\hat{\Psi}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}\left(diag(\alpha_t)\rho_t\left(\hat{\theta}_T\right)\right)\left(diag(\alpha_{t-k})\rho_{t-k}\left(\hat{\theta}_T\right)\right)' \tag{4}$$

Здесь $diag\left(\alpha_t\right)$ это диагональная $\left(q\times q\right)$ матрица, по диагонали которой стоят компоненты $\left(q\times 1\right)$-вектора α_t. Вектора же α_t определены для $t\in N$ как последовательность $\left(n\times 1\right)$-векторов, такая что $\alpha_t^{(j)} = 1$, если $(j,t)\in M_\rho$ и $\alpha_t^{(j)} = 0$ в противном случае ($\alpha_t^{(j)}$ это *j*-я компонента вектора α_t). Предел суммирования *m* рассматривается как функция $T: m = m(T)$.

В определении случайных матриц $\hat{\Psi}_k$ участвуют $(p\times 1)$ случайные вектора $\hat{\theta}_T$. Фактически, речь может идти о двух классах задач.

I. $\hat{\theta}_T = \theta^*$ является фиксированной точкой множества Θ и не зависит от *T* (например, в задачах многопериодной оптимизации портфеля). Для этого класса задач можно было бы вместо функций $x_t:\ \Omega\times\Theta\to R^n$ рассматривать функции $x_t:\ \Omega\to R^n$.

II. $\hat{\theta}_T$ является последовательностью случайных векторов (способ построения которых для данной работы несущественен), сходящейся к некоторому вектору θ^*, заранее неизвестному, как, к примеру, это делается в симуляционном методе моментов (описание симуляционного метода моментов дано, например, в [Шведов, 2005], там же можно найти ссылки на оригинальные работы.)

Читатель, интересующийся только первым классом задач, может считать, что $\hat{\theta}_T$ при любом $T=1..\infty$ тождественно некоторому значению θ^*, не зависящему от *T*.

В данной работе доказано, что оценка $\hat{\Sigma}_T$ является положительно полуопределенной для любого m, при условии что веса w_{km} для этого m могут быть представлены в виде:

$$w_{km}=\frac{\sum_{j=k}^{m}\xi_j\xi_{j-k}}{\sum_{j=0}^{m}\xi_j^{\,2}},\quad \left(k\in(0..l),\ \ \xi_j\in R,\ \ \forall j\in(0..m),\ \ \sum_{j=0}^{l}\xi_j^{\,2}>0\right).$$

Будем называть данное условие на веса w_{kl} *Условием 1*.

Далее в данной работе доказано, что данная оценка является состоятельной оценкой $\Sigma(\theta)$, если

1) веса w_{kl} для любых $m\in N, k=1..m$ удовлетворяют ограничению $|w_{km}|\le C$ для некоторого конечного *C*, а также $\forall k:\lim\limits_{m\to\infty}w_{km}=1$

2) $m=m(T)$ такова, что $\lim\limits_{T\to\infty}m(T)=+\infty$ и $\lim\limits_{T\to\infty}m(T)T^{-1/4}=0$

Будем называть данное условие на веса w_{km} *Условием 2*.

К примеру, Условию 1 и Условию 2 одновременно будет удовлетворять набор весов $w_{km}=1-\dfrac{k}{m+1}$ (в этом случае $\xi_j=1$ для любого $j\in(0..m)$ и любого $m=0,1,2...$).

3. Теоремы о положительной полуопределенности и состоятельности для многомерных временных рядов без пропущенных данных

В работе [Newey, West, 1987] доказаны следующие две теоремы.

Теорема NW1. При выполнении Условия 1 на веса w_{km} матрица $\hat{S}_T$ является положительно полуопределенной.

Доказательство этой теоремы представлено в [Newey, West, 1987] и, главным образом, опирается на результат [McLeod, Jimenez, 1984]. См. также [Шведов, 2005, с. 128—132].

Теорема NW2. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) При любом $t\in Z$

$$\rho_t(\omega,\theta)=\Phi\big(x_t(\omega,\theta),x_{t-1}(\omega,\theta),...x_{t-\tau}(\omega,\theta)\big)$$

как сложная функция $\Omega\times\Theta\to R^q$, измерима на Ω при любом $\theta\in\Theta$ и с вероятностью 1 непрерывно дифференцируема по θ в некоторой окрестности *B* точки θ^* — внутренней точки множества Θ.

2) (а) Существует измеримая функция $\Xi(\omega)$, такая что для любого $\theta\in\Theta$, для любого целого *t* и любого $\omega\in\Omega$ верно что $\sup\limits_{\theta\in B}\left|\rho_t(\omega,\theta)\right|<\Xi(\omega)$ и $\sup\limits_{\theta\in B}\left|\dfrac{\partial}{\partial\theta}\rho_t(\omega,\theta)\right|<\Xi(\omega)$, причем для некоторой константы $D_\Xi>0$ выполнено $E\left(\Xi(\omega)^2\right)<D_\Xi$.

(б) Существуют константы $D>0$, $\delta>0$ и $r\ge1$, такие что для любого целого *t* и любого $i=1..q$ верно что $E\left(\left|\rho_t^{(i)}(\omega,\theta^*)\right|^{4(r+\delta)}\right)<D$.

3) Для любого $\theta\in\Theta$ последовательность $x_t(\theta)$ обладает свойством ϕ-перемешивания с коэффициентами перемешивания $\phi(k)$ размера $2r/(2r-1)$, либо обладает свойством α-перемешивания с коэффициентами перемешивания $\alpha(k)$ размера $2r/(r-1)$ для некоторого $r>1$.

4) Случайная величина $\hat{\theta}_T:\Omega\to\Theta$ такова, что $\sqrt{T}\left(\hat{\theta}_T-\theta^*\right)$ сходится по распределению к некоторой случайной величине при $T\to\infty$.

Тогда при выполнении Условия 2 на веса w_{km}

$$\hat{S}_T\left(\left\{\rho_t\left(\hat{\theta}_T\right)\right\}_1^T\right)-S_T\left(\theta^*\right)\xrightarrow{P}0 \text{ при } T\to\infty \qquad (5)$$

4. Теоремы о положительной полуопределенности и состоятельности для многомерных временных рядов в общем случае

Для элементов ковариационной матрицы Σ_T вектора A_T в соответствии с формулами (2) и (3) имеем

$$\Sigma_T^{(i,j)} = E\left(\left(\frac{1}{T^{1/2}}\sum_{\substack{(j,t)\in M_\rho \\ 1\le t\le T}} \rho_t^{(i)}\right)\left(\frac{1}{T^{1/2}}\sum_{\substack{(j,t)\in M_\rho \\ 1\le t\le T}} \rho_t^{(j)}\right)'\right) \quad (6)$$

$$i = 1..q, \quad j = 1..q$$

Пусть оценка $\hat{\Sigma}_T$ построена по формуле (4).

Теорема 1. При выполнении Условия 1 на веса w_{km} матрица $\hat{\Sigma}_T$ является положительно полуопределенной.

Доказательство теоремы 1.

Определим $(q\times 1)$ случайные вектора $\varsigma_t = diag(\alpha_t)\rho_t$, тогда заметим что $\hat{\Sigma}_T = \hat{\Psi}_0 + \sum_{k=1}^{m(T)} w_{km}\left(\hat{\Psi}_k + \hat{\Psi}'_k\right)$, $\hat{\Psi}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=1+k}^{T}\varsigma_t\varsigma'_{t-k}$, иными словами оценка $\hat{\Sigma}_T$ представляет собой оценку $\hat{S}_T$, в которой взят ряд ς_t вместо ряда ρ_t. Из условия $E(\rho_t) = 0$ следует $E(\varsigma_t) = 0$. Положительная определенность матрицы $\hat{S}_T$ следует из теоремы NW1.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) При любом $(j,t)\in M_\rho$

$$\rho_t^{(j)}(\omega,\theta) = \Phi^{(j)}\left(x_t(\omega,\theta), x_{t-1}(\omega,\theta),\ldots x_{t-\tau}(\omega,\theta)\right)$$

как сложная функция $\Omega\times\Theta \to R^q$, измерима на Ω при любом $\theta\in\Theta$ и с вероятностью 1 непрерывно дифференцируема по θ в некоторой окрестности B точки θ^* — внутренней точки множества Θ.

2) (а) Существует измеримая функция $\Xi(\omega)$, такая что для любого $\theta\in\Theta$, для любого целого *t* и любого $\omega\in\Omega$ верно что $\sup_{\theta\in B}\left|\rho_t(\omega,\theta)\right| < \Xi(\omega)$ и $\sup_{\theta\in B}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\rho_t\right| < \Xi(\omega)$, причем для некоторой константы D_Ξ выполнено $E\left(\Xi(\omega)^2\right) < D_\Xi$.

(б) Существуют конечные константы $D > 0$, $\delta > 0$ и $r > 1$, такие что для любого натурального *t* и любого $i = 1..q$, таких что $(i,t)\in M_\rho$ выполняется $E\left(\left|\rho_t^{(i)}(\omega,\theta^*)\right|^{4(r+\delta)}\right) < D$.

3) Для любого $\theta\in\Theta$ последовательность $x_t(\theta)$ обладает свойством ϕ-перемешивания с коэффициентами перемешивания $\phi(k)$ размера $2r/(2r-1)$, либо обладает свойством α-перемешивания с коэффициентами перемешивания $\alpha(k)$ размера $2r/(r-1)$ для некоторого $r > 1$.

4) Случайная величина $\hat{\theta}_T : \Omega \to \Theta$ такова, что $\sqrt{T}\left(\hat{\theta}_T - \theta^*\right)$ сходится по распределению к некоторой случайной величине при $T\to\infty$.

Тогда при выполнении Условия 2 на веса w_{km}

$$\hat{\Sigma}_T\left(\left\{\rho_t\left(\hat{\theta}_T\right)\right\}_1^T\right) - \Sigma_T\left(\theta^*\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ при } T\to\infty \quad (7)$$

Доказательство теоремы 2.

Как и в доказательстве теоремы 1 определим $(q\times 1)$ случайные вектора $\varsigma_t = diag(\alpha_t)\rho_t$.

Заметим, что последовательность случайных векторов ρ_t получена из последовательности случайных векторов x_t посредством преобразования $\rho_t = \Phi\left(x_t, x_{t-1},\ldots,x_{t-\tau}\right)$.

Поэтому по теореме П5 (см. Приложение), для последовательности случайных векторов ρ_t верно что либо коэффициенты перемешивания $\phi(k)$ имеют размер $2r/(2r-1)$, либо коэффициенты перемешивания $\alpha(k)$ имеют размер $2r/(r-1)$ (поскольку это выполняется и для x_t, где Φ — измеримая функция).

И заметим также, что и для последовательности случайных векторов $\varsigma_t = diag(\alpha_t)\rho_t$ верно, что либо коэффициент перемешивания $\phi(k)$ имеет размер $2r/(2r-1)$, либо коэффициент перемешивания $\alpha(k)$ имеет размер $2r/(r-1)$ (поскольку это выполняется и для ρ_t, а умножение на конечномерный вектор, зависящий от *t* — измеримая функция при любом *t*).

Очевидно, что $\Sigma_T^{(i,j)}$ может быть представлено в виде

$$\Sigma_T^{(i,j)} = E\left(\left(\frac{1}{T^{1/2}}\sum_{t=1}^{T}\alpha_t^{(i)}\rho_t^{(i)}\right)\left(\frac{1}{T^{1/2}}\sum_{t=1}^{T}\alpha_t^{(j)}\rho_t^{(j)}\right)\right) =$$

$$= E\left(\left(\frac{1}{T^{1/2}}\sum_{t=1}^{T}\varsigma_t^{(i)}\right)\left(\frac{1}{T^{1/2}}\sum_{t=1}^{T}\varsigma_t^{(j)}\right)\right),$$

а $\hat{\Sigma}_T$ в виде

$$\hat{\Sigma}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varsigma_t\varsigma'_t + \sum_{k=1}^{m(T)} w_{km}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}\varsigma_t\varsigma'_{t-k} + \frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}\varsigma_{t-k}\varsigma'_t\right)$$

Заметим, что последовательность случайных векторов $\varsigma_t = diag(\alpha_t)\rho_t$ удовлетворяет всем условиям теоремы NW2.

Действительно,

1) $\varsigma_t(\omega,\theta) = diag(\alpha_t)\rho_t(\omega,\theta)$,

а $\rho_t(\omega,\theta) = \Phi(x_t(\omega,\theta), x_{t-1}(\omega,\theta),..., x_{t-\tau}(\omega,\theta))$ измерима на Ω при любом $\theta \in \Theta$ и непрерывно дифференцируема по θ при любом $\omega \in \Omega$ в некоторой окрестности B точки θ^* с вероятностью 1

2) так как для $\rho_t(\omega,\theta)$ верно

$\forall \omega \in \Omega : \sup_{\theta \in B} |\rho_t(\omega,\theta)| < \Xi(\omega), \ \sup_{\theta \in B} \left|\frac{\partial}{\partial \theta}\rho_t\right| < \Xi(\omega),$ то и

$\forall \omega \in \Omega : \sup_{\theta \in B} |\varsigma_t(\omega,\theta)| < \Xi(\omega), \ \sup_{\theta \in B} \left|\frac{\partial}{\partial \theta}\varsigma_t\right| < \Xi(\omega),$ где $E\left(\Xi(\omega)^2\right) < D_\Xi$

и $E\left(\left|\varsigma_t^{(i)}(\omega,\theta)\right|^{4(r+\delta)} \right) < D$ для некоторых констант D_Ξ и D.

3) выше доказано, что коэффициенты перемешивания для последовательности случайных векторов ς_t имеют тот же размер, что и для последовательности x_t, т.е. либо $\phi(k)$ имеет размер $2r/(2r-1)$, либо $\alpha(k)$ имеет размер $2r/(r-1)$.

Выполнение условия 4) теоремы NW2 очевидно.

Итак, применяя теорему NW2 для последовательности случайных векторов $\varsigma_t = diag(\alpha_t)\rho_t$, мы получаем, что $\hat{\Sigma}_T - \Sigma_T \xrightarrow{p} 0$ при $T \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

5. Состоятельные оценки для конкретных примеров временных рядов

В этом разделе дается положительный ответ на вопрос о том, существуют ли такие многомерные временные ряды, для которых построенная оценка $\hat{\Sigma}_T$ является состоятельной в обычном смысле, т.е. существует $(q \times q)$ — матрица Σ, такая что $\hat{\Sigma}_T \xrightarrow{p} \Sigma$ при $T \to \infty$.

Предположим, два финансовых инструмента имеют дневные аномальные доходности[10], которым мы сопоставим следующие последовательности случайных величин z_t и y_t.

[10] По вопросу о том, какие доходности называются аномальными см., например, [Fama, French, 1992, 1993], [Banz, 1981], [Keim, 1983, 1989].

Причем, будем считать, что z_t, y_t генерируются следующим процессом:

$$z_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

$$y_t = \varepsilon_t + \eta_t,$$

где $[\varepsilon_t]_0^T$ и $[\eta_t]_0^T$ — два независимых белых шума. Это означает, что при любом t $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\eta_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$, $E(\eta_t^2) = \sigma_\eta^2$, и для любых моментов времени $t_1, t_2...t_k, \tau_1, \tau_2...\tau_l$ случайные величины $\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2}...\varepsilon_{t_k}, \eta_{\tau_1}, \eta_{\tau_2}...\eta_{\tau_l}$ независимы.

Кумулятивные аномальные доходности $Z_t = \sum_{\tau=1}^{t} z_\tau$ и $Y_t = \sum_{\tau=1}^{t} y_\tau$ будут тогда выражаться через ε_t и η_t как $Z_t = \theta_1\varepsilon_0 + \varepsilon_t + \sum_{\tau=1}^{t-1}(1+\theta_1)\varepsilon_\tau$ и $Y_t = \sum_{\tau=1}^{t}\eta_\tau + \sum_{\tau=1}^{t}\varepsilon_\tau$.

Пример с рядами одинаковой частотности

Предположим, что нам известны аномальные доходности обоих инструментов за каждый день — без пропусков.

Тогда определим последовательность случайных (2×1)-векторов x_t как $x_t = (z_t \quad y_t)'$. И определим последовательность случайных (2×1)-векторов $\rho_t\left(\{x_t\}_1^T\right)$ как $\rho_t = x_t$.

Для такой последовательности случайных векторов случайные матрицы $\hat{\Psi}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}(diag(\alpha_t)\rho_t)(diag(\alpha_{t-k})\rho_{t-k})'$

будут иметь ожидания

$$E(\hat{\Psi}_k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2) & \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}, & k = 0 \\ \frac{T-1}{T}\begin{pmatrix} \theta_1\sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ \theta_1\sigma_\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix}, & k = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & k > 1 \end{cases}$$

Дисперсии же случайных матриц $\hat{\Psi}_k$ будут сходиться к нулевым тензорам при $T \to \infty$.

Выведем, к примеру, левый нижний элемент матрицы $E\left(\hat{\Psi}_1\right)$:

$$E\left(\Psi_1^{(2,1)}\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} E\left(\rho_t^{(2)}, \rho_{t-1}^{(1)}\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} E\left(x_t^{(2)}, x_{t-1}^{(1)}\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} E\left(z_t, y_{t-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} E\left(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \eta_{t-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\left(E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}\right) + \theta E\left(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}\right) + E\left(\varepsilon_t \eta_{t-1}\right) + \theta E\left(\varepsilon_{t-1}\eta_{t-1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\left(0 + \theta E\left(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}\right) + 0 + \theta\cdot 0\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\theta\sigma_\varepsilon^2 = \frac{T-1}{T}\theta\sigma_\varepsilon^2$$

Согласно формуле (4) для любого $m = m(T) > 0$ оценка $\hat{\Sigma}_T$ будет иметь ожидание

$$E\left(\hat{\Sigma}_T\right) = E\left[\hat{\Psi}_0 + \sum_{k=1}^{m(T)} w_{km}\left(\hat{\Psi}_k + \hat{\Psi}'_k\right)\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2\left(1 + 2\left(\frac{T-1}{T}\right)\theta_1 w_{1m} + \theta_1^2\right) & w_{1m}\left(1 + \frac{T-1}{T}\theta_1\right)\sigma_\varepsilon^2 \\ w_{1m}\left(1 + \frac{T-1}{T}\theta_1\right)\sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что при $T \to \infty$

$$E\left(\hat{\Sigma}_T\right) \to \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2\left(1 + 2\theta_1 + \theta_1^2\right) & (1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2 \\ (1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

поскольку по условиям теоремы 2 $w_{1m} \to 1$ при $m(T) \to \infty$. Поэтому, с учетом сходящихся к нулю дисперсий мы имеем

$$\hat{\Sigma}_T \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} (1+\theta_1)^2\sigma_\varepsilon^2 & (1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2 \\ (1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Отметим, что согласно формуле (2) вектор A_T в этом случае будет

равен $A_T = \frac{1}{T^{1/2}}\cdot\begin{pmatrix} Z_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{T^{1/2}}\begin{pmatrix} \theta_1\varepsilon_0 + \varepsilon_T + \sum_{\tau=1}^{T-1}(1+\theta_1)\varepsilon_\tau \\ \sum_{\tau=1}^{T}\varepsilon_\tau + \sum_{\tau=1}^{T}\eta_\tau \end{pmatrix}.$

И его ковариационная матрица будет

$$\Sigma_T = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2\left(\theta_1^2 + (T-1)(1+\theta_1)^2\right)/T & (T-1)(1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2/T \\ (T-1)(1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2/T & \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что эта матрица при $T \to \infty$ стремится к

$$\Sigma_T \to \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1)^2 & \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1) \\ \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1) & \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Заметим, что пределы для $\hat{\Sigma}_T$ и Σ_T в (8) и (9) конечны и совпадают.

Пример с рядами различной частотности

Теперь представим себе, что известны дневные аномальные доходности первого инструмента z_t, для второго же инструмента известны только недельные аномальные доходности $\tilde{y}_t$. И известны они не каждый день, а только раз в пять дней.

Вектора аномальных доходностей (случайные вектора x_t) будут иметь вид

$$x_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} z_2 \\ \bullet \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} z_3 \\ \bullet \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} z_4 \\ \bullet \end{pmatrix},$$

$$x_5 = \begin{pmatrix} z_5 \\ \bullet \end{pmatrix},\ x_6 = \begin{pmatrix} z_6 \\ \tilde{y}_6 \end{pmatrix},\ x_7 = \begin{pmatrix} z_7 \\ \bullet \end{pmatrix}\ldots$$

Получим из них вектора ρ_t через тождественное отображение $\rho_t = x_t$. Поскольку $\tilde{y}_t$ — недельные аномальные доходности, то

$$\tilde{y}_t = \begin{cases} \sum_{\tau=t-4}^{t}\varepsilon_\tau + \sum_{\tau=t-4}^{t}\eta_\tau, & t \in \{1, 6, 11..(5k+1)\ldots\} \\ \bullet, & t \notin \{1, 6, 11..(5k+1)\ldots\} \end{cases}.$$

В этом случае случайные матрицы $\hat{\Psi}_k$ будут иметь ожидания

$$E\left(\hat{\Psi}_k\right)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^{\,2}\right) & \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right](1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2\\ \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right](1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2 & \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right]\cdot 5\left(\sigma_\varepsilon^2+\sigma_\eta^2\right)\end{pmatrix}, & k=0\\[2ex] \begin{pmatrix}\left(\frac{T-1}{T}\right)\theta_1\sigma_\varepsilon^2 & \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right](1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2\\ \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right]\theta_1\sigma_\varepsilon^2 & 0\end{pmatrix}, & k=1\\[2ex] \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right](1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, & k=2\\[2ex] \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right](1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, & k=3\\[2ex] \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right]\sigma_\varepsilon^2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, & k=4\\[2ex] \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, & k\ge 5\end{cases}$$

Дисперсии случайных матриц $\hat{\Psi}_k$, как и в предыдущем примере, будут сходиться к нулевым тензорам при $T\to\infty$.

Напомним, что квадратные скобки обозначают взятие целой части.

Для любого $m=m(T)>0$ оценка $\hat{\Sigma}_T$ будет иметь ожидание

$$E\left(\hat{\Sigma}_T\right)=E\left[\hat{\Psi}_0+\sum_{k=1}^{m(T)}w_{km}\left(\hat{\Psi}_k+\hat{\Psi}'_k\right)\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon^2\left(1+2\left(\frac{T-1}{T}\right)\theta_1 w_{1m}+\theta_1^{\,2}\right) & \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right]\sigma_\varepsilon^2\cdot\begin{pmatrix}1+w_{1m}+w_{2m}+\\ +w_{3m}+w_{4m}+\\ +\theta_1\cdot\begin{pmatrix}1+2w_{1m}+\\ +w_{2m}+w_{3m}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\ \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right]\sigma_\varepsilon^2\cdot\begin{pmatrix}1+w_{1m}+w_{2m}+\\ +w_{3m}+w_{4m}+\\ +\theta_1\cdot\begin{pmatrix}1+2w_{1m}+\\ +w_{2m}+w_{3m}\end{pmatrix}\end{pmatrix} & \frac{1}{T}\left[\frac{T+4}{5}\right]\cdot 5\left(\sigma_\varepsilon^2+\sigma_\eta^2\right)\end{pmatrix}$$

Заметим, что при $T\to\infty$

$$E\left(\hat{\Sigma}_T\right)\to\begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon^2\left(1+2\theta_1+\theta_1^{\,2}\right) & (1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2\\ (1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\eta^2+\sigma_\varepsilon^2\end{pmatrix}$$

поскольку по условиям теоремы 2 $w_{1m}\to 1$, $w_{2m}\to 1$, $w_{3m}\to 1$, $w_{4m}\to 1$ при $T\to\infty$.

Поэтому, с учетом сходящихся к нулю дисперсий мы имеем

$$\hat{\Sigma}_T\xrightarrow{P}\begin{pmatrix}(1+\theta_1)^2\sigma_\varepsilon^2 & (1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2\\ (1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\eta^2+\sigma_\varepsilon^2\end{pmatrix}\qquad(10)$$

Отметим, что согласно формуле (2) вектор A_T в этом случае будет равен $A_T=\frac{1}{T^{1/2}}\cdot\begin{pmatrix}Z_T\\ Y_{[T]_5}\end{pmatrix}=\frac{1}{T^{1/2}}\begin{pmatrix}\theta_1\varepsilon_0+\varepsilon_T+\sum_{\tau=1}^{T-1}(1+\theta_1)\varepsilon_\tau\\ \sum_{\tau=1}^{[T]_5}\varepsilon_\tau+\sum_{\tau=1}^{[T]_5}\eta_\tau\end{pmatrix}$, где за $[T]_5$ обозначим $\left(5\left[(T+4)/5\right]-4\right)$.

Его ковариационная матрица будет равна

$$\Sigma_T = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2\left(\theta_1^{\ 2}+(T-1)(1+\theta_1)^2\right)/T & (1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2\cdot[T]_5/T \\ (1+\theta_1)\sigma_\varepsilon^2\cdot[T]_5/T & \left(\sigma_\eta^2+\sigma_\varepsilon^2\right)\cdot[T]_5/T \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Эта матрица при $T\to\infty$ стремится к

$$\Sigma_T \to \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1)^2 & \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1) \\ \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1) & \sigma_\eta^2+\sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что пределы для $\hat{\Sigma}_T$ и Σ_T в (10) и (11) конечны и совпадают и в этом случае, причем они равны значениям пределов для $\hat{\Sigma}_T$ и Σ_T для случая рядов одинаковой частотности в (8) и (9).

Приложение. Последовательности со свойством α-перемешивания и ϕ-перемешивания

При $q\in N$ обозначим через B^q σ-алгебру борелевских множеств евклидова пространства R^q, т.е. наименьшую σ-алгебру, содержащую все множества вида $\{y\in R^q:-\infty<y\le a\}$, где $a\in R^q$.

Обозначим через F наименьшую σ-алгебру, которая включает в себя все множества вида $\times_{t=-\infty}^{\infty}M_t$, где $M_t\in B^q$ для любого t, причем для всех t, за исключением разве лишь конечного набора значений, $M_t=R^q$. Так определенную σ-алгебру F будем называть σ-алгеброй борелевских множеств пространства R_∞^q. Примем $\Omega=R_\infty^q$.

Пусть $\{x_t(\omega),\ \omega\in\Omega,\ t\in Z\}$ последовательность $(q\times1)$ случайных векторов. Для конечного набора случайных векторов из этой последовательности $\{x_t(\omega), t=n,...,n+m\}$ определим F_n^{n+m} (систему подмножеств Ω), как σ-алгебру, состоящую из множеств вида $\times_{t=-\infty}^{n-1}R^q\times_{t=n}^{n+m}M_t\times_{t=n+m+1}^{\infty}R^q$, где $M_t\in B^q$, и являющуюся наименьшей σ-алгеброй, относительно которой измеримы случайные вектора $\{x_t(\omega), t=n,...,n+m\}$.

Определим $F_{-\infty}^n$ как наименьшую σ-алгебру, содержащую все множества из всех σ-алгебр F_a^n при $a=n-1,\ n-2,\ ...$ Определим F_{n+m}^∞ как наименьшую σ-алгебру, содержащую все множества из всех σ-алгебр F_{n+m}^a при $a=n+m+1,\ n+m+2,\ ...$

Определение П1. Пусть G и H две σ-алгебры, тогда определим следующие величины:

$$\phi(G,H)=\sup_{A\in G,B\in H:P(B)>0}\left|P(A\,|\,B)-P(A)\right|,$$

$$\alpha(G,H)=\sup_{A\in G,B\in H}\left|P(A\cap B)-P(A)P(B)\right|.$$

Заметим, что для любого $m>0$ верны неравенства $\phi'(m)\le1$ и $\alpha'(m)\le\frac{1}{4}$, которые следуют из определения коэффициентов перемешивания.

Определение П2. Для последовательности случайных $(q\times1)$-векторов $\{x_t(\omega)\}$ определим коэффициенты перемешивания

$\phi(m)=\sup_n\phi\left(F_{-\infty}^n,F_{n+m}^\infty\right)$ и $\alpha(m)=\sup_n\alpha\left(F_{-\infty}^n,F_{n+m}^\infty\right)$.

Определение П3. Если для последовательности случайных $(q\times1)$-векторов $\{x_t(\omega)\}$ $\phi(m)\to0$ при $m\to\infty$, то говорят, что данная последовательность обладает свойством ϕ-перемешивания, а если $\alpha(m)\to0$ при $m\to\infty$, то говорят, что данная последовательность обладает свойством α-перемешивания.

Определение П4. Пусть для некоторого действительного $r\in(1,+\infty)$ верно что

1) $\phi(m)=O\left(m^{-\lambda}\right)$ для какого-нибудь $\lambda>r/(2r-1)$, тогда будем говорить, что $\phi(m)$ имеет размер $r/(2r-1)$.

2) $\alpha(m)=O\left(m^{-\lambda}\right)$ для какого-нибудь $\lambda>r/(r-1)$, тогда будем говорить, что $\alpha(m)$ имеет размер $r/(r-1)$.

Смысл этих характеристик заключается в том, что чем меньше r (т.е. чем больше $r/(2r-1)$ и $r/(r-1)$), тем быстрее приближаются к независимым отдаленные на большое расстояние m события из $F_{-\infty}^n$ и F_{n+m}^∞.

Теорема П5. Пусть для некоторого $\tau\in N$ при любом $t\in Z$ определена измеримая функция $\Phi_t:\times_{i=1}^{\tau}R^p\to R^q$ и последовательность $(q\times1)$ случайных векторов ρ_t, $t\in Z$ определена как $\rho_t(\omega)=\Phi_t\left(x_t(\omega),x_{t-1}(\omega),...,x_{t-\tau}(\omega)\right)$. Тогда если последовательность случайных векторов x_t обладает свойством ϕ-перемешивания с $\phi(m)$ (или α-перемешивания с $\alpha(m)$), то и последовательность ρ_t тоже обладает свойством ϕ-перемешивания с коэффициентами перемешивания $\phi'(m)\le\phi(m-\tau)$ (или соответственно обладает свойством α-перемешивания с $\alpha'(m)\le\alpha(m-\tau)$) для $m>\tau$.

Доказательство теоремы приведено, например, в [Billingsley, 1968, с. 182—186] или [White, 1984, с. 153].

Литература

Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

Ибрагимов А.И., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

Шведов А.С. Математические основы и оценка параметров эконометрических моделей состояние-наблюдение. М.: ГУ ВШЭ, 2005.

Banz R.W. The Relationship Between Return and Market Value of Common Stocks // Journal of Financial Economics. 1981. Vol. 9. P. 3—18.

Basak G.K., Jagannatan R., Ma T. Assessing Risk in Sample Minimum Risk Portfolios: NBER Working Paper 10447, April 2004.

Billingsley P. Convergence of Probability Measures. N.Y.: Wiley, 1968.

Derman E. Where the betas are zero and the excess returns are all above average // RISK Magazine. March 2004. P. 66.

Fama E.F., French K.R. The Cross-Section of Expected Stock Returns // Journal of Finance. Vol. 47. No. 2 (June 1992). P. 427-465.

Fama E.F., French K.R. Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds // Journal of Financial Economics. 1993. Vol. 33. P. 3—56.

Ibragimov I.A., Linnik Yu. V. Independent and Stationary Sequences of Random Variables. The Netherlands: Walters-Noordorf, Groningen, 1971.

Iosefescu M., Theodorescu R. Random Processes and Learning. N.Y.: Springer Verlag, 1969.

Keim D.B. Size-Related Anomalies and Stock Return Seasonality. Further Empirical Evidence // Journal of Financial Economics. 1983. Vol. 12. P. 13—32.

Keim D.B. Trading Patterns, Bid-Ask Spreads and Estimated Security Returns. The Case of Common Stocks at Calendar Turning Points // Journal of Financial Economics. 1989. Vol. 25. P. 75—97.

Ledoit O., Wolf M. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix: Economics Working Paper. Universitat Pompeu Fabra. Department of Economics and Business. June 2003.

Ledoit O., Wolf M. Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns // Journal of Empirical Finance. 2003. Vol.10 (December). P. 603-621.

Litterman R., Winkelmann K. Estimating Covariance Matrices // Goldman Sachs Risk Management Series. January 1998.

Lo A.W., McKinlay A.C. The Size and Power of the Variance Ratio Test in Finite Samples: A Monte-Carlo Investigation // Journal of Econometrics. 1989. Vol. 40. P. 203—38.

Low C., Nayak S. The Non-Relevance of the Elusive Holy Grail of Asset Pricing Tests: the «True» Market Portfolio Doesn't Really Matter: EFA 2005 Moscow Meetings Paper. Feb 2005.

McLeod I.A., Jimenez C. Nonnegative Definiteness of the Sample Autocovariance Function // American Statistician. 1984. Vol. 38. P. 297—298.

Mills T.C. The econometric modeling of financial time series. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

Newey W.K., West K.D. A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticiy and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix// Econometrica. 1987. Vol. 55. No. 3 (May). P. 703-708.

Newey W.K.; West K.D. Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation // The Review of Economic Studies. 1994. Vol. 61. No. 4 (October). P. 631-653.

Phillips P.C.B., Ouliaris S. Testing for Cointegration Using Principal Components Method // Journal of Economic Dynamics and Control. 1988. Vol. 12. P. 205—230.

Reingaum M.R. Anomalous Stock Market Behavior of Small Firms in January // Journal of Financial Economics. 1983. Vol. 12. P. 89-104.

White H., Domowitz I. Nonlinear Regresssion with Dependent Observations // Econometrica. 1984. Vol. 52. P. 143-162.

White H. Asymptotic Theory for Econometricians. London: Academic Press, 1984.

Препринт WP2/2005/05
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Редактор серии *В.А. Бессонов*

Панов Евгений Валерьевич

Состоятельная оценка ковариационной матрицы в случае временных рядов различной частотности

Публикуется в авторской редакции

Зав. редакцией *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Н.Е. Пузанова*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г. продлена до 14 октября 2003 г.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 1,4. Усл. печ. л. 1,4. Заказ №   . Изд. № 603

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел.: (095) 134-16-41; 134-08-77
Факс: (095) 134-08-31
Типография ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3