



Конечно-гладкая локальная эквивалентность автономных систем с одним нулевым корнем

В. С. Самовол

В статье рассматриваются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности невырожденной особой точки, у которых матрица линейной части имеет одно нулевое собственное значение, а остальные собственные значения лежат вне мнимой оси. Доказывается, что для таких систем задача о конечно-гладкой эквивалентности решается по конечным отрезкам рядов Тейлора их правых частей.

Библиография: 7 названий.

Введение. Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1], [2], где анализировались системы обыкновенных дифференциальных уравнений, матрица линейной части которых имеет одно нулевое собственное число, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси. Для краткости такие системы мы называем *системами с одним нулевым корнем*. Мы изучим задачу локальной конечно-гладкой эквивалентности систем уравнений указанного вида, ряды Тейлора правых частей которых отличаются членами высокой степени (так называемая задача о конечно-определенных ростках векторных полей). В большинстве работ, посвященных данной тематике, исследуются системы с невырожденной особой точкой (эта проблематика в значительной мере отражена в книге [3]). По поводу частично вырожденных систем см. [4]. В работах [5], [6] исследована задача о бесконечно гладкой эквивалентности формально эквивалентных систем с одним нулевым корнем или двумя чисто мнимыми корнями матрицы линейной части. Наш подход к решению задачи конечно-гладкой эквивалентности базируется на приведении таких систем к некоторой специальной нормальной форме (см. [2]). Хотя при этом используются преобразования с особенностями, тем не менее, предлагаемый метод позволяет установить критерий конечно-гладкой эквивалентности рассматриваемых систем.

Рассмотрим вещественную автономную систему

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \quad (1)$$

где $\xi, Q(\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 0$, $Q(\xi)$ – функция класса C^∞ в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $\dot{A} = Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси и одно нулевое собственное число.

Пусть $\lambda, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы $\tilde{A}$, лежащие вне мнимой оси, $\lambda_0 = 0$. Рассуждения, приведенные в [2], показывают, что мы можем без ограничения общности считать, что система (1) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y}_i &= \varepsilon_i y_{i+1} + \lambda_i y_i + g_i(x, y), \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_i = 0$ или 1, $f(x, y), g_i(x, y) = o(\|(x, y)\|)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ – комплексный вектор, $g_i(x, 0) = 0$, $1 \leq i \leq n$, $f(x, 0) = bx^{m+1} + cx^{2m+1}$, $b = \pm 1$, $m \geq 1$ – целое число. Координаты y_i будем называть невырожденными координатами (переменными), а x будем называть вырожденной координатой (переменной).

Рассмотрим линейную (по невырожденным переменным) часть системы (2)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= bx^{m+1} + cx^{2m+1}, \\ \dot{y} &= A(x)y.\end{aligned}\quad (3)$$

Преобразуем систему (3) с помощью так называемых срезающих преобразований (см. [7]). Приведем соответствующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Срезающим преобразованием* называется преобразование вида

$$y = S(x)z, \quad S(x) = \text{diag}(1, x^\delta, x^{2\delta}, \dots, x^{(n-1)\delta}), \quad (4)$$

где $\delta > 0$ – рациональное число.

Срезающим преобразованием будем также называть преобразование вида

$$y = S(x)z, \quad S(x) = \text{diag}(E_1, xE_2),$$

где E_1, E_2 – единичные матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Слабо вырожденным преобразованием* называется замена переменных вида

$$\begin{aligned}x &= du^l, \\ y &= T(x)z.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь $T(x)$ является произведением конечного числа преобразований, одна часть которых является срезающими преобразованиями, а другая часть – это близкие к тождественным преобразования класса C^∞ . Число l натуральное, $d = \text{const} \neq 0$.

Основным результатом относительно системы (3) является следующая теорема (см. [2]).

ТЕОРЕМА 1. *Существует слабо вырожденное преобразование (5), приводящее систему (3) к следующей нормальной форме:*

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bu^{p+1} + c_1 u^{2p+1}, \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^p A_p)z.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ – постоянные диагональные матрицы, A_p – постоянная матрица, имеющая жорданову форму, $p = ml$. При этом на диагонали матрицы A_0 расположены собственные числа матрицы $A(0)$, матрица A_p такова, что если числа λ_j^i и λ_r^i , стоящие на диагонали какой-либо матрицы A_i , $0 \leq i \leq p-1$, не равны друг другу, то соответствующие диагональные элементы жордановой матрицы A_p располагаются в ее разных жордановых клетках.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Конечные отрезки рядов Тейлора преобразований класса C^∞ , являющихся множителями слабо вырожденного преобразования (5), из теоремы 2, определяются конечными отрезками ряда Тейлора матрицы $A(x)$ системы (3). Общее количество множителей, составляющих преобразование (5) зависит только от m и n . Срезающие преобразования, входящие множителями в слабо вырожденное преобразование (5), определяются отрезком ряда Тейлора матрицы $A(x)$, длина которого равна некоторому числу $m_1(m, n)$. Число l зависит только от n .

Рассмотрим теперь систему, которая получится после применения к системе (2) преобразования, приводящего ее линейную часть (3) к виду (6). С учетом замечаний (см. [2]) относительно избавления от возникающих в системе отрицательных степеней можем считать, что данная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bu^{p+1} + c_1 u^{2p+1} + G(u, z), \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^p A_p)z + F(u, z),\end{aligned}\tag{7}$$

$F(u, z)$, $G(u, z)$ – функции класса C^∞ , ряды Тейлора которых представляют собой суммы резонансных мономов по z степени большей единицы с коэффициентами, являющимися функциями класса C^∞ , зависящими от u .

Перейдем теперь к задаче о конечно-гладкой эквивалентности систем уравнений. Рассмотрим две системы вида (1), у которых N -струи правых частей совпадают. Отметим, что если у двух систем вида (1) совпадают ряды Тейлора правых частей до некоторого порядка N (N -струи), то у соответствующих систем вида (7), будут совпадать L -струи, причем $L = L(N)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} L(N) = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если две системы вида (1) отличаются членами порядка N , который выше числа $m_1 = m_1(m, n)$ (см. замечание 1), то система (6) из теоремы 1 будет для них совпадать. Кроме того, срезающие преобразования, входящие множителями в слабо вырожденные преобразования (5), приводящие данные системы к виду (6), также будут совпадать. При этом множители класса C^∞ , входящие в (5), будут различаться для наших систем, однако отличаться они будут членами порядка выше некоторого числа $N_1 = N_1(N)$, причем $\lim_{N \rightarrow \infty} N_1(N) = \infty$.

Следующая теорема, решает проблему конечно-гладкой эквивалентности систем вида (1).

ТЕОРЕМА 2. Для любого целого числа $k > 0$ существует целое число N , обладающее следующим свойством: если ряды Тейлора правых частей двух систем вида (1) отличаются членами порядка выше N (совпадают N -струи), то эти системы локально C^k -эквивалентны, т.е. существует невырожденное преобразование класса C^k , приводящее одну систему к другой в малой окрестности начала координат. Число N зависит от k , m , n , а также от спектра матрицы $Q'(0)$.

Для невырожденных систем утверждение теоремы 2 принадлежит С. Стернбергу и К. Ченю (теорема 12.2 из [3; глава IX]). Некоторый общий результат для частично вырожденных систем получен в [4], где доказано соответствующее утверждение при условии совпадения участков рядов Тейлора при разложении правых частей систем по невырожденным координатам. Теорема 2 обобщает теорему Стернберга–Ченя на случай систем с одним нулевым корнем.

1. Пример. В данном пункте на примере некоторых трехмерных систем мы проиллюстрируем теорему о конечно-гладкой эквивалентности.

Рассмотрим две трехмерные системы класса C^∞

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^{m+1} + f(x, y), \\ \dot{y} &= A(x)y + g(x, y),\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{x}^{m+1} + f^1(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{A}(\tilde{x})\tilde{y} + g^1(\tilde{x}, \tilde{y}),\end{aligned}\tag{9}$$

$$A(x) = A(0) + g(x), \quad \tilde{A}(x) = \tilde{A}(0) + \hat{g}(x), \quad A(0) = \tilde{A}(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$g(x) = (g_{ij}(x)), \quad \hat{g}(x) = (\hat{g}_{ij}(x)), \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad g(0) = \hat{g}(0) = 0,$$

$$f(x, 0) = f^1(x, 0) = 0, \quad \|g(x, y)\| + \|g^1(x, y)\| = o(\|y\|).$$

В общем случае, в отличие от рассматриваемых здесь систем, имеет место равенство

$$f(x, 0) = f^1(x, 0) = bx^{2m+1}.$$

Для простоты считаем, что $b = 0$. Отметим при этом, что все результаты остаются верными и в общем случае.

Ниже будем считать, что N -струи правых частей систем совпадают (число $N > 0$ зададим позже).

Пусть $k > 0$ – целое число. Рассмотрим задачу о C^k -эквивалентности наших систем, точнее о существовании для заданного числа k такого числа N^* , что при $N > N^*$ системы будут локально C^k -эквивалентны.

В [1] показано, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то при любом $k > 0$ каждая из систем приводится невырожденным преобразованием класса C^k к полиномиальной нормальной форме, причем коэффициенты каждой нормальной формы определяются P -струей соответствующей системы, где $P = P(k, m)$. Таким образом, если приведенные системы имеют совпадающие N -струи и $N \geq P$, то их указанные нормальные формы совпадают и, очевидно, данные системы C^k -эквивалентны.

Рассмотрим теперь случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Ограничимся случаем $\varepsilon = 1$ (если $\varepsilon = 0$, то процесс распадается на этапы, каждый из которых аналогичен случаю, рассмотренному здесь). Следующая теорема является аналогом теоремы 1 из [1] и ее доказательство практически повторяет рассуждения, использованные в [1].

ТЕОРЕМА 3. *Существует невырожденное преобразование класса C^∞ , приводящее систему (1) к виду, при котором ряд Тейлора правой части системы является суммой резонансных мономов по невырожденным переменным с коэффициентами, представляющими собой бесконечно гладкие функции от вырожденной переменной.*

Ниже будем считать, что системы (8) и (9) уже приведены к виду, указанному в данной теореме. В этом случае ряды Тейлора правых частей систем не содержат резонансных членов, за исключением линейных по невырожденным координатам. Следовательно, функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, $f^1(x, y)$, $g^1(x, y)$ являются плоскими. Но тогда, поскольку согласно [6] формальная эквивалентность рассматриваемых систем означает их C^∞ -эквивалентность, то можно считать эти функции равными нулю. Итак, без ограничения общности можно считать, что системы (8) и (9) имеют

следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^{m+1}, \\ \dot{y} &= A(x)y,\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^{m+1}, \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{A}(x)\tilde{y}.\end{aligned}\tag{11}$$

Будем теперь преобразовывать системы (10) и (11). Поскольку преобразования аналогичны, то ограничимся их представлением для системы (10). Запишем последние два уравнения этой системы подробно:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \lambda y_1 + y_2 + g_{11}(x)y_1 + g_{12}(x)y_2, \\ \dot{y}_2 &= \lambda y_2 + g_{21}(x)y_1 + g_{22}(x)y_2.\end{aligned}\tag{12}$$

Сделаем замену $y_2^* = y_2 + g_{11}(x)y_1 + g_{12}(x)y_2$. Система (12) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \lambda y_1 + y_2^*, \\ \dot{y}_2^* &= \lambda y_2^* + \tilde{g}_{21}(x)y_1 + \tilde{g}_{22}(x)y_2^*.\end{aligned}\tag{13}$$

При дальнейших построениях будем предполагать, что $x > 0$ (при $x < 0$ построение аналогично рассмотренному случаю).

Произведем в системе (13) срезающее преобразование

$$y_1 = z_1, \quad y_2^* = x^\delta z_2.\tag{14}$$

Число $\delta > 0$ определим позже.

Система (13) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda z_1 + x^\delta z_2, \\ \dot{z}_2 &= \lambda z_2 + x^{-\delta} \tilde{g}_{21}(x)z_1 + (\tilde{g}_{22}(x) - \delta x^m)z_2.\end{aligned}\tag{15}$$

Запишем функции $\tilde{g}_{2i}(x)$, $i = 1, 2$, не являющиеся плоскими, в виде

$$\tilde{g}_{2i}(x) = x^{r_i} g_{2i}^*(x),$$

где $g_{2i}^*(0) \neq 0$, r_i – натуральное число. Если какая-либо из функций $\tilde{g}_{2i}(x)$ плоская, то будем считать, что $r_i = +\infty$. Положим теперь

$$\delta = \delta_1 = \min\left(\frac{r_1}{2}, r_2, m\right).$$

Число δ_1 будет рациональным, либо даже целым. Система (15) будет иметь вид

$$\dot{z} = A_0 z + x^{\delta_1} A_1(x)z, \quad A_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.\tag{16}$$

Ограничимся рассмотрением нескольких случаев.

1. Пусть сначала $m > r_1/2 > r_2$. Тогда $\delta_1 = r_2$ – целое и в системе (16) будет

$$A_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

Матрица $A_1(0)$ имеет различные собственные числа.

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^{m+1-\delta_1}, \\ \dot{z} &= A_1(x)z.\end{aligned}\tag{17}$$

Поскольку матрица $A_1(0)$ имеет различные собственные числа, то согласно лемме 1 из [1] существует невырожденное преобразование класса C^∞

$$z = H(x)w, \quad \det H(0) \neq 0,\tag{18}$$

приводящее систему (17) к виду

$$\dot{w} = \tilde{A}_1(x)w, \quad \text{где} \quad \tilde{A}_1 = \text{diag}(a_1(x), a_2(x)).$$

Это означает выполнение равенства

$$H^{-1}(x)A_1(x)H(x) - x^{m+1-\delta_1}H^{-1}H'(x) = \tilde{A}_1(x),$$

из которого следует, в свою очередь, что

$$x^{\delta_1}H^{-1}(x)A_1(x)H(x) - x^{m+1}H^{-1}(x)H'(x) = x^{\delta_1}\tilde{A}_1(x).$$

Отсюда, учитывая, что $H^{-1}(x)A_0H(x) = A_0$, получаем, что

$$H^{-1}A_0H + x^{\delta_1}H^{-1}A_1(x)H(x) - x^{m+1}H^{-1}(x)H'(x) = A_0 + x^{\delta_1}\tilde{A}_1(x).$$

Это означает, что система (16) после преобразования (18) распадается на независимые уравнения и система (10) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^{m+1}, \\ \dot{w}_1 &= \lambda w_1 + x^{\delta_1}a_1(x)w_1, \\ \dot{w}_2 &= \lambda w_2 + x^{\delta_1}a_2(x)w_2.\end{aligned}\tag{19}$$

Этим данный этап преобразований системы (10) в рассматриваемом случае $\delta_1 = r_2$ завершен.

2. Рассмотрим теперь случай $r_1/2 < r_2$, $r_1/2 < m$, r_1 – нечетное число. Тогда $\delta_1 = r_1/2$ не является целым. Получим в (16)

$$A_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0.$$

Матрица $A_1(0)$ опять имеет различные собственные числа. Чтобы избавиться от дробных степеней, сделаем дополнительное преобразование вырожденной переменной $x = \sqrt[m]{2}u^2$. В итоге получим систему

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^{2m+1}, \\ \dot{z} &= A_0z + u^{r_1}\tilde{A}_2(u)z, \quad \tilde{A}_2(u) \in C^\infty,\end{aligned}\tag{20}$$

где матрица $\tilde{A}_2(0)$ также имеет различные собственные числа. Рассуждая как выше, получаем существование невырожденного преобразования класса C^∞ , после которого последняя система приобретает следующий вид, аналогичный системе (19)

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^{2m+1}, \\ \dot{w}_1 &= \lambda w_1 + u^{r_1} \tilde{a}_1(u) w_1, \\ \dot{w}_2 &= \lambda w_2 + u^{r_1} \tilde{a}_2(u) w_2.\end{aligned}\tag{21}$$

Данный этап преобразований системы (10) в случае дробного δ_1 завершен.

В случае $m < r_1/2$, $m < r_2$ получаем $\delta_1 = m$ и в (16) матрица

$$A_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

имеет различные собственные числа. Как и в первом случае, получаем существование невырожденного преобразования вида (10) класса C^∞ , приводящего систему (16) к виду (19).

Согласно лемме 2 из [1] для каждой из полученных систем существует линейное по невырожденным координатам близкое к тождественному преобразование класса C^∞ , после которого данные системы примут вид

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^{p+1}, \\ \dot{v} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^pA_p)v.\end{aligned}\tag{22}$$

Здесь $A_0, A_1, \dots, A_p$ – постоянные диагональные матрицы, $p = m$ в случаях 1 и 3 и $p = 2m$ в случае 2.

Итоговое преобразование для невырожденных переменных можно представить в виде

$$y = T(u)v = Q(u)S(u)R(u)v,$$

где $Q(u)$, $R(u)$ – невырожденные матрицы класса C^∞ , а $S(u)$ – срезающее преобразование (14). При этом $x = u$ в случаях 1 и 3 и $x = \sqrt[m]{2}u^2$ во втором случае.

Для системы (11) аналогичное преобразование будет иметь вид

$$\tilde{y} = T_1(u)v = Q_1(u)S(u)R_1(u)v.$$

При этом из построения следует, что соответствующие срезающие множители в указанных преобразованиях одинаковы, а матрицы $Q(u)$ и $Q_1(u)$ имеют совпадающие N -струи, это же верно и для матриц $R(u)$ и $R_1(u)$. Отметим также, что обе системы (10) и (11) преобразуются в одну и ту же систему (22) при $N \geq 2m$.

Рассмотрим теперь преобразование

$$y = V(u)\tilde{y} = TT_1^{-1}\tilde{y}.$$

Кроме того, сделаем обратную замену $u = x$ или $u = \sqrt{2^{-m}}x$ в зависимости от рассматриваемого случая. Итоговое преобразование запишем в виде

$$y = W(x)\tilde{y} = V(u(x))\tilde{y}.\tag{23}$$

Очевидно, что данное преобразование приводит систему (10) к виду (11). Покажем теперь, что при достаточно большом N преобразование (23) принадлежит классу C^k . Можно записать

$$V(u) = QSR(Q_1SR_1)^{-1} = QSR R_1^{-1}S^{-1}Q_1^{-1}.$$

Поскольку матрицы $R(u)$ и $R_1(u)$ имеют совпадающие N -струи, то

$$R(u)R_1^{-1}(u) = E + r(u),$$

где E – единичная матрица, $\|r(u)\| \leq D|u|^N$, $D = \text{const}$.

Отметим теперь, что все производные матриц $S(u)$, $S^{-1}(u)$ до порядка k не превосходят по норме величин $D_1|u|^{-L}$, $D_1 = \text{const}$, $L \leq 2m + k$. Из этого следует, что если $N > 2(2m + k)$, то матрица $SR R_1^{-1}S^{-1}$ будет иметь вид

$$SR R_1^{-1}S^{-1} = E + |u|^{N_1}B(u), \quad B(u) \in C^{N_1}, \quad N_1 = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - (2m + k + 1).$$

Отсюда следует, что матрица $W(x)$ имеет вид

$$W = E + |x|^{N_2}\tilde{B}(x), \quad \tilde{B}(x) \in C^{N_2}, \quad N_2 = \left\lfloor \frac{N}{8} \right\rfloor - \frac{2m + k + 1}{4},$$

и, очевидно, принадлежит классу C^k , если число N достаточно велико (например, если $N \geq 4m + 10k + 10$). Таким образом, при указанном N преобразование (23) принадлежит классу C^k и, следовательно, утверждение о конечно-гладкой эквивалентности систем (8) и (9) доказано.

2. Конечно-гладкая эквивалентность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $L \geq 0$ – целое число. Функцию $Q = Q(x, y)$ будем называть L -малой, если

$$Q = Q(x, y) = |x|^L h(x, y), \quad h \in C^L.$$

Матрицу будем называть L -малой, если все ее элементы являются L -малыми функциями. Если число L зависит от некоторого целочисленного параметра N , причем $\lim_{N \rightarrow \infty} L(N) = \infty$, то совокупность $L(N)$ -малых функций (матриц) будем обозначать символом Ω .

Примерами функций, принадлежащих Ω , являются функции $|x|^N$, $|x|^{\sqrt{N}}$ и т.п. В то же время функции $|x|^2$, $|x|^{100}$ и т.п. не принадлежат Ω .

Рассмотрим две системы вида (1), N -струи которых совпадают. Тогда согласно замечанию 2, если $N > m_1(m, n)$, то слабо вырожденные преобразования (5), приводящие линейные части систем к виду (6), будут отличаться только множителями класса C^∞ , причем эти множители будут иметь совпадающие N_1 -струи, где $N_1 = N_1(N)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N_1(N) = \infty$.

ЛЕММА 1. Если преобразование $H(u, z)$ имеет вид

$$H(u, z) = E + H_1(u, z),$$

где E – тождественное преобразование, $H_1(u, z) \in \Omega$, $(u, z) = T_i(x, y)$, $i = 1, 2$, – слабо-вырожденные преобразования вида (5), отличающиеся только множителями класса C^∞ , причем эти множители имеют совпадающие N_1 -струи ($N_1 = N_1(N)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N_1(N) = \infty$), то преобразование

$$P(x, y) = T_1^{-1}HT_2 - E \in \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале наше утверждение докажем для случая, когда

$$T_1(x, y) = T_2(x, y) = T(x, y) = (x^\alpha, S^{-1}(x)y),$$

где $\alpha = 1/l$, S – срезающее преобразование, l – натуральное число.

Отметим, что если $\varphi(x, y) \in \Omega$, то $(\varphi T)(x, y) \in \Omega$ (в начале координат функция φT естественно доопределяется равной нулю). Если $\psi(x) \in \Omega$, то

$$S(x + \psi(x)) = S(x) + \tilde{S}(x), \quad \tilde{S}(x) \in \Omega.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} HT(x, y) &= (x^{1/l} + \varphi_1(x, y), S^{-1}(x)y + \Phi_1(x, y)), \quad \varphi_1, \Phi_1 \in \Omega, \\ T^{-1}HT(x, y) &= ((x^{1/l} + \varphi_1(x, y))^l, S((x^{1/l} + \varphi_1(x, y))^l)(S^{-1}(x)y + \Phi_1(x, y))) \\ &= (x + \varphi_2(x, y), S(x + \varphi_2(x, y))(S^{-1}(x)y + \Phi_1(x, y))) \\ &= (x + \varphi_2(x, y), (S(x) + S_1(x))(S^{-1}(x)y + \Phi_1(x, y))) \\ &= (x + \varphi_2(x, y), y + \Phi_2(x, y)), \quad \varphi_2, S_1, \Phi_2 \in \Omega. \end{aligned}$$

Следовательно, $T^{-1}HT - E \in \Omega$.

Покажем теперь справедливость леммы в случае, когда преобразования T_1, T_2 являются линейными по невырожденным переменным преобразованиями класса C^∞ вида

$$T_i(x, y) = (x, \tilde{T}_i(x)y),$$

$\tilde{T}_i(x)$ – матрицы с совпадающими N -струями.

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2(x) &= \tilde{T}_1(x) + r(x), \quad r(x) \in \Omega, \\ HT_i(x, y) &= (x + \varphi(x, y), \tilde{T}_i(x)y + \Phi(x, y)), \\ T_1^{-1}HT_2 &= T_1^{-1}(x + \varphi(x, y), \tilde{T}_2(x)y + \Phi(x, y)) \\ &= (x + \varphi(x, y), (\tilde{T}_1^{-1}(x + \varphi(x, y)))(\tilde{T}_2^{-1}(x)y + \Phi(x, y))) \\ &= (x + \varphi(x, y), \tilde{T}_1^{-1}(x)\tilde{T}_2(x)y + \Phi_1(x, y)) \\ &= (x + \varphi(x, y), y + \Phi_2(x, y)), \quad \varphi, \Phi, \Phi_1, \Phi_2 \in \Omega. \end{aligned}$$

И в этом случае требуемое утверждение доказано.

Покажем теперь справедливость нашего утверждения в случае, когда

$$T_1(x, y) = T_2(x, y) = (x, x^L y).$$

В этом случае

$$\begin{aligned}
 HT_2(x, y) &= (x + \varphi(x, y), x^L y + \Phi(x, x^L y)) \\
 &= (x + \varphi(x, y), x^L y + \Phi_1(x, y)), \\
 T_1^{-1} HT_2(x, y) &= (x + \varphi(x, y), (x + \varphi(x, y))^{-L} (x^L y + \Phi_1(x, y))) \\
 &= (x + \varphi(x, y), x^{-L} (1 + \varphi_1(x, y)) (x^L y + \Phi_1(x, y))) \\
 &= (x + \varphi(x, y), y + \Phi_2(x, y)).
 \end{aligned}$$

Утверждение доказано и в этом случае.

Представим теперь преобразования $T_i(x, y)$, $i = 1, 2$, в виде произведений конечного числа преобразований трех указанных выше видов:

$$T_i(x, y) = T_{i1} \cdots T_{iK}.$$

Обозначим

$$H_0 = H, \quad H_j = T_{1j}^{-1} H_{j-1} T_{2j}, \quad 1 \leq j \leq K.$$

Так как $H - E \in \Omega$, то согласно доказанному по индукции получаем, что $H_j - E \in \Omega$, $1 \leq j \leq K$. Из этого следует при $j = K$, что $T_1^{-1} HT_2 - E \in \Omega$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим две системы вида (1) с совпадающими N -струями правых частей, где число N определим позже, а пока будем считать $N > m_1(m, n)$. Согласно [4] существует такое число $\tilde{N} = \tilde{N}(k, \Lambda)$, что если ряды разложения правых частей двух систем вида (1) по невырожденным переменным отличаются членами порядка выше $\tilde{N}$, то такие системы C^k -эквивалентны. Здесь Λ – спектр матрицы $\tilde{A}$ линейной части системы (1). Согласно [1] правые части систем можно считать конечной суммой резонансных мономов по невырожденным переменным (степени этих мономов не превышают числа N), с коэффициентами, являющимися функциями от вырожденной переменной класса C^∞ , N -струи которых совпадают. По теореме 1 обе системы с помощью слабо-вырожденных преобразований T_1 и T_2 соответственно приводятся к системам вида (7). Указанные преобразования являются суперпозицией конечного числа срезающих преобразований и преобразований класса C^∞ , являющихся линейными по невырожденным координатам, а также степенного преобразования вырожденной переменной. Заметим также, что согласно замечанию 2, если число N достаточно велико, то срезающие преобразования, являющиеся множителями указанных слабо-вырожденных преобразований для наших двух систем, будут совпадать, а бесконечно-гладкие множители будут отличаться членами порядка выше N^* , где $N^* = N^*(N)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N^*(N) = \infty$. Правые части полученных таким образом двух систем представляют собой многочлены степени $\tilde{N}$ по невырожденным переменным, коэффициенты которых суть функции класса C^∞ от вырожденной переменной, причем N_1 -струи этих функций совпадают. Здесь $N_1 = N_1(N)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N_1(N) = \infty$.

Ниже для каждой из систем будут построены близкие к тождественным преобразования (полиномиальные по невырожденным переменным), после которых правая часть каждой системы будет представлять собой сумму двух слагаемых. Первое слагаемое, совпадающее для обеих систем, будет полиномом по невырожденным переменным степени $\tilde{N}$, коэффициенты которого также являются полиномами по

вырожденной переменной степени N_1 . Вторые слагаемые будут функциями класса C^∞ , у которых разложение в ряд Тейлора по невырожденным переменным содержит лишь члены степени выше $\tilde{N}$. Сами построенные преобразования будут отличаться от тождественного на функции, принадлежащие Ω .

Указанное построение представим ниже, а сейчас допустим, что такие преобразования уже построены, и приведем заключительную часть доказательства теоремы.

Обозначим указанные преобразования двух наших систем H_1 и H_2 соответственно. Применим теперь к системам, полученным после этих преобразований, преобразование T_1^{-1} и рассмотрим следующие итоговые преобразования исходных двух систем

$$R_1 = T_1^{-1}H_1T_1, \quad R_2 = T_1^{-1}H_2T_2.$$

Нетрудно видеть, что согласно лемме 1 преобразования $R_1 - E$, $R_2 - E$ будут принадлежать Ω .

Поскольку преобразование T_1^{-1} линейно по невырожденным переменным, то правые части полученных систем будут суммой двух слагаемых, первые из которых, одинаковые для обеих систем, являются полиномами по невырожденным переменным степени $\tilde{N}$, а вторые слагаемые будут представлять собой функции класса C^∞ по невырожденным переменным, ряды Тейлора которых начинаются с членов степени большей $\tilde{N}$. Так как итоговые преобразования принадлежат классу C^{N_2} , где $N_2 = N_2(N)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N_2(N) = \infty$, то при достаточно большом N можно считать, что и первые, и вторые слагаемые принадлежат классу C^M , где $M \geq \tilde{N}$. При этом правые части систем отличаются только членами, имеющими порядок по невырожденным переменным выше $\tilde{N}$. Но тогда согласно [4] полученные системы будут C^k -эквивалентны. Тем самым, доказательство теоремы будет завершено.

Перейдем теперь к построению указанных выше преобразований. В связи с тем, что эти преобразования для обеих систем строятся аналогично, то ограничимся рассмотрением одной системы вида (7). Запишем эту систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= bu^{p+1} + c_1u^{2p+1} + \sum_{r=2}^{\tilde{N}} b_r(u, z), \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^pA_p)z + \sum_{r=2}^{\tilde{N}} a_r(u, z). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_r(u, z) &= \sum_{|s|=r} a_s(u)z^s, & a_s(u) &= a_s^1(u) + a_s^2(u), \\ b_r(u, z) &= \sum_{|s|=r} b_s(u)z^s, & b_s(u) &= b_s^1(u) + b_s^2(u), \end{aligned}$$

где

$$a_s^1(u) = \sum_{j=0}^{N_1} a_{sj}u^j, \quad b_s^1(u) = \sum_{j=0}^{N_1} b_{sj}u^j,$$

а ряды Тейлора функций $a_s^2(u)$, $b_s^2(u)$ имеют вид

$$a_s^2(u) = \sum_{j \geq N_1+l} a_{sj}u^j, \quad b_s^2(u) = \sum_{j \geq N_1+l} b_{sj}u^j, \quad l \geq 1.$$

Отметим, что у рассматриваемых систем функции $a_s^1(u)$, $b_s^1(u)$ совпадают, так как N_1 -струи функций $a_s(u)$, $b_s(u)$ у обеих систем совпадают.

Здесь и ниже, как и в [2], используются следующие обозначения: $z^s = z_1^{s_1} \cdots z_n^{s_n}$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s_1, \dots, s_n$ – неотрицательные целые числа, $|s| = s_1 + \dots + s_n$, $\lambda^j = (\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j)$ – вектор, состоящий из элементов спектра матрицы A_j , $0 \leq j \leq p$, $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Если моном $u^r z^s$ входит в уравнение с номером i , $1 \leq i \leq n+1$, то выполняется резонансное соотношение $s_1 \lambda_1 + \dots + s_n \lambda_n = \lambda_{i-1}$ и моном z^s мы называем *резонансным* мономом. Также считается, что $\lambda_0 = \lambda_0^q = 0$, $0 \leq q \leq p$.

Будем избавляться от мономов $u^r z^s$, удовлетворяющих условию $|s| \leq \tilde{N}$ и входящих в ряды Тейлора функций $z^s a_s^2(u)$. Это будем делать, последовательно рассматривая мономы z^s в порядке возрастания наборов s . Наборы s упорядочим следующим образом. Будем считать, что $s^1 > s^2$, если либо $|s^1| > |s^2|$, либо $|s^1| = |s^2|$ и в последовательности $\alpha_i = s_{n-i+1}^1 - s_{n-i+1}^2$, $i = 1, 2, \dots, n$, первый ненулевой элемент положителен.

Используем следующую замену переменных, после которой функции $a_s^1(u)$ не изменятся, а ряды Тейлора функций $a_s^2(u)$ будут начинаться с членов порядка $N_1 + l + 1$:

$$z_i = w_i + d_i u^{N_1+l-q-1} w^s, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (25)$$

q – уровень монома z^s (определение уровня резонансного монома см. в [2]).

В случае $0 \leq q \leq p-2$ положим

$$d_i = \frac{a_{sN_1+l}^i}{(s, \lambda^{q+1}) - \lambda_i^{q+1}},$$

где $a_{sN_1+l}^i$ – соответствующая координата вектора a_{sN_1+l} . В случае $q = p-1$ положим

$$d_i = \frac{a_{sN_1+l}^i}{(s, \lambda^p) - \lambda_i^p + b(N_1 + l - p)}.$$

Если моном $u^{N_1+l} z^s$ входит в первое уравнение системы, то сделаем замену переменных $u = v + d_0 v^{N_1+l-q-1} w^s$, где в случае $0 \leq q \leq p-2$ положим

$$d_0 = \frac{b_{sN_1+l}}{(s, \lambda^{q+1})},$$

а при $q = p-1$ положим

$$d_0 = \frac{b_{sN_1+l}}{(s, \lambda^p) - b(N_1 + l - 2p - 1)}.$$

Если число N_1 выбрать таким, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$N_1 > 2p + 1 + (|s| + 1) \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j^p|,$$

то коэффициенты d_i существуют.

В результате указанного преобразования мы добьемся того, что ряды Тейлора функций $a_s^2(u)$, $b_s^2(u)$ будут начинаться с членов порядка $N_1 + l + 1$. Проводя индукцию по l и используя результаты [5], [6], получаем существование преобразования класса C^∞ вида

$$u = v + d_0(v) w^s, \quad z_i = w_i + d_i(v) w^s, \quad 1 \leq i \leq n,$$

в результате которого функции $a_s^2(u)$, $b_s^2(u)$ станут равными нулю. При этом $|d_i(v)| = o(|v|^{N_1-p})$, $0 \leq i \leq n$.

После данных преобразований появляются новые мономы $w^{\tilde{s}}$, где $|\tilde{s}| > |s|$, коэффициенты при которых будут функциями, зависящими от переменной v , причем ряды Тейлора этих функций будут начинаться с членов степени выше $N_1 - p$. С помощью конечного числа преобразований вида (25) все эти мономы при $|\tilde{s}| \leq N$ также последовательно устраняются по мере их возрастания. Очевидно, что итоговое преобразование будет отличаться от тождественного на функцию, принадлежащую Ω . Таким образом, наша система может быть приведена к требуемому виду. Теорема 2 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность А. Д. Брюно за полезные обсуждения, способствующие существенному улучшению изложения результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. С. Самовол, “Нормальная форма автономной системы с одним нулевым корнем”, *Матем. заметки*, **75**:5 (2004), 711–720.
- [2] В. С. Самовол, “О новых резонансах и нормальной форме автономной системы с одним нулевым корнем”, *Матем. заметки*, **88**:1, 63–77.
- [3] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [4] В. С. Самовол, “Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки”, *Тр. ММО*, **44**, Изд-во МГУ, М., 1982, 213–234.
- [5] А. Н. Кузнецов, “Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:2 (1972), 41–51.
- [6] Г. Р. Белицкий, “Гладкая эквивалентность ростков векторных полей с одним нулевым или парой чисто мнимых собственных значений”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:4 (1986), 1–8.
- [7] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968.

В. С. Самовол

Государственный университет – Высшая школа экономики

E-mail: 555svs@mail.ru

Поступило

17.11.2008

Исправленный вариант

26.11.2009