

Окружности и алгебры Клиффорда*

© 2004. В. А. ТИМОРИН

§ 1. Введение

Под окружностью в евклидовом пространстве мы подразумеваем либо настоящую евклидову окружность, либо прямую, либо точку. *Векторной прямой* мы для краткости будем называть прямую, проходящую через начало координат (т. е. одномерное векторное подпространство).

Перед нами стоит такая задача: описать все гладкие (или непрерывные) отображения из открытого подмножества аффинного пространства $\mathbb{R}^m$ (или проективного пространства $\mathbb{RP}^m$) в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ (или сферу S^n), переводящие ростки прямых в ростки окружностей (кратко: переводящие прямые в окружности). Первоначально эта задача возникла из номографии и была сформулирована Г. С. Хованским [1] для диффеоморфизмов открытых областей в $\mathbb{R}^2$. Номография занимается графическим представлением функций. Номограммы, использующие циркуль, точнее номограмм, использующих линейку. Отсюда возникает описанная выше задача. Первоначальная двумерная задача была решена А. Г. Хованским в [2]. Он доказал, что, с точностью до проективного преобразования в пространстве-образе и преобразования Мёбиуса в пространстве-образе, бывает только три взаимно однозначных гладких отображения, переводящих прямые в окружности. Они соответствуют трем классическим геометриям — евклидовой, сферической и гиперболической. Евклидово отображение тождественно. Сферическое отображение — это композиция центральной проекции на сферу и стереографической проекции обратно на плоскость. Гиперболическое отображение — то же самое с гиперболоидом вместо сферы. Это отображение устанавливает соответствие между двумя моделями гиперболической геометрии: моделью Клейна и моделью Пуанкаре в круге.

Дадим единое описание всех отображений из теоремы Хованского. Чтобы получить отображение из открытого подмножества плоскости в сферу, переводящее все прямые в окружности, нужно проективно вложить это подмножество в трехмерное пространство, а затем спроецировать его на сферу из некоторой точки (возможно, бесконечно удаленной). Если мы спроецируем из точки внутри сферы, то получим сферический случай. Если возьмем центр проекции на сфере, то получим евклидов случай. Наконец, проецируя из точки вне сферы, получим гиперболический случай.

Ф. Изади в своей диссертации [3] перенес результаты Хованского на трехмерный случай.

Но в размерности 4 все это неверно! Бывают другие отображения, переводящие прямые в окружности. Например, отождествим $\mathbb{R}^4$ с $\mathbb{C}^2$ и рассмотрим комплексное проективное преобразование. Оно переводит комплексные прямые

*Работа частично поддержана грантом CRDF RM1-2086.

в комплексные прямые и на каждой комплексной прямой действует как преобразование Мёбиуса. Заметим, что каждая вещественная прямая лежит на единственной комплексной прямой. Поэтому каждая вещественная прямая переходит в окружность.

Имеется широкий класс отображений из открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$, переводящих прямые в окружности. Пусть A и B — два аффинных отображения из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$. отождествим $\mathbb{R}^4$ с алгеброй кватернионов $\mathbb{H}$. Рассмотрим отображения $x \mapsto A(x)B(x)^{-1}$ и $x \mapsto B(x)^{-1}A(x)$. Здесь умножение и взятие обратного — в смысле кватернионов. Мы называем эти отображения *дробными кватернионными преобразованиями*. Они переводят прямые в окружности. Заметим, что дробные кватернионные преобразования не обязательно являются дробно-линейными: A и B аффинны над вещественными числами, но не над кватернионами. Как доказано в [4], диффеоморфизмы между открытыми областями в $\mathbb{R}^4$, переводящие прямые в окружности, являются либо дробными кватернионными преобразованиями, либо проекциями из гиперплоскости в $\mathbb{R}^5$ на сферу.

В [5] была доказана следующая «микролокальная» теорема. Рассмотрим росток диффеоморфизма $\Phi: (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$, который переводит ростки векторных прямых в ростки окружностей. Тогда образы всех векторных прямых — те же самые окружности, которые являются их образами при некотором дробном кватернионном преобразовании, сохраняющем 0. Это дает описание так называемых *выпрямляемых пучков окружностей* (систем окружностей, проходящих через некоторую точку и получаемых из прямых при помощи некоторого локального диффеоморфизма). В размерностях 2 и 3 ситуация намного проще: любой достаточно большой выпрямляемый пучок окружностей имеет какую-либо другую общую точку пересечения, т.е. получается из пучка прямых при помощи некоторого преобразования Мёбиуса [2, 3].

В этой статье мы изучаем многомерный случай. Есть общая конструкция гладких отображений из $\mathbb{RP}^m$ в S^n , *отображений Хопфа*, переводящих прямые в окружности. Наиболее систематическая конструкция отображений Хопфа основана на представлениях алгебр Клиффорда $\text{Cliff}(r)$, порожденных над вещественными числами r антикоммутирующими мнимыми единицами. С каждым представлением ϕ алгебры $\text{Cliff}(r)$ в $\mathbb{R}^n$ мы свяжем отображение из открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^{r+n+1}$ в $\mathbb{R}^n$. А именно, $\mathbb{R}^{r+1}$ вложено в $\text{Cliff}(r)$ как подпространство, натянутое на все образующие и 1. Отображение F_ϕ из $(\mathbb{R}^{r+1} - 0) \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ отправляет пару (α, x) в $\phi(\alpha)^{-1}(x)$. Это отображение переводит прямые в окружности. Проективизируя пространство-образ и компактифицируя пространство-образ, получаем отображение из $\mathbb{RP}^{n+r}$ в S^n с тем же свойством. Это отображение Хопфа, связанное с ϕ .

Мы докажем следующую «микролокальную» теорему. Рассмотрим росток гладкого отображения $\Phi: (\mathbb{R}^{r+n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, который переводит ростки прямых, проходящих через 0, в ростки окружностей. Допустим, что $\mathbb{R}^n$ линейно вложено в $\mathbb{R}^{r+n}$ так, что Φ тождественно на $\mathbb{R}^n$. Допустим также, что образы прямых, не лежащих в $\mathbb{R}^n$, не вырождаются в прямые. Тогда образ всякой векторной прямой — та же окружность, которая является ее образом при некотором отображении F_ϕ или его ограничении на гиперплоскость.

Отображения $F_\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ дают много примеров выпрямляемых пучков окружностей. Чтобы получить локальный диффеоморфизм, переводящий прямые в окружности, достаточно взять композицию отображения F_ϕ с общим аффинным вложением пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$.

Вернемся к размерности 4. Алгебра $\text{Cliff}(3)$ изоморфна $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Таким образом, у нее есть два представления в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, которые определяют два отображения из $\mathbb{R}^8$ в $\mathbb{R}^4$, переводящих прямые в окружности. Соответствующие отображения из $\mathbb{RP}^7$ в S^4 — это классические расслоения Хопфа. Заметим, что все окружности являются образами прямых при этих отображениях. Все дробные кватернионные преобразования получаются из этих отображений так, как описано выше.

Статья устроена следующим образом. В §2 мы напомним некоторые основные факты об алгебрах Клиффорда и их представлениях. §3 содержит необходимую информацию об отображениях Хопфа. Затем мы сформулируем микролокальную теорему в §4. В §5 устанавливается связь между этой теоремой и теоремой Гурвица–Радона о суммах квадратов. Наконец, в §6 мы завершим доказательство микролокальной теоремы и дадим описание представлений алгебр Клиффорда как линейных пространств комплексных умножений.

Я благодарен А. Г. Хованскому за полезные обсуждения, а также рецензенту за полезные замечания.

§2. Алгебры Клиффорда

Пусть V — вещественное векторное пространство, снабженное симметрической билинейной формой Q . Алгебра Клиффорда $\text{Cliff}(V, Q)$ — это ассоциативная алгебра с единицей, порожденная всеми векторами из пространства V с соотношением $vw + wv = Q(v, w)$ для всех $v, w \in V$. Если V имеет размерность r и Q отрицательно определена, то алгебра $\text{Cliff}(V, Q)$ обозначается через $\text{Cliff}(r)$. Другими словами, $\text{Cliff}(r)$ порождена r антикоммутирующими мнимыми единицами $e_1, \dots, e_r$,

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad (i \neq j).$$

Мы всегда будем иметь дело с алгебрами Клиффорда типа $\text{Cliff}(r)$. Для евклидова пространства V с евклидовой формой q обозначим алгебру $\text{Cliff}(V, -q)$ через $\text{Cliff}(V)$. Алгебра Клиффорда — непосредственное обобщение тела кватернионов $\mathbb{H} = \text{Cliff}(2)$.

Следующая таблица дает алгебры Клиффорда $\text{Cliff}(r)$ при $r < 8$.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
$\text{Cliff}(r)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}[2]$	$\mathbb{C}[4]$	$\mathbb{R}[8]$	$\mathbb{R}[8] \oplus \mathbb{R}[8]$

Здесь $\mathbb{A}[r]$ ($\mathbb{A} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$) обозначает алгебру $r \times r$ -матриц над $\mathbb{A}$. Остальные алгебры Клиффорда вычисляются по периодичности Ботта:

$$\text{Cliff}(r + 8) = \text{Cliff}(r) \otimes \mathbb{R}[16].$$

Эта таблица была впервые получена Э. Картаном [6], см. также [7]. Все вещественные конечномерные представления алгебр Клиффорда видны из таблицы, поскольку матричная алгебра $\mathbb{A}[r]$ имеет только одно неприводимое представление, а именно $\mathbb{A}^r$, и все ее представления вполне приводимы.

ПРИМЕР 1. Алгебра $\text{Cliff}(3)$ изоморфна $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. В этом представлении $e_1 = (i, -i)$, $e_2 = (j, -j)$ и $e_3 = (k, -k)$.

ПРИМЕР 2. Алгебра $\text{Cliff}(7)$ действует на $\mathbb{R}^8 = \mathbb{H}^2$. Опишем действие пространства, порожденного единицей и e_i ($i = 1, \dots, 7$). Последнее тоже отождествляется с $\mathbb{H}^2$. Для любого кватерниона a обозначим через L_a оператор левого умножения на a в $\mathbb{H}$, а через R_a оператор правого умножения. Пара $(a, b) \in \mathbb{H}^2$ действует как

$$\begin{pmatrix} L_a & -R_b \\ R_b & L_{\bar{a}} \end{pmatrix}.$$

Если мы поменяем местами левое и правое умножения, то получим другое представление алгебры $\text{Cliff}(7)$ в $\mathbb{R}^8$.

Рассмотрим евклидово пространство V . Обозначим через $\hat{V}$ пространство $V \oplus \langle 1 \rangle$, лежащее в $\text{Cliff}(V)$ и натянутое на V и 1. Скажем, что линейное представление алгебры $\text{Cliff}(V)$ в $\mathbb{R}^n$ *совместимо с евклидовой метрикой* (или с евклидовым скалярным произведением), если любой вектор из $\hat{V}$ действует конформно, т. е. умножает все расстояния на одно и то же число. Это условие не сужает множество представлений, а только ограничивает выбор евклидовой метрики на $\mathbb{R}^n$:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Для всякого линейного представления алгебры $\text{Cliff}(r)$ в $\mathbb{R}^n$ найдется евклидова метрика на $\mathbb{R}^n$, такая, что это представление с ней совместимо.*

Этот факт известен, но мы наметим здесь его доказательство. Рассмотрим группу Дирака, состоящую из произведений образующих $e_1, \dots, e_r$. Группа Дирака, очевидно, конечна. Следовательно, у нее есть инвариантная евклидова метрика. В частности, все элементы e_i действуют как ортогональные операторы относительно этой метрики. Непосредственное вычисление показывает, что все линейные комбинации единицы и образующих действуют конформно. $\square$

Представление алгебры Клиффорда в евклидовом пространстве всегда предполагается совместимым с евклидовым скалярным произведением.

Линейные представления алгебр $\mathbb{C} = \text{Cliff}(1)$ и $\mathbb{H} = \text{Cliff}(2)$ в $\mathbb{R}^n$ называются комплексными и кватернионными структурами на $\mathbb{R}^n$ соответственно. Образ числа i при представлении поля $\mathbb{C}$ тоже называется комплексной структурой. Это может быть любой линейный оператор I , такой, что $I^2 = -1$. Под комплексной (кватернионной) структурой на евклидовом пространстве мы всегда имеем в виду комплексную (кватернионную) структуру, совместимую с евклидовой метрикой. Для комплексной структуры I это означает, что оператор I ортогонален и кососимметричен. Для кватернионной структуры из совместимости вытекает, что все кватернионы, а не только линейные комбинации элементов 1, i и j , действуют конформно.

§3. Отображения Хопфа

Нам нужна следующая очень простая (и хорошо известная) лемма:

ЛЕММА 3.1. *Рассмотрим следующее дробно-линейное отображение из $\mathbb{A}$ в $\mathbb{A}^k$ (где $\mathbb{A}$ — это $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$):*

$$F: x \mapsto (xc + d)^{-1}(xa + b).$$

Здесь $x, c, d \in \mathbb{A}$ и $a, b \in \mathbb{A}^k$. Допустим, что пространство-образ снабжено евклидовой метрикой, совместимой с комплексной или кватернионной структурой. Тогда F переводит все вещественные прямые в окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $F(x) = A + (xc + d)^{-1}B$, где $A = c^{-1}a$ и $B = b - dc^{-1}a$. Следовательно, образ тела $\mathbb{A}$ лежит на левой прямой $\{A + uB \mid u \in \mathbb{A}\}$. Координата u на этой прямой линейна и конформна. Отображение $x \mapsto u = (xc + d)^{-1}$ — преобразование Мёбиуса. Поэтому всякая прямая переходит в окружность. $\square$

Вот основная конструкция. Пусть V — евклидово пространство, а ϕ — представление алгебры $\text{Cliff}(V)$ в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что $\widehat{V} = V \oplus \langle 1 \rangle \subset \text{Cliff}(V)$. Следующая теорема — частный случай более общего факта, см. [8].

ТЕОРЕМА 3.2. *Рассмотрим отображение $F_\phi: (\widehat{V} - 0) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное формулой $(\alpha, x) \mapsto \phi^{-1}(\alpha)x$. Это отображение переводит прямые в окружности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим прямую L в $\widehat{V} \times \mathbb{R}^n$. Если она проходит через 0, то ее образ пуст или состоит из одной точки. Теперь предположим, что L не содержит начала координат. Проекция прямой L на $\widehat{V}$ порождает подалгебру в $\text{Cliff}(V)$, которая изоморфна либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{H}$.

В первом случае L лежит в $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$. Действие поля $\mathbb{C}$ задает комплексную структуру на $\mathbb{R}^n$. Таким образом, $\mathbb{R}^n$ отождествляется с $\mathbb{C}^{n/2}$. Пусть t — линейный параметр на L . Тогда образ прямой L в $\mathbb{R}^n$ задается формулой $\alpha(t)^{-1}x(t)$, где $x(t)$ — вектор из $\mathbb{R}^n$, а $\alpha(t)$ — комплексное число, причем оба аффинно зависят от t . Теперь из леммы 3.1 следует, что образ прямой L — окружность.

Кватернионный случай разбирается совершенно аналогично. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенную конструкцию можно улучшить. Заметим, что при отображении F_ϕ пропорциональные векторы дают одинаковые образы. Следовательно, есть отображение из проективизации пространства $\widehat{V} \times \mathbb{R}^n$ в сферу S^n , полученную из $\mathbb{R}^n$ одноточечной компактификацией. Это отображение переводит прямые в окружности. Оно является частным случаем конструкции Хопфа. Проективизация подпространства $0 \times \mathbb{R}^n$ уходит на бесконечность. Конструкция Хопфа дает следующие отображения:

$$\mathbb{RP}^3 \rightarrow S^2, \quad \mathbb{RP}^7 \rightarrow S^4, \quad \mathbb{RP}^7 \rightarrow S^6, \quad \mathbb{RP}^{15} \rightarrow S^8, \quad \dots$$

§4. Микролокальная теорема

Зафиксируем евклидову метрику на $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что $n \geq 2$. Скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ обозначается через (x, y) . Допустим, что пространство $\mathbb{R}^n$ линейно вложено в пространство $\mathbb{R}^{r+n}$. Росток гладкого отображения $\Phi: (\mathbb{R}^{r+n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ назовем *локальной проекцией*, если Φ тождествен при ограничении на $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Рассмотрим локальную проекцию $\Phi: (\mathbb{R}^{r+n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, переводящую векторные прямые в окружности. Допустим, что образы прямых, не принадлежащих $\mathbb{R}^n$, не вырождаются в прямые. Тогда найдутся евклидово пространство V , представление ϕ алгебры $\text{Cliff}(V)$ в $\mathbb{R}^n$ и вложение пространства $\mathbb{R}^{r+n}$ в $V \times \mathbb{R}^n$, тождественное на $\mathbb{R}^n$, такие, что отображение*

$$F: V \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\alpha, x) \mapsto \phi(1 - \alpha)^{-1}x,$$

переводит ростки всех векторных прямых в те же окружности, что и Φ .

Теорема 4.1 дает геометрическое описание представлений алгебр Клиффорда в терминах окружностей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отображения F и Φ не обязаны совпадать на $\mathbb{R}^{r+n}$. Например, отображение $y \mapsto F(\nu(y)y)$, где ν — произвольная гладкая функция на $\mathbb{R}^{r+n}$, переводит каждую векторную прямую в ту же окружность, что и F . Чтобы это отображение удовлетворяло условиям теоремы 4.1, нужно взять функцию ν , тождественно равную 1 на $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через π дифференциал отображения Φ в 0. Линейное отображение π переводит $\mathbb{R}^{r+n}$ в $\mathbb{R}^n$, причем π тождественно на $\mathbb{R}^n$. Следовательно, существует представление $\mathbb{R}^{r+n} = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$, в котором π задано формулой $\pi(\alpha, x) = x$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}^r$, $x \in \mathbb{R}^n$. Отображение Φ имеет вид

$$\Phi(\alpha, x) = x + \Gamma(\alpha, x) + \Delta(\alpha) + \dots,$$

где $\Gamma: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — билинейное отображение, форма $\Delta: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ квадратична на $\mathbb{R}^r$, а многоточие обозначает члены более высокого порядка.

ЛЕММА 4.2. *Форма Δ обращается в нуль тождественно по α . Для всякого фиксированного α квадратичные формы (Γ, Γ) и (x, Γ) делятся на (x, x) .*

Эта лемма является непосредственным обобщением предложения 1.3 из [5] и может быть доказана точно так же. Мы наметим здесь другое доказательство, предполагая для простоты, что отображение Φ аналитично; подробности см. в [9].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим евклидову форму $(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{C}^n$ по билинейности. *Комплексной окружностью* в $\mathbb{C}^n$ назовем пересечение сферы

$$\{x \in \mathbb{C}^n \mid (x - a, x - a) = R^2\}, \quad a \in \mathbb{C}^n, R \in \mathbb{C},$$

с двумерной комплексной плоскостью. Комплексная окружность — это либо неприводимая кривая второго порядка, либо пара прямых (возможно, совпадающих), либо плоскость. Очевидно, что всякая настоящая вещественная окружность принадлежит единственной комплексной окружности.

Росток Φ в 0 продолжается до ростка аналитического отображения из $(\mathbb{C}^{r+n}, 0)$ в $(\mathbb{C}^n, 0)$. При ограничении на всякую вещественную векторную прямую функция (Φ, Φ) и все компоненты отображения Φ порождают не более чем двумерное пространство. Это условие эквивалентно тому, что образ прямой лежит на окружности. С другой стороны, оно записывается как система алгебраических уравнений на коэффициенты Тейлора отображения Φ . Следовательно, то же условие верно и при ограничении на всякую комплексную прямую. Таким образом, образ ростка произвольной комплексной векторной прямой в 0 лежит на комплексной окружности или на прямой.

Обозначим через $\mathcal{N}$ изотропный конус $\{(x, x) = 0\}$ в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим прямую L в $\mathbb{C}^{r+n}$, натянутую на вектор (α, x) , такой, что $x \in \mathcal{N}$, но $x \neq 0$. Образ прямой L лежит на комплексной окружности C и касается вектора x в 0. Мы утверждаем, что $\Phi(L)$ целиком лежит в конусе $\mathcal{N}$. Если C — прямая или пара прямых, то $\Phi(L)$ лежит на прямой, натянутой на x (алгебраическая кривая $\Phi(L)$ не может перескакивать с одной прямой на другую). В частности, $\Phi(L)$ лежит в $\mathcal{N}$.

Если C — плоскость или неприводимая кривая второго порядка, то она целиком лежит в $\mathcal{N}$. Действительно, рассмотрим плоскость, содержащую окружность C . Если эта плоскость не лежит в конусе $\mathcal{N}$, то она пересекается с $\mathcal{N}$ по паре прямых, возможно совпадающих. Окружность C касается одной из этих прямых в нуле и асимптотична обеим (т.е. пересекается с ними на бесконечности), так как у всякой комплексной сферы множество бесконечно удаленных

точек в проективном замыкании то же самое, что и у $\mathcal{N}$. Но кривая второго порядка не может касаться прямой в нуле и одновременно пересекаться с этой же прямой на бесконечности, если только кривая не совпадает с этой прямой.

Таким образом, при $x \neq 0$ линейная оболочка векторов x и $\Phi(\alpha, x)$ целиком лежит в $\mathcal{N}$. Другими словами,

$$(x, x) = (x, \Phi(\alpha, x)) = (\Phi(\alpha, x), \Phi(\alpha, x)) = 0$$

для всякого вектора $x \in \mathcal{N}$. Следовательно, функции $(x, \Phi(\alpha, x))$ и $(\Phi(\alpha, x), \Phi(\alpha, x))$ делятся на (x, x) в кольце формальных степенных рядов. Ограничиваясь членами второго порядка, получаем утверждение леммы. $\square$

Заметим, что билинейное отображение Γ содержит всю информацию об окружностях в образе отображения Φ . Действительно, чтобы задать окружность, достаточно знать ее «скорость» и «ускорение» в 0 относительно некоторого параметра, если только скорость ненулевая. Следовательно, если $x \neq 0$, то $\Gamma(\alpha, x)$ однозначно определяет окружность, которая есть образ прямой, натянутой на (α, x) . Подпространство $x = 0$ переходит в начало координат при отображении Φ , как видно из доказательства леммы 4.2. Это нетрудно доказать и без использования аналитичности, при помощи теоремы о неявной функции. Таким образом, Γ определяет образы всех векторных прямых при отображении Φ .

Теорема 4.1 теперь сводится к описанию формы Γ .

§5. Связь с теоремой Гурвица–Радона

Займемся исследованием свойств билинейного отображения $\Gamma: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, введенного в предыдущем параграфе. Напомним, что $\mathbb{R}^n$ снабжено евклидовой метрикой. До сих пор $\mathbb{R}^r$ было только векторным пространством. Но мы и на нем введем евклидову метрику. Зафиксируем элемент $\alpha \in \mathbb{R}^r$. Он определяет линейное отображение $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное формулой $A(x) = \Gamma(\alpha, x)$. По лемме 4.2 это отображение конформно. Значит, произведение отображения A на сопряженное к нему является умножением на вещественное число $q(\alpha)$. Это число не равно нулю, поскольку при $x \neq 0$ образ прямой, натянутой на (α, x) , является настоящей окружностью, в частности $\Gamma(\alpha, x) \neq 0$. Легко видеть, что q — положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^r$. Поэтому $\mathbb{R}^r$ можно рассматривать как евклидово пространство.

Теперь обозначим через $|\cdot|$ евклидовы нормы в $\mathbb{R}^r$ и $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$|\Gamma(\alpha, x)| = |\alpha| \cdot |x|.$$

Гурвиц [10] и Радон [11] описали все соотношения такого вида. На языке представлений алгебр Клиффорда их результат можно сформулировать так [7]:

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $f: \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — билинейное отображение, такое, что $|f(\alpha, x)| = |\alpha| \cdot |x|$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}^{k+1}$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда найдется представление ϕ алгебры Клиффорда $\text{Cliff}(k)$ в $\mathbb{R}^n$, такое, что

$$f(\alpha, x) = \phi(\alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k) A_0(x),$$

где A_0 — ортогональное преобразование, а $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ — координаты вектора α в некотором ортонормированном базисе.

В частности, эта теорема применима к нашему билинейному отображению Γ . Теорема 5.1 допускает степень свободы: произвольное ортогональное преобразование в прообразе. Наше дополнительное ограничение на Γ убивает эту степень свободы.

Некоторые интересные обобщения теоремы 5.1 и общая задача Гурвица обсуждаются в [12].

§6. Комплексные умножения и алгебры Клиффорда

В этом параграфе мы установим связь между билинейным отображением Γ и представлением некоторой алгебры Клиффорда. Эта связь — в духе теоремы 5.1, и мы используем похожие соображения.

Зафиксируем евклидову метрику $(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R}^n$. Линейный оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *комплексным умножением*, если либо A — умножение на вещественное число, либо существует комплексная структура I на $\mathbb{R}^n$, совместимая с $(\cdot, \cdot)$, такая, что A — умножение на комплексное число относительно I .

Вот описание всех комплексных умножений в вещественных терминах.

Предложение 6.1. *Линейный оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является комплексным умножением тогда и только тогда, когда обе квадратичные формы (x, Ax) и (Ax, Ax) делятся на (x, x) .*

Доказательство. Всякая комплексная структура, совместимая с евклидовой метрикой, представляется оператором I , одновременно ортогональным и кососимметричным. Другими словами, для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнены равенства $(Ix, Ix) = (x, x)$ и $(x, Ix) = 0$. Второе равенство вытекает из первого равенства и соотношения $I^2 = -1$. Если $A = a + bI$ для некоторой комплексной структуры I , то, как нетрудно видеть, $(x, Ax) = a(x, x)$ и $(Ax, Ax) = (a^2 + b^2)(x, x)$.

Теперь допустим, что $(x, Ax) = p(x, x)$ и $(Ax, Ax) = q(x, x)$ для некоторых вещественных чисел p и q . Из неравенства Коши–Буняковского $(Ax, Ax)(x, x) \geq (x, Ax)^2$ следует, что $q \geq p^2$. Если $q = p^2$, то Ax всюду пропорционально x . Поскольку $(x, Ax) = p(x, x)$, коэффициент пропорциональности равен p . Таким образом, A — это умножение на p . Если $q > p^2$, то $A = p + \sqrt{q - p^2} I$ для некоторого линейного оператора I . Из соотношений на A вытекает, что I одновременно ортогонален и кососимметричен. Ортогональность означает, что $I^* I = 1$, где I^* — сопряженный оператор к I . Кососимметричность говорит о том, что $I^* = -I$. Следовательно, $I^2 = -1$, т. е. I — комплексная структура, и A — комплексное умножение. $\square$

Пусть $\Gamma: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — билинейное отображение, введенное в §4. отождествим $\mathbb{R}^r$ с пространством комплексных умножений: вектор $\alpha \in \mathbb{R}^r$ отождествляется с оператором $x \mapsto \Gamma(\alpha, x)$, который является комплексным умножением по лемме 4.2 и предложению 6.1. Обозначим через $\widehat{V}$ линейную оболочку пространства $\mathbb{R}^r$ и тождественного преобразования. На $\widehat{V}$ есть евклидова форма. А именно, для каждого комплексного умножения A положим $q(A) = (A(x), A(x))/(x, x)$, что не зависит от x . Ясно, что q — положительно определенная квадратичная форма.

Предложение 6.2. *Пусть V — ортогональное дополнение к 1 в $\widehat{V}$ относительно q . Тогда найдется представление ϕ алгебры $\text{Cliff}(V)$ в $\mathbb{R}^n$, такое, что для любых $\alpha \in \mathbb{R}^r$ и $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $\Gamma(\alpha, x) = \phi(\alpha)(x)$ при естественном вложении пространства $\widehat{V}$ в $\text{Cliff}(V)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $q(\cdot, \cdot)$ поляризацию квадратичной формы $q(\cdot)$. По определению для всякого $A \in \widehat{V}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $(Ax, Ax) = q(A)(x, x)$. Следовательно, любые 2 элемента $A, B \in \widehat{V}$ удовлетворяют соотношению $(Ax, By) + (Bx, Ay) = 2q(A, B)(x, y)$ тождественно по $x, y \in \mathbb{R}^n$. Другими словами, $A^*B + B^*A = 2q(A, B)$.

Выберем ортонормированный базис в $\widehat{V}$, содержащий 1. Обозначим остальные элементы этого базиса через $I_1, \dots, I_r$. Имеем

$$\begin{aligned} I_j + I_j^* &= 2q(1, I_j) = 0, & I_j^2 &= -I_j^* I_j = -q(I_j) = -1, \\ I_j I_k + I_k I_j &= -(I_j^* I_k + I_k^* I_j) = -q(I_j, I_k) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, операторы $I_1, \dots, I_r$ задают представление алгебры $\text{Cliff}(V)$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. По предложению 6.2 билинейное отображение Γ отправляет (α, x) в $\phi(\alpha)(x)$ при некотором вложении пространства $\mathbb{R}^r$ в $\widehat{V}$ и некотором представлении ϕ алгебры $\text{Cliff}(V)$ в $\mathbb{R}^n$. Поэтому 2-струя отображения Φ в 0 такая же, как у $F: (\alpha, x) \mapsto \phi(1 - \alpha)^{-1}x$. Но окружности на образе задаются только 2-струей. Следовательно, образы любой векторной прямой при действии отображений Φ и F совпадают. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Хованский Г. С. Основы номографии. Наука, М., 1976.
2. Хованский А. Г. Выпрямление окружностей. Сиб. матем. журнал, **21**, 221–226 (1980).
3. Izadi F. A. Rectification of circles, spheres, and classical geometries. PhD thesis, University of Toronto, 2001.
4. Timorin V. A. Maps that take lines to circles, in dimension 4. Preprint <http://www.arXiv.org/math.DG/abs/0309053>.
5. Timorin V. A. Rectification of circles and quaternions. Michigan Math. J., **51**, 153–167 (2003).
6. Cartan É. Nombres complexes. In: J. Molk (red.), Encyclopédie des sciences mathématiques, Tome I, Vol. 1, Fasc. 4, art. 15 (1908), pp. 329–448; reprinted in: Cartan É. Œuvres complètes, Partie II. Gauthier-Villars, Paris, 1953, pp. 107–246.
7. Atiyah M. F., Bott R., Shapiro A. Clifford modules. Topology, **3**, suppl. 1 (1964), pp. 3–38; reprinted in: Bott R. Lectures on $K(X)$. Benjamin, New York, 1969, pp. 143–178; reprinted in Atiyah M. Collected Works, Vol. 2. Clarendon Press, Oxford, 1988, pp. 301–336.
8. Yiu P. Quadratic forms between spheres and the non-existence of sums of squares formulae. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **100**, 493–504 (1986).
9. Timorin V. A. Circles and quadratic maps between spheres. Preprint <http://www.arXiv.org/math.MG/abs/0212098>.
10. Hurwitz A. Über die Komposition der quadratischen Formen. Math. Ann., **88**, 1–25 (1923); reprinted in: Math. Werke, Bd. II, Birkhauser-Verlag, Basel–Stuttgart, 1963, S. 641–666.
11. Radon J. Lineare Scharen orthogonaler Matrizen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **1**, 1–14, 1922.
12. Shapiro D. B. Compositions of Quadratic Forms. de Gruyter Expositions in Math., **33** (2000).