© 2015 г. В.Д. КОНАКОВ, д-р физ.-мат. наук (VKonakov@hse.ru),
А.Р. МАРКОВА (anna.r.markova@gmail.com)
(Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики, Москва)

ПРОЦЕДУРА ИСКЛЮЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ТРЕНДА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ И РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ[1]

Рассматривается последовательность цепей Маркова, слабо сходящихся к диффузионному процессу. Предполагается, что тренд содержит линейно растущую компоненту. Обычный метод параметрикса не подходит из-за неограниченности тренда. Показано, как следует модифицировать метод параметрикса, чтобы получить локальные предельные теоремы в этом случае.

1. Введение

Цель введения – объяснить, откуда возникла задача, рассматриваемая в настоящей работе. Заметим, что введение не претендует на полноту проведенного краткого обзора.

Важность изучения дискретизаций стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) следует уже из того, что все известные приближенные методы моделирования для СДУ основаны на той или иной дискретизации. Хорошо известно, что решения СДУ в замкнутой форме могут быть получены лишь для небольшого числа подклассов стохастических уравнений, поэтому различные методы дискретизации (схема Эйлера–Маруямы, схема Мильштейна, схемы, основанные на стохастическом разложении Тейлора высших порядков) привлекают внимание большого числа исследователей. При этом возникает естественный вопрос: воспроизводят ли схемы

[1]Статья подготовлена при финансовой поддержке Научного фонда НИУ ВШЭ

дискретизации асимптотические свойства исходного процесса (такие как скорость перемешивания, принцип больших уклонений и др.). Другой важный вопрос: насколько построенная аппроксимация «близка» в том или ином смысле к решению исходного СДУ. Приводимое исследование относится к этому второму вопросу. Исторически первой рассматриваемой схемой была последовательность цепей Маркова, заданная на решетке с шагом, стремящимся к нулю, и изучалась слабая сходимость мер (переходных вероятностей) к переходной вероятности некоторого предельного диффузионного процесса. Первые общие результаты о слабой сходимости в такой схеме были получены А.В. Скороходом в 1961 г. [1]. Результаты А.В. Скорохода относились к весьма общему классу цепей Маркова и процессов, которые могли иметь скачки. Для непрерывной диффузии наиболее общие результаты о слабой сходимости были получены в монографии Д. Струка и С. Варадана [2]. Ими был развит подход, основанный на решении так называемой «проблемы мартингалов». Подчеркнем еще раз, что эти первые результаты относились к слабой сходимости мер. Современная теория слабой сходимости вероятностных мер – это теория, насчитывающая уже много десятилетий и связанная в первую очередь с именами А.Н. Колмогорова, Дж. Дуба, М. Донскера, Ю.В. Прохорова, А.В. Скорохода, Л. Ле Кама и С. Варадана.

Предположим теперь, что переходные вероятности цепей Маркова и предельного диффузионного процесса абсолютно непрерывны относительно меры Лебега. Тогда естественно задаться вопросом: когда имеет место сходимость этих переходных плотностей, т.е. когда справедлива соответствующая локальная предельная теорема? Для ответа на этот вопрос В. Конаковым и С. Молчановым в [3] был предложен дискретный вариант метода параметрикса, который был затем уточнен и обобщен в цикле работ В. Конакова и Э. Маммена [4]–[7] Следует сказать, что в теории дифференциальных уравнений метод параметрикса известен давно. Он был предложен Е. Леви еще в 1907 г. [8, 9] и затем развивался в работах А. Фридмана [10], А. Ильина, А. Калашникова и О. Олейник [11] и в других. Однако для целей авторов этот вариант метода параметрикса не годился. В 1967 г. А. Мак Кин и И. Зингер [12] предложили модификацию метода параметрикса, которая, как оказалось, допускает дискретную версию и позволяет развить новый метод получения локальных предельных теорем для переходных плотностей последовательности марковских цепей, слабо сходящихся к предельному диффузионному процессу. Одним из существенных требований при доказательстве этих результатов было требование ограниченности коэффициентов сноса и диффузии. Ограниченность нужна была для сходимости построенных рядов в методе параметрикса. Это требование сужало область применимости полученных результатов, не позволяло рассматривать ряд важных конкретных моделей. Цель настоящей статьи – описание процедуры, позволяющей исключать линейно растущую компоненту тренда, и сведение задачи к уже изученной задаче с ограниченными коэффициентами сноса и диффузии. Эта процедура применяется как к диффузии, так и к цепям Маркова. Для СДУ подобная процедура исключения тренда применялась ранее в работе Ф. Деларю и С. Меноззи [13] при получении двусторонних оценок переходной плотности для некоторых вырожденных СДУ типа А.Н. Колмогорова. Для цепей Маркова такая процедура, насколько известно авторам, является новой. Суть процедуры проста: следует компенсировать рост тренда возвратом по траекториям системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается отбрасыванием «броуновской» компоненты СДУ. Для такого компенсированного процесса с помощью формулы Ито выписывается его стохастический дифференциал и СДУ, которому он удовлетворяет. Это СДУ имеет уже ограниченный коэффициент сноса. Для цепей Маркова проделывается аналогичная процедура, где вместо дифференциального уравнения используется разностное уравнение, и возврат происходит не по траекториям дифференциального уравнения, а по его ломаным Эйлера. Затем, применив известные результаты для ограниченного случая, можно простым преобразованием вернуться к исходной задаче и получить локальные предельные теоремы для исходной модели. В дальнейшем авторы предполагают рассмотреть также более общий случай растущего тренда с ограниченным градиентом и случай неограниченного коэффициента диффузии.

2. Суть метода параметрикса и необходимые сведения из теории дифференциальных и разностных уравнений

Рассмотрим класс вероятностных задач, решение которых возможно с помощью метода параметрикса.

Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана последовательность разбиений $\Gamma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$,

$n = 1, 2, \ldots$, и последовательность цепей Маркова $X_t^{(n)}$ с дискретным временем и непрерывным пространством состояний. Цепи $X_t^{(n)}$ определены на решетке Γ_n, имеют начальное рспределение $\delta_{x_0}(\cdot)$, а вероятность перехода за один шаг имеет плотность

$$p^{(n)}\left(\frac{1}{n}, x, A\right) = P\left(X^{(n)}_{\frac{i+1}{n}} \in A | X^{(n)}_{\frac{i}{n}} = x\right) = \int\limits_A p^{(n)}_{\frac{i}{n},x}\left(\frac{1}{n}, x, z\right) dz$$

При этом условии вероятность перехода за n шагов также абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет плотность $p^{(n)}\left(1, x_0, z\right)$. Задача состоит в нахождении условий, при которых справедлива локальная предельная теорема, т.е. условий, при которых плотность $p^{(n)}\left(1, x_0, z\right)$ можно аппроксимировать плотностью некоторого диффузионного процесса $p\left(1, x_0, z\right)$. Для этих целей используется аналитический метод, основанный на специальном варианте метода параметрикса (А. Мак Кин и И. Зингер [12]), классический вариант которого был предложен Е. Леви в 1907 г. [8, 9]. Далее приводится краткое описание метода параметрикса в форме Мак Кина и Зингера.

Метод параметрикса в форме Мак Кина и Зингера

Рассмотрим диффузионный процесс Y_t, являющийся решением СДУ,

$$dY = b(t, Y)dt + \sigma(t, Y)dB(t), \quad Y(0) = x \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}}, \quad t \in [0, 1],$$

где $B(t)$ – стандартный винеровский процесс, $\sigma(z)$ – симметрическая матрица такая, что матрица $a(z) = \sigma(z)\sigma^{\mathrm{T}}(z)$ удовлетворяет условию равномерной эллиптичности, функции $b(z)$ и $a(z)$ ограничены и удовлетворяют условию Гельдера, кроме того, существуют ограниченные и непрервные производные $\frac{\partial a_{ij}}{\partial z_j}$, $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial z_i \partial z_j}$ и $\frac{\partial b_i}{\partial z_i}$, удовлетворяющие условию Гельдера.

Рассмотрим прямое и обратное уравнения Колмогорова:

(1) $$-\tfrac{\partial p(t-s,x,y)}{\partial s} = L_x p = \tfrac{1}{2}\sum_i a_{ij}(x)\tfrac{\partial^2 p(t-s,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\tfrac{\partial p(t-s,x,y)}{\partial x_i}$$

и

(2) $$\tfrac{\partial p(t-s,x,y)}{\partial t} = L_x^{\mathrm{T}} p = \tfrac{1}{2}\sum_i \tfrac{\partial^2 [a_{ij}(y)p(t-s,x,y)]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_i \tfrac{\partial [b_i(y)p(t-s,x,y)]}{\partial y_i}.$$

Рассмотрим еще один диффузионный процесс $\tilde{Y} = \tilde{Y}_{s,x,y}$, определенный на интервале $s \leqslant t \leqslant 1$ и являющийся решением следующего СДУ:

$$d\tilde{Y}(t) = b(y)dt + \sigma(y)dB(t), \quad \tilde{Y}(s) = x \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}}, \quad t \in [s,1],$$

Процессы вида $\tilde{Y} = \tilde{Y}_{s,x,y}$ называются замороженными в точке y диффузиями. Переходная плотность такой диффузии – гауссовская

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{(y)}(t-s,x,y) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}(t-s)^{-\frac{d}{2}} (\det a(y))^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \exp\left(-\tfrac{1}{2(t-s)} \{y - x - b(y)(t-s)\}^{\mathrm{T}} a^{-1}(y) \{y - x - b(y)(t-s)\}\right). \end{aligned}$$

Введем необходимые обозначения и операции. Сингулярное ядро $H(t-s,x,y)$ и бинарную операцию $\otimes$ типа свертки определим следующим образом:

$$\begin{aligned} H(t-s,x,y) &= \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} (a_{ij}(x) - a_{ij}(y)) \tfrac{\partial^2 \tilde{p}(t-s,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i (b_i(x) - b_i(y)) \tfrac{\partial \tilde{p}(t-s,x,y)}{\partial x_i}, \\ (f \otimes g)(s,t,x,y) &= \int_s^t d\tau \int_{\mathrm{R}^{\mathrm{d}}} f(s,\tau,x,z) g(\tau,t,z,y) dz. \end{aligned}$$

Фундаментальное решение уранений (1)–(2) представимо в виде

$$p(t-s,x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\tilde{p} \otimes H^{(r)}\right)(t-s,x,y), \tag{3}$$

где $H^{(r)} = H^{(r-1)} \otimes H$.

Важность представления переходной плотности в форме Мак Кина и Зингера состоит в том, что оно применимо для дискретного случая. Рассмотрим последовательность разбиений $\Gamma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$, $n = 1, 2, \dots$, и последовательность цепей Маркова $X_t^{(n)}$ с дискретным временем и непрервным пространством состояний. Цепи $X_t^{(n)}$ определены на решетке Γ_n, имеют начальное рспределение $\delta_{x_0}(\cdot)$, а динамика цепи описывается рекуррентным соотношением

$$X^{(n)}_{\frac{i+1}{n}} = X^{(n)}_{\frac{i}{n}} + \tfrac{1}{n} b\left(X^{(n)}_{\frac{i}{n}}\right) + \tfrac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon^{(n)}_{\frac{i+1}{n}}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \quad X_0^{(n)} = x. \tag{4}$$

Для каждого $0 > s = \frac{j}{n} < 1$ и x, $y \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}}$ определим цепь Маркова $\tilde{X}_t^{(n)} = \tilde{X}_{s,x,y}^{(n)}$. Эта цепь определена на решетке $\left\{\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}, ..., 1\right\}$ рекуррентным соотношением

$$\tilde{X}^{(n)}_{\frac{i+1}{n}} = \tilde{X}^{(n)}_{\frac{i}{n}} + \tfrac{1}{n} b(y) + \tfrac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\varepsilon}^{(n)}_{\frac{i+1}{n}}, \qquad j \leqslant i \leqslant n-1, \quad \tilde{X}_j^{(n)} = x. \tag{5}$$

Введем дискретные аналоги $H_n(t-s,x,y)$ и $\otimes_n$, сингулярного ядра $H(t-s,x,y)$ и бинарной операции $\otimes$:

$$\begin{aligned} H_n\left(\frac{j'}{n}-\frac{j}{n},x,y\right) &= \left(L^n-\tilde{L}^{n,y}\right)\tilde{p}_n^y\left(\frac{j'}{n}-\frac{j+1}{n},x,y\right), \\ (f\otimes_n g)\left(\frac{j'}{n}-\frac{j}{n},x,y\right) &= \sum_{i=j}^{j'-1}\frac{1}{n}\int_{\mathrm{R^d}} f\left(\frac{i}{n}-\frac{j}{n},x,z\right)g\left(\frac{j'}{n}-\frac{i}{n},z,y\right)dz, \end{aligned}$$

где L^n и $\tilde{L}^{n,y}$ – инфинитезимальные операторы цепей (4) и (5), а $\tilde{p}_n^y\left(\frac{i}{n},x,y\right)$ – переходная плотность цепи (5).

Переходная плотность цепи Маркова (4) представима в виде

$$p_n\left(\frac{j'}{n}-\frac{j}{n},x,y\right)=\sum_{r=0}^{j'-j}\left(\tilde{p}_n\otimes_n H_n^{(r)}\right)\left(\frac{j'}{n}-\frac{j}{n},x,y\right). \tag{6}$$

Близость левых частей представлений (3) и (6) устанавливается путем детального анализа рядов. Доказывается, что

$$\tilde{p}\approx\tilde{p}_n,\quad H^{(r)}\approx H_n^{(r)},\quad \otimes\approx\otimes_n.$$

Некоторые известные факты из теории дифференциальных и разностных уравнений

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ):

$$x'=A(t)x,\ x\in\mathrm{R^d},\ A(t):\mathrm{R^d}\mapsto\mathrm{R^d},\ t\in[0,1], \tag{7}$$

где $A(t)$ – непрерывная матричная функция.

Рассмотрим множество X всех решений уравнения (7), определенных на отрезке $[0,1]$. Множество X является векторным пространством, состоящим из функций $\phi:[0,1]\mapsto\mathrm{R^d}$.

Наряду с векторным дифференциальным уравнением (7) будем рассматривать матричное дифференциальное уравнение:

$$X'=A(t)X. \tag{8}$$

Будет считать, что матричная функция $\Phi(t)$ является решением уравнения (8) на отрезке $[0,1]$, если $\Phi(t)$ непрерывно дифференцируема при $t\in[0,1]$ и $\Phi'(t)=A(t)\Phi(t), t\in[0,1]$.

Следующая теорема устанавливает связь между решениями уравнений (7) и (8).

Т е о р е м а 1 [14, с. 33]. *Пусть $A(t)$ – непрерывная $n \times n$ матричнозначная функция на отрезке $[0, T]$ и пусть $\Phi(t)$ – $n \times n$ матричнозначная функция со столбцами $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$:*

$$\Phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)],\ t \in [0, T].$$

Тогда Φ – решение матричного дифференциального уравнения (8) *на $[0, T]$ тогда и только тогда, когда каждый столбец ϕ_i является решением векторного дифференциального уравнения* (7) *на $[0, T]$, $i = 1, 2, ..., n$. Более того, если Φ решение матричного уравнения* (8), *то*

$$x(t) = \Phi(t)c$$

– решение векторного дифференциального уравнения (7) *для любого $n \times 1$ вектора констант c.*

Введем определения.

О п р е д е л е н и е 1. Фундаментальной системой решений уравнения (7) *называется базис векторного пространства X.*

О п р е д е л е н и е 2. Матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений, называется фундаментальной матрицей дифференциального уравнения (7).

Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение порядка k:

$$x(s + k) + a_1(s)x(s + k - 1) + ... + a_k(s)x(s) = 0. \tag{9}$$

Множество решений разностного уравнения (9) также представляет собой векторное пространство. По аналогии с определением для дифференциального уравнения *фундаментальной матрицей разностного уравнения* является матрица, столбцы которой образуют *фундаментальную систему решений уравнения* (9), т.е. базис векторного пространства всех решений разностного уравнения.

Отметим, что в качестве фундаментальной матрицы дифференциального или разностного уравнений в начальный момент времени $t = 0$ удобно взять единичную матрицу соответствующей размерности. В этом случае $x(t) = \Phi(t)c$ – решение векторного уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = \Phi(0)c = c$.

3. Процедура исключения линейной компоненты тренда для диффузии и цепи Маркова

Рассмотрим следующую диффузионную модель:

$$dY = \{b(t)Y + m(t,Y)\}dt + \sigma(t,Y)dB(t),\ Y(0) = x \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}},\ t \in [0,1], \tag{10}$$

где $B(t)$ – стандартный винеровский процесс. Отрезок $[0,1]$ взят для удобства и может быть заменен любым отрезком.

Рассмотрим также последовательность цепей Маркова с такими же начальными условиями, как и в диффузионной модели (10):

$$\begin{aligned} X_n\left(\tfrac{k+1}{n}\right) &= X_n\left(\tfrac{k}{n}\right) + \tfrac{1}{n}\left\{b_n\left(\tfrac{k}{n}\right)X_n\left(\tfrac{k}{n}\right) + m_n\left(\tfrac{k}{n}, X_n\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)\right\} + \tfrac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_n\left(\tfrac{k+1}{n}\right), \\ X_n(0) &= x \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}},\ k = 0,1,2,...,n. \end{aligned} \tag{11}$$

Относительно инноваций ε_n делаем стандартное марковское предположение, а именно: случайная величина $\varepsilon_n\left(\frac{k+1}{n}\right)$ при фиксированном «прошлом» $X_n\left(\frac{i}{n}\right) = x(i), i = 0,1,2,...,k$, зависит лишь от значения процесса $x(k)$ в последний момент времени $\frac{k}{n}$ и имеет условную плотность распределения $q_{n,\frac{k}{n},x(k)}(\cdot)$, являющуюся элементом семейства плотностей $q_{n,t,x}(\cdot)$, зависящего от тройки параметров $(n,t,x) \in N \times [0,1] \times \mathrm{R}^{\mathrm{d}}$. Относительно семейства плотностей $q_{n,t,x}(\cdot)$ и коэффициентов уравнения (10) предполагаются выполненными условия:

1. Симметричная матрица $a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x)$ ограничена и положительно определена: найдется $C > 1$ такое, что $C^{-1} \leqslant \theta^{\mathrm{T}}a(t,x)\theta \leqslant C$ для всех θ таких, что $|\theta| = 1,\ x \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}},\ t \in [0,1]$;

2. Матричные функции $b_n(t)$ и $b(t)$ непрерывны на $[0,1]$. Функции $a(t,x)$ и $m(t,x)$ и их первые производные являются непрерывными и ограниченными равномерно по $(t,x), x \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}}, t \in [0,1]$ и липшицевыми по переменной x с константой Липшица, не зависящей от t. Более того, вторые производные $\frac{\partial^2 a(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}, 1 \leqslant i,j \leqslant d$, существуют и удовлетворяют условию Гельдера по переменной x с константой, не зависящей от t;

3. $\int q_{n,t,x}(z)zdz = 0$, $\int q_{n,t,x}(z)zz^{\mathrm{T}}dz \triangleq a_n(t,x)$, $x \in \mathrm{R}^{\mathrm{d}}, t \in [0,1]$;

4. Существуют положительное целое S' и функция $\psi(x) : \mathrm{R}^{\mathrm{d}} \mapsto R$, $\sup_{x\in\mathrm{R}^{\mathrm{d}}} |\psi(x)| < \infty$ такая, что $\int |x|^S \psi(x)dx < \infty$, где $S = 2dS' + 4$, и для всех достаточно больших

n и $z \in \mathrm{R^d}$ выполнено:

$$| D_z^v q_{n,t,x}(x) | \leqslant \psi(z), \ | v | = 0,1,2,3,4,$$
$$| D_x^v q_{n,t,x}(x) | \leqslant \psi(z), \ | v | = 0,1,2,$$

где $x \in \mathrm{R^d}, t \in [0,1]$.

Существование переходной плотности для модели (11) непосредственно вытекает из предположений модели. Существование переходной плотности для модели диффузии (10) может быть получено из теории Хермандера [15], но при более сильных условиях на коэффициенты. Существование переходной плотности в этой модели можно также доказать методом параметрикса при более слабых условиях на коэффициенты, чем условия, требуемые в теории Хермандера. Сначала рассматривается диффузионная модель (10). Если коэффициенты модели ограничены, то существование переходной плотности следует из работы Ильин, Калашников и Олейник [11] или из статьи Konakov, Mammen [4], в которой был построен параметрикс для такого уравнения. Но в модели (10) тренд не ограничен и линейно возрастает. Чтобы применить метод параметрикса для этой модели, используем следующий прием: устраним тренд и рассмотрим новую модель с ограниченными коэффициентами. Затем применим метод параметрикса для этой новой модели с ограниченными коэффициентами и вернемся к исходной модели с неограниченным линейно возрастающим трендом.

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$y'(t) = b(t)y(t), \ y(0) = x \in \mathrm{R^d}, \ t \in [0,1] \tag{12}$$

Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица, соответствующая этой системе. Напомним, что для системы (12) это означает, что все решения могут быть продлены на весь отрезок $[0,1]$ и фундаментальной матрицей является матрица, столбцы которой являются независимыми решениями этой системы, удовлетворяющими начальным условиям. Возьмем в качестве начальной фундаментальной матрицы единичную матрицу $\Phi(0) = I$. Фундаментальная матрица является решением уравнения $\Phi'(t) = b(t)\Phi(t)$ и невырожденной матрицей на отрезке $[0,1]$. Обратная матрица $\Phi^{-1}(t)$ удовлетворяет уравнению $[\Phi^{-1}(t)]' = -\Phi^{-1}(t)b(t)$ и начальному условию $\Phi^{-1}(0) = I$. Для удаления линейной компоненты тренда рассмотрим процесс $\tilde{Y}(t) = f(t, Y(t))$, где

$f(t,y) = \Phi^{-1}(t)y$. Функция $f(t,y)$ непрерывна на $[0,1] \times \mathrm{R}^{\mathrm{d}}$ и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial t}$ и $\frac{\partial f}{\partial y_i}$, так что для вычисления стохастического дифференциала процесса $\tilde{Y}(t)$ можно использовать формулу Ито. Получим:

$$\begin{aligned}
d\tilde{Y}(t) &= d\left[\Phi^{-1}(t)Y(t)\right] = \Phi^{-1}(t)dY(t) + d\Phi^{-1}(t)Y(t) = \\
&= \Phi^{-1}(t)\left(\{b(t)Y(t) + m\left(t, Y(t)\right)\}dt + \sigma\left(t, Y(t)\right)dB(t)\right) + [\Phi^{-1}(t)]' dt\, Y(t) = \\
&= \Phi^{-1}(t)b(t)Y(t)dt + \Phi^{-1}(t)m\left(t, Y(t)\right)dt + \Phi^{-1}(t)\sigma\left(t, Y(t)\right)dB(t) - \\
&- \Phi^{-1}(t)b(t)Y(t) = \Phi^{-1}(t)m\left(t, Y(t)\right)dt + \Phi^{-1}(t)\sigma\left(t, Y(t)\right)dB(t) = \\
&= \tilde{m}\left(t, \tilde{Y}(t)\right)dt + \tilde{\sigma}\left(t, \tilde{Y}(t)\right)dB(t),
\end{aligned}$$

где $\tilde{m}\left(t, \tilde{Y}(t)\right) = \Phi^{-1}(t)m\left(t, \Phi(t)\tilde{Y}(t)\right)$ $\tilde{\sigma}\left(t, \tilde{Y}(t)\right) = \Phi^{-1}(t)\sigma\left(t, \Phi(t)\tilde{Y}(t)\right)$.

Видно, что введенный процесс $\tilde{Y}(t)$ является диффузионным процессом, удовлетворяющим СДУ с ограниченным трендом $\tilde{m}\left(t, \tilde{Y}(t)\right)$ и положительно определенной матрицей диффузии $\tilde{\sigma}\left(t, \tilde{Y}(t)\right)$:

$$d\tilde{Y}(t) = \tilde{m}\left(t, \tilde{Y}(t)\right)dt + \tilde{\sigma}\left(t, \tilde{Y}(t)\right)dB(t).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(t,y) &= \tilde{\sigma}\left(t, \tilde{Y}(t)\right)\left[\tilde{\sigma}\left(t, \tilde{Y}(t)\right)\right]^{\mathrm{T}} = \Phi^{-1}(t)\ \sigma\left(t, \Phi(t)y\right)\left[\Phi^{-1}(t)\ \sigma\left(t, \Phi(t)y\right)\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \Phi^{-1}(t)\sigma\left(t, \Phi(t)y\right)\left[\sigma\left(t, \Phi(t)y\right)\right]^{\mathrm{T}}[\Phi^{-1}(t)]^{\mathrm{T}} = \Phi^{-1}(t)\ a\left(t, \Phi(t)y\right)[\Phi^{-1}(t)]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\theta^{\mathrm{T}}\tilde{\sigma}(t,y)[\tilde{\sigma}(t,y)]^{\mathrm{T}}\theta = 0 \Leftrightarrow \vartheta^{\mathrm{T}}\sigma(t,y)[\sigma(t,y)]^{\mathrm{T}}\vartheta = 0,\ \vartheta = [\Phi^{-1}(t)]^{\mathrm{T}}\vartheta.$$

Остается лишь воспользоваться положительной определенностью матрицы $a(t, \Phi(t)y) = \sigma(t, \Phi(t)y)[\sigma(t, \Phi(t)y)]^{\mathrm{T}}$.

Существование переходной плотности $\rho_{\tilde{Y}}(t)$ процесса $\tilde{Y}(t)$ доказано методом параметрикса в [4]. По известным формулам преобразования плотности переходная плотность процесса $Y(t) = \Phi(t)\tilde{Y}(t)$ равна:

$$\rho_Y(s,t,x,y) = \det[\Phi^{-1}(t)]\rho_{\tilde{Y}}(s,t,\Phi^{-1}(s)x, \Phi^{-1}(t)y). \tag{13}$$

Для модели (11) рассмотрим процедуру исключения тренда, являющуюся дискретным аналогом описанной выше процедуры для диффузионного уравнения. Рассмотрим разностное уравнение без тренда:

$$\frac{x_n\left((k+1)h\right) - x_n(kh)}{h} = b_n(kh)X_n(kh),\ x_n(0) = x$$

на решетке $\Gamma=\{0,h,2h,\ldots,nh=1\},\ h=\frac{1}{n}$.

В матричной записи:

$$x_n\left((k+1)h\right)=\left(I+h\,b_n(kh)\right)x_n(kh),\ x_n(0)=x.$$

Итерируя последнее равенство, получим:

$$\begin{aligned}
x_n(h) &= \left(I+h\,b_n(0)\right)x,\\
x_n(2h) &= \left(I+h\,b_n(h)\right)x_n(h)=\left(I+h\,b_n(h)\right)\left(I+h\,b_n(0)\right)x,\\
&\ldots\\
x_n(kh) &= \Phi_n(kh)x,
\end{aligned}$$

где $\Phi_n(kh)=\left(I+h\,b_n\left((k-1)h\right)\right)\Phi_n\left((k-1)h\right)\Phi_n(kh)$ – фундаментальная матрица теории разностных уравнений [16], дискретный аналог фундаментальной матрицы $\Phi(t)$, заданная на решетке $\{0,h,2h,\ldots,nh=1\}$ с начальным условием $\Phi_n(0)=I$. Определим новую марковскую цепь:

$$\tilde{X}_n(kh)=\Phi_n^{-1}(kh)\;X_n(kh),\ \tilde{X}_n(0)=x.$$

По известным формулам преобразования плотности переходная плотность цепи Маркова $X_n(kh)=\Phi_n(kh)\;\tilde{X}_n(kh)$ равна:

$$\rho_{X_n}(ih,jh,x,y)=\det[\Phi^{-1}(jh)]\rho_{\tilde{X}_n}(ih,jh,\Phi^{-1}(ih)x,\Phi^{-1}(jh)y). \tag{14}$$

Таким образом, в соответствии с моделью (11) имеем:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_n\left((k+1)h\right) &= \Phi_n^{-1}\left((k+1)h\right)\;X_n\left((k+1)h\right)=\\
&= \Phi_n^{-1}(kh)\left(I+h\,b_n(kh)\right)^{-1}\left\{\left(I+h\,b_n(kh)\right)X_n(kh)+\right.\\
&+ \left.h\,m_n\left(kh,\ X_n(kh)\right)+\sqrt{h}\varepsilon_n\left((k+1)h\right)\right\}=\\
&= \Phi_n^{-1}(kh)X_n(kh)+h\,\Phi_n^{-1}(kh)\;\left(I+h\,b_n(kh)\right)^{-1}\;m_n\left(kh,X_n(kh)\right)+\\
&+ \sqrt{h}\,\Phi_n^{-1}(kh)\;\left(I+h\,b_n(kh)\right)^{-1}\;\varepsilon_n\left((k+1)h\right)=\\
&= \tilde{X}_n(kh)+h\,\tilde{m}_n\left(kh,\ \tilde{X}_n(kh)\right)+\sqrt{h}\,\tilde{\varepsilon}_n\left((k+1)h\right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_n\left(kh,\ \tilde{X}_n(kh)\right) &= \Phi_n^{-1}(kh)\;\left(I+h\,b_n(kh)\right)^{-1}\;m_n\left(kh,\ \Phi_n(kh)\;\tilde{X}_n(kh)\right),\\
\tilde{\varepsilon}_n\left((k+1)h\right) &= \Phi_n^{-1}(kh)\;\left(I+h\,b_n(kh)\right)^{-1}\;\varepsilon_n\left((k+1)h\right).
\end{aligned}$$

Из определения $\tilde{\varepsilon}_n$ следует, что случайная величина $\tilde{\varepsilon}_n((k+1)h)$ при фиксированном «прошлом»: $\tilde{X}_n(ih) = \tilde{x}(i),\ i = 0,1,2,...,k$, зависит лишь от значения процесса $\tilde{x}(k)$ в последний момент времени kh и имеет условную плотность:

$$\tilde{q}_{n,kh,\tilde{x}(k)}(z) = \det\ \Phi_n((k+1)h)\ q_{n,kh,\Phi_n(kh)\tilde{x}(k)}(\Phi_n((k+1)h)\,z) \tag{15}$$

из семейства плотностей $\det\ \Phi_n(([tn]+1)h)\,\tilde{q}_{n,t,\Phi_n(([tn]+1)h)x(k)}(\Phi_n(([tn]+1)h)\,z)$, зависящего от тройки параметров $(n,t,x) \in N \times [0,1] \times \mathrm{R^d}$. Плотности $\tilde{q}_{n,kh,\tilde{x}(k)}(z)$ в (15) удовлетворяют условиям 3 и 4, сформулированным в разделе 3, с поправкой на то, что $\phi(x)$ из условия 4 заменяется на $C\ \phi(x)$, где C – константа. Произведя замену переменных $v = \Phi\left(\frac{[tn]+1}{n}\right)z$, при $t = kh$ имеем:

$$\begin{aligned}
\int \tilde{q}_{n,t,\tilde{x}}(z)dz &= \det\Phi_n\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)\ \int q_{n,t,\Phi_n\left(\frac{[tn]}{n}\right)\tilde{x}}\left(\Phi_n\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)z\right)zdz = \\
&= \det\Phi_n\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)\ \det\Phi_n^{-1}\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)\ \int q_{n,t,\Phi_n\left(\frac{[tn]}{n}\right)\tilde{x}}(v)\Phi_n^{-1}\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)vdv = \\
&= \Phi_n^{-1}\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)\ \int q_{n,t,\Phi_n\left(\frac{[tn]}{n}\right)\tilde{x}}(v)vdv = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\int \tilde{q}_{n,t,\tilde{x}}(z)z_iz_jdz &= \det\Phi_n\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)\ \int q_{n,t,\Phi_n\left(\frac{[tn]}{n}\right)\tilde{x}}\left(\Phi_n\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)z\right)z_iz_jdz = \\
&= \int q_{n,t,\Phi_n\left(\frac{[tn]}{n}\right)\tilde{x}}(v)\left[\Phi_n^{-1}\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)v\right]_i\left[\Phi_n^{-1}\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)v\right]_j dv = \\
&= \left\{\Phi_n^{-1}\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)\ \int q_{n,t,\Phi_n\left(\frac{[tn]}{n}\right)\tilde{x}}(v)vv^{\mathrm{T}}dv\left[\Phi_n^{-1}\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)\right]^{\mathrm{T}}\right\}_{ij} = \\
&= \left\{\Phi_n^{-1}\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)\ a_n\left(t,\Phi_n\left(\tfrac{[tn]}{n}\right)\tilde{x}\right)\left[\Phi_n^{-1}\left(\tfrac{[tn]+1}{n}\right)\right]^{\mathrm{T}}\right\}_{ij} \triangleq \tilde{a}+n(t,\tilde{x}).
\end{aligned}$$

Вектор-функция $\Phi_n(t)x$ совпадает в точках $t = kh, k = 0,1,2,...,n$, с ломаной Эйлера для уравнения $y'(t) = b_n(t)y(t),\ y(0) = x \in \mathrm{R^d}$. Таким образом, в случае диффузионного процесса растущий тренд компенсируется возвратом по траекториям дифференциального уравнения $y'(t) = b_n(t)y(t), y(0) = x \in \mathrm{R^d}$, а в случае цепи Маркова – возвратом по ломаным Эйлера этого уравнения. Согласно хорошо известным свойствам ломаных Эйлера [17], $\Phi_n\left(\left[\frac{t}{h}\right]\right)x \to \Phi(t)$ равномерно на отрезке $[0,1]$ и, учитывая вышеописанные свойства, из (12) и (16) имеем:

$$\tilde{a}_n(t,\tilde{x}) = \int \tilde{q}_{n,t,x}(z)zz^{\mathrm{T}} \to \tilde{a}(t,x) = \tilde{\sigma}(t,x)[\tilde{\sigma}(t,x)]^{\mathrm{T}}, \quad n \to \infty.$$

Покажем теперь, как утверждения, полученные для моделей с ограниченным трендом, трансформируются в соответствующие утверждения для моделей, содержащих линейную компоненту в тренде. Для простоты рассмотрим случай семейства плотностей $q_{n,t,x}(\cdot)$, не зависящего от параметра n, т.е. $q_{n,t,x}(\cdot) = q_{t,x}(\cdot)$. Пусть для семейства $q_{t,x}(\cdot)$ и коэффициентов уравнения (10) выполнены условия 1–4, приведенные в разделе 3. Тогда для $\tilde{m}(t,x) = \Phi^{-1}(t)$, $m(t,\Phi(t)x)$, $\tilde{\sigma}(t,x) = \Phi^{-1}(t)$ и $\sigma(t,\Phi(t)x)$ выполнены условия теоремы 1.1 из [4], и, следовательно, справедлива оценка

$$\sup_{x,y\in \mathrm{R^d}} \left(1 + \|y-x\|^{2(S'-1)}\right) |p_{\tilde{X}_n}(0,1,x,y) - p_{\tilde{Y}}(0,1,x,y)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{17}$$

Используя соотношения (13) и (14), сформируем следующий результат, являющийся следствием (17).

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)–4), приведенные в разделе 3. Тогда

$$\sup_{x,y\in \mathrm{R^d}} \left(1 + \|\Phi^{-1}(1)y-x\|^{2(S'-1)}\right) |\det \Phi_n(1)\, p_{X_n}(0,1,x,\Phi_n(1)\Phi^{-1}(1)y) -$$
$$- \det \Phi(1)\, p_Y(0,1,x,y)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Если $b(t) \equiv b$, то

$$\sup_{x,y\in \mathrm{R^d}} \left(1 + \|\Phi^{-1}(1)y-x\|^{2(S'-1)}\right) |p_{X_n}(0,1,x,y) -$$
$$-p_Y(0,1,x,y)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Замечание 1. Поскольку

$$C_1\|y-\Phi(1)x\| \leqslant \|\Phi^{-1}(1)y-x\| \leqslant C_2\|y-\Phi(1)x\|,$$

то утверждения теоремы 2 могут быть записаны также с множителем $\left(1+\|y-\Phi(1)x\|^{2(S'-1)}\right)$ вместо $\left(1+\|\Phi^{-1}(1)y-x\|^{2(S'-1)}\right)$, т.е. неравномерная оценка скорости сходимости в этой теореме получается либо сдвигом терминальной точки y назад (pull back), либо сдвигом начальной точки x вперед (push forward).

4. Пример исключения линейной компоненты тренда для диффузионной модели

Рассмотрим модель, представленную в [18]:

$$dX_t = \{\beta(t)(a(t)-X_t)\}dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \quad X_0 = x \in \mathrm{R^d}, \tag{18}$$

где B_t, $t \geqslant 0$, – стандартный винеровский процесс. Рассмотрим случай, когда функция $\sigma(t, X_t)$ ограничена.

Рассмотрим систему ЛОДУ: $x'(t) = -\beta(t)x(t),\ y(0) = x \in \mathrm{R^d}$ и ее фундаментальную матрицу $\Phi(t) : \Phi'(t) = -\beta(t)\Phi(t),\ \Phi(0) = I$, где I – единичная матрица. Введем процесс $\tilde{X}_t = \Phi^{-1}(t)X_t$ и по лемме Ито [19] получим для него стохастический дифференциал:

$$
\begin{aligned}
d\tilde{X}_t &= d\left[\Phi^{-1}(t)X_t\right] = \Phi^{-1}(t)dX_t + d\Phi^{-1}(t)X_t = \\
&= \Phi^{-1}(t)\beta(t)a(t)dt + \Phi^{-1}(t)\sigma(t, X_t)dB_t = \tilde{m}(t, \tilde{X}_t)dt + \tilde{\sigma}(t, \tilde{X}_t)dB_t,
\end{aligned}
$$

где $\tilde{m}(t, \tilde{X}_t) = \Phi^{-1}(t)\beta(t)a(t),\ \tilde{\sigma}(t, \tilde{X}_t) = \Phi^{-1}(t)\sigma(t, \Phi(t)X_t)$.

Таким образом, процесс $\tilde{X}_t$ представи́м в виде:

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_t &= \tilde{X}_0 + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \tilde{m}(s, \tilde{X}_s)ds + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \tilde{\sigma}(s, \tilde{X}_s)dB_s \\
&= x + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \Phi^{-1}(s)\beta(s)a(s)ds + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \Phi^{-1}(s)\sigma(s, \Phi(s)\tilde{X}_s)dB_s.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим одномерный случай с постоянными коэффициентами: $a(t) \equiv a,\ \beta(t) \equiv \beta,\ \sigma(t) \equiv \sigma$. Модель (18) тогда соответствует модели эволюции процентной ставки Vasicek [20]:

$$
dX_t = \{\alpha\beta - \beta X_t\}dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x \in \mathrm{R}. \tag{19}
$$

Для модели (19) существует явный вид решения СДУ, поэтому процедура исключения тренда из диффузионного уравнения не представляет особого интереса, но позволяет проследить корректность рассматриваемого метода.

Решение СДУ (19) представмо в виде [20]:

$$
X_t = x\ \exp(-\beta t) + a(1 - \exp(-\beta t)) + \sigma\ \exp(-\beta t)\int\limits_0^{\mathrm{T}} \exp(\beta s)dB_s. \tag{20}
$$

Рассмотрим получение решения СДУ (19) с помощью процедуры исключения линейной компоненты тренда.

Фундаментальная матрица для СДУ (19) имеет вид $\Phi(t) = \exp(-\beta t)$. Тогда процесс $\tilde{X}_t = \Phi^{-1}(t) X_t = \exp(\beta t) X_t$ представи́м в виде:

$$\tilde{X}_t = x + a(\exp(\beta t) - 1) + \sigma \int\limits_0^{\mathrm{T}} \exp(\beta s) dB_s.$$

Решение, полученное методом исключения линейного тренда, примет вид

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi(t) \left(x + a(\exp(\beta t) - 1) + \sigma \int\limits_0^{\mathrm{T}} \exp(\beta s) dB_s \right) \\ &= x \ \exp(-\beta t) + a(1 - \exp(-\beta t)) + \sigma \ \exp(-\beta t) \int\limits_0^{\mathrm{T}} \exp(\beta s) dB_s, \end{aligned}$$

что совпадает с (20).

Метод исключения тренда неприменим к более сложным моделям, таким как модифицированная модель эволюции процентной ставки Cox–Ingersoll–Ross [21], ее расширение – модель Hull–White [22], так как модификация метода параметрикс в случае неограниченной диффузии еще не исследована. Модель Cox–Ingersoll–Ross отличается от рассмотренной выше модели Vasicek видом функции волатильности $\sigma(t, X_t) \equiv \sigma\sqrt{X_t}$, процедура удаления тренда для нее представляет отдельную задачу. Модель Hull–White также содержит неограниченную диффузию $\sigma(t, X_t) \equiv \sigma(t)\sqrt{X_t}$, поэтому процедура исключения линейного тренда для этой модели требует отдельного изучения.

Однако помимо модели процентной ставки Vasicek метод исключения тренда приме́ним к модели стохастической волатильности Heston [23] в случае, когда функция от волатильности, входящая в уравнение доходности, ограничена. Рассмотрим двумерный случай на примере модели стохастической волатильности Heston [23]:

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + f(v_t, S_t) dB_t^1, \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \xi g(v_t) dB_t^2, \end{cases} \tag{21}$$

где $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ – стандартный винеровский процесс, $f(v_t, S_t)$ и $g(v_t)$ – ограниченные функции.

Представим систему СДУ [21] в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} dS_t \\ dv_t \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_t \\ v_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k\theta \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} f(v_t, S_t) & 0 \\ 0 & \xi g(v_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему ЛОДУ:

$$x^{'}(t) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} x(t).$$

Фундаментальная матрица для этой системы имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \exp(\mu t) & 0 \\ 0 & \exp(-kt) \end{pmatrix}.$$

Тогда процесс

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_t \\ \tilde{v}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-\mu t) & 0 \\ 0 & \exp(kt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

представи́м в виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_t \\ \tilde{v}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta(\exp(kt) - 1) \end{pmatrix} + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \exp(-\mu s) & 0 \\ 0 & \exp(ks) \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} f(v_s, S_s) & 0 \\ 0 & \xi g(v_s) \end{pmatrix} dB_s.$$

С помощью метода исключения линейной компоненты тренда, получим следующее представление решения системы СДУ:

$$\begin{pmatrix} S_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\mu t) & 0 \\ 0 & \exp(-kt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta(1 - \exp(-kt)) \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \exp(\mu t) & 0 \\ 0 & \exp(-kt) \end{pmatrix} \int\limits_0^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \exp(-\mu s) & 0 \\ 0 & \exp(ks) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_s, S_s) & 0 \\ 0 & \xi g(v_s) \end{pmatrix} dB_s.$$

5. Заключение

Как известно из [11] и [24], метод параметрикса и его дискретный аналог [4] и [5] предполагают ограниченность коэффициентов сноса и диффузии. Между тем, многие важные модели имеют неограниченный коэффициент сноса, в частности, модели, соответствующие стохастическим процедурам рекуррентного оценивания имеют линейно растущий коэффициент сноса.

А именно: цепи Маркова и предельные диффузионные процессы с линейной компонентой в тренде возникают в рекуррентных процедурах оценивания, основанных на методе Роббинса–Монро. В [25] доказан ряд результатов о слабой сходимости рекуррентных процедур оценивания к конечномерным распределениям некоторого предельного диффузионного процесса (теорема 6.3, гл. 6; теоремы 3.1 и 5.2, гл. 8). Эти теоремы предполагают существование плотностей, поэтому возникает естественный вопрос: имеет ли место не только слабая сходимость, но и сходимость плотностей, т.е. справедлива ли соответствующая локальная предельная теорема? Метод параметрикса в комбинации с методом исключения тренда позволяют положительно ответить на этот вопрос. Это приложение метода будет предметом отдельной публикации. Целью настоящей статьи было предложить процедуру, позволяющую исключать линейно растущую компоненту тренда и сводить задачу к изученной ранее задаче с ограниченным трендом. Предлагаемый метод приме́ним к более общим моделям с трендом, имеющим ограниченный градиент, однако формулы носят менее наглядный характер, а ломаные Эйлера строятся локально, поэтому в этом случае можно говорить о локальной предельной теореме за малое время. Это также будет предметом дальнейших рассмотрений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2.

Применим (17) к точкам x и $\Phi^{-1}(1)y$, получим

$$\begin{aligned} &\sup_{x,y\in\mathrm{R^d}} \left(1+\|\Phi^{-1}(1)y-x\|^{2(S'-1)}\right)|p_{\tilde X_n}(0,1,x,\Phi^{-1}(1)y)- \\ &-p_{\tilde Y}(0,1,x,\Phi^{-1}(1)y)| = O(\tfrac{1}{\sqrt{n}}). \end{aligned} \tag{П.1}$$

Из (13) и (14) имеем:

$$p_{\tilde Y}(s,t,x,z) = \det\Phi(t)p_Y(s,t,\Phi(s)x,\Phi(t)z), \tag{П.2}$$

$$p_{\tilde X_n}(ih,jh,x,v) = \det\Phi_n(jh)p_{X_n}(ih,jh,\Phi_n(ih)x,\Phi_n(jh)v). \tag{П.3}$$

Подставляя в (П.2) и (П.3) $s=0,\ t=1,\ i=0,\ j=n,\ x$ и $z=\Phi^{-1}(1)y,\ v=\Phi^{-1}(y)$, получим из (П.1):

$$\begin{aligned} &\sup_{x,y\in\mathrm{R^d}} \left(1+\|\Phi^{-1}(1)y-x\|^{2(S'-1)}\right)|\det\Phi_n(1)\ p_{X_n}(0,1,x,\Phi_n(1)\Phi^{-1}(1)y)- \\ &-\det\Phi(1)\ p_Y(0,1,x,y)| = O(\tfrac{1}{\sqrt{n}}). \end{aligned} \tag{П.4}$$

Пусть $b(t) \equiv b$. Тогда $\Phi(1) = e^b$ – матричная экспонента, $\Phi_n(1) = \left(I + \frac{b}{n}\right)^n$ при достаточно больших n и

$$\|\Phi(1) - \Phi_n(1)\| \leqslant e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leqslant \frac{a^2 e^a}{n}, \tag{П.5}$$

где $a = \|b\|$. Первое неравенство в (П.5) доказано в [17, с. 98]. Для доказательства второго неравенства достаточно исследовать знак производной вблизи точки $x = 0$ функции $f(x) \stackrel{\triangle}{=} a^2 e^a x - e^a + (1 + ax)^{1/x}$. Кроме того, из лемм 3.1 и 3.2 из [4] следует оценка

$$p_{\tilde{Y}}(s, t, x, y) \leqslant C e^{-C\|y - x\|^2},$$

поэтому для переходной плотности $p_Y(0, 1, x, y)$ имеем:

$$p_Y(0, 1, x, y) = \det \Phi^{-1} p_{\tilde{Y}}(0, 1, x, \Phi^{-1}(1)y) \leqslant C e^{-C\|\Phi^{-1}(1)y - x\|^2}. \tag{П.6}$$

Второе утверждение теоремы 2 следует теперь из (П.4)–(П.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скороход А.В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961.

2. *Stroock D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes // Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 233. Springer (Berlin), 1979.

3. *Konakov V., Molchanov S.* On the Convergence of Markov Chains to Diffusion Processes // Theory Probab. and Math. Stat. v. 31. Kiev: Kiev Univ. 1984.

4. *Konakov V., Mammen E.* Local Limit Theorems for Transition Densities of Markov Chains Converging to Diffusions // Prob. Th. Rel. Fields. 2000. No. 117, P. 551–587.

5. *Konakov V., Mammen E.* Local Approximations of Markov Random Walks by Diffusions // Stoch. Proc. Appl. 2001. No 96 (1). P. 73–98.

6. *Konakov V., Mammen E.* Edgeworth Type Expansions for Transition Densities of Markov Chains Converging to Diffusions // Bernoulli: J. Math. Statistics and Probability. 2005. V. 11. No. 4. P. 591–641.

7. *Konakov V., Mammen E.* Small Time Edgeworth-type Expansions for Weakly Convergent Nonhomogeneous Markov Chains // Probab. Theory and Related Fields. 2009. V. 143. No. 1. P. 137–176.

8. *Levy E.E.* Sulle equazioni lineari alle derivate parziali totalmente ellittiche // Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche, Naturali, Ser. V. 1907. No. 16 (12). P. 932–938.

9. *Levy E.E.* Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parzial // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1907. No. 24 (1). P. 275–317.

10. *Friedman A.* Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, 1964.

11. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. Т. XVII. Вып. 3 (105). С. 3–146. 1962.

12. *McKean H.P., Singer I.M.* Curvature and the Eigenvalues of the Laplacian // J. Differential Geometry. 1967. No. 1. P. 43–69.

13. *Delarue F., Menozzi S.* Density Estimation for a Random Noise Propagating Through a Chain of Differential Equations // J. Func. Anal. 2010. V. 259. No. 6. P. 1577–1630.

14. *Kelley W., Peterson A.* The Theory of Differential Equations Classical and Qualitative. Prentice Hall, 2004.

15. *Nualart D.* The Malliavin Calculus and Related Topics. Springer, 2006.

16. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. Springer Science+Business Media, Inc., 2005.

17. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.

18. *Koo B., Linton O.* Semiparametric Estimation of Locally Stationary Diffusion Models // Discussion paper No. EM/2010/551. August 2010.

19. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения // Межд. журн. Мир, ООО “Издательство АСТ”, 2003.

20. *Vasicek O.* An Equilibrium Characterization of the Term Structure // J. of Financial Economics. 1977. No. 5 (2). P. 177–188.

21. *Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A.* A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. 1985. No. 53. P. 385–407.

22. *Hull J., White A.* Pricing Interest-Rate-Derivative Securities // The Review of Financial Studies. 1990. V. 3. No. 4. P. 573–592.

23. *Heston S.L.* A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options // Rev. Financial Studies. 1993. V. 6. No. 2. P. 327–343.

24. *Конаков В.Д.* Метод параметрикса для диффузий и цепей Маркова. Препринт. Изд. попечительского совета механико-математического факультета МГУ. Сер. WP BRP «STI». № 2012. 2012.

25. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972.

Конаков Валентин Дмитриевич, *НИУ ВШЭ, заведующий международной лаборатории стохастического анализа и его приложений, Москва*, `VKonakov@hse.ru`

Маркова Анна Романовна, *НИУ ВШЭ, стажер-исследователь международной лаборатории стохастического анализа и его приложений, Москва*, `anna.r.markova@gmail.com`