УДК 517.938

Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова

О нульмерных соленоидальных базисных множествах

Исследуется динамика диффеоморфизмов Смейла–Виеториса (SV), сосредоточенная в базовых полноториях, и описываются возможные базисные множества в базовых полноториях. Изучается топологическая структура 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы из класса SV.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: соленоид, нульмерное множество, базисное множество.

§ 1. Введение

Первые примеры соленоидов были построены Виеторисом (см. [1]) в 1927 г. и независимо Ван Данцигом (см. [2]) в 1930 г. и изучались ими с различных точек зрения (см. [3; введение]). В теории динамических систем соленоид был использован в [4; гл. 4, п. 8] для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, состоящим из почти периодических траекторий. Специальные потоки с соленоидальными инвариантными множествами рассматривались в [5]. В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл (см. [6]), который построил диффеоморфизм полнотория в себя с одномерным растягивающимся аттрактором, являющимся соленоидом (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [7]–[10]). Схематично пример Смейла можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, лежащей внутри полнотория, и сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем полученный (промежуточный) полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось промежуточного полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория и при этом сохранялась дисковая структура (рис. 1).

Подобные отображения возникают при изучении бифуркаций седло-узловых циклов (см. [11], [12]). Известно (см. [13]), что диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме А Смейла, некоторого замкнутого 3-многообразия. Этот результат и пример Смейла естественным образом приводят к следующему обобщению конструкции Смейла.

Рассмотрим полноторий $S^1 \times D^2$, где $S^1 = [0,1]/(0 \sim 1)$ – единичная окружность, наделенная естественной параметризацией $[0,1] \to S^1$, $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ – единичный круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$ в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x,y). Сюръективное C^1-отображение $g\colon S^1 \to S^1$ называется *эндоморфизмом*. Эндоморфизм g называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00192 и № 11-01-00730) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор № 11.G34.31.0039).

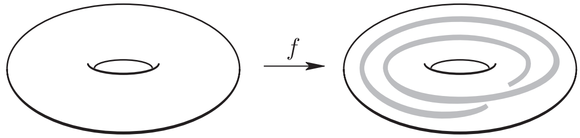

Рис. 1

Мы для определенности будем рассматривать сохраняющие ориентацию неособые эндоморфизмы с положительной производной Dg. Неособый эндоморфизм является иммерсией, принадлежащей классу d-накрытий (т.е. отображений окружности в себя степени d, которые являются локальными гомеоморфизмами). Будем говорить, что диффеоморфизм $f\colon M^3 \to M^3$, удовлетворяющий аксиоме A Смейла, замкнутого 3-многообразия M^3 принадлежит классу[1] SV, если существует вложенный в M^3 полноторий $\mathscr{B}^3$ (далее мы отождествляем полноторий $S^1 \times D^2$ с его вложением $\mathscr{B}^3 \subset M^3$, базовым полноторием) такой, что ограничение $f|_{\mathscr{B}^3} \overset{\text{def}}{=} F$ является диффеоморфизмом $F\colon \mathscr{B}^3 \to F(\mathscr{B}^3) \subset \mathscr{B}^3$ на свой образ, который удовлетворяет следующим условиям:

– F имеет вид
$$F(t,z) = (g(t), w(t,z)), \qquad t \in S^1, \quad z \in D^2, \tag{1.1}$$
где $g\colon S^1 \to S^1$ – неособый C^1-эндоморфизм степени $d \geqslant 2$;

– при фиксированном $t \in S^1$ преобразование $w|_{\{t\}\times D^2}\colon \{t\} \times D^2 \to \mathscr{B}^3$ является равномерно сжимающим C^1-вложением
$$\{t\} \times D^2 \to \operatorname{int}\bigl(\{g(t)\} \times D^2\bigr), \tag{1.2}$$
т.е. существуют константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие, что
$$\operatorname{diam}(F^n(\{t\} \times D^2)) \leqslant C\lambda^n \operatorname{diam}(\{t\} \times D^2) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

В классическом примере Смейла (см. [6]) эндоморфизм g представляет собой линейный растягивающий эндоморфизм $E_d\colon S^1 \to S^1$ вида $E_d(x) = dx \pmod 1$ степени $d \geqslant 2$. В этом случае неблуждающее множество диффеоморфизма $f|_{\mathscr{B}^3} = F$ совпадает с соленоидом $\bigcap_{n\geqslant 0} F^n(\mathscr{B}^3)$. Ключевую роль в доказательстве этого факта играет то, что неблуждающее множество растягивающего эндоморфизма E_d совпадает с окружностью S^1. В общем случае неблуждающее множество диффеоморфизма F принадлежит соленоиду, но не обязательно совпадает с ним.

В [14] автор рассматривал аналогичную конструкцию построения диффеоморфизма $(2n+2)$-мерной сферы S^{2n+2}, отталкиваясь от эндоморфизма n-многообразия K^n. Коразмерность $n+2$ позволяет всегда продолжить вспомогательный диффеоморфизм F на S^{2n+2}. В случае $K^n = S^1$ получаем $2n+2 = 4$. Продолжение диффеоморфизма F на замкнутое 3-многообразие является более трудной задачей. Это продолжение возможно лишь в случае, когда базовый полноторий стандартно вложен в линзу (см. теорему 1). При этом продолжение на 3-сферу S^3 возможно только тогда, когда ось полнотория $F(\mathscr{B}^3)$ образует тривиальный узел в S^3 при стандартном вложении $\mathscr{B}^3$ в S^3. В работе [14]

[1] Аббревиатура SV составлена из первых букв фамилий Smale и Vietoris.

доказано, что эндоморфизм $K^n \to K^n$ удовлетворяет аксиоме A Смейла тогда и только тогда, когда соответствующий диффеоморфизм $S^{2n+2} \to S^{2n+2}$ удовлетворяет аксиоме A Смейла, и, следовательно, имеет место спектральное разложение неблуждающего множества на базисные множества. Типы базисных множеств при этом не изучались.

Основная цель настоящей статьи – исследовать динамику диффеоморфизмов SV, сосредоточенную в базовых полноториях, и описать возможные базисные множества в базовых полноториях. Сначала приведем теорему, которая описывает топологическую структуру 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы из класса SV (в этой теореме мы относим к списку линз трехмерную сферу $S^3 = L_{1,0}$).

Теорема 1. *Пусть $f\colon M^3 \to M^3$ – диффеоморфизм из класса* SV *замкнутого* 3*-многообразия M^3. Тогда M^3 можно представить в виде связной суммы $M^3 = L_{p,q} \# M_1$ линзы $L_{p,q}$, $p \geqslant 1$, и некоторого* 3*-многообразия M_1. Более того, существует* 3*-шар $B \subset L_{p,q}$ такой, что $L_{p,q} \setminus B \subset M^3$ и базовый полноторий принадлежит $L_{p,q} \setminus B$. На любой линзе $L_{p,q}$, $p \geqslant 1$, существует диффеоморфизм $f\colon L_{p,q} \to L_{p,q}$ из класса* SV.

Ясно, что для $f \in \mathrm{SV}$ пересечение $\bigcap_{n\geqslant 0} f^n(\mathscr{B}^3) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Sol}(f)$ является соленоидом. Поскольку соленоид является притягивающим множеством, то неблуждающее множество в базисном полнотории принадлежит соленоиду и самая интересная динамика сосредоточена в $\mathrm{Sol}(f)$. Следующая теорема описывает возможные базисные множества в $\mathrm{Sol}(f) \subset \mathscr{B}^3$.

Теорема 2. *Пусть $f\colon M^3 \to M^3$ – диффеоморфизм из класса* SV *замкнутого* 3*-многообразия M^3. Тогда*:

(i) *ограничение $f|_{\mathrm{Sol}(f)}$ сопряжено обратному пределу отображения g*;

(ii) *неблуждающее множество, принадлежащее базовому полноторию, содержит ровно одно нетривиальное базисное множество $\Lambda(f)$, которое есть*:
  - *либо одномерный растягивающийся аттрактор, и тогда $\Lambda(f) = \mathrm{Sol}(f)$*,
  - *либо нульмерное базисное множество, и тогда пересечение $\mathrm{NW}(f) \cap \mathscr{B}^3 \subset \mathrm{Sol}(f)$ состоит из множества $\Lambda(f)$, конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек.*

Обе возможности реализуются.

Структура работы следующая. В § 2 приводятся необходимые определения и доказывается ряд вспомогательных результатов (в частности, строится символическая модель ограничения диффеоморфизма на соленоиде и описывается неблуждающее множество неособого эндоморфизма окружности). В § 3 и § 4 доказываются основные теоремы.

Авторы благодарят Д. В. Аносова, В. С. Медведева и участников семинаров Л. П. Шильникова и В. З. Гринеса за плодотворные обсуждения. Авторы благодарят М. В. Якобсона за объяснение результатов работы [15] и за обсуждения, которые улучшили понимание динамики эндоморфизмов окружности. Особая благодарность В. З. Гринесу и О. В. Починке за предложения, способствовавшие улучшению работы.

§ 2. Предварительные результаты

Напомним некоторые определения. Пусть $f\colon M\to M$ – диффеоморфизм замкнутого многообразия M, наделенного некоторой римановой метрикой ρ. Инвариантное множество $\Lambda\subset M$ называется *гиперболическим*, если существует непрерывное df-инвариантное разложение касательного расслоения $T_\Lambda M$ в сумму $E^s_\Lambda\oplus E^u_\Lambda$ устойчивого и неустойчивого подрасслоений таких, что

$$\|df^n(v)\|\leqslant C\lambda^n\|v\|, \qquad \|df^{-n}(w)\|\leqslant C\lambda^n\|w\|$$
$$\forall\, v\in E^s_\Lambda, \qquad \forall\, w\in E^u_\Lambda, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

для некоторых фиксированных чисел $C>0$ и $0<\lambda<1$. Для $x\in\Lambda$ множества

$$W^s(x)=\Bigl\{y\in M\colon \lim_{j\to\infty}\rho\bigl(f^j(x),f^j(y)\bigr)\to 0\Bigr\},$$
$$W^u(x)=\Bigl\{y\in M\colon \lim_{j\to\infty}\rho\bigl(f^{-j}(x),f^{-j}(y)\bigr)\to 0\Bigr\}$$

являются гладкими инъективно вложенными подмногообразиями, при этом E^s_x и E^u_x являются касательными пространствами к W^s_x и W^u_x соответственно. Множество $W^s(x)$ (соответственно $W^u(x)$) называется *устойчивым* (соответственно *неустойчивым*) многообразием точки x.

Диффеоморфизм f является A-*диффеоморфизмом*, если его неблуждающее множество $\mathrm{NW}(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $\mathrm{NW}(f)$. Согласно теореме Смейла (см. [6]) о спектральном разложении множество $\mathrm{NW}(f)$ любого A-диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения непересекающихся базисных множеств $\Omega_1,\dots,\Omega_k$ таких, что каждое Ω_i является замкнутым, f-инвариантным и содержит всюду плотную в Ω_i орбиту. Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно отлично от изолированной периодической орбиты. Множество Ω_i называется *аттрактором*, если существует окрестность U этого множества такая, что $\bigcap_{j\geqslant 0}f^j(U)=\Omega_i$. Аттрактор Ω называется *растягивающимся*, если топологическая размерность Ω совпадает с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки.

Везде далее, если не оговорено противное, $f\colon M^3\to M^3$ принадлежит SV с базовым полноторием $\mathscr{B}$, для которого мы будем придерживаться обозначений, введенных в (1.1)–(1.3). Напомним, что *соленоидом* называется множество канторовского типа (совершенное, замкнутое и нигде не плотное), которое можно представить в виде пересечения последовательности полноториев $\mathscr{B}_1\supset\mathscr{B}_2\supset\cdots\supset\mathscr{B}_i\supset\cdots$ таких, что для любого $i\geqslant 1$ ось полнотория $\mathscr{B}_{i+1}$ обходит $n_i\geqslant 2$ раз ось полнотория $\mathscr{B}_i$, не образуя крюков (см. [16]); последнее условие означает, что отображение $p_1\circ e(S^1\times\{z\})\colon S^1\to S^1$ – неособый эндоморфизм для любого $z\in D^2$, где $p_1\colon S^1\times D^2\to S^1$ – естественная проекция и $e\colon S^1\times D^2\to S^1\times D^2$ – вложение полнотория в себя. Известно, что соленоид является связным и вполне разрывным континуумом, локально гомеоморфным произведению отрезка на канторово множество, с топологической размерностью 1.

Лемма 1. *Пересечение* $\mathrm{Sol}(F)\overset{\mathrm{def}}{=}\bigcap_{n\geqslant 0}F^n(\mathscr{B})$ *является соленоидом.*

Доказательство. Из условия (1.3) для F вытекает, что $F^i(\mathscr{B}) \supset F^{i+1}(\mathscr{B})$ для любого $i \geqslant 0$. Поэтому $F^i(\mathscr{B})$ образуют последовательно вложенные друг в друга полнотории $\mathscr{B} \supset F(\mathscr{B}) \supset \cdots \supset F^i(\mathscr{B}) \supset F^{i+1}(\mathscr{B}) \supset \cdots$. Из (1.1) следует, что ось полнотория $F^{i+1}(\mathscr{B})$ обходит $d \geqslant 2$ раз ось полнотория $F^i(\mathscr{B})$, не образуя крюков. В силу (1.3) пересечение каждого диска $\{t\}\times D^2$ с $\bigcap_{n\geqslant 0} F^n(\mathscr{B})$ является нигде не плотным множеством. Из неравенства $d \geqslant 2$ вытекает, что это пересечение является совершенным и, следовательно, канторовым множеством в $\{t\} \times D^2$. Отсюда следует, что $\bigcap_{n\geqslant 0} F^n(\mathscr{B})$ – соленоид.

Лемма 2. *Множество* $\mathrm{Sol}(F)$ *инвариантно относительно* F.

Доказательство. Учитывая условие (1.3), получаем $F^i(\mathscr{B}) \supset F^{i+1}(\mathscr{B})$. Тогда

$$F(\mathrm{Sol}(F)) = F\biggl(\bigcap_{n\geqslant 0} F^n(\mathscr{B})\biggr) = \bigcap_{n\geqslant 0} F^{n+1}(\mathscr{B}) = \mathrm{Sol}(F).$$

Аналогичным образом, учитывая, что $\mathrm{Sol}(F) = \bigcap_{n\geqslant 0} F^n(\mathscr{B}) = \bigcap_{n\geqslant 1} F^n(\mathscr{B})$, имеем

$$F^{-1}(\mathrm{Sol}(F)) = F^{-1}\biggl(\bigcap_{n\geqslant 1} F^n(\mathscr{B})\biggr) = \bigcap_{n\geqslant 1} F^{n-1}(\mathscr{B}) = \mathrm{Sol}(F).$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество преобразований $F\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B}$, удовлетворяющих условиям (1.1)–(1.3). Поскольку каждое $F \in \mathfrak{M}$ имеет гладкость C^1, то множество $\mathfrak{M}$ естественным образом наделяется C^1-топологией. Отметим, что так как неособый эндоморфизм g имеет степень $d \geqslant 2$, то для любой точки $t \in S^1$ полный прообраз $g^{-1}(t)$ состоит из d различных точек. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_d \in S^1$ попарно различны и $g(t_1) = \cdots = g(t_d)$. Тогда

$$F(t_i, D^2) \cap F(t_j, D^2) = \varnothing, \qquad i \neq j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant d. \tag{2.1}$$

Докажем следующую лемму, необходимую для построения символической модели ограничения отображения F на $\mathrm{Sol}(F)$.

Лемма 3. *Каждой точке* $p \in \mathrm{Sol}(F)$ *соответствуют единственная последовательность точек* $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in S^1$, *и соответствующая последовательность замкнутых двумерных дисков* $D_i = F^i(\{t_i\} \times D^2)$ *такие, что*:
– $p \in \cdots \subset D_{i+1} \subset D_i \subset \cdots \subset D_0$, $p = \bigcap_{i\geqslant 0} D_i$;
– $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geqslant 0$.

Доказательство. Для фиксированной точки p существует единственная точка $t_0 \in S^1$ такая, что $p \in \{t_0\} \times D^2$. Положим $D_0 = \{t_0\} \times D^2$. Из (1.1) следует, что существуют попарно различные $s_1, \dots, s_d \in S^1$ такие, что $g(s_1) = g(s_2) = \cdots = g(s_d) = t_0$, а диски $F(\{s_i\} \times D^2)$ принадлежат диску D_0, $F(\{s_i\} \times D^2) \subset D_0$, $i = 1, \dots, d$. Согласно (2.1) диски $F(\{s_i\} \times D^2)$ попарно не пересекаются. Поэтому существует единственное s_j такое, что $p \in F(\{s_j\}\times D^2)$. Положим $t_1 = s_j$, $D_1 = \{t_1\} \times D^2$. Тогда $p \in D_1 \subset D_0$.

Предположим, что получены (единственным образом определенные) точки $t_0, \dots, t_{k-1} \in S^1$ и замкнутые двумерные диски $D_0, \dots, D_{k-1}$ такие, что

$$p \in D_{k-1} \subset \cdots \subset D_l \subset \cdots \subset D_0, \qquad D_l = F^l(\{t_l\} \times D^2),$$

где $D_l = \{t_l\} \times D^2$. Таким образом, $p \in \bigcap_{l\geqslant 0}^{k-1} D_l$. Из (1.1) следует, что существуют

$$S_1, S_2, \dots, S_d \in S^1 \quad \text{такие, что} \quad g(S_1) = g(S_2) = \dots = g(S_d) = t_{k-1},$$

а диски $F^k(\{S_i\} \times D^2)$ принадлежат диску D_{k-1}, $F^k(\{S_i\} \times D^2) \subset D_{k-1}$. Из (2.1) следует, что существует единственное S_j такое, что $p \in F^k(\{S_j\} \times D^2)$. Положим $t_k = S_j$, $D_k = \{t_k\} \times D^2$. Тогда $p \in D_k \subset D_{k-1} \subset \dots \subset D_0$. Продолжая этот процесс, получим последовательность точек $\{t_i\}_0^\infty$ и замкнутых двумерных дисков $D_i = F^i(\{t_i\} \times D^2)$ таких, что $p \in \dots \subset D_{i+1} \subset D_i \subset \dots \subset D_0$. Из построения вытекает, что $t_i = g(t_{i+1})$ для всех $i \geqslant 0$. Из (1.3) следует, что $\operatorname{diam} D_i = \operatorname{diam}(F^i(\{t_i\} \times D^2)) \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому пересечение $\bigcap_{i\geqslant 0} D_i$ есть одноточечное множество, совпадающее с p.

Пусть $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множество целых неотрицательных чисел. Обозначим через $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ прямое произведение счетного семейства окружностей $S_i^1 = S^1$, наделенное тихоновской топологией (напомним, что в этой топологии база образована множествами $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} V_i$, где V_i открыты в S_i^1, причем только для конечного множества индексов i множества V_i отличны от S_i^1; см. [17]). Точками множества $\prod_{i\in\mathbb{N}} S_i^1$ являются последовательности $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i \in S_i^1$. Известно, что базу тихоновской топологии образуют так называемые (ε, r)-окрестности, где $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{N}$. Напомним, что окрестность U точки $\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ является (ε, r)-окрестностью, если $\{t_0', t_1', \dots, t_i', \dots\} \in U$ тогда и только тогда, когда $|t_0 - t_0'| < \varepsilon$, $\dots$, $|t_r - t_r'| < \varepsilon$.

Обозначим через $\prod_g$ подмножество множества $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} S_i^1$, состоящее из последовательностей $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i = g(t_{i+1})$ при всех $i \geqslant 0$. Топология на $\prod_g$ индуцируется топологией на $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} S_i^1$. Определим на $\prod_g$ отображение $\widehat{g}\colon \prod_g \to \prod_g$, положив

$$\widehat{g}(\{t_0, \dots, t_i, \dots\}) = \{g(t_0), t_0, \dots, t_i \dots\}.$$

Следуя [18] (см. также [10]), пространство $\prod_g$ с отображением $\widehat{g}$ будем называть *обратным пределом преобразования* g.

Лемма 4. *Отображение $\widehat{g}$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $r = \{r_0, \dots, r_i, \dots\} \in \prod_g$, и пусть $U_{\varepsilon,k}$ – (ε, k)-окрестность точки $\widehat{g}(r)$, т.е. $r' = \{r_0', \dots, r_i', \dots\} \in U_{\varepsilon,k}$ тогда и только тогда, когда

$$|g(r_0) - g(r_0')| < \varepsilon, \qquad |r_i - r_i'| < \varepsilon \quad \forall\, i = 1, \dots, k-1.$$

Так как g непрерывно, то существует $0 < \delta \leqslant \varepsilon$ такое, что $|r_0 - r_0'| < \delta$ влечет $|g(r_0) - g(r_0')| < \varepsilon$. Зададим окрестность U_δ точки $\{r_0, \dots, r_i, \dots\}$, положив $r' = \{r_0', \dots, r_i', \dots\} \in U_\delta$, если $|r_i - r_i'| < \delta$ для любого $i = 1, \dots, k-1$. Тогда $\widehat{g}(U_\delta) \subset U_\varepsilon$.

Определим отображение $\theta\colon \operatorname{Sol}(F) \to \prod_g$ следующим образом. Согласно лемме 3 любой точке $p \in \operatorname{Sol}(F)$ соответствует единственная последовательность точек $\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ такая, что $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geqslant 0$. Положим $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$.

Множество $\{t\} \times D^2 \stackrel{\text{def}}{=} D_t^2$ назовем *t-сечением*, где $t \in S^1$. Каждое сечение естественным образом отождествляется с D^2 посредством проекции

$p_2\colon S^1 \times D^2 \to D^2$. Согласно (1.2) диффеоморфизм F переводит t-сечение в $g(t)$-сечение. Поэтому естественным образом определяется диаметр множества $F^n(D^2_t)$:

$$\operatorname{diam} F^n(D^2_t) = \operatorname{diam} p_2(F^n(D^2_t)).$$

Для точек $\alpha, \beta \in S^1$ положим $D^2_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} \times D^2$, где $I_{\alpha\beta} \subset S^1$ – открытый интервал минимальной длины с концевыми точками α, β. Другими словами, $D^2_{\alpha\beta}$ есть $\frac{|\beta-\alpha|}{2}$-окрестность $\frac{\beta+\alpha}{2}$-сечения в $\mathscr{B}$.

Лемма 5. *Отображение θ является гомеоморфизмом таким, что*

$$\theta \circ F|_{\mathrm{Sol}(F)} = \widehat{g} \circ \theta.$$

Доказательство. Докажем инъективность отображения θ. Возьмем различные $p_1, p_2 \in \mathrm{Sol}(F)$. Согласно лемме 3 каждой точке p_i, $i = 1, 2$, соответствует последовательность замкнутых дисков $D^i_j = F^j(\{t^i_j\} \times D^2)$ таких, что $p_i = \bigcap_{j\geqslant 0} D^i_j$. Поскольку $p_1 \neq p_2$ и диаметры дисков стремятся к нулю, то существует k такое, что $D^1_1 = D^2_1, \dots, D^1_{k-1} = D^2_{k-1}$, $D^1_k \neq D^2_k$. Поэтому $t^1_k \neq t^2_k$ и, следовательно, $\theta(p_1) \neq \theta(p_2)$.

Докажем сюръективность отображения θ. Возьмем $\{t_0, t_1, \dots\} \in \prod_g$. Из $t_i = g(t_{i+1})$ и условия (1.3) вытекает, что

$$\{t_0\} \times D^2 \supset F(\{t_1\} \times D^2) \supset \dots \supset F^i(\{t_i\} \times D^2) \supset \cdots.$$

Более того, так как $\operatorname{diam}(F^i(\{t_i\} \times D^2)) \to 0$ при $i \to \infty$, то пересечение $\bigcap_{i\geqslant 0} F^i(\{t_i\} \times D^2)$ состоит ровно из одной точки, скажем p. Из определения множества $\mathrm{Sol}(F)$ следует, что $p \in \mathrm{Sol}(F)$. Таким образом,

$$\theta(p) = (t_0, t_1, \dots, t_i, \dots).$$

Докажем непрерывность отображения θ. Пусть U – окрестность точки $\theta(p) = \{t_i\}_0^\infty$, где $p \in \mathrm{Sol}(F)$. Согласно определению топологии на множестве $\prod_g$ можно считать, что U задается числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ такими, что

$$U = \biggl\{ \{x_i\}_0^\infty \in \prod_g : |x_i - t_i| < \varepsilon \text{ для } i = 0, \dots, r \biggr\}.$$

В силу леммы 3

$$p \in F^r(D^2_{t_r}) \subset F^{r-1}(D^2_{t_{r-1}}) \subset \dots \subset F(D^2_{t_1}) \subset D^2_{t_0}.$$

Поскольку согласно лемме 2 имеют место равенства $F(\mathrm{Sol}(F)) = F^{-1}(\mathrm{Sol}(F)) = \mathrm{Sol}(F)$, то ограничение $F|_{\mathrm{Sol}(F)}$ есть диффеоморфизм $\mathrm{Sol}(F) \to \mathrm{Sol}(F)$. Поэтому существуют однозначно определенные точки $p_i \in D^2_{t_i} \cap \mathrm{Sol}(F)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, такие, что $p = F^i(p_i)$.

Из (1.2) вытекает, что p является внутренней точкой множества $F^r(D^2_{t_r})$ в топологии t_0-сечения $D^2_{t_0}$. Пусть V_0 – окрестность точки p в этой топологии, принадлежащая $F^r(D^2_{t_r})$. Отметим, что для любой точки $q \in V_0$ имеет место включение $\theta(q) \in U$, так как $q \in F^r(D^2_{t_r}) \subset \dots \subset F(D^2_{t_1}) \subset D^2_{t_0}$. Наша задача – сделать из V_0 "объемную" окрестность точки p. Так как $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$, где $t_0 = g(t_1)$, $t_1 = g(t_2)$, $t_2 = g(t_3)$, $\dots$, $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geqslant 0$, то

$$t_0 = g(t_1) = g^2(t_2) = \dots = g^i(t_i), \quad t_1 = g(t_2) = g^2(t_3) = \dots = g^{i-1}(t_i),$$
$$t_2 = g(t_3) = g^2(t_4) = \dots = g^{i-2}(t_i), \quad \dots, \quad t_i = g^{i-j}(t_i)$$

для всех $1 \leqslant j \leqslant i$ и некоторого i. Поэтому

$$\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots\} = \{g^i(t_i), g^{i-1}(t_i), \dots, g(t_i), t_i, \dots\}.$$

Поскольку для точки $\theta(p)$ в ее окрестности U, заданной числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, выполняется равенство $t_{r-j} = g^j(t_r)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant r$, а отображение g непрерывное, то существует такое $0 < \delta \leqslant \varepsilon$, что $|x_r - t_r| < \delta$ влечет $|x_i - t_i| < \varepsilon$ для всех $i = 0, \dots, r$. Следовательно, $F^j(D^2_{t_j-\delta, t_j+\delta}) \subset D^2_{t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon}$ для всех $j = 0, \dots, r$. Множество $F^r(D^2_{t_r-\delta, t_r+\delta})$ имеет вид $D^2_{t_0-\nu_1, t_0+\nu_2}$ для некоторых $\nu_1, \nu_2 > 0$. Тогда множество $(S^1 \times V_0) \cap D^2_{t_0-\nu_1, t_0+\nu_2} \overset{\mathrm{def}}{=} V$ является искомой окрестностью точки p в $\mathscr{B}$. Из определения отображений F и θ вытекает, что $\theta(q) \in U$ для любой точки $q \in V$. Следовательно, θ – непрерывное отображение. Аналогичным образом доказывается непрерывность отображения θ^{-1}. Таким образом, θ – гомеоморфизм.

Докажем равенство $\theta \circ F|_{\mathrm{Sol}(F)} = \widehat{g} \circ \theta$, которое можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sol}(F) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\theta"] & \mathrm{Sol}(F) \arrow[d, "\theta"] \\
\prod_g \arrow[r, "\widehat{g}"] & \prod_g
\end{tikzcd}$$

Согласно лемме 3 любой точке $p \in \mathrm{Sol}(F)$ соответствует единственная последовательность $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$, где $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geqslant 0$. Образ точки $\theta(p)$ относительно отображения $\widehat{g}\colon \prod_g \to \prod_g$ есть по определению

$$\widehat{g}\bigl(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}\bigr) = \{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}.$$

Из условия (1.2) вытекает, что $F(p) \in F(\{t_0\} \times D^2) \subset \{g(t_0)\} \times D^2$. В силу леммы 3 образом точки $F(p)$ относительно отображения θ является последовательность $\{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$. Следовательно, $\widehat{g}[\theta(p)] = \theta[F(p)]$. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathrm{NW}(\psi)$ неблуждающее множество преобразования ψ (не обязательно взаимно однозначного). Напомним, что $p \in \mathrm{NW}(\psi)$, если для любой окрестности $U(p)$ точки p существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $U(p) \cap \psi^n(U(p)) \neq \varnothing$. Так как сопрягающий гомеоморфизм переводит неблуждающее множество в неблуждающее множество, то из леммы 5 вытекает следующее следствие.

Замечание 1. $\theta[\mathrm{NW}(F)] = \mathrm{NW}(\widehat{g})$.

В определении диффеоморфизма SV существенную роль играют неособые эндоморфизмы окружности. Изучим неблуждающее множество таких эндоморфизмов подробнее. Пусть $g\colon S^1 \to S^1$ – неособый эндоморфизм степени $d \geqslant 2$. Для точки $x \in S^1$ определим *обобщенную орбиту* $G_O(x)$ этой точки как множество $y \in S^1$ таких, что $g^n(x) = g^m(y)$ для некоторых $n, m \in \mathbb{Z}^+_0$. Другими словами, $G_O(x)$ есть объединение прообразов относительно всех итераций g^n, $n \in \mathbb{Z}^+_0$, каждой точки из положительной орбиты точки x. Множество $N \subset S^1$ называется *инвариантным*, если $x \in N$ влечет $G_O(x) \subset N$.

Покажем, что N инвариантное тогда и только тогда, когда $N = g(N) = g^{-1}(N)$. Действительно, пусть N инвариантное и $x \in N$. Тогда

$$G_O(g(x)) = \big\{y \in S^1 : \exists\, n, m \in \mathbb{Z}_0^+,\, g^{n+1}(x) = g^m(y) = g^{n_1}(x)\big\} \subset G_0(x) \subset N.$$

Поэтому $g(N) \subset N$. Так как для любой точки из прообраза $g^{-1}(x)$ выполняется равенство $g(g^{-1}(x)) = x = g^0(x)$, то $g^{-1}(x) \subset G_O(x)$ и, следовательно, $g^{-1}(N) \subset N$. Таким образом, инвариантность N влечет равенства $N = g(N) = g^{-1}(N)$. Пусть теперь $N = g(N) = g^{-1}(N)$. Для любой точки $x_1 \in G_O(x)$ существуют $n, m \in \mathbb{Z}_0^+$ такие, что $g^n(x) = g^m(x_1)$. Тогда $g^m(x_1) \in N$, поскольку $g^n(x) \in N$. Из $g^{-1}(N) \in N$ вытекает включение $x_1 \in N$ и, следовательно, $G_O(x) \subset N$.

Если g – транзитивный эндоморфизм, то $\mathrm{NW}(g) = S^1$. Поэтому в основном далее мы будем рассматривать нетранзитивный эндоморфизм g. Ключевым утверждением для таких g служит следующий результат Шуба (см. [19]).

Предложение 1. *Пусть $E_d\colon S^1 \to S^1$ – линейный растягивающий эндоморфизм степени $d \geqslant 2$. Тогда для любого неособого эндоморфизма $g\colon S^1 \to S^1$ степени $d \geqslant 2$ существует непрерывное и сохраняющее ориентацию отображение $h\colon S^1 \to h(S^1) = S^1$, полусопрягающее g с E_d, т.е. имеет место соотношение $h \circ g = E_d \circ h$. Более того, если g – растягивающий эндоморфизм, то h – гомеоморфизм (следовательно, h сопрягает g с E_d). В противном случае h не является гомеоморфизмом.*

Непосредственно из этого утверждения следует, что

$$h \circ g^n = E_d^n \circ h \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Из непрерывности и монотонности полусопрягающего отображения h вытекает, что для любой точки $x \in S^1$ множество $h^{-1}(x)$ есть либо точка, либо нетривиальный замкнутый интервал. Обозначим через Σ° подмножество таких $x \in S^1$, что $h^{-1}(h(x))$ – одна точка. Другими словами, ограничение $h|_{\Sigma^\circ}$ есть взаимно однозначное отображение $\Sigma^\circ \to h(\Sigma^\circ)$.

Лемма 6. *Множество Σ° является инвариантным множеством эндоморфизма g.*

Доказательство. Нужно показать, что $g(\Sigma^\circ) = \Sigma^\circ = g^{-1}(\Sigma^\circ)$. Возьмем $x \in \Sigma^\circ$ и предположим, что $g(x) \notin \Sigma^\circ$. Тогда $h^{-1}(h \circ g(x))$ есть нетривиальный замкнутый интервал, скажем $[a, b]$. Так как $x \in \Sigma^\circ$, то существует открытый интервал (α, β), содержащий x, такой, что $h(\alpha, \beta) = (h(\alpha), h(\beta))$ является нетривиальным интервалом, содержащим точку $w = h(x)$. Из непрерывности h следует, что интервал (α, β) можно взять столь малым, что ограничение $E_d|_{h(\alpha,\beta)}$ отображения E_d на $h(\alpha, \beta)$ будет гомеоморфизмом. Из непрерывности g следует, что существует точка $x_* \in (\alpha, \beta)$ такая, что $g(x_*) \in [a, b]$. Поэтому $h \circ g(x_*) = E_d(w)$ и $h(x_*) \in (h(\alpha), h(\beta))$. Поскольку $x \in \Sigma^\circ$, то $h(x_*) \neq h(x) = w$. С другой стороны, согласно (2.2) получаем $E_d \circ h(x) = E_d(w) = h \circ g(x_*) = E_d \circ h(x)$, что противоречит гомеоморфности $E_d|_{h(\alpha,\beta)}$. Это доказывает включение $g(\Sigma^\circ) \subset \Sigma^\circ$.

Пусть теперь $g(x) \in \Sigma^\circ$, и предположим, что $x \notin \Sigma^\circ$. Тогда x принадлежит нетривиальному замкнутому интервалу $h^{-1}(h(x)) = [c, d]$. Так как g –

неособый эндоморфизм и, следовательно, локальный гомеоморфизм, то существует нетривиальный интервал $[\delta,\gamma]\subset[c,d]$ такой, что $x\in[\delta,\gamma]$ и ограничение $g|_{[\delta,\gamma]}$ есть гомеоморфизм. В силу (2.2) для любой точки $x_*\in[\delta,\gamma]$, $x_*\neq x$, имеем $h\circ g(x_*)=E_d\circ h(x_*)=h\circ g(x)$, что противоречит включению $g(x)\in\Sigma^\circ$, поскольку $g(x_*)\neq g(x)$. Полученное противоречие доказывает включение $g^{-1}(\Sigma^\circ)\subset\Sigma^\circ$. Лемма доказана.

Замечание 2. В обозначениях леммы 6 имеют место соотношения

$$E_d\bigl[h(\Sigma^\circ)\bigr]=h(\Sigma^\circ)=E_d^{-1}\bigl[h(\Sigma^\circ)\bigr],\qquad E_d\circ h|_{\Sigma^\circ}=h\circ g|_{\Sigma^\circ}.$$

Более того, ограничение $h|_{\Sigma^\circ}\colon\Sigma^\circ\to h(\Sigma^\circ)$ является гомеоморфизмом, который сопрягает $g|_{\Sigma^\circ}$ с $E_d|_{h(\Sigma^\circ)}$.

Доказательство. Согласно лемме 6 $g(\Sigma^\circ)=\Sigma^\circ=g^{-1}(\Sigma^\circ)$. Отсюда и из (2.2) вытекают равенства $E_d[h(\Sigma^\circ)]=h(\Sigma^\circ)=E_d^{-1}[h(\Sigma^\circ)]$. Так как h – монотонное и непрерывное отображение, то $h|_{\Sigma^\circ}$ есть гомеоморфизм.

Из предложения 1 следует, что множество $S^1\setminus\Sigma^\circ$ представляет собой объединение попарно непересекающихся замкнутых интервалов. Из следствия 2 вытекает, что мощность множества этих интервалов счетная, поскольку множество $h(\Sigma^\circ)$ инвариантно относительно E_d. Таким образом, $S^1\setminus\Sigma^\circ=\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]$, причем можно считать, что $h^{-1}(h[a_i,b_i])=[a_i,b_i]$ для всех $i\in\mathbb{N}$ и $[a_i,b_i]\cap[a_j,b_j]=\varnothing$ при $i\neq j$. Интервалы $[a_i,b_i]$ будем называть *смежными*. Соответствующие открытые интервалы (a_i,b_i) мы будем называть *открытыми смежными*.

Смежный интервал $[a,b]$ называется *периодическим*, если $g^k([a,b])=[a,b]$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$. Отметим, что концевые точки периодического смежного интервала являются периодическими точками. Внутри периодического интервала могут быть периодические точки (но их может и не быть).

Обозначим через Σ объединение Σ° со всеми концевыми точками a_i, b_i смежных интервалов множества $S^1\setminus\Sigma^\circ$, $\Sigma=\Sigma^\circ\bigcup_{i\geqslant1}(\{a_i\}\cup\{b_i\})$. Ясно, что если $\Sigma\neq S^1$, то g – нетранзитивный эндоморфизм, и наоборот.

Лемма 7. *Пусть $g\colon S^1\to S^1$ – неособый и нетранзитивный эндоморфизм степени $d\geqslant2$. Тогда его неблуждающее множество $\mathrm{NW}(g)$ есть объединение Σ со всеми периодическими точками из открытых смежных интервалов.*

Доказательство. Из следствия 2 вытекает, что $\Sigma^\circ\subset\mathrm{NW}(g)$, поскольку $\mathrm{NW}(E_d)=S^1$. Отсюда, а также из непрерывности и монотонности h следует включение $\Sigma\subset\mathrm{NW}(g)$. Возьмем точку $x\in\mathrm{NW}(g)$, не принадлежащую Σ. Тогда $x\in(a,b)$, где $h(a,b)=h(a)=h(b)$, причем можно считать, что $h^{-1}(h(a,b))=(a,b)$. Покажем, что $[a,b]$ – периодический интервал. Так как $x\in\mathrm{NW}(g)$, то $g^k(a,b)\cap(a,b)\neq\varnothing$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$. Отсюда и из леммы 6 следует, что $g^k(a,b)=(a,b)$. Это влечет периодичность точки x, поскольку из неособости g получаем, что ограничение $g^k|_{(a,b)}\colon(a,b)\to g^k(a,b)=(a,b)$ является гомеоморфизмом, а точка принадлежит неблуждающему множеству монотонного гомеоморфизма интервала, только если она неподвижная.

Хотя множество Σ формально зависит от полусопрягающего отображения h, можно показать, что Σ зависит только от g, и далее мы будем обозначать его через Σ_g.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Перед доказательством теоремы 1 для удобства читателя мы приведем ряд определений. Пусть M_i – трехмерное многообразие и $B_i \subset M_i$ – 3-клетка (образ открытого трехмерного шара относительно вложения в M_i), $i = 1, 2$. *Связной суммой* $M_1 \# M_2$ двух многообразий M_1, M_2 называется трехмерное многообразие $M = M_1 \# M_2$, которое получается из $M_1 \setminus B_1$, $M_2 \setminus B_2$ после отождествления граничных компонент $\partial B_1 = \partial(M_1 \setminus B_1)$, $\partial B_2 = \partial(M_2 \setminus B_2)$ с помощью некоторого диффеоморфизма $\tau\colon \partial B_1 \to \partial B_2$, $M_1 \# M_2 = (M_1 \setminus B_1) \bigcup_\tau (M_2 \setminus B_2)$.

Пусть B^n – стандартный единичный замкнутый n-мерный шар евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Множество, гомеоморфное произведению $B^i \times B^{n-i}$, называется *ручкой индекса* i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Подмножество $\partial B^i \times B^{n-i}$ ручки индекса i называется *подошвой*. Говорят, что многообразие M получается из многообразия N *приклеиванием нескольких ручек*, если $\operatorname{clos}(M - N)$ является несвязным объединением ручек, подошвы которых лежат в ∂N. Трехмерное многообразие D^3_h называется *трехмерным шаром с* h *ручками*, если D^3_h получается из B^3 приклеиванием $h \geqslant 0$ ручек индекса 1. *Разбиением Хегора* рода $h \geqslant 0$ замкнутого трехмерного многообразия M^3 называется представление M^3 в виде склейки двух трехмерных шаров с h ручками с помощью некоторого гомеоморфизма, который отождествляет их границы. *Родом Хегора* многообразия M^3 называется наименьшее h, для которого существует соответствующее разбиение Хегора многообразия M^3 (см. [20]). Примером многообразия с родом Хегора 1 является линза $L_{p,q}$, которая может быть также получена в результате склеивания двух полноториев $S^1 \times D^2$, $D^2 \times S^1$ вдоль их границ (двумерных торов $S^1 \times S^1$) с помощью линейного автоморфизма тора вида $\overline{x} = rx+py \pmod 1$, $\overline{y} = sx+qy \pmod 1$, где целые числа r, s удовлетворяют соотношению $ps - qr = \pm 1$. Мы относим к списку линз трехмерную сферу $S^3 = L_{1,0}$, которую обычно к линзам не причисляют, но которая формально может быть получена с помощью указанной выше склейки двух полноториев.

Доказательство теоремы 1. Мы следуем методу доказательства соответствующего результата работы [13; с. 90]. Пусть $\mathscr{B} \subset M^3$ – базовый полноторий, ограниченный двумерным тором T^2. Замыкание множества $M^3 \setminus \mathscr{B}$ является компактным многообразием (обозначим его через N^3) с границей T^2. Покажем, что гомоморфизм $e_*\colon \pi_1(T^2) \to \pi_1(N^3)$, индуцируемый естественным вложением $e : T^2 \subset N^3$, не является мономорфизмом. Предположим противное (это предположение эквивалентно несжимаемаемости поверхности T^2 в N^3). Так как включение $f(\mathscr{B}) \subset \mathscr{B}$ собственное, то включение $\mathscr{B} \subset f^{-1}(\mathscr{B})$ также собственное и, следовательно, $M^3 \setminus f^{-1}(\mathscr{B}) \subset M^3 \setminus \mathscr{B}$. Поэтому $f^{-1}(N^3) \subset N^3$. В частности, $f^{-1}(T^2) \subset N^3$. Так как $f(T^2)$ разбивает $\mathscr{B}$, то два тора T^2 и $f(T^2)$ ограничивают в $\mathscr{B}$ некоторое трехмерное тело, которое мы обозначим через Q^3. Следовательно, $f^{-1}(Q^3) \subset N^3$ является телом, ограниченным торами T^2, $f^{-1}(T^2)$. Согласно конструкции торы T^2 и $f(T^2)$ не параллельны (т.е. Q^3 не гомеоморфно $T^2 \times [0,1]$). Следовательно, T^2 и $f^{-1}(T^2)$ также не параллельны. Далее, поскольку ограничение $f^{-1}|_{N^3}$ является гомеоморфизмом, то N^3 гомеоморфно $f^{-1}(N^3)$. Поэтому из несжимаемости T^2 в N^3 следует несжимаемость $f^{-1}(T^2)$ в $f^{-1}(N^3)$. Таким образом, мы получили в N^3 два несжимаемых и непараллельных тора T^2 и $f^{-1}(T^2)$. Ясно, что $f^{-2}(Q^3)$ ограничено непараллельными торами $f^{-2}(T^2)$ и $f^{-1}(T^2)$. Покажем, что торы T^2 и $f^{-2}(T^2)$

непараллельны, т.е. множество $f^{-1}(Q^3) \cup f^{-2}(Q^3)$, которое они ограничивают, не гомеоморфно $T^2 \times [0,1]$. Предположим, что $f^{-1}(Q^3) \cup f^{-2}(Q^3)$ гомеоморфно $T^2 \times [0,1]$. Так как в $f^{-1}(Q^3) \cup f^{-2}(Q^3)$ лежит тор $f^{-1}(T^2)$, который разбивает $f^{-1}(Q^3) \cup f^{-2}(Q^3)$ на два множества $f^{-1}(Q^3)$ и $f^{-2}(Q^3)$, и тор $f^{-1}(T^2)$ несжимаемый, то в силу теоремы 3.2 из [21] (см. также [22]) каждое из множеств $f^{-1}(Q^3)$, $f^{-2}(Q^3)$ должно быть гомеоморфным $f^{-1}(Q^3) \cup f^{-2}(Q^3)$, т.е. гомеоморфным $T^2 \times [0,1]$, что неверно. Таким образом, T^2, $f^{-1}(T^2)$ и $f^{-2}(T^2)$ суть попарно непараллельные и несжимаемые в N^3 торы. Продолжая указанный процесс, получим бесконечное семейство попарно непараллельных и несжимаемых двумерных торов $T^2, f^{-1}(T^2), f^{-2}(T^2), \dots, f^{-k}(T^2), \dots$, что противоречит теореме Хакена (см. [23]). Полученное противоречие доказывает сжимаемость T^2 в N^3.

Таким образом, гомоморфизм $e_*\colon \pi_1(T^2) \to \pi_1(N^3)$ имеет нетривиальное ядро. Из теоремы о петле (см. [24]) следует, что на T^2 существует простая замкнутая и гомотопически нетривиальная кривая C, ограничивающая вложенный в N^3 диск $D^2 \subset N^3$ такой, что $T^2 \cap D^2 = C$. Возьмем достаточно близкий к T^2 и параллельный T^2 двумерный тор $T_1^2 \subset \operatorname{int} N^3$, который пересекается с диском D^2 вдоль простой замкнутой кривой $C_1 = D^2 \cap T_1^2$, причем кривая C_1 гомотопически нетривиальна на T_1^2 и ограничивает на D^2 диск $D_1^2 \subset D^2$. Множество, ограниченное торами T^2, T_1^2, обозначим через $Q_* \subset N^3$. Ясно, что Q_* гомеоморфно $T^2 \times [0,1]$.

При разрезании двумерного тора по простой и гомотопически нетривиальной замкнутой кривой получается кольцо. Тор T^2 разбивает M^3 на две компоненты $\mathscr{B}$ и $\operatorname{clos}(M^3 \setminus \mathscr{B})$. Поэтому при разрезании многообразия M^3 вдоль T^2 и D^2 получаются два компактных многообразия M_*^3, M_2^3, граница каждого из которых гомеоморфна двумерной сфере $S_1^2 = \partial M_*^3$, $S_2^2 = \partial M_2^3$ соответственно. На каждой из сфер S_1^2, S_2^2 имеется по две копии диска D^2. Склеив эти копии, мы получим так называемый толстый диск D^2, у которого стороны считаются геометрически различными. Аналогичное соглашение будет применяться для диска D_1^2. Пусть для определенности M_2^3 содержит $\mathscr{B}$. Тогда в M_*^3 лежит Q_*, разрезанное по D^2. Если мы добавим к такому множеству Q_* толстый диск D^2, то получим множество, гомеоморфное полноторию, скажем P, из которого удален открытый трехмерный шар $\mathbb{B}^3$. Границей этого шара является сфера $\partial\mathbb{B}^3$, образованная после разрезания тора T_1^2 вдоль C_1 и приклеивания к граничным компонентам полученного кольца двух копий диска D_1^2. Таким образом, M^3 получается после склейки полнотория $\mathscr{B}$ и полнотория P, из которого удален трехмерный шар, и затем приклеивания к границе $\partial\mathbb{B}^3$ указанного трехмерного шара части многообразия M_*^3, ограниченного сферой $\partial\mathbb{B}^3$. Если обозначить через M_1^3 часть многообразия M_*^3, ограниченного сферой $\partial\mathbb{B}^3$, то многообразие M^3 можно представить в виде связной суммы $M^3 = (L_{p,q} \setminus \mathbb{B}^3) \# M_1$, поскольку склейка $\mathscr{B}$ и P вдоль граничного тора T^2 дает некоторую линзу $L_{p,q}$, из которой удален шар $\mathbb{B}^3$. Непосредственно из доказательства вытекает, что базовый полноторий принадлежит $L_{p,q} \setminus \mathbb{B}^3 \subset M^3$.

Обратное утверждение о том, что на любой линзе $L_{p,q}$, $p \geqslant 1$, существует диффеоморфизм $f\colon L_{p,q} \to L_{p,q}$ из класса SV, следует из работы [13] (см. также [25]). Для удобства приведем идею доказательства для трехмерной сферы $S^3 = L_{1,0}$, которую можно представить как результат склейки двух полноториев N_1, N_2 вдоль их границ (рис. 2) с помощью диффеоморфизма $\partial N_1 \to \partial N_2$

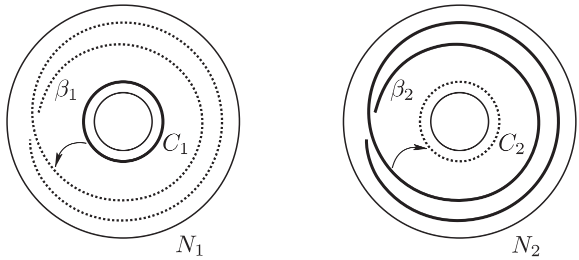

Рис. 2

(напомним, что ∂N_1, ∂N_2 гомеоморфны двумерному тору), переводящего меридианы тора ∂N_1 в параллели тора ∂N_2 и наоборот.

Рассмотрим два зацепления (C_1, β_2) и (C_2, β_1) в S^3 таких, что $C_1, \beta_1 \in N_1$ и $C_2, \beta_2 \in N_2$ (см. рис. 2). Покажем схематично, что существует диффеотопия $\varphi_t\colon S^3 \to S^3$, $\varphi_0 = \mathrm{id}$ такая, что $\varphi_1(C_1) = \beta_1$, $\varphi_1(\beta_2) = C_2$. Поскольку отождествляющий диффеоморфизм переводит параллель в меридиан, кривая C_1 деформируется в кривую, охватывающую в полнотории N_2 кривую β_2. Теперь скручиваем C_1, как показано на рис. 3, одновременно раскручивая β_2. Отметим, что при этом используется стягиваемость в точку параллели тора ∂N_2 (она гомотопна кривой C_2) в полнотории N_1. Кривая β_2 деформируется в кривую β_2', которая затем деформируется в C_2. Далее скрученную кривую C_1' деформируем в кривую C_1'' (внешне это выглядит как сгибание C_1'), которая гомотопна удвоенной кривой C_1 и деформируется в β_1 (см. рис. 3).

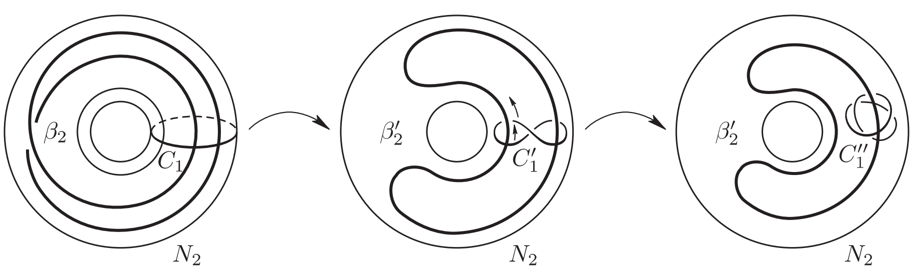

Рис. 3

Обозначим через $T(k)$ трубчатую окрестность простой замкнутой кривой k. Диффеотопия сферы S^3, переводящая (C_1, β_2) в (C_2, β_1), индуцирует диффеотопию достаточно малых трубчатых окрестностей $T(C_1) \to T(\beta_1)$, $T(\beta_2) \to T(C_2)$, которую мы обозначим снова через φ_1. Ясно, что можно считать, что φ_1 сохраняет дисковую структуру. Поскольку существуют сохраняющие дисковую структуру диффеоморфизмы $N_1 \leftrightarrow T(C_1)$, $N_2 \leftrightarrow T(C_2)$, то φ_1 индуцирует диффеоморфизмы $F_1\colon N_1 \to T(\beta_1)$, $F_2\colon T(\beta_2) \to N_2$, сохраняющие дисковую структуру. Согласно [6], не умаляя общности, можно считать, что F_1 является диффеоморфизмом с одномерным растягивающим аттрактором в полнотории N_1. На множестве $N_2 \setminus T(\beta_2)$ диффеоморфизм φ_1 индуцирует диффеоморфизм $N_2 \setminus T(\beta_2) \to N_1 \setminus T(\beta_1)$, который является продолжением диффеоморфизмов F_1, F_2. Таким образом, мы получаем диффеоморфизм $f\colon S^3 \to S^3$ из класса SV.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Перед доказательством теоремы 2 приведем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 8. *Имеет место включение*

$$\mathrm{NW}(F) \subset \mathrm{Sol}(F) \cap p_1^{-1}[\mathrm{NW}(g)].$$

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Sol}(F)$ – притягивающее множество, то $\mathrm{NW}(F) \subset \mathrm{Sol}(F)$. Возьмем точку $P = (t, z) \in \mathrm{NW}(F)$. Тогда $p_1(P) = t \in S_1$, и осталось показать, что $t \in \mathrm{NW}(g)$. Пусть V_1 – интервал, являющийся окрестностью точки t. Возьмем окрестность $U(P)$ точки P такую, что $p_1(U(P)) \subset V_1$. Согласно определению неблуждающего множества существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $U(P) \cap F^{n_0}(U(P)) \neq \varnothing$. Поскольку p_1 – проекция, то $V_2 = p_1\bigl(F^{n_0}(U(P))\bigr)$ – открытое множество. В силу определения отображения $F = (g, w)$ $V_2 = g^{n_0}(V_1)$ и $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Поэтому $t \in \mathrm{NW}(g)$.

Лемма 9. *Пусть* $F(t, z) = (g(t), w(t, z))$ *удовлетворяет указанным выше условиям* (1.1)–(1.3). *Тогда*:

(i) $p_1^{-1}(\Sigma_g) \cap \mathrm{Sol}(F) \subset \mathrm{NW}(F)$;

(ii) *если эндоморфизм g нетранзитивный и $[a, b]$ – периодический смежный интервал минимального периода $l \geqslant 1$, то*:

- *для любой периодической точки $t_0 \in (a, b)$ пересечение $D^2_{t_0} \cap \mathrm{NW}(F)$ состоит из одной периодической точки (t_0, z_0) минимального периода l; если при этом t_0 изолированная в $\mathrm{NW}(g)$, то точка (t_0, z_0) изолированная в $\mathrm{NW}(F)$, а если t_0 не изолированная в $\mathrm{NW}(g)$, то (t_0, z_0) не изолированная в $\mathrm{NW}(F)$*;
- *пересечение $(\operatorname{int} D^2_{ab}) \cap \mathrm{NW}(F)$ состоит из периодических точек периода l.*

Доказательство. (i) Возьмем точку $P(t, z) \in \mathrm{Sol}(F) \cap p_1^{-1}(\Sigma_g)$. Ее образом относительно отображения θ является однозначно определенная последовательность $\theta(P) = \{t = t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$, где $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geqslant 0$. Рассмотрим произвольную окрестность $U[\theta(P)]$. Не умаляя общности, можно считать, что существуют $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$U[\theta(P)] = \biggl\{\{t'_0, t'_1, \dots, t'_i, \dots\} \in \prod_g : t'_i = g(t'_{i+1}),$$
$$|t'_0 - t_0| < \varepsilon,\ |t'_1 - t_1| < \varepsilon,\ \dots,\ |t'_r - t_r| < \varepsilon\biggr\}.$$

Так как отображения $g, \dots, g^{r-1}, g^r$ непрерывны, то существует такое $0 < \delta \leqslant \varepsilon$, что неравенство $|t'_r - t_r| < \delta$ влечет

$$|g^r(t'_r) - g^r(t_r)| < \varepsilon, \quad |g^{r-1}(t'_r) - g^{r-1}(t_r)| < \varepsilon, \quad \dots, \quad |g(t'_r) - g(t_r)| < \varepsilon.$$

Сначала рассмотрим случай $t_0 = p_1(P) \in \Sigma^\circ \subset \mathrm{NW}(g)$. Тогда согласно лемме 6 $t_r \in \mathrm{NW}(g)$. По определению неблуждающего множества существует $n_0 \in \mathbb{N}$

такое, что для любой окрестности $V_\delta(t_r)$ точки t_r выполняется неравенство $g^{n_0}[V_\delta(t_r)] \cap V_\delta(t_r) \neq \varnothing$. Отсюда следует, что существует $t'_r \in V_\delta(t_r)$ такое, что $g^{n_0}(t'_r) \in V_\delta(t_r)$. Поэтому

$$|g^{r+n_0}(t'_r) - g^{r+n_0}(t_r)| < \varepsilon, \quad |g^{r+n_0-1}(t'_r) - g^{r+n_0-1}(t_r)| < \varepsilon, \quad \dots,$$
$$|g^{n_0+1}(t'_r) - g^{n_0+1}(t_r)| < \varepsilon, \quad |g^{n_0}(t'_r) - g^{n_0}(t_r)| < \varepsilon.$$

Так как для точки $\theta(P)$ и ее окрестности U выполняются равенства $t_{r-j} = g^j(t_r)$, $1 \leqslant j \leqslant r$ (см. лемму 5), то

$$\theta(P) = \{t_0, t_1, \dots, t_{r-1}, t_r, \dots\} = \{g^r(t_r), g^{r-1}(t_r), \dots, g(t_r), t_r, \dots\}.$$

Тогда для некоторой точки $p' \in \theta^{-1}\{U[\theta(P)]\} \in \mathrm{Sol}(F) \cap p_1^{-1}(\Sigma_g)$ выполняется равенство

$$\theta(p') = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_{r-1}, t'_r, \dots\} = \{g^r(t'_r), g^{r-1}(t'_r), \dots, g(t'_r), t'_r, \dots\}.$$

Поэтому точка

$$\begin{aligned}\widehat{g}^{n_0}[\theta(p')] &= \{g^{n_0}(t'_0), g^{n_0-1}(t'_0), \dots, g(t'_0), t'_0, t'_1, \dots\} \\ &= \{g^{n_0+r}(t'_r), g^{n_0+r-1}(t'_r), \dots, g^{n_0}(t'_r), \dots\}\end{aligned}$$

принадлежит $U[\theta(P)]$, т.е.

$$\widehat{g}^{n_0}\bigl(U[\theta(P)]\bigr) \cap U[\theta(p)] \neq \varnothing.$$

В силу определения неблуждающего множества $\theta(P) \in \mathrm{NW}(\widehat{g})$ и согласно следствию 1 $P \in \mathrm{NW}(F)$. Следовательно, $\mathrm{NW}(F) \supset \mathrm{Sol}(F) \cap p_1^{-1}(\Sigma^\circ)$. Поскольку Σ° всюду плотно в Σ_g, то из доказанного выше и непрерывности проекции p_1 вытекает требуемое включение $\mathrm{NW}(F) \supset \mathrm{Sol}(F) \cap p_1^{-1}(\Sigma_g)$.

(ii) Из $g^l(t_0) = t_0$ и (1.3) следует, что $F^l|_{\{t_0\}\times D^2} : D^2_{t_0} \to D^2_{t_0}$ является сжимающем отображением диска $D^2_{t_0}$ в себя. Поэтому в $D^2_{t_0}$ имеется ровно одна притягивающая неподвижная точка, скажем Q_0, ограничения $F^l|_{D^2_{t_0}}$. Существует интервал $(\alpha, \beta) \subset S^1$, содержащий t_0 и принадлежащий смежному интервалу множества $S^1 \setminus \Sigma^\circ$. Если все точки из $(\alpha, \beta) \setminus \{t_0\}$ непериодические, то в силу леммы 7 они являются блуждающими точками эндоморфизма g. Согласно лемме 8 диски D^2_t при $t \in (\alpha, \beta) \setminus \{t_0\}$ состоят из блуждающих точек диффеоморфизма F. Таким образом, изолированность t_0 влечет изолированность точки Q_0. Рассмотрим теперь случай, когда в $(\alpha, \beta) \setminus \{t_0\}$ имеются периодические точки t' для любого интервала (α, β), содержащего точку t_0. Поскольку все периодические точки из одного смежного интервала имеют один и тот же период, скажем $l \in \mathbb{N}$, то в любом диске $D^2_{t'}$ лежит ровно одна притягивающая точка периода l диффеоморфизма F. Отсюда и из непрерывности F вытекает, что в $D^2_{t_0}$ имеется ровно одна неблуждающая точка, которая совпадает с Q_0.

Смежный интервал $[a, b]$ эндоморфизма g будем называть *потенциально периодическим*, если $[a, b]$ не является периодическим, но $g^k([a, b])$ является периодическим интервалом для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 10. *Пусть $F(t, z) = (g(t), w(t, z))$ удовлетворяет указанным выше условиям (1.1)–(1.3) и эндоморфизм g нетранзитивный. Тогда*:

– *пересечение* $(\operatorname{int} D^2_{ab}) \cap \mathrm{NW}(F)$ *для любого периодического смежного интервала* $[a,b]$ *состоит из конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек*;
– *каждый смежный интервал является либо периодическим, либо потенциально периодическим интервалом.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $(t,z) \in p_1^{-1}(\Sigma_g)$. В силу леммы 9 точка (t,z) не является изолированной точкой в $\mathrm{NW}(F)$. По условию, накладываемому на диффеоморфизмы SV, в (t,z) имеется гиперболическая структура. Из вида $F(t,z) = (g(t), w(t,z))$ вытекает, что $Dg(t)$ есть одно из собственных значений якобиана преобразования F. Если предположить, что $Dg(t) < 1$, то (t,z) является стоковой притягивающей точкой и, следовательно, изолированной в $\mathrm{NW}(F)$. Поэтому $Dg(t) > 1$. Так как (t,z) – произвольная точка, то $Dg|_{\Sigma_g} > 1$. В силу компактности Σ_g существует такое $\delta > 0$, что в δ-окрестности $U_\delta(\Sigma_g)$ выполняется $Dg|_{U_\delta(\Sigma_g)} > 1$.

Пусть $l \geqslant 1$ – период периодического смежного интервала $[a,b]$. Тогда диффеоморфизм $g^l|_{[a,b]} \colon [a,b] \to [a,b]$ имеет отталкивающие концевые точки. Согласно лемме 9 пересечение $\operatorname{int} D^2_{ab} \cap \mathrm{NW}(F)$ состоит из периодических точек одного периода l. Так как эти точки гиперболические, то их число конечно. Следовательно, $g^l|_{[a,b]}$ имеет конечное число неподвижных точек. Из гиперболичности $\mathrm{NW}(F)$ и того, что $Dg(t)$ есть одно из собственных значений якобиана F, следует, что $Dg \neq 1$ в неподвижных точках $g^l|_{[a,b]}$, т.е. эти точки гиперболические. Ясно, что стоки и источники чередуются и имеется хотя бы один сток, поскольку концевые точки a, b отталкивающие. Отсюда вытекает, что пересечение $\operatorname{int} D^2_{ab} \cap \mathrm{NW}(F)$ состоит из конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек.

Пусть $[\alpha,\beta]$ – смежный интервал и все интервалы $\{g^k([a,b])\}_{k\geqslant 0}$ попарно не пересекаются. Тогда длина $g^k([a,b])$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Поэтому для всех достаточно больших k интервалы $g^k([a,b])$ должны принадлежать δ-окрестности $U_\delta(\Sigma_g)$. Поскольку $Dg|_{U_\delta(\Sigma_g)} > 1$, то длина $g^k([a,b])$ не может стремиться к нулю при $k \to \infty$. Полученное противоречие показывает, что каждый смежный интервал является либо периодическим, либо потенциально периодическим интервалом.

Доказательство теоремы 2. Из лемм 7, 10 вытекает, что либо g – растягивающее преобразование (и тогда $\mathrm{NW}(g) = S^1$), либо $\mathrm{NW}(g)$ содержит ровно одно инвариантное множество Σ канторовского типа плюс конечное (ненулевое) число изолированных стоковых периодических точек и конечное (возможно, нулевое) число седловых периодических точек. Докажем вспомогательное утверждение, которое нам потребуется в дальнейшем.

Предложение 2. *Пусть* L *– инвариантное множество неособого эндоморфизма* g. *Если* L *содержит всюду плотную положительную полуорбиту* $O^+(x_0) = \{g^n(x_0) : n \geqslant 0\}$, $x_0 \in L$, *то диффеоморфизм* $F|_{\mathrm{Sol}(F)}$ *имеет всюду плотную положительную полуорбиту в множестве* $p_1^{-1}(L) \cap \mathrm{Sol}(F)$. *Если в* L *всюду плотны периодические точки, то в* $p_1^{-1}(L) \cap \mathrm{Sol}(F)$ *также всюду плотны периодические точки.*

Доказательство. Докажем первую часть предложения. Из инвариантности L и $\mathrm{Sol}(F)$ (см. лемму 2) следует, что $p_1^{-1}(L)\cap\mathrm{Sol}(F)\overset{\mathrm{def}}{=}N$ является инвариантным множеством диффеоморфизма $F|_{\mathrm{Sol}(F)}$. Согласно лемме 5 $F|_{\mathrm{Sol}(F)}$ сопряжен отображению $\widehat{g}\colon \prod_g\to\prod_g$ вида $\{t_0,\dots,t_i,\dots\}\to\{g(t_0),t_0,\dots,t_i,\dots\}$ посредством гомеоморфизма $\theta\colon \mathrm{Sol}(F)\to\prod_g$. Поэтому достаточно доказать, что $\widehat{g}$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в множестве $\theta(N)$. Возьмем

$$q_0=\{x_0,x_1,\dots,x_i,x_{i+1},\dots\}\in\theta(N),$$

и пусть $U(q)$ – произвольная окрестность произвольной точки $q=\{t_0,t_1,\dots,t_i,t_{i+1},\dots\}\in\theta(N)$. Отметим, что включение $q_0\in\theta(N)$ вытекает из инвариантности L и включения $x_0\in L$. Не умаляя общности, можно считать, что $U(q)$ является (ε,r)-окрестностью, т.е. $\{t_0',t_1',\dots,t_i',t_{i+1}',\dots\}\in U(q)$ тогда и только тогда, когда $|t_0-t_0'|<\varepsilon$, …, $|t_r-t_r'|<\varepsilon$. Из непрерывности g вытекает, что существует $\delta>0$ такое, что $|t_r-t_r'|<\delta$ влечет $|t_j-t_j'|<\varepsilon$ для всех $0\leqslant j\leqslant r-1$, так как $t_j=g^{r-j}(t_r)$, $t_j'=g^{r-j}(t_r')$. Не умаляя общности, можно считать, что $\delta\leqslant\varepsilon$. Тогда из $|t_r-t_r'|<\delta$ следует, что $q'=\{t_0',t_1',\dots,t_r',\dots\}\in U(q)$. Поскольку полуорбита $O^+(x_0)$ всюду плотна в L, то существует $l\in\mathbb{N}$ такое, что $|g^l(x_0)-t_r|<\delta$, $g^l(x_0)\in L$. Поэтому $\widehat{g}^r(q_0)=\{g^{l+r}(x_0),\dots,g^l(x_0),\dots\}\in U(q)$. Следовательно, положительная полуорбита точки q_0 всюду плотна в $\theta(N)$. Вторая часть предложения доказывается аналогично (вместо точки $g^l(x_0)$ достаточно взять периодическую точку из L, δ-близкую к t_r).

Рассмотрим случай, когда $\mathrm{NW}(g)=S^1$. Тогда $\mathrm{NW}(F)=\mathrm{Sol}(F)$ в силу леммы 9. Ясно, что вся окружность S^1 является инвариантным множеством. Известно (см. [19]), что растягивающее преобразование g имеет всюду плотную положительную полуорбиту $O^+(x_0)$ в S^1. Отсюда и из предложения 2 получаем, что диффеоморфизм $F|_{\mathrm{Sol}(F)}$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в множестве $p_1^{-1}(S^1)\cap\mathrm{Sol}(F)=\mathrm{Sol}(F)$. Поэтому $\mathrm{NW}(F)=\mathrm{Sol}(F)$ является единственным базисным множеством $\Lambda(f)=\mathrm{NW}(F)$ в базовом полнотории. Поскольку $\Lambda(f)=\mathrm{Sol}(F)$, то $\Lambda(f)$ есть одномерный растягивающийся аттрактор.

Рассмотрим случай, когда $\mathrm{NW}(g)$ содержит ровно одно инвариантное множество Σ канторовского типа плюс конечное (ненулевое) число $\xi_1,\dots,\xi_h$ изолированных стоковых периодических точек и конечное (возможно, нулевое) число источниковых периодических точек, принадлежащих смежным интервалам множества Σ. В силу леммы 9 этим точкам отвечают стоковые и седловые изолированные периодические точки $\Xi_1,\dots,\Xi_h$ соответственно, причем

$$\Xi_i\in p_1^{-1}(\xi_i)\cap\mathrm{Sol}(F)=D^2_{\xi_i}\cap\mathrm{Sol}(F).$$

Положим $\Lambda(f)=p_1^{-1}(\Sigma)\cap\mathrm{Sol}(F)$. Тогда согласно леммам 8, 9 неблуждающее множество в базовом полнотории есть объединение $\mathrm{NW}(F)=\Lambda(f)\bigcup_{i=0}^h(\Xi_i)$. Из теоремы 1 и следствия 2 вытекает, что g имеет всюду плотную положительную полуорбиту $O^+(x_0)=\{g^n(x_0):n\geqslant 0\}$, где $x_0\in\Sigma^\circ$. Согласно лемме 6 Σ° является инвариантным множеством эндоморфизма g. В силу предложения 2 диффеоморфизм $F|_{\mathrm{Sol}(F)}$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в $p_1^{-1}(\Sigma^\circ)\cap\mathrm{Sol}(F)$. Так как Σ° всюду плотно в Σ, то $p_1^{-1}(\Sigma^\circ)$ всюду плотно в множестве $p_1^{-1}(\Sigma)$. Поэтому $F|_{\mathrm{Sol}(F)}$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в $p_1^{-1}(\Sigma^\circ)\cap\mathrm{Sol}(F)=\Lambda(f)$. Отсюда вытекает, что $\Lambda(f)$ есть базисное множество. Локально $\Lambda(f)$ гомеоморфно прямому произведению канторовых множеств. Следовательно, $\Lambda(f)$ является нульмерным нетривиальным базисным множеством. Таким образом, $\mathrm{NW}(f) \cap \mathscr{B}$ состоит из $\Lambda(f)$, конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа изолированных периодических седловых точек.

Покажем теперь, что обе возможности, указанные в теореме 2, реализуются. Классический пример Смейла (см. [6]) предоставляет диффеоморфизм полнотория в себя, неблуждающее множество которого совпадает с соленоидом и является одномерным растягивающимся аттрактором. Покажем, что существует диффеоморфизм класса SV, у которого неблуждающее множество в базовом полнотории состоит из нетривиального нульмерного базисного множества и одной стоковой периодической точки. Сначала мы построим соответствующий диффеоморфизм $F\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B}$.

Рассмотрим неособый C^r-эндоморфизм $g\colon S^1 \to S^1$, $r \geqslant 1$, степени $d \geqslant 2$, у которого неблуждающее множество $\mathrm{NW}(g)$ состоит из одной неподвижной притягивающей (гиперболической) точки x_0 и канторова множества Ω, причем $Dg|_{\Omega} = 2d-1$, $Dg(x_0) = \lambda < 1$ (число λ уточним ниже). Такой эндоморфизм степени $d = 2$ построил Шуб (см. [19]), а Хирш указал, что данный эндоморфизм можно построить аналитически (см. [26]). Полностью аналогично требуемый эндоморфизм строится для произвольной степени $d \geqslant 2$. Схематично график g изображен на рис. 4 для $d = 3$. Ограничение $g|[0,1/2]$ является диффеоморфизмом $[0,1/2] \to [0,1/2]$ с одной притягивающей гиперболической неподвижной точкой $x_0 = 1/4$ и двумя отталкивающими неподвижными точками 0, $1/2$. На отрезке $[1/2,1]$ эндоморфизм g линейный вида $g|_{[1/2,1]}(x) = (2d-1)x \pmod 1$.

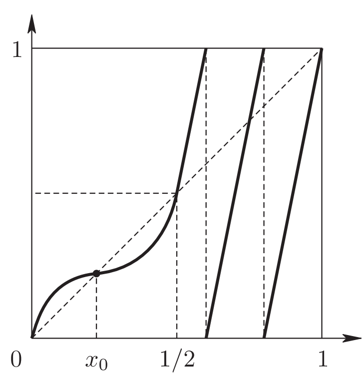

Рис. 4

Обозначим построенный эндоморфизм через g_d. Ясно, что $\bigcup_{n\geqslant 0} g_d^{-n}(0,1/2)$ является устойчивым многообразием $W^s(x_0)$ точки x_0, а дополнение $\Omega = S^1 \setminus W^s(x_0)$ к этому устойчивому многообразию является канторовым множеством, принадлежащим $\mathrm{NW}(g_d)$. В обозначениях леммы 7 имеем $\Sigma_d = \Omega$. Непосредственно из построения вытекает, что для любой точки $y \in S^1$ минимальное расстояние между различными точками из ее прообраза $t_k, t_j \in g_d^{-1}(y)$

относительно g_d есть

$$\min_{t_k,t_j}\{|t_k-t_j| : g_d(t_k)=g_d(t_j),\ t_k\neq t_j\}=\frac{1}{2d-1}.$$

Возьмем число λ, удовлетворяющее неравенствам

$$0<\lambda<\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2d-1}. \tag{4.1}$$

Наряду с декартовыми координатами (x,y) на $\mathbb{R}^2$ будем использовать комплексную переменную $z=x+iy$. Пусть $D^2\subset\mathbb{R}^2$ – единичный замкнутый диск. Рассмотрим следующее отображение базового полнотория $\mathscr{B}=S^1\times D^2$:

$$F(t,z)=\biggl(g_d(t),\lambda z+\frac{1}{2}\exp 2\pi it\biggr). \tag{4.2}$$

Непосредственно из (4.2) вытекает, что t-сечение $D^2_t=\{t\}\times D^2$ под действием F отображается в круглый диск (который мы обозначим через B_t), принадлежащий $D^2_{g_d(t)}$. Из (4.2) также следует, что диск B_t имеет радиус λ с центром, лежащим на окружности $|z|=1/2$. Поскольку $\lambda<1/4$, то $B_t\subset\operatorname{int}D^2_{g_d(t)}$. Поэтому $F(\mathscr{B})\subset\operatorname{int}\mathscr{B}$. В координатах (t,z) на $\mathscr{B}=S^1\times D^2$ отображение F имеет якобиан

$$DF(t,z)=\begin{pmatrix} Dg_d(t) & 0\\ \pi i\exp 2\pi it & \lambda I_2\end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

где I_2 – тождественная матрица на $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}^2$. Так как $Dg_d>0$ и $\lambda>0$, то F – локальный диффеоморфизм. Для доказательства того, что F – (глобальный) диффеоморфизм, рассмотрим попарно различные $t_1,t_2,\dots,t_d\in S^1$ такие, что $g_d(t_1)=\dots=g_d(t_d)$. Центры $O_1,\dots,O_d$ дисков $B_{t_1},\dots,B_{t_d}$ соответственно лежат на окружности $|z|=1/2$. Минимальный угол между лучами, проведенными из центра диска $D^2_{g_d(t_k)}$, и точками $O_1,\dots,O_d$ равен $\frac{2\pi}{2d-1}$. Поэтому минимальное расстояние между $O_1,\dots,O_d$ равно $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2d-1}$. Отсюда и из (4.1) следует, что диски $B_{t_1},\dots,B_{t_d}$ попарно не пересекаются. В силу (4.2) F является диффеоморфизмом $\mathscr{B}\to F(\mathscr{B})$, удовлетворяющим условиям (1.1)–(1.3). Таким образом, $F\in\mathfrak{M}$.

В [14] для F, которое определено на $S^1\times D^3$ и которое продолжается до диффеоморфизма сферы S^4, анонсировано доказательство гиперболичности неблуждающего множества $\mathrm{NW}(F)$. Для удобства читателя мы приводим доказательство гиперболичности для F, которое определено на $S^1\times D^2$. Отметим, что из предложения 2 вытекает, что периодические точки плотны в $\mathrm{NW}(F)$. Поэтому наличие аксиомы А Смейла на $\mathrm{NW}(F)$ будет следовать из гиперболичности $\mathrm{NW}(F)$.

Касательное пространство $T(\mathscr{B})=T(S^1\times D^2)$ полнотория $\mathscr{B}$ естественным образом представимо в виде суммы $T(\mathscr{B})=T(S^1)\oplus T(D^2)$. В каждой точке $(t,z)\in\mathscr{B}$ касательная плоскость $T_{(t,z)}(\mathscr{B})$ есть сумма одномерного $T_t(S^1)=\mathbb{E}^1\cong\mathbb{R}$ и двумерного $T_z(T^2)=\mathbb{E}^2\cong\mathbb{R}^2$ линейных пространств. Из (4.3) вытекает, что подрасслоение $\mathbb{E}^2$ инвариантно относительно DF:

$$DF_p\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{v}_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \lambda\vec{v}_{23}\end{pmatrix},$$

где $\vec{v}_{23} \in \mathbb{E}^2$. Более того, поскольку $|\lambda| < 1$, то $\mathbb{E}^2$ является устойчивым подрасслоением, $E^s = \mathbb{E}^2$.

Отметим, что подрасслоение $\mathbb{E}^1$ не инвариантно относительно DF. Покажем, что тем не менее на множестве $\mathrm{NW}(F)$ диффеоморфизм F имеет гиперболическую структуру. Пусть $q = (t, z) \in \mathrm{NW}(F)$. Согласно лемме 8 $p_1(q) = t \in \mathrm{NW}(g_d)$. В силу построения эндоморфизма g_d и леммы 7 неблуждающее множество $\mathrm{NW}(g_d)$ есть объединение канторова множества Σ_{g_d} с изолированной притягивающей (гиперболической) неподвижной точкой $x_0 \in S^1 \setminus \Sigma_{g_d}$. Возможны два случая: 1) $t = x_0$; 2) $t \in \Sigma_{g_d} = \Omega$. В случае 1) согласно лемме 9 точка q является изолированной (неподвижной) точкой неблуждающего множества $\mathrm{NW}(F)$. Из (4.3) вытекает, что q – гиперболическая притягивающая неподвижная точка. В случае 2) рассмотрим в $T_{\mathrm{NW}(F)}(\mathscr{B}) \subset T(\mathscr{B}) = \mathbb{E}^1 \oplus \mathbb{E}^2$ семейство конусов

$$C^u_q = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} : \vec{v}_1 \in T_t(S^1),\ \vec{v}_{23} \in \mathbb{E}^2_z,\ |\vec{v}_1| \geqslant \frac{2d-1}{4} |\vec{v}_{23}| \right\}.$$

Сначала покажем, что $DF(C^u_q) \subset C^u_{F(q)}$. Пусть $\left(\begin{smallmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{smallmatrix}\right) \in C^u$. В силу (4.3)

$$DF \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}\,'_1 \\ \vec{v}\,'_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2d-1)\vec{v}_1 \\ \pi i \vec{v}_1 \exp 2\pi i t + \lambda \vec{v}_{23} \end{pmatrix}.$$

Тогда $|\vec{v}_{23}| \leqslant |\pi i \exp 2\pi i t \vec{v}_1| + \lambda |\vec{v}_{23}| = \pi |\vec{v}_1| + \lambda |\vec{v}_{23}|$. Учитывая неравенство $\lambda \leqslant 1/4$, получаем

$$\begin{aligned} |\vec{v}\,'_1| &= (2d-1)|\vec{v}_1| = \frac{2d-1}{4}(4|\vec{v}_1|) \geqslant \frac{2d-1}{4}\left(\pi|\vec{v}_1| + \frac{1}{2}|\vec{v}_1|\right) \\ &\geqslant \frac{2d-1}{4}\left(\pi|\vec{v}_1| + \frac{2d-1}{8}|\vec{v}_{23}|\right) \geqslant \frac{2d-1}{4}\big(\pi|\vec{v}_1| + \lambda|\vec{v}_{23}|\big) \geqslant \frac{2d-1}{4}|\vec{v}\,'_{23}|, \end{aligned}$$

поскольку $\frac{2d-1}{8} \geqslant \frac{1}{4}$. Таким образом, $\left(\begin{smallmatrix} \vec{v}\,'_1 \\ \vec{v}\,'_{23} \end{smallmatrix}\right) \in C^u_{F(q)}$. Отсюда

$$DF^k(C^u_{F^{-k}(q)}) \subset DF^{k-1}(C^u_{F^{-k+1}(q)}) \subset \cdots \subset DF(C^u_{F^{-1}(q)}) \subset C^u_q$$

для любого $k \in \mathbb{N}$.

Чтобы показать, что пересечение итераций конуса C^u_q относительно DF есть прямая, рассмотрим

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_{23} \end{pmatrix} \in C^u_{F^{-k}(q)}, \qquad \begin{pmatrix} \vec{v}^{\,k}_1 \\ \vec{v}^{\,k}_{23} \end{pmatrix} = DF^k \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \vec{w}^{\,k}_1 \\ \vec{w}^{\,k}_{23} \end{pmatrix} = DF^k \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_{23} \end{pmatrix}.$$

Положим $|\vec{v}^{\,j}_1| = v^j_1$, $|\vec{w}^{\,j}_1| = w^j_1$, $\vec{v}_1 = (v_1, 0)$, $\vec{w}_1 = (w_1, 0)$, $v_1 > 0$, $w_1 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\vec{v}^{\,1}_{23}}{v^1_1} - \frac{\vec{w}^{\,1}_{23}}{w^1_1} \right| &= \left| \frac{\pi i \vec{v}_1 \exp 2\pi i t + \lambda \vec{v}_{23}}{(2d-1)v_1} - \frac{\pi i \vec{w}_1 \exp 2\pi i t + \lambda \vec{w}_{23}}{w_1} \right| \\ &= \left| \frac{\pi i \exp 2\pi i t (w_1 \vec{v}_1 - v_1 \vec{w}_1)}{(2d-1) v_1 w_1} + \frac{\lambda}{2d-1}\left(\frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1} \right) \right| = \frac{\lambda}{2d-1} \left| \frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1} \right|, \end{aligned}$$

так как $w_1 \vec{v}_1 - v_1 \vec{w}_1 = |\vec{w}_1| \vec{v}_1 - |\vec{v}_1| \vec{w}_1 = 0$. Поэтому

$$\left| \frac{\vec{v}^{\,k}_{23}}{v^k_1} - \frac{\vec{w}^{\,k}_{23}}{w^k_1} \right| = \left(\frac{\lambda}{2d-1} \right)^k \left| \frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1} \right|.$$

Правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$. Поэтому последовательность $\vec{v}_{23}^k / v_1^k$ является фундаментальной и, следовательно, имеет предел, скажем $\vec{V}$. Не умаляя общности, для простоты можно считать, что $v_1 = |\vec{v}_1| = 1$, $v_{23} = |\vec{v}_{23}| = 1$. Тогда единичный вектор

$$\vec{n}_k = \frac{\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k}{|\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k|},$$

который определяет направление вектора $\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k = v_1^k \vec{v}_1 + v_{23}^k \vec{v}_{23}$, имеет предел $(\vec{v}_1 + \vec{V})/|\vec{v}_1 + \vec{V}|$. Отсюда вытекает, что пересечение итераций конуса C_q^u относительно DF есть одномерное подпространство $\mathbb{E}^u$. Так как проекция вектора $\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k$ на вектор $\vec{v}_1$ равна $v_1^k = (2d-1)v_1$, то $\mathbb{E}^u$ является неустойчивым подрасслоением, трансверсальным $E^s = \mathbb{E}^2$. Отсюда следует, что на $\mathrm{NW}(F)$ диффеоморфизм F имеет гиперболическую структуру.

Из леммы 9 вытекает, что неблуждающее множество $\mathrm{NW}(F)$ содержит ровно одно нетривиальное (нульмерное) базисное множество и одно тривиальное базисное множество, которое является стоком. Из доказательства теоремы 1 следует, что F можно продолжить до диффеоморфизма класса SV некоторой линзы.

Список литературы

[1] L. Vietoris, “Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen”, *Math. Ann.*, **97**:1 (1927), 454–472.

[2] D. van Danzig, “Über topologisch homogene Kontinua”, *Fund. Math.*, **15** (1930), 102–125.

[3] F. Takens, “Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors”, *Topology Appl.*, **152**:3 (2005), 219–225.

[4] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ОГИЗ, М.–Л., 1947; англ. пер.: V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1960.

[5] I. Kan, “Strange attractors of uniform flows”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **293**:1 (1986), 135–159.

[6] С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1 (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817.

[7] Д. В. Аносов, “Гладкие динамические системы. Гл. 1. Исходные понятия”, *Динамические системы* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНИТИ, М., 1985, 156–178; англ. пер.: D. V. Anosov, “Smooth dynamical systems. Elementary theory”, *Dynamical systems*, v. I, Encyclopaedia Math. Sci., **1**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 149–233.

[8] Д. В. Аносов, В. В. Солодов, “Исходные понятия”, *Динамические системы* – 9, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНИТИ, М., 1991, 12–99; англ. пер.: D. V. Anosov, V. V. Solodov, “Hyperbolic sets”, *Dynamical systems*, v. IX, Encyclopaedia Math. Sci., **66**, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 10–92.

[9] S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, E. V. Zhuzhoma, *Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces*, Transl. Math. Monogr., **153**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[10] C. Robinson, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

[11] Ю. С. Ильяшенко, В. Ли, *Нелокальные бифуркации*, МЦНМО, М., 1999; англ. пер.: Yu. Ilyashenko, W. Li, *Nonlocal bifurcations*, Math. Surveys Monogr., **66**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[12] Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “О катастрофах голубого неба”, *Докл. РАН*, **342**:5 (1995), 596–599; англ. пер.: D. V. Turaev, L. P. Shil'nikov, “Blue sky catastrophes”, *Dokl. Math.*, **51**:3 (1995), 404–407.

[13] H. G. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors. II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112**:1 (1983), 69–102.

[14] L. Block, “Diffeomorphisms obtained from endomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **214** (1975), 403–413.

[15] М. В. Якобсон, “О гладких отображениях окружности в себя”, *Матем. сб.*, **85(127)**:2(6) (1971), 163–188; англ. пер.: M. V. Jakobson, “On smooth mappings of the circle into itself”, *Math. USSR-Sb.*, **14**:2 (1971), 161–185.

[16] J. M. Aarts, R. J. Fokkink, “The classification of solenoids”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **111**:4 (1991), 1161–1163.

[17] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966; пер. с англ.: K. Kuratowski, *Topology*, v. 1, Academic Press, New York–London, 1968.

[18] R. F. Williams, “Expanding attractors”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43**:1 (1974), 169–203.

[19] M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. J. Math.*, **91**:1 (1969), 175–199.

[20] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, МЦНМО, М., 1997; англ. пер.: V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky, *Knots, links, braids and* 3*-manifolds*, Transl. Math. Monogr., **154**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[21] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “New relations for Morse–Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices”, *Sb. Math.*, **194**:7 (2003), 979–1007.

[22] F. Waldhausen, “On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large”, *Ann. of Math.* (2), **87**:1 (1968), 56–88.

[23] W. Haken, “Theorie der Normalflächen”, *Acta Math.*, **105**:3–4 (1961), 245–375.

[24] C. D. Papakyriakopoulos, “On Dehn's lemma and the asphericity of knots”, *Ann. of Math.* (2), **66**:1 (1957), 1–26.

[25] B. Jiang, Y. Ni, S. Wang, “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356**:11 (2004), 4371–4382.

[26] M. Hirsch, “A stable analytic foliation with only exceptional minimal sets”, *Dynamical systems* (Warwick, 1974), Lect. Notes in Math., **468**, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 9–10.

Е. В. Жужома (E. V. Zhuzhoma)
Нижегородский государственный педагогический университет
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступила в редакцию
03.03.2010

Н. В. Исаенкова (N. V. Isaenkova)
Нижегородский государственный педагогический университет
E-mail: nisaenkova@mail.ru