Труды Карельского научного центра РАН
№ ... 2016. С. - **DOI: ....**

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ СОЧЕТАНИЙ С ЗАДАННЫМ МИНИМАЛЬНЫМ РАЗМАХОМ ВЫБОРКИ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Производится прямой перебор исходов схемы методом графов, находится их число, определяется вероятность появления ее исходов в общей схеме сочетаний, для исходов схемы решается задача нумерации и на ее основе предлагается алгоритм их быстрого моделирования.

Ключевые слова: схема сочетаний, минимальный размах выборки,задача нумерации, моделирование.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION SCHEME WITH THE GIVEN MINIMAL RANGLE OF THE SCHEME

The direct enumeration of the outcomes by the graph method is fulfilled and their number and the probability of outcomes of the scheme in the general combination scheme are find, the problem of enumeration of outcomes of the scheme is solved and on this base the algorithme of their quick modelling is suggested.

Key words: combinnation scheme, minimal rangle of sample, enumeration problem, modelling.

Введение

Схема сочетаний – одна из основных широко распространенных в теории и практике комбинаторных схем ([1] – [7]), возникает при выборе r элементов из n различимых элементов без возвращения и без учета их порядка или при размещении r неразличимых частиц по одной по n различимым ячейкам. Интерпретация размещения частиц по ячейкам схемы сочетаний используется в статистике Ферми-Дирака [6], а при неограниченном числе частиц в ячейке – в статистике Бозе-Эйнштейна и является в этом случае схемой сочетаний с повторением, т.е. схемой выбора с возвращением или размещения частиц по ячейкам без ограничения числа частиц в каждой из них.

Схема сочетаний участвует во многих важных распространенных математических формулах: биноме Ньютона, биномиальной схеме и биномиальном распределении вероятностей, в выражениях для чисел исходов многих комбинаторных схем и т.д.

Число исходов схемы сочетаний есть $C_n^r = n!/r!(n-r)!$. (В схеме сочетаний с повторениями число исходов – C_{n+r-1}^r).

Свойства сочетаний подробно рассмотрены, например, в [6].

Производящая функция последовательности чисел C_n^r и C_{n+r-1}^r приведены в [2] и [6]:

$$\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r = (1+x)^n;$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r x^r = (1-x)^{-n};$$

Моделирование исходов схемы сочетаний приведено в [7].

В [9] и [10] соответственно проведено исследования схемы сочетаний и схемы сочетаний с ограниченным размахом по указанным в аннотации направлениям методом графов на основе визуального перечисления всех их исходов с возможностями учета различных ограничений в них.

Однако, путь отбраковки исходов в более общей схеме (в данном случае схемы сочетаний) для перечисления исходов изучаемой схемы и ее дальнейшего анализа приводит к рассмотрению большого числа "лишних"исходов и годится для численного расчета по схеме, а для аналитического исследования схемы требуется выявление общих закономерностей в ней, которые лучше проявляются и легче улавливаются при построении процедуры прямого перечисления ее исходов, что и даст основу ее анализа.

1. Перечисление и число всех исходов схемы

Зададим параметры схемы: n – число различимых номерами от 1 до n элементов схемы; r – размер выборки; S – заданный минимальный размах выборки, где под размахом выборки (исхода схемы) будем понимать максимальную разность между номерами ее элементов, т.е. между ее крайними компонентами, т.к. номера элементов в исходах будем перечислять в возрастающем порядке.

Для перечисления исходов схемы будем перебирать все допустимые значения наименьшего номера m в исходе от 1 до $(n-S)$, который определит диапозон перебора значений максимального номера M в нем от $(m+S)$ до n, а остальные $(r-2)$ номеров элементов исхода будем выбирать по схеме сочетаний из значений от $(m+1)$ до $(M-1)$.

Граф перечисления исходов схемы в соответствии с процедурой их перебора будет состоять из объединения результатов трех этапов: перебора минимального номера m в исходе схемы, для каждого – перебор возможного максимального номера M от $(m+S)$ до n в нем и описанный выше выбор остальных $(r-2)$ номеров между числами m и M.

Число исходов первого этапа и пучков второго этапа равен $d = n - S$, при каждом фиксированном значении m размер пучка второго этапа равен $n-m-S+1$, т.к. множество значений M есть числа $(m+S, m+S+1, \ldots, n)$, а при каждом фиксированном значении M размер пучка третьего этапа равен C_{M-m-1}^{r-2}. Установление порядка при перечислении и граф перечисления равновероятных исходов схемы сочетания дан в [9]. Тогда из процедуры перебора следует формула для числа N исходов схемы

$$N = \sum_{m=1}^{d} \sum_{M=m+S}^{n} C_{M-m-1}^{r-2}. \tag{1}$$

Приведем граф перечисления исходов схемы:

Рис.1

Пример 1. Пусть $n = 7$, $r = 4$, $S = 4$. Отсюда по (1) при $d = 3$ имеем

$$N = \sum_{m=1}^{3} \sum_{M=m+4}^{7} C_{M-m-1}^{2} =$$
$$= (C_3^2 + C_4^2 + C_5^2) + (C_3^2 + C_4^2) + C_3^2 = 31. \tag{2}$$

Приведем граф перечисления всех исходов схемы и их число N по графу:

Рис.2

По графу Рис.2 и по (1) получаем $N = 31$.

2. Задача нумерации для исходов схемы

При решении задачи нумерации будем использовать соответствующие результаты для схемы сочетаний из [9], т.е., во избежании громоздкости выражений, не приводя явных формул соответствия номеров и видов исходов схемы сочетаний $C_a^b = c$, будем обозначать их как N_c и R_c для выбора из элементов с номерами от 1 до a с переобозначением на номера элементов от $m+1$ до $M-1$ и соответствующими значениями параметров $a = M - m - 1$ и $b = r - 2$.

Здесь будет существенно использована известная из п.1 пучковая структура графа перечисления исходов схемы на каждом его этапе. Введем удобные для дальнейшего рассмотрения обозначения и выпишем поэтапные пучковые структуры графов в фигурных скобках, перечисляя в них в круглых скобках через запятую поэтапные размеры пучков исходов:

1-ый этап – $\{(d)\}$ с множеством исходов $(1, 2, \ldots, d)$;

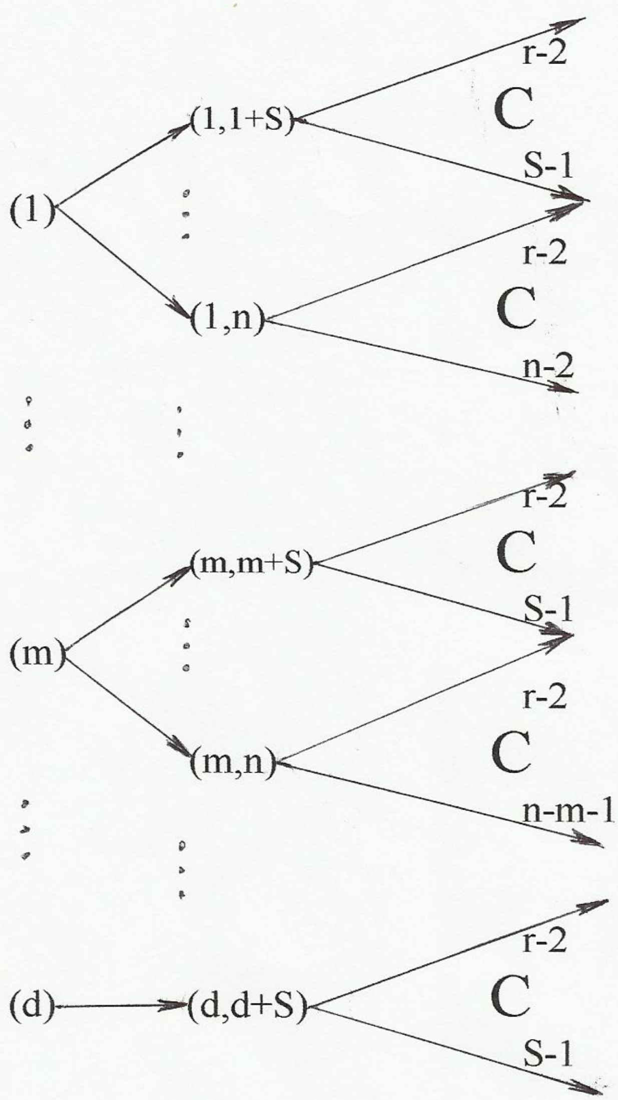

Рис.1. Граф перечисления исходов схемы.

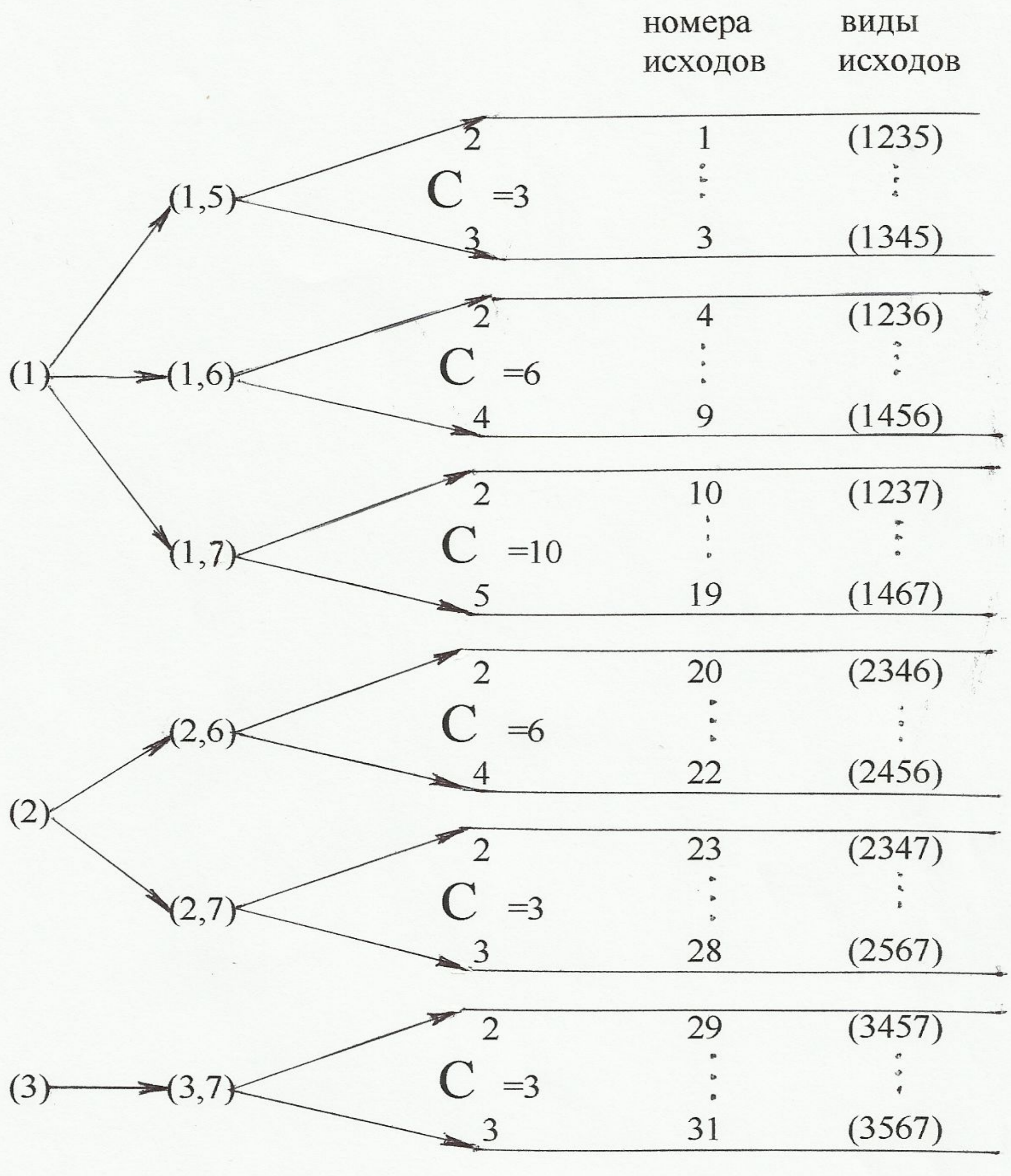

Рис.2. Граф перечисления исходов в примере 1.

2-ой этап – $\{(n-S),(n-S-1),\ldots,(1)\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_d\}$; $\sum_{i=1}^{d} A_i = D$;

3-ий этап – $\{(C_{S-1}^{r-2}),(C_S^{r-2}),\ldots,(C_{n-2}^{r-2}),(C_{S-1}^{r-2}),(C_S^{r-2}),\ldots,(C_{n-3}^{r-2}),\ldots,(C_{S-1}^{r-2})\} = \{B_1, B_2, \ldots, B_D\}$.

2.1. Прямая задача нумерации

Пусть известен номер $N^* = N_3^*$ исхода схемы по перечислению. Требуется определить его вид $R^* = (a_1^*, \ldots, a_r^*)$, где элементы выборки упорядочены по возрастанию номеров.

Обозначим через N_3^*, N_2^*, N_1^* – номера исходов этапов в траектории графа их перечисления, ведущая к итоговому исходу с данным видом R^*.

Шаги решения:

1) находим $N_2^* = min\ n_2 : (\sum_{i=1}^{n_2} B_i \geqslant N_3^*)$;

2) находим номер итогового исхода $p_3 = N_c$ в пучке 3-его этапа $p_3 = N_3^* - \sum_{i=1}^{N_2^*-1} B_i$;

3) из N_c по [9] находим $R_c = (a_2, \ldots, a_{r-1})$ в стандартной форме при нумерации элементов подряд, начиная с 1;

4) находим $N_1^* = a_1 = min\ n_1 : (\sum_{i=1}^{n_1} A_i \geqslant N_2^*)$;

5) находим номер p_2 предшествующего итоговому исходу в пучке 2-ого этапа $p_2 = N_2^* - \sum_{i=1}^{N_1^*-1} A_i$:

6) по a_1^* и p_2 находим $a_r^* = a_1^* + S + p_2 - 1$;

7) пересчитываем R_c к виду R_c^* с начальным элементом $a_2^* = a_1^* + 1$ по формуле $a_i^* = a_i + a_1^*,\ i = \overline{2, r-1}$;

8) получаем искомый вид $R^* = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_r^*)$.

Пример 2. Пусть $n = 7, r = 4, S = 4$ и дан номер исхода $N^* = N_3^* = 23$. Требуется найти его вид $R^* = R_3^* = (a_1^*, \ldots, a_r^*)$ по алгоритму. По Рис.2 $R^* = (2, 3, 4, 7)$.

Решение: 1) $N_2^* = min\ n_2 : (C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_3^2 + C_4^2 = B_1 + \ldots + B_5 = 28 > 23)$, откуда $n_2 = N_2^* = 5$; 2) $p_3 = 23 - (3 + 6 + 10 + 3) = 1 = N_c$; 3) из $N_c = 1$ следует по [9], что $R_c = (1, 2)$; 4) $N_1^* = min\ n_1 : (3 + 2 = A_1 + A_2 = 5 = N_2^*)$, откуда $N_1^* = 2$; 5) $p_2 = 5 - 3 = 2$, откуда $a_1^* = 2$; 6) $a_4^* = 2 + 4 + 2 - 1 = 7$; 7) из $R_c = (1, 2)$ получаем $R_c^* = (a_2^* = 1 + 2 = 3, a_3^* = 2 + 2 = 4)$; 8) $R^* = (a_1^*, R_c^*, a_r^*) = (2, 3, 4, 7)$, что совпадает с результатом по Рис.2.

2.2. Обратная задача нумерации

Пусть известен вид $R^* = (a_1^*, \ldots, a_r^*)$ исхода схемы по перечислению. Требуется определить его номер N^*.

Обозначим через N_3^*, N_2^*, N_1^* – номера исходов этапов в траектории графа их перечисления, ведущая к итоговому исходу с данным номером N^*.

Шаги решения:

1) из вида R^* получаем a_1^*, откуда $N_1^* = a_1^*$;

2) из вида R^* получаем a_r^*, откуда $N_2^* = \sum_{i=1}^{a_1^*-1} A_i + a_r^* - a_1^* - S + 1$;

3) из вида R^*, отбрасывая крайние компоненты, получаем R_c и приводим его к стандартному виду $R_c = (a_1, \ldots, a_{r-2})$ (с нумерацией элементов подряд, начиная с единицы) по формуле $a_i = a_i^* - a_1^*,\ i = \overline{2, r-1}$;

4) по [9] из R_c получаем номер N_c искомого исхода в пучке 3-его этапа;

5) искомый номер вычисляем по формуле $N^* = \sum_{i=1}^{N_2^*} B_i + N_c$.

Пример 3. пусть в условиях примера 2 задан вид исхода $R^* = (2, 3, 4, 7)$. Требуется найти его номер N^* по алгоритму. По Рис.2 $N^* = 23$.

Решение: 1) $a_1^* = 2 = N_1^*$; 2) $a_4^* = 7$, откуда $N_2^* = \sum_{i=1}^{2-1} A_i + 7 - 2 - 4 + 1 = 3 + 7 - 2 - 4 + 1 = 5$; 3) $R_c^* = (3, 4)$, откуда $R_c = (1, 2)$; 4) по [9] $N_c = 1$; 5) $N_3^* = N^* = \sum_{i=1}^{5-1} B_i + 1 = 3 + 6 + 10 + 3 + 1 = 23$, что совпадает с результатом по Рис.2.

3. Вероятность появления исходов схемы среди всех исходов схемы сочетаний

Из равновероятности всех исходов схемы сочетаний по [9] и из (1) следует ражение для определенной в заголовке вероятност

$$P = \sum_{m=1}^{d} \sum_{M=m+S}^{n} C_{M-m-1}^{r-2} / C_n^r.$$

4. Моделирование исходов схемы

Первый способ – отбраковкой лишних смоделированных по [9] исходов схемы сочетаний до получения нужного числа исходов;

Второй способ – быстрое моделирование каждого исхода по результату решения прямой задачи нумерации путем разыгрывания номера исхода по одному случайному числу.

Литература

1. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика, М., Наука, 1969.

2. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963.

3. *Рыбников К.А.* Введение в комбинаторный анализ, М., Изд. моск.ун-та, 1985.

4. *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы в дискретной математике., М., 1977.

5. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики., М., 1982.

6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения., М., Мир, 1970.

7. *Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р.* Стохастическое моделирование, М., МИЭМ, 2012.

8. *Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р.* Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики., Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, Вып.8, 2014 г., с.15-21.

9. *Энатская Н.Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний., Промышленные АСУ и контроллеры, № 8, 2015 г., с.33-38.

10. *Энатская Н.Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний с ограниченным размахом., Промышленные АСУ и контроллеры, №10, 2015 г., с.28-31.

Поступила в редакцию 05.04.2016

References

1. *Vilenkin N.Ya.* Combinatorics. M.: Nauka., 1969, 323 p.

2. *Riordan Dzh.* Introduction to Combinatorial Analisis. M.: Foreign Literature Publishing Hause., 1963, 288 p.

3. *Rybnikov K.A.* Introduction to Combinatorial Analisis. M.: Publishing house of the Moscow University Press., 1985, 308 p.

4. *Sachkov V.N.* Combinatorics in Discrete Mathematics. M.: Nauka., 1977,320 p.

5. *Sachkov V.N.* Introduction to Combinatorial Methods of Discrete Mathematics. M.: Nauka., 1982, 308 p.

6. *Feller V.* Introduction to probability theory and its applicatios. M.: World., 1970, 528 p.

7. *Enatskaya N.Yu., Khakimullin E.R.* Stochastic modelling. M.: MIEM., 2012, 118 p.

8. *Enatskaya N.Yu., Khakimullin E.R.* Method graphs for solving enumerative combinatorics. M.: Instruments and systems. Managment. monitoring, diagnostics., 2014, no 8, 15-21 p.

9. *Enatskaya N.Yu.* Combinatorial analisis of combinattion scheme. M.: Industrial ASU and kontrollers., 2015, no 8, 35-40 p.

10. *Enatskaya N.Yu.* Combinatorial analisis of combinattion scheme with a limited range. M.: Industrial ASU and kontrollers., 2015, no 10, 28-31 p.

Received April 05. 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
к. ф.-м. н., доцент Департамента прикладной математики
Национальный исследовательский университет, Высшая школа экономики, МИЭМ
Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: 8-903-741-13-45

CONTRIBUTOR:

Enatskaya Natalia
National Research University
Higher School of Economics,
(Moscow Institute of Electronics and Mathematics)
Tallinskaya, 34, Moscow, Russia, 123458
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: 8-903-741-13-45