Пред n-ядра в играх с ограниченной кооперацией*

Илья Кацев Елена Яновская †

Аннотация

Кооперативной игроой с ограниченной кооперацией называется тройка (N, v, Ω), где N – конечное множество игроков, $\Omega \subset 2^N, N \in \Omega$ – набор *допустимых* коалиций $v : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция. Из этого определения следует, что если $\Omega = 2^N$, то игра $(N, v, \Omega) = (N, v)$ становится классической кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП).

Рассматривается класс класс всех игр с ограниченной кооперацией $\mathcal{G}^r$ с произвольным *универсальным* множеством игроков. Пред n-ядро для игр из этого класса определяется так же, как и для классических ТП игр. Приводятся необходимые и достаточные условия на набор Ω, обеспечивающие существование и одноточечность пред n-ядра. Даются аксиоматические характеризации пред n-ядер для игр с коалиционными структурами и двумя типами допустимых коалиций в них.

1 Введение

Классические кооперативные игры с трансферабельными полезностями (ТП) (N, v) определяют характеристическую функцию v на множестве всех коалиций, т.е. подмножестьв множества игроков N. Однако в реальности не все коалици могут оброазоваться из-за различных политических, экономических, технических и даже психологических причин. Наиболее известные ситуации такого рода рассматривают в качестве возможных коалиций разбиения множества игроков, так что каждая коалиция разбиения считается допустимой. Далее возникает вопрос, какие еще коалиции могут считаться допустимыми: например, подмножества каждой коалиции разбиения и (или) объединения коалиций разбиения.

Таким образом, одним из основных разделов современной теории кооперативных игр следует назвать теорию игр с ограниченной кооперацией, в которой рассматриваются различные наборы допустимых коалиций, и разрабатывается теорий решений таких игр.

Разработка этой теории началась с игр с *коалиционной структурой*. В таких играх уже определены и охарактеризованы линейные решения [5],[3], зависящие от разбиения множества игроков. Однако характеристическая функция для таких игр определялась, как и в классическом случае, на множестве всех коалиций, хотя ее значения для недопустимых коалиций не участвовали в определении решения.

В данной статье предлагается другой подход. Рассматривается произвольный набор допустимых коалиций, и характеристическая функция определяется только на этом наборе. Формально,

---

*Работа поддержана РФФИ, проект N 11-01-411a

†Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, 191187, С.-Петербург, ул.Чайковского, 1

Определение 1 Игрой с *ограниченной кооперацией* называется набор (N, v, Ω), где N – конечное множество игроков, $\Omega \subset 2^N, N \in \Omega$ – набор *допустимых* коалиций, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ – *характеристическая функция.*

Из этого определения следует, что если $\Omega = 2^N$, то игра$(N, v, \Omega) = (N, v)$ становится классической ТП кооперативной игрой.

В параграфе 2 приводится краткий обзор известных результатов о решениях для игр с коалиционными структурами.

Так как известные результаты о решениях для игр с ограниченной кооперацией связаны с модификациями значения Шепли, в данной статье основное внимание уделяется пред n-ядру и пред k-ядру. В параграфе 3 рассматриваются игры с произвольным набором допустимых коалиций. Для них определяется пред n-ядро и приводятся необходимые и достаточные условия его существования и одноточечности. В параграфе 4 рассматриваются наборы допустимых коалиций, порожденные разбиениями множества игроков. Для таких игр определяются две двухшаговые модификации пред n-ядра с применением подходов Оуэна [5] и Камийо [3] для соответствующих модификаций значения Шепли. Для указанных решений приводятся их аксиоматические характеризации.

2 Краткий обзор результатов для игр с ограниченной кооперацией

Следует отметить, что существуют различные подходы к исследованию решений для игр с ограниченной кооперацией. Это различие обусловлено самими определениями классических ТП игр и игр с ограниченной кооперацией. Действительно, если классическая ТП игра (N, v) определяется характеристической функцией $v : 2^N \to \mathbb{R}$, определенной на множестве всех коалиций, то для игр с ограниченной кооперацией только игрокам из коалиций, принадлежащих $\Omega \subsetneq 2^N$, разрешено вступать в коалиции. Следовательно, возникает два основных вопроса при исследовании игр с ограниченной кооперацией:

1. Возможно ли рассматривать произвольные наборы допустимых коалиций?

2. Возможно ли использовать значения характеристической функции на недопустимых коалициях (если таковые заданы) для определения решения игры?

Рассмотрим различные ответы, имеющиеся в литературе, на эти вопросы. Что касается ответа на первый вопрос, то он, в основном, связан либо с практическими ситуациями, в которых допустимые наборы коалиций определяются из их содержания – например, разбиения игроков на коалиции предполагают участие каждого игрока только в одной коалиции – или с технической стороной вопроса, выбираются наборы коалиций, которые проще для анализа.

Одной из первых работ в этом направлении является известная статья Майерсона [4] В ней он рассматривает набор допустимых коалиций, порожденный связными подмножествами *графа коммуникаций*, вершинами которого являются игроки. Для такого класса игр Майерсон определил и охарактеризовал значение (значение Майерсона), являющееся обобщением значения Шепли. При этом значения характеристической функции на недопустимых коалициях участвовали в определении решения игры с ограничениями.

Другим хорошо известным обобщением значения Шепли является значение Оуэна [5] для игр с коалиционными структурами. Допустимыми коалициями в такой структуре являются коалиции разбиениям, подмножества отдельных коалиций разбиения, и объединения коалиций разбиения с не более чем одним подмножеством коалиции разбиения.

Каждая из этих работ рассматривает только некоторые конкретные структуры допустимых коалиций. Кроме того, в них определялись и исследовались только одноточечные решения (значения).

Что касается многозначных решений, то таких работ очень немного. Ллерена [?] определил с-ядро для игр с ограниченной кооперацией. Райнирс и Поттерс [?] определялось $\mathcal{B}$-n-ядро для игр с ограниченной кооперацией (N, v, Ω), где $\mathcal{B} = \Omega$ как подмножество множества дележей, на которых достигается лексикографический минимум упорядоченных по убыванию векторов эксцессов, где эти векторы определялись на пространстве $\mathbb{R}^{|\mathcal{B}|}$. Так как множество дележей ограничено, для игр с непустым множеством дележей n-ядро не пусто как для классических ТП игр, так и для игр с ограниченной кооперацией. В статье [?] былди найдены условия на набор допустимых коалиций, при которых n-ядро ТП игры совпадает с n-ядром ограниченной игры $(N, v, \mathcal{B})$.

С пред n-ядром связано другое решение ТП игр: пред k-ядро. Если пред n-ядро является одноточечным, то пред n-ядро является многозначным, более того, оно является наибольшим по включению из всех решений, удовлетворяющих свойствам эффективности, симметрии, ковариантности и согласованности [?] т.е. всем тем аксиомам, которые, вместе с одноточечностью, характеризуют пред n-ядро на классе ТП игр с бесконечным универсальным множеством игроков.

Поэтому в статье определяются оба этих решения применительно к играм с ограниченной кооперацией. В параграфе 2 приводятся необходимые и достаточные условия существования и одноточечности пред n-ядра для игр с ограниченной кооперацией установление необходимых и достаточных условий их существования и одноточечности пред -ядра В параграфе 3 дается модификация некоторых свойств решений для случая игр с ограниченной кооперацией и с их помощью приводится аксиоматическая характеризация пред n-ядра. В параграфе 4 эти же задачи (кроме одноточечности решения) решаются для пред к-ядра игр с ограниченной кооперацией.

3 Игры с ограниченной кооперацией и их пред n-ядра

Рассмотрим произвольное множество $\mathcal{N}$, которое назовем *универсальным множеством* игроков. Обозначим через, $\mathcal{G}^r$ класс всех ТП игр с ограниченной кооперацией, множества игроков которых содержатся в $\mathcal{N}$:

$$(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r \implies N \subset \mathcal{N},$$

а через $\mathcal{G}^r_N \subset \mathcal{G}^r$ – подкласс игр с фиксированным множеством игроков N.

Для вектора $x \in \mathbb{R}^N$ и коалиции $S \subset N$ будем использовать традиционное обозначение $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Множество *допустимых векторов выигрышей* игры (N, v, Ω) в случае $N \subset N$ определяется, как и для обычных ТП игр, формулой

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x(N) \leq v(N)\},$$

а множество эффективных векторов выигрышей как

$$X^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x(N) = v(N)\}.$$

Очевидно, эти множества совпадают с соответствующими множествами для ТП игр (N, w), для которых $v(N) = w(N)$.

Эксцессом коалиции $S \in \Omega$ относительно вектора выигрышей x называется разность $e(S, x, v) = v(S) - x(S)$, которую будем обозначать также короче через $e(S, x)$, если характеристическая функция v фиксирована. Вектор $e(x) = \{e(S, x, v)\}_{S \in \Omega}$ называется *вектором эксцессов.*

Определение 2 *Решением* для класса игр $\mathcal{C}_N^r \subset \mathcal{G}_N^r$ называется отображение $\sigma : \mathcal{C}_N^r \to 2^{\mathbb{R}^N}$, сопоставляющее каждой игре $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}_N^r$ множество $\sigma(N, v, \Omega) \subset X(N, v)$.

Через $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^N}$ обозначим вектор, компоненты которого совпадают с компонентами вектора $e(x)$, но расположенными в порядке убывания:

$$\theta^t(x) = \max_{\substack{\mathcal{T} \subset \Omega \\ |\mathcal{T}| = t}} \min_{S \in \mathcal{T}} e(S, x). \tag{1}$$

Будем использовать для этого вектора также обозначение $\theta_v(x)$, если необходимо указать соответствующую характеристическую функцию в определении вектора эксцессов.

Пусть $\geq_{lex}$ – отношение лексикографического упорядочения в произвольном векторном пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$x \geq_{lex} y \iff x = y \text{ или } \exists 1 \leq k \leq m, \text{ такое что } x_k = y_k \text{ и } x_i > y_i \text{ для } i < k.$$

Определение 3 *Пред n-ядром* $PN(N, v, \Omega)$ игры (N, v, Ω) называется множество минимальных векторов эксцессов относительно лексикографического упорядочения в множестве эффективных векторов выигрышей :

$$x \in PN(N, v, \Omega) \iff \theta(y) \geq_{lex} \theta(x)) \text{ для всех } y \in X^*(N, v). \tag{2}$$

В этом определении пред n-ядро предполагается многозначным решением. Действительно, для "малых"наборов допустимых коалиций Ω оно оказывается многозначным и даже может не существовать. Например, для игры трех лиц с $N = \{1, 2, 3\}$ и набором допустимых коалиций $\Omega = \{1, 2\}, \{2, 3\}$ для любой характеристической функции v не существует вектора x, удовлетворяющего отношению (**??**), так как минимум $\max\{e(\{1, 2\}, x), e(\{2, 3\}, x)\}$ не достигается на множестве $x \in X^*(N, v, \Omega)$ ввиду того, что максимум из приведенных двух величин стремится в минус бесконечности при $x_2 \to +\infty$, $x_1, x_3 \to -\infty$.

Если же пред n-ядро игры (N, v, Ω) не пусто, то из его определения 2 следует, что множество $PN(N, v, \Omega)$ выпукло, т.е. пред n-ядро является *выпуклозначным.*

Основной целью данного параграфа является характеризация наборов Ω допустимых коалиций, гарантирующих существование и одноточечность пред n-ядра.

Для этого мы будем пользоваться известной теорему Колберга, дающую комбинаторную характеризацию пред n-ядра для ТП игр.

Напомним, что пред n-ядро ТП игр одноточечно, и $x = PN(N, v)$, если вектор удовлетворяет отношению (2), где в определении (1) вектора $\theta(x)$ набор Ω заменялся набором всех подмножеств множества N.

Набор коалиций $\mathcal{S}$ множества N называется *сбалансированным*, если существуют такие положительные числа $\lambda_S > 0$ для $S \in \mathcal{S}$, что $\sum\limits_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ S \ni i}} \lambda_S = 1$ для всех $i \in N$.

Теорема 1 (Kohlberg [?]) *Для того чтобы вектор выигрышей $x \in X^*(N,v)$ ТП игры (N,v) являлся ее пред n-ядром, $x = PN(N,v)$, необходимо и достаточно, чтобы наборы коалиций*

$$\mathcal{B}_\alpha(x,v) = \{S \subset N \,|\, e(S,x) \geq \alpha\}, \tag{3}$$

были пусты или сбалансированы для каждого числа α.

Эта теорема допускает непосредственное обобщение на класс игр с ограниченной кооперацией.

Утверждение 1 *Для того чтобы вектор $x \in X^*(N,v)$ игры $(N,v,\Omega) \in \mathcal{G}^r$ с ограниченной кооперацией принадлежал ее пред n -ядру, $x \in PN(N,v,\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы наборы коалиций*

$$\mathcal{B}_\alpha(x,v,\Omega) = \{S \in \Omega \,|\, e(S,x) \geq \alpha\}, \tag{4}$$

были пусты или сбалансированы для всех чисел α.

Доказательство этого утверждения полностью совпадает с доказательством теоремы Колберга 1.

Следующая лемма будет необходима для доказательства основной теоремы этого параграфа, которая дает необходимые и достаточные условия на набор Ω, обеспечивающие существование пред n-ядра для игр с ограниченной кооперацией.

Лемма 1 *Пусть (N,v) – произвольная ТП игра, $x \in X^*(N,v)$- ее эффективный вектор выигрышей, $\alpha^* \in \mathbb{R}$. Если для любого $\alpha \geq \alpha^*$ набор $\mathcal{B}_\alpha(x,v)$ сбалансирован, то для любого $\alpha \geq \alpha^*$*

$$\mathcal{B}_\alpha(x,v) = \mathcal{B}_\alpha(\nu,v),$$

где ν – пред n-ядро игры (N,v).

Доказательство. . Пусть β – максимальное число, для которого $\mathcal{B}_\beta(x,v) \neq \mathcal{B}_\beta(\nu,v)$. Из определения пред n-ядра следует, что

$$\mathcal{B}_\beta(x,v) \setminus \mathcal{B}_\beta(\nu,v) \neq \emptyset.$$

Сравним эксцессы коалиций из наборов $\mathcal{B}_\beta(x,v)$ относительно векторов x и ν.

Если $S \in \mathcal{B}_\beta(x,v) \cap \mathcal{B}_\beta(\nu,v)$, то $e(S,x) = e(S,\nu)$.

Если $S \in \mathcal{B}_\beta(x,v) \setminus \mathcal{B}_\beta(\nu,v)$, то $e(S,x) = \beta$ и $e(S,\nu) < \beta$, так как $S \notin \mathcal{B}_\alpha(\nu,v)$ для $\alpha \geq \beta$.

Следовательно, для некоторых коалиций из $\mathcal{B}_\beta(x,v)$ эксцессы относительно x и ν совпадают, а для остальных коалиций из $\mathcal{B}_\beta(x,v)$ эксцессы относительно x строго больше эксцессов относительно ν, что противоречит сбалансированности набора $\mathcal{B}_\beta(x,v)$. Поэтому $\beta < \alpha^*$. $\square$

Теперь можно сформулировать основную теорему:

Теорема 2 *Для того чтобы пред n-ядро $PN(N, v, \Omega)$ игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^r$ было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы набор Ω был сбалансирован.*

Доказательство. . *Необходимость.* предположим, что набор Ω не является сбалансированным. Тогда для любого вектора $x \in X^*(N, v)$ существует такое решение системы

$$\begin{cases} y(S) & \leq & x(S), \quad S \in \Omega, \\ y(N) & = & x(N) \end{cases}, \tag{5}$$

что для некоторой коалиции $S \in \Omega \quad y(S) < x(S)$. Это значит, что выполняется отношение

$$\theta(x) \geq_{lex} \theta(y),$$

откуда следует, что $x \neq PN(N, v, \Omega)$. Так как вектор $x \in X^*(N, v)$ был выбран произвольно, получаем, что $PN(N, v, \Omega) = \emptyset$.

Достаточность. Пусть набор Ω сбалансирован.

Для произвольного числа A определим ТП игру (N, w_A) со следующей характеристической функцией:

$$w_A(S) = \begin{cases} v(S) & S \in \Omega \\ A & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обозначим пред n-ядро игры (N, w_A) через $x_A = PN(N, w_A)$.

Для любого числа A рассмотрим набор коалиций

$$\mathcal{B}_A = \{S \in \Omega \,|\, e(S, x_A, w_A) > \max_{T \notin \Omega} e(T, x_A, w_A)\},$$

Покажем, что найдется число A, для которого $|\mathcal{B}_A| = |\Omega|$.

Обозначим через A_0 число, удовлетворяющее равенству $|\mathcal{B}_{A_0}| = \max_A |\mathcal{B}_A|$.

Для ТП игры (N, w_A) и для каждого сбалансированного набора $\mathcal{S}$ коалиций из N пусть $\{\lambda_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ – набор соответствующих этим наборам веса. Для эффективного вектора $x \in X^*(N, w)$ обозначим через $e_{w_A}(x, \mathcal{S})$ взвешенные средний эксцесс коалиций из $\mathcal{S}$:

$$e_{w_A}(x, \mathcal{S}) = \frac{\sum\limits_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S e(x, S)}{\sum\limits_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S},$$

где числа λ_S соотвествуют сбалансированному набору $\mathcal{S}$.

Нетрудно видеть, что эксцессы $e_{w_A}(x, \mathcal{S})$ не зависят от x,

При $A \to -\infty$ значения $e_{w_A}(x, S)$ убывают для $S \in \mathcal{S} \not\subset \Omega$, и не изменяются для $S \in \mathcal{S} \subset \Omega$.

Так как число сбалансированных наборов конечно, существует такое число A_1, для которого

$$e_{w_{A_1}}(x, S) < \min_{S \in \Omega} e_{w_{A_1}}(x_{A_0}, S)) \tag{6}$$

для любого сбалансированного набора $\mathcal{S} \not\subset \Omega$.

Предположим, что $|\mathcal{B}_{A_0}| < |\Omega|$.

Покажем, что для любой коалиции $S \in \mathcal{B}_{A_0}$

$$e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) = e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) \tag{7}$$

. Если набор $\mathcal{B}_{A_0}$ является пустым, то это равенство верно.

Для того чтобы рассмотреть случай $\mathcal{B}_{A_0} \neq \emptyset$, сначала введем обозначение

$$e_1 = \min_{S \in \mathcal{B}_{A_0}} e(S, x_{A_0}, w_{A_0}).$$

По определению игры (N, w_{A_1}) для любой коалиции $S \in \mathcal{B}_{A_0}$ справедливо равенство $e(S, x_{A_0}, w_{A_0}) = e(S, x_{A_0}, w_{A_1})$. Для любой коалиции $T \notin \mathcal{B}_{A_0}$ выполняется равенство $e(T, x_{A_0}, w_{A_0}) \geq e(T, x_{A_0}, w_{A_1})$. Поэтому для любого $a \geq e_1$ набор $\{S \subset N \,|\, e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) \geq a\}$ сбалансирован.

По Лемме 1 для любого $a \geq e_1$ справедливо равенство

$$\{S \in N \,|\, e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) \geq a\} = \{S \subset N \,|\, e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) \geq a\},$$

из которого следует равенство

$$e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) = e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) \text{ for all } S \in \mathcal{B}_{A_0}, \tag{8}$$

и равенство (7) доказано.

Рассмотрим теперь эксцессы коалиций из набора $\Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0}$. Обозначим

$$e_2 = \min_{S \in \Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0}} e(S, x_{A_0}, w_{A_0}), \tag{9}$$

и рассмотрим следующий набор:

$$\mathcal{C} = \{S \subset 2^N \setminus \mathcal{B}_{A_0} \,|\, e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) = \max_{T \subset 2^N \setminus \mathcal{B}_{A_0}} e(T, x_{A_1}, w_{A_1})\}. \tag{10}$$

Если $\mathcal{C} \subset \Omega$, то мы получаем невозможное неравенство $|\mathcal{B}_{A_1}| > |\mathcal{B}_{A_0}|$.

Если же $\mathcal{C} \not\subset \Omega$, то по (6) и (9) взвешенный средний эксцесс коалиций из набора $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_{A_0}$ оказывается меньше, чем e_2.

Следовательно, по (8)

$$e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) < e_2 \text{ для любой коалиции } S \in 2^N \setminus \mathcal{B}_{A_0}. \tag{11}$$

Теперь сравним эксцессы $e(S, x_{A_1}, w_{A_1})$ и $e(S, x_{A_0}, w_{A_1})$ для $S \in \Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0}$.

Для таких коалиций справедливы неравенства

$$\begin{aligned} e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) &< e_2 \quad \text{по } (11), \\ e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) &\geq e_2 \quad \text{по } (9), \end{aligned}$$

которые, вместе с равенствами (8), противоречат сбалансированности набора Ω. Это противоречие не имеет места только если набор $\Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0} = \emptyset$, что означает справедливость неравенств

$$e(S, x_{A_0}, w_{A_0}) \geq e(T, x_{A_0}, w_{A_0}) \text{ для всех } S \in \Omega, T \notin \Omega,$$

откуда по Утверждению 1 мы получаем $x_{A_0} \in PN(N, v, \Omega)$. □

Следовательно, при исследования пред n-ядер мы можем рассматривать только класса $\mathcal{G}^r_b \subset \mathcal{G}^r$ игр с ограниченной кооперацией, для которых наборы допустимых коалиций Ω сбалансированы.

Приведем теперь условие на набор Ω, обеспечивающее одноточечность пред n-ядра. Этот случай представляет несомненный интерес, так как пред n-ядро для классических кооперативных игр зависит не более чем от $2n-2$ значений характеристической функции. Остальные значения оказываются несущественными, так как соответствующие им эксцессы меньше эксцессов, определяющих одноточечное пред n-ядро. Следовательно, классическое пред n-ядро можно рассматривать как одноточечное пред n-ядро некоторой игры с ограничениями. Таким образом, пред n-ядро игр с ограниченной кооперацией оказывается более общим решением, чем оно же для классических кооперативных игр.

Приведем необходимые и достаточные условия одноточечности пред n-ядра для игр с ограниченной коопераицей.

Для этого сначала приведем некоторые обозначения. Для конечного множества N и его подмножества $S \subset N$, через χ_S обозначим характеристический вектор коалиции S: $\chi_i(S) = 1$, если $i \in S$ и $\chi_i(S) = 0$ в остальных случаях. Для произвольного набора коалиций $\mathcal{S}$ рассмотрим матрицу $||\mathcal{S}|| = ||\chi_S||, S \in \mathcal{S}$ размера $|\mathcal{S}| \times |N|$ Тогда будем говорить, что набор $\mathcal{S}$ имеет *ранг* m, если ранг матрицы $||\mathcal{S}||$ равен m.

Теорема 3 *Для того чтобы пред n-ядро $PN(N, v, \Omega)$ игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_b^r$ с ограниченной кооперацией было одноточечным, необходимо и достаточно, чтобы набор Ω был сбалансирован и имел ранг $n = |N|$.*

Доказательство. . *Необходимость.* Пусть $x = PN(N, v, \Omega)$. Предположим, что ранг набора Ω меньше n. Тогда система линейных уравнений с неизвестными y

$$\begin{cases} y(S) &= x(S), \quad S \in \Omega, \\ y(N) &= v(N) \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений, и все они должны принадлежать пред n-ядру $PN(N, v, \Omega)$, что противоречит его одноточечности.

Достаточность. Пусть набор Ω сбалансирован и имеет ранг n. Тогда пред -ялро $PN(N, v, \Omega) \neq \emptyset$ по Теореме 2. Предположим, что найдутся 2 вектора $x \neq y$, принадлежащих пред n-ядру: $x, y \in PN(N, v, \Omega)$. Легко видеть, что из $e(x) \neq e(y)$ следует

$$\begin{cases} \theta(x) &\geq_{lex} \theta(\frac{x+y}{2}), \\ \theta(y) &\geq_{lex} \theta(\frac{x+y}{2}), \end{cases}$$

и x и y не принадлежат пред n-ядру. Следовательно, $x(S) = y(S)$ для любой коалиции $S \in \Omega$, и y является решением следующей системы с неизвестными $z \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} z(S) &= x(S) \quad \text{для всех } S \in \Omega, \\ z(N) &= v(N). \end{cases}$$

Так как набор Ω имеет ранг n, эта система имеет единственное решение $z = x$. Следовательно, $y = x$, и пред n-ядро $PN(N, v, \Omega)$ одноточечно. $\square$

Следствие 1 *Если набор коалиций Ω множества $N, |N| = n$ сбалансирован и имеет ранг n, то для любого набора $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \cap \Omega = \emptyset$ их объединение $\Omega \cup \mathcal{T}$ также сбалансировано и имеет ранг n .*

Доказательство. . Сбалансированность набора $\Omega \cup \mathcal{T}$ следует из леммы 6.1.2 работы [6], а ранг набора не убывает с его увеличением. $\square$

Приведем пример, иллюстрирующий теоремы 2 и 3.

Пример 1 Рассмотрим следующую игру (N, v, Ω): $N = \{1,2,3,4\}, \Omega = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},N\}$,

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \in \Omega \setminus \{N\}, \\ 2, & \text{если } S = N. \end{cases}$$

Набор Ω сбалансирован и имеет ранг 3. Пред n-ядро $PN(N, v, \Omega) = \{x \in X^*(N, v) \,|\, x_i + x_{i+1} = 1, i = 1,2,3,4\}$ (здесь $x_5 = x_1$). Добавим к набору Ω коалицию $A_1 = \{1\}$, и пусть $v(\{1\}) = 1$. Тогда набор $\Omega \cup \{A_1\}$ не сбалансирован и пред n-ядро пусто, так как второй по величине эксцесс в игре $(N, v, \Omega \cup \{A_1\})$ не достигается при $x_1 \to \infty$.

Если же мы добавим еще одну коалицию $A_2 = \{2\}$ к набору Ω, то набор $\Omega \cup \{A_1\} \cup \{A_2\}$ станет сбалансированным с рангом 4. Положим $v(\{2\}) = 1$. Тогда пред n-ядро $PN(N, v, \Omega \cup \{A_1\} \cup \{A_2\})$ одноточечно:

$$PN(N, v, \Omega \cup \{A_1\} \cup \{A_2\}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

4 Свойства пред n -ядра для игр с ограниченной кооперацией

Приведем в этом параграфе основные свойства пред n-ядра для игр с ограниченной кооперацией и сравним их с аналогичными свойствами классического пред n-ядра.

Определение 4 Решение σ для произвольного класса $\mathcal{C}^r$ игр с ограниченной кооперацией *эффективно,*если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и любого вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Определение 5 Решение σ для произвольного класса $\mathcal{C}^r$ игр с ограниченной кооперацией *ковариантно относительно стратегических преобразований,*если для любой игры (N, b, Ω) и любых чисел$\alpha > 0$ и векторов $\beta \in \mathbb{R}^N$ игра $(N, \alpha v + \beta, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и

$$\sigma(N, \alpha v + \beta) = \alpha \sigma(N, v) + \beta,$$

где для каждой коалиции $S \in \Omega$ $(\alpha v + \beta)(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$.

Определение 6 Решение σ для произвольного класса $\mathcal{C}^r$ игр с ограниченной кооперацией *анонимно,*если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и отображения $\pi : N \to \mathcal{U}$, такого что $(\pi N, \pi v, \pi \Omega) \in \mathcal{C}^r$, справедливо равенство $\sigma(\pi N, \pi v, \pi \Omega) = \pi(\sigma(N, v, \Omega))$. Здесь функция πv определяется равенствами $\pi v(\pi S) = v(S)$ для всех $S \subset N$ и $\pi \Omega = \{S \subset \pi N \,|\, \pi^{-1} S \in \Omega\}$.

Для игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r$, игроки $i, j \in N$ называются *взаимнозаменяемыми*, если

$$S \cup \{i\} \in \Omega \iff S \cup \{j\} \in \Omega$$

для всех $S \subset N$, и $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ для $S \cup \{i\}, S \cup \{j\} \in \Omega$.

Определение 7 Решение σ для класса $\mathcal{C}^r$ удовлетворяет свойству *равной взаимозаменяемости* [1], если для любых игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ справедливо равенство $x_i = x_j$, для взаимозаменяемых игроков i, j.

Игрок $i \in N$ в игре (N, v, Ω) называется *болваном,* если для любой коалиции $S \subset \Omega$, такой что $S \cup \{i\} \in \Omega$ $x_i = v(\{i\})$ для любого вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$.

Определение 8 Решение σ для класса $\mathcal{C}^r$ удовлетворяет *свойству болвана,* если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ $x_i = v(\{i\})$ для любого болвана $i \in N$ игры (N, v, Ω).

Определение 9 Решение σ для класса $\mathcal{C}^r$ is *согласовано в определении Дэвиса–Машлера*[2], если для любых игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и коалиции $S \subset N$ из $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ следует, что редуцированная игра $(S, v_S^x, \Omega_S) \in \mathcal{C}^r$ и $x_S \in \sigma(S, v_S^x, \Omega_S)$, где $\Omega_S = \{T \subset S \mid \exists Q \subset N \setminus S, S \cup Q \in \Omega\}$,

$$v_S^x(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S), & \text{если } T = S, \\ \max_{\substack{Q \in N \setminus S \\ N \cup Q \in \Omega}} v(T \cup Q) - x(Q), & \text{если } T \subsetneqq S. \end{cases} \tag{12}$$

Из данного определения следует, что согласованность в смысле Дэвиса–Машлера корректно определена для решений игр с ограниченной кооперацией. Действительно, для игры с ограниченной кооперацией (N, v, Ω) набор $\Omega_{N \setminus \{i\}}$ допустимых коалиций для редуцированной игры на множество игроков $N \setminus \{i\}$ состоит из коалиций $S \subset N \setminus \{i\}$, для которых либо $S \in \Omega$, либо $S \cup \{i\} \in \Omega$, или же $S, S \cup \{i\} \in \Omega$. В любом случае Определение 9 дает соответствующее значение характеристической функции редуцированной игры.

Утверждение 2 *Пред n-ядро для класса $\mathcal{G}_b^r$ эффективно, анонимно, ковариантно и согласовано в смысле Дэвиса–Машлера.*

Доказательство. . Свойства эффективности, анонимности, ковариантности и болвана очевидны, они следуют из определения пред n -ядра для игр с ограниченной кооперации и наличия этих же свойств у классического пред n-ядра.

Проверим согласованность пред n-ядра.

Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_b^r$ – произвольная игра с ограниченной кооперацией, $x \in PN(N, v, \Omega)$. Тогда по Теореме 2 набор $\mathcal{B}_\alpha(x, v, \Omega)$ является пустым или согласованным для всех α. Для произвольной коалиции $S \subset N$ набор Ω_S также сбалансирован, и редуцированная игра (S, v_S^x, Ω_S) на множество игроковt S относительно вектора x принадлежит классу $\mathcal{G}_b^r$. Кроме того, из сбалансированность наборов $\mathcal{B}_\alpha(x, v, \Omega)$ на множестве N следует сбалансированность набора $\mathcal{B}_\alpha(x_S, v_S^x, \Omega_S)$ на S. По Теореме 2 мы получаем $x_S \in PN(S, v_S^x, \Omega_S)$. □

[1] иногда это свойство – equal treatment property (ETP) – называют симметрией, однако последнее свойство означает свойство означает ковариантность решения относительно всех симметричных преобразований игры [6]

[2] Это определение согласованности для игр с оганиченной кооперацией было предложено Ллерена [?] для характеризации с-ядра.

5 Пред n-ядро в играх с коалиционной структурой

Простейшей моделью ограниченной кооперацией является та, в которой каждый игрок может участвовать только в одной коалиции. Тогда набор допустимых коалиций образует разбиение множества игроков. Соответствующие таким наборам игры называются *кооперативными играми с коалиционными структурами (играми с КС)*.

Впервые такие игры были рассмотрены Ауманом и Дрезом [2], и далее Оуэном [5],.... Каждая такая игра задается набором $(N, v, \mathcal{B})$, где N – множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция, $\mathcal{B} = (B_1, ..., B_k)$ – разбиение множества игроков N.

Заметим, что в этом определении характеристические функции определялись так же, как и для классических кооперативных играх, на множестве всех коалиций. Поэтому решения для игр с с КС определялись так же, как и для классических кооперативных игр , но с учетом разбиения игроков как первого уровня кооперации. Наиболее известным значением для игр с КС является значение Оуэна [5] , которое является обобщением значения Шепли для рассматриваемого класса игр.

Для каждой игры $(N, v, \mathcal{B})$ с КС значение Оуэна предписывает каждому игроку его средний маргинальный вклад по всем равновероятным перестановкам множества игроков, не дробящим коалиции разбиения. Из такого описания выигрышей игроков в значении Оуэна ясно, что они зависят только от значений характеристической функции $v(S)$ для коалиций S вида

$$S = \bigcup_{\substack{j \in J \\ J \subset \{1,...,k\}}} B_j \cup T, \text{ где } T \subset B_i, i \notin J. \tag{13}$$

Поэтому значение Оуэна можно рассматривать как решение для класса игр с ограниченной кооперацией, в которых наборы допустимых коалиций $\Omega = \Omega(\mathcal{B})$ порождаются разбиениями : $S \in \Omega \ \leftrightarrow \ S$ удовлетворяет (13).

Другой модификацией значения Шепли для игр с КС является значение Камийо [3], определяемое для каждой игр с КС $(N, v, \mathcal{B})$ в два этапа. На первом шаге определяется значение Шепли *внешней* игры $(\mathcal{B}, v)$, игроками которой являются коалиции разбиения, а характеристическая функция порождается характеристической функцией исходной игры.

На втором шаге находятся значения Шепли *внутренних игр,* т.е. под-игр $(B_j, v), j = 1, ..., k$, в которых значения больших коалиций $v(B_j)$ заменяются соответствующими значениями Шепли игроков B_j, найденными на первом шаге. Так как каждый игрок исходной игры принадлежит ровно одной коалиции разбиения, набор значений всех внутренних игр определяет вектор выигрышей всех игроков, который и называется значением Камийо.

Заметим, что значение Камийо зависит от еще меньшего, чем значение Оуэна, числа значений $v(S)$ характеристической функции v, а именно, от

$$S \subset B_i, i = 1, ..., k \text{ или } S = \bigcup_{j \in J \subset \{1,...,k\}} B_j. \tag{14}$$

Значение Шепли в решениях Оуэна и Камийо можно заменить любым другим значением для классических кооперативных игр. Для каждого из них приведенные выше определения дадут новые значения для игр с КС. Для этого, как было указано выше, не нужно задавать значения характеристической функции на всех коалициях, достаточно задать их на наборах $\Omega \subset 2^N$ допустимых коалиций, определяемых соответственно, в (13),(14).

В этом параграфе мы рассмотрим соответствующие значениям Оуэна и Камийо значения для игр с КС, в определениях которых вместо значения Шепли используется пред n-ядро. Эти значения сравниваются с пред n-ядром для игр с ограниченной кооперацией, определенным в предыдущем параграфе.

5.1 Пред n-ядро типа Оуэна для игр с коалиционными структурами

Пусть $(N, v, \mathcal{B})$ – произвольная игра с КС. Как уже указывалось в преамбуле данного параграфа, известные обобщения значения Шепли на игры с КС зависят не от всех значений характеристической функции v, но от значений некоторых коалиций, порожденных КС $\mathcal{B}$.

Коалиционная структура $\mathcal{B}$ может порождать различные наборы допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$, поэтому обозначение такой игры посредством тройки $(N, v, \mathcal{B})$ не определяет игру однозначно. Поэтому в данном парагафе под *игрой с коалиционной структурой* мы будем понимать тройку $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где $\Omega(\mathcal{B})$ – некоторый набор коалиций, порожденный разбиением $\mathcal{B}$, т.е. такой, что все коалиции разбиения и их объединения принадлежат этому набору, $v : \Omega(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция. Будем также предполагать, что все подкоалиции коалиций разбиения $B_1, ..., B_k$ также принадлежат набору $\Omega(\mathcal{B})$.

Внешней игрой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ называется игра $(\mathcal{B}, v^*)$, в которой игроками являются коалиции разбиения $\mathcal{B}$, а характеристическая функция определяется следующим образом:

$$v(\mathcal{B}') = v\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\right)$$

где $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

Внешние игры определяются одинаково для всех игр с КС, так как они зависят только от коалиций вида $\bigcup_{j \in J} B_j, J \subset \{1, ..., k\}$, которые по определению являются допустимыми для любой игры с КС.

Далее в этом пункте мы будем рассматривать наборы допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$, определяемых равенством

$$\Omega(\mathcal{B}) = \{S \subset B_j, j = 1, ..., k, \text{ и } \bigcup_{j \in J} B_j \cup S, J \subset \{1, ..., k\},\ S \subset B_i, i \notin J\}. \qquad (15)$$

Построим *внутренние игры* (B_i, v_i^{PN}), $i = 1...k$ для игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ следующим образом.

Для нахождения характеристической функции v_i^{PN} для каждой коалиции $S \subset B_i$ рассмотрим множество игроков $N_S = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} B_j \cup S$ и игру с КС $(N_S, v, \Omega(\mathcal{B}^S))$ для разбиения $\mathcal{B}^S = (B_1, ..., B_{i-1}, S, B_{i+1}, ..., B_k)$, отличающегося от $\mathcal{B}$ заменой B_i на S. Характеристическая функция этой игры порождается характеристической функцией исходной игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, поэтому для простоты мы обозначаем ее также буквой v.

Положим $v_i^{PN}(S) = PN_i(\mathcal{B}^S, v^*)$, где $(\mathcal{B}^S, v^*)$ внешняя игра игры $(N_S, v, \mathcal{B}^S)$. Так как $i = 1, ..., k$ и $S \subset B_i$ были выбраны произвольно, все внутренние игры определены.

Пусть $x_{B_i} = PN(B_i, v_i^{PN})$. Тогда вектор $(x_{B_1}, ..., x_{B_k}) \in X^*(N, v)$. Назовем его *пред n-ядром типа Оуэна* или *коалиционным пред n-ядром* игры с КС $(N, v, \mathcal{B})$:

$$PN^{Ow}(N, v, \mathcal{B}) = (PN(B_1, v_1^{PN}), ..., PN(B_k, v_k^{PN})).$$

Далее при исследовании свойств коалиционного пред n-ядра для простоты будем обозначать внутренние игры через (B_i, v^i).

Приведем определения некоторых свойств одноточечных решений (значений) для игр с КС. Через $\mathcal{C}^{cs}$ обозначим произвольный класс игр с КС.

Определение 10 Значение φ для класса $\mathcal{C}^{cs}$ называется *внешне симметричным,* если для любой игры $(N, v, \mathcal{B}) \in \mathcal{C}^{cs}$, такой что в ее внешней игре $(\mathcal{B}, v^*)$ игроки B_j и B_l $j, l = 1, ..., k$ взаимозаменяемы, то $\sum_{i \in B_j} \varphi_i(N, v, \mathcal{B}) = \sum_{i \in B_l} \varphi_i(N, v, \mathcal{B})$.

Определение 11 Значение φ для класса $\mathcal{C}^{cs}$ называется *внутренне симметричным,* если для любой игры $(N, v, \mathcal{B}) \in \mathcal{C}^{cs}$, в которой игроки $i, j \in B_l$ взаимозаменяемы во внутренней игре (B_l, v) выполняется равенство $\varphi_i(N, v, \mathcal{B}) = \varphi_j(N, v, \mathcal{B})$.

Свойства 10 и 11 были предложены Оуэном [5] для характеризации его значения. В следующей лемме приводятся свойства коалиционного пред n-ядра .

Лемма 2 *Коалиционное пред n-ядро обладает свойствами эффективности, ковариантности, внешней и внутренней симметрии.*

Доказательство повторяет доказательства установления этих же свойств для значения Оуэна с учетом эффективности, ковариантности и свойства равнозаменяеости игроков пред n-ядра кооперативных игр.

Коалиционное пред n-ядро не является согласованным в определении согласованности (12). (пример!)

Оно обладает только модифицированным свойством согласованности, когда покидать игру разрешается только целиком коалициям разбиения, если разбиение состоит более чем из одной коалиции.

Приведем соответствующие определения . Рассмотрим игру с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1..k}$. *Коалиционно-редуцированной игрой* игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, на множество $N \setminus B_i$ относительно вектора $x \in X^*(N, v)$ называется игра с КС $(N \setminus B_i, v_i^x, \Omega(\mathcal{B} \setminus \{B_i\}))$, в которой разбиение $\mathcal{B} \setminus \{B_i\} = \{B_j\}_{\substack{j=1,\ldots,k \\ j \neq i}}$, а характеристическая функция v_i^x определяется следующими равенствами:

$$v_i^x(S) = \begin{cases} v(N) - x(B_i) & \text{если } S = N \setminus B_i, \\ \max\{v(S), v(S \cup \{B_i\}) - x(B_i)\} & \text{для остальных } S \in \Omega. \end{cases} \tag{16}$$

Отличие редуцированных игр в определении (16) от соответствующего определения в (12) состоит только в определении значений $v^x(\bigcup_{j \in J} B_j)$, так как коалиции $\bigcup_{j \in J} B_j \cup Q$, $Q \subset B_i$ являются допустимыми.

Соответственно, определение свойства согласованности значений для игр с КС для редуцированных игр (16) формулируется следующим образом:

Определение 12 Значение φ *коалиционно согласовано* в классе $\mathcal{C}^{cs}$, если для каждой игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{C}^{cs}$ и коалиции $B \in \mathcal{B}$ выполняется равенство

$$\varphi(N \setminus B, v_x^{N \setminus B}, \Omega(\mathcal{B} \setminus \{B\})) = \varphi_{N \setminus B}(N, v, \Omega(\mathcal{B})), \quad \text{где } x = \varphi(N, v, \mathcal{B}).$$

Лемма 3 *Коалиционное пред n-ядро коалиционно согласовано.*

Доказательство. Пусть $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{C}^{cs}$ – произвольная игра с КС, $x = PN^{Ow}(N, v, \Omega((\mathcal{B}))$. Достаточно показать, что при уходе коалиции разбиения $B_i \in \mathcal{B}$ все оставшиеся внутренние игры не изменяются. Рассмотрим редуцированную игру $(N \setminus B_i, v_x^{N\setminus B_i}, \Omega(\mathcal{B} \setminus \{B_i\})$. Пусть $(B_j, \tilde{v}_x^j)$ – внутренняя игра редуцированной игры с КС $(N \setminus B_i, v_x^{N\setminus B_i}, \Omega(\mathcal{B} \setminus B_i))$ после ухода коалиции B_i относительно вектора x.

Докажем, что эта внутренняя игра совпадает с внутренней игрой (B_j, v_j^x) исходной игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

Рассмотрим значение $\tilde{v}_j^x(S)$ для коалиции $S \subset B_j$. Это значение равно выигрышу "игрока"S в пред n-ядре игры с КС $(N \setminus (B_j \setminus S), v, \Omega(\mathcal{B}_\rangle^S))$, где $\mathcal{B}_i^S = \{\{B_l\}_{l\neq i,j}, S\}$. По определению коалиционной редуцированной игры для каждой коалиции $T \in \Omega|_{N\setminus B_i}$

$$v_{N\setminus\{B_i\}}^x(T) = \max\{v(T), v(T \cup B_i) - x(B_i)\}$$

Следовательно, внешняя игра $(N \setminus B_i, v_{N\setminus\{B_i\}}^x)$ совпадает с обычной редуцированной игрой в определении Дэвиса–Машлера внешней игры $(\mathcal{B}_i^S, v)$ относительно пред n-ядра (так как по определению коалиционного пред -ядра $x(B_i)$ равно значению "игрока"B_i в коалиционном пред n-ядре этой внешней игры.).

Итак, мы можем заключить, что коалиционные пред n-ядра в играх $(\mathcal{B}_i^S, v_{N\setminus B_i}^x)$ и $(\mathcal{B}^S, v)$ совпадают, и значение характеристической функции $\tilde{v}_x^j(S)$ внутренней игры $(B_j, \tilde{v}_x^j)$ равно соответствующему значению $v_j^x(S)$ внутренней игры (B_j, v_j^x). □

С помощью свойства коалиционной согласованности можно построить аксиоматическую характеризацию коалиционного пред n-ядра.

Теорема 4 *Коалиционное пред n-ядро является единственным значением на классе $\mathcal{G}^{cs}$ всех игр с КС с бесконечным универсальным множеством игроков и множествами допустимых коалиций, определяемыми равенствами (15), обладающим свойствами ковариантности, внешней симметрией, внутренней симметрией, коалиционной согласованностью и согласованностью в смысле Дэвиса–Машлера в случае, если КС состоит из одной коалиции.*

Доказательство. Уже было показано, что коалиционное пред n-ядро обладает первыми тремя свойствами. Кроме того, в случае, когда КС состоит из единственной коалиции, оно совпадает с пред n-ядром, и свойство равной взаимозаменяемости и согласованности последнего вместе эквивалентно внутренней симметрии коалиционного пред n-ядра. Так как суммарные коалиционные значения коалиционного пред n-ядра равны соответствующим значениям игроков-коалиций для пред n-ядра внешней игры, из согласованности пред n-ядра следует коалиционная согласованность коалициолнного пред n-ядра.

Пусть φ – произвольное значение, удовлетворяющее всем свойствами, указанными в теореме. Сначала отметим, что для каждой игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ для внешней игры $(\mathcal{B}, v)$ $\varphi(\mathcal{B}, v) = \{\varphi(B_1, v), ..., \varphi_k(B, v)\}$, и $\varphi(\mathcal{B}, v) = PN(\mathcal{B}, v)$. Из коалицонной согласованности решения φ следует согласованность внешних игр как классических ТП игр, а из внешней симметрии – свойство равной взаимозаменяемости (ETP). Следовательно, теореме Оршана [?] φ совпадает с пред n-ядром на классе классических кооперативных игр с бесконечным универсальным множеством игроков, и из этого факта следует, что значения $\varphi(B_i)$ известны для всех $i =$

$1, ..., k$. Из коалиционной согласованности решения φ следует, что коалиционные редуцированные игры (B_i, v_i^{φ}) на любую коалицию разбиения относительно вектора $\varphi(N, v, \mathcal{B})$ полностью определяются значениями $\varphi(B_j), j \neq i$. Так как уже доказано, что $\varphi(B_i, v_i^{\varphi}) = PN(B_i, v_i^{\varphi})$, мы доказали единственность значения φ. $\square$

5.2 Пред n-ядро типа Камийо для игр с коалиционной структурой

Рассмотрим класс $\mathcal{K}^{cs}$ всех игр с КС , в которых набор допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$ для игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{K}^{cs}$ состоит из всех коалиций разбиения $\mathcal{B} = (B_1, ..., B_k)$ и коалиций, содержащихся в одной из коалиций разбиения:

$$\Omega = \{B_1, ..., B_k; \bigcup_{j \in J \subset \{1,...,k\}} B_j \text{ для всех } J \subset \{1, ..., k\}; \, S \subset B_i, \, \forall\, i = 1, ..., k\}. \qquad (17)$$

Определим значение для данного класса $\mathcal{K}^{cs}$ аналогично значению Камийо [3], являющегося двухшаговой модификацией значения Шепли для указанного класса игр с КС. Сначала для игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ определяется внешняя ТП игра $(\mathcal{B}, v^*)$ так же, как и в предыдущем пункте, т.е. с множеством игроков, равным множеству коалиций разбиения и с характеристической функцией, определяемой равенствами

$$v^*(S) = v(\bigcup_{j \in J} B_j) \text{ для } S = \bigcup_{j \in J} B_j.$$

Пусть $x = PN(\mathcal{B}, v^*)$ – пред n-ядро внешней игры. Тогда $x \in \mathbb{R}^k, x(\bigcup_{j=1}^k B_j) = v(N)$.

Для каждого $j \in \{1, , ., k\}$ *внутренняя* ТП игра (B_j, v_j) определяется как под-игра исходной игры с КС, но с заменой значения $v(B_j)$ большой коалиции B_j на значение $x(B_j)$, найденное на предыдущем шаге:

$$v_j(S) = \begin{cases} x_j = x_{B_j}, & \text{если } S = B_j, \\ v(S) & \text{для остальных коалиций.} \end{cases}$$

Пусть $\xi^j = PN(B_j, v_j)$. Тогда по определению внутренней игры $\xi^j(B_j) = x_j$. Положим $PN^K(N, v, \Omega) = (\xi^1, ..., \xi^j)$ и назовем PN^K *пред n-ядром типа Камийо* для игр с КС.

Аналогично доказательствам приведенных в работе Камийо [3] свойств для модификации значения Шепли для игр с КС легко показать, что пред n-ядро типа Камийо для игр с КС эффективно, ковариантно, внешне и внутренне симметрично.

Заметим, что коалиционно редуцированные игры относительно вектора x для игр с КС, порождающих набор допустимых коалиций (17), когда игру покидает коалиция разбиения, определяются для коалиций $S \in \Omega|_{N \setminus B_i}$ следующими равенствами:

$$v^x(S) = \begin{cases} v(N) - x(B_i), & \text{если } S = N \setminus B_i, \\ \max\{v(S), v(S \cup B_i) - x(B_i)\}, & \text{если } S = \bigcup\limits_{\substack{j \in J \\ j \neq j(i)}} B_j, J \subset \{1, ..., k\}, i \notin J, \\ v(S), & \text{если } S \subsetneqq B_j, j \neq i. \end{cases} \qquad (18)$$

Равенства (18) совпадают с определением редуцированных игр (12) для обычного определения согласованности по Дэвису–Машлеру для случая, когда набор допустимых коалиций Ω определяется равенством (17), и игру покидает коалиция разбиения.

Утверждение 3 *Пред n-ядро типа Камийо коалиционно согласовано.*

Доказательство. . Пусть $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{K}^{cs}$ – произвольная игра с КС, $(B_1, ..., B_k)$ – разбиение, определяющее набор допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$ (17), $\xi = (\xi_l^j) = PN^K(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, $x_j = \sum_{l=1}^{|B_j|} \xi_l^j$.

Рассмотрим (коалиционно) редуцированную игру $(N \setminus B_i, v^{\xi}_{N\setminus B_i}, (\Omega(\mathcal{B}))|_{N\setminus B_i})$ на множество игроков $N \setminus B_i$ относительно ξ.

Набор $(\Omega(\mathcal{B}))|_{N\setminus B_i}$ допустимых коалиций в редуцированной игре порождается разбиением $\mathcal{B}^i = (B_1, ..., B_{j-1}, B_{j+1}, .., B_k)$, и внешняя игра редуцированной игры $(N \setminus B_i, v^{\xi}_{N\setminus B_i}, (\Omega(calB))|_{N\setminus B_i})$ совпадает с соответствующей редуцированной игрой внешней игры $(\mathcal{B}, v^*)$.

Следовательно, по согласованности пред n-ядра для ТП игр, мы получаем равенства

$$x_j = \sum_{i=1}^{|B_j|} PN^K(N \setminus \{i\}, v^{\xi}_{N\setminus\{i\}}, \Omega|_{N\setminus\{i\}}), \;\; j = 1, ..., k, \, j \neq j_i. \tag{19}$$

Внутренние игры исходной игры и редуцированных игр для $j = 1, ...k$, $j \neq i$ ввиду (18) и (19)также совпадают , следовательно, $\xi^i = PN^K(N \setminus B_i, v^x, \Omega|_{N\setminus B_i})$. □

Теорема 5 *Для бесконечного универсального множества игроков $\mathcal{N}$ единственным эффективным решением для класса игр $\mathcal{K}^{cs}$, удовлетворяющим внешней и внутренней симметрией, ковариантности, коалиционной согласованности и согласованности для коалиционных структур, состоящих из одной коалиции, является пред k-ядро типа Камийо.*

Доказательство. Ввиду Утверждения 3 достаточно только доказать единственность. Пусть σ произвольное значение для класса $\mathcal{G}^{cs}$, удовлетворяющее аксиомам, указанным в теореме. Рассмотрим произвольную игру $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^{cs}$, где $\mathcal{B} = (B_1, ..., B_k)$ – разбиение, определяющее набор допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$, и пусть $\xi \in \sigma(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.. Обозначим $x(\xi) = (\xi(B_1), ..., x(B_k))$. Рассмотрим внешнюю игру $(\mathcal{B}, v^*)$. Определим решение F для нее равенством $F(\mathcal{B}, v^*) = \bigcup_{\xi\in\sigma(N,vc,\Omega(B)} x(\xi)$. Так как k может быть произвольным числом, а внешней игрой может оказаться произвольная ТП игра, решение F определено для всех ТП игр. По свойству коалиционной согласованности значения σ, решение F согласовано. Очевидно, оно удовлетворяет аксиомам ковариантности и равнозаменяемости. Так как решение σ по предположению максимально по включению на множестве игр с коалиционной структурой, решение F максимально по включению на множестве всех ТП игр. Следовательно, по теореме Пелега [**?**] F совпадает с пред k-ядром.

Рассмотрим коалиционно редуцированную игру (B_j, v^{ξ}) игры (N, v, Ω) на множество игроков B_j относительно вектора ξ. Эта игра является ТП игрой, и по коалиционной согласованности ξ, $\sigma(B_j, v^{\xi}) = \bigcup_{\xi\in\sigma(N,v,\Omega(\mathcal{B}))} \xi_{B_j}$. Последнее равенство определяет решение σ для всех ТП игр, которое по той же теореме Пелега с пред k-ядром. Следовательно, решение σ совпадает с пред k-ядром для игр, чья КС состоит из одной коалиции, и из совпадения значений F и σ для однокоалиционного разбиения с пред k-ядром мы получаем равенство

$$PK(\mathcal{B}, v^*) = \bigcup_{\xi_{B_j}\in PK(B_j, v^{\xi})} (\xi(B_1), ..., \xi(B_k)),$$

откуда и следует $\xi = PK^{cs}(N, v, \Omega\mathcal{B})$). $\square$

Список литературы

[1] Соболев А.И. (1975), Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх последтсвом функциональных уравнений // Мат. методы в социальных науках. Вып.:. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН Лит ССР. С.94-151.

[2] Aumann R.J., Drèze J.N.(1974) Cooperative Games with Coalition Structure // International Journal of Game Theory. **3**. P.217–237

[3] Kamijo Y.(2009) A two-step value for cooperative games with coalitional structures.// International Game Theory Review. **11**. P. 207-214

[4] Myerson, R. B.(1977) Graphs and cooperation in games. // Mathematics of Operations Research. **2**. P.225–229.

[5] Owen G. (1977), Values of games with a priori unions. // Essays in Mathematical Economics and Game Theory (eds. Henn R. and Moeschlin O.), Springer-Verlag. Berlin. P. 76–88.

[6] Peleg B., Sudhölter P. (2003) Introduction to the Theory of Cooperative Games.// Theory and Decision Library. Series C. Vol.34. Kluwer Ecademic Publishers. 380p.