

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Талецкий, Д. С. Малышев, О количестве максимальных независимых множеств в полных  $q$ -арных деревьях, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 4, 139–149

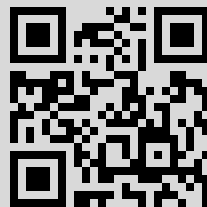
DOI: <http://dx.doi.org/10.4213/dm1398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 82.208.100.50

24 декабря 2016 г., 14:47:36



## О количестве максимальных независимых множеств в полных $q$ -арных деревьях

© 2016 г. Д. С. Талецкий\*, Д. С. Малышев\*\*

Исследуется асимптотическое поведение величины  $mi(T_{q,n})$  — количества максимальных независимых множеств в полном  $q$ -арном дереве высоты  $n$ . Доказано, что для некоторых констант  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое равенство  $mi(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$ . Доказано также, что для любого достаточно большого  $q$ , некоторых трёх попарно различных констант  $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$  и константы  $b_q$  при  $k \rightarrow \infty$  имеют место асимптотические соотношения:  $mi(T_{q,3k}) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}$ ,  $mi(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}$ ,  $mi(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}$ .

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 16-31-60008-мол\_a\_дк, и лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

**Ключевые слова:** максимальное независимое множество, полное  $q$ -арное дерево

## 1. Введение

*Независимым множеством* в графе называется произвольное множество его попарно не смежных вершин. Независимое множество графа называется *максимальным*, если оно максимально по включению. Для обозначения максимального независимого множества графа мы будем использовать сокращение «м.н.м.». Количество независимых множеств (соответственно, максимальных независимых множеств) графа  $G$  принято обозначать  $i(G)$  (соответственно,  $mi(G)$ ).

Исследованию асимптотики количества независимых множеств в графах из параметрически заданных классов (в зависимости от параметров класса) посвящено множество работ. Так, А.Д. Коршунов и А.А. Сапоженко получили асимптотику количества независимых множеств в  $n$ -мерном кубе [3]. Н. Калкин и Г. Вилф получили слабую асимптотику количества независимых множеств в плоской прямоугольной

\*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: dmitailmail@gmail.com

\*\*Место работы: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», e-mail: dsmaryshev@rambler.ru

решётке [4]. В.П. Воронин и Е.В. Демакова получили асимптотику количества независимых множеств в полных бинарных деревьях [1]. П. Киршенхофер, Х. Продингер и Р. Тишай рассматривали случай полных  $q$ -арных деревьев. Полное  $q$ -арное дерево высоты  $n$  мы обозначаем через  $T_{q,n}$ . П. Киршенхофер, Х. Продингер и Р. Тишай доказали в [5] существование таких констант  $\beta'_q, \alpha'_q, \alpha'_{q,1}, \alpha'_{q,2}$  ( $\alpha'_{q,1} \neq \alpha'_{q,2}$ ), что для любого  $q \in \{2, 3, 4\}$  при  $n \rightarrow \infty$  выполнена асимптотика  $i(T_{q,n}) \sim \alpha'_q \cdot (\beta'_q)^{q^n}$  и для любого  $q \geq 5$  при  $k \rightarrow \infty$  справедливы асимптотики  $i(T_{q,2k}) \sim \alpha'_{q,1} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k}}$  и  $i(T_{q,2k+1}) \sim \alpha'_{q,2} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k+1}}$ .

Целью настоящей работы является исследование поведения величины  $\text{mi}(T_{q,n})$  при  $n \rightarrow \infty$  в зависимости от  $q \geq 2$ . Основными её результатами являются следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Существуют такие константы  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ , что при  $n \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое равенство  $\text{mi}(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$ .*

**Теорема 2.** *Для любого достаточно большого  $q$  существуют такие три попарно различные константы  $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$  и константа  $b_q$ , что при  $k \rightarrow \infty$  имеют место асимптотические соотношения*

$$\text{mi}(T_{q,3k}) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, \quad \text{mi}(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}, \quad \text{mi}(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}.$$

## 2. Асимптотика количества м.н.м. в деревьях $T_{q,n}$

Доказательства теорем 1 и 2 составляют содержание этого раздела работы. Эти доказательства не разбиваются на леммы и теоремы, а представляются в форме подразделов, каждый из которых является отдельной смысловой частью общего рассуждения.

**2.1. Вывод рекуррентного соотношения для количества м.н.м. в деревьях  $T_{q,n}$ .** Введём переобозначение:  $\text{mi}(q, n) = \text{mi}(T_{q,n})$ . Количество м.н.м. дерева  $T_{q,n}$ , каждое из которых содержит его корень  $r$ , мы обозначим через  $\text{mi}_+(q, n)$ . Количество м.н.м. дерева  $T_{q,n}$ , каждое из которых не содержит вершину  $r$ , мы обозначим через  $\text{mi}_-(q, n)$ . Очевидно, что  $\text{mi}(q, n) = \text{mi}_+(q, n) + \text{mi}_-(q, n)$ .

Пусть  $MIS$  — некоторое м.н.м. дерева  $T_{q,n}$ . Удалив корень  $r$  дерева  $T_{q,n}$  и всех потомков  $r$ , мы получим множество из  $q^2$  его поддеревьев, каждое из которых изоморфно  $T_{q,n-2}$ . Поэтому, если  $r \in MIS$ , то множество  $MIS \setminus \{r\}$  является дизъюнктивным объединением  $q^2$  множеств, каждое из которых является м.н.м. своего поддерева  $T_{q,n-2}$ . Обратно, если в каждом из данных  $q^2$  поддеревьев взять м.н.м., добавить вершину  $r$  к объединению этих множеств, то мы получим некоторое м.н.м. дерева  $T_{q,n}$ , содержащее вершину  $r$ . Поэтому справедливо равенство  $\text{mi}_+(q, n) = (\text{mi}(q, n-2))^{q^2}$ .

Удалив корень  $r$  дерева  $T_{q,n}$ , мы получим множество из  $q$  его поддеревьев, каждое из которых изоморфно  $T_{q,n-1}$ . Если же  $r \notin MIS$ , то множеству  $MIS$  принадлежит некоторый из корней этих  $q$  поддеревьев, поскольку  $MIS$  максимально по включению.

Обратно, если в каждом из этих  $q$  поддеревьев взять м.н.м., причём хотя бы одно из этих множеств содержит корень своего поддерева, то объединение этих множеств

будет м.н.м. дерева  $T_{q,n}$ , не содержащим вершины  $r$ . Значит,  $\text{mi}_-(q, n)$  равно разности количества способов выбрать набор из  $q$  множеств, каждое из которых — м.н.м. дерева, изоморфного  $T_{q,n-1}$ , и количества способов выбрать набор из  $q$  множеств, каждое из которых — м.н.м. дерева, изоморфного  $T_{q,n-1}$  и не содержащего его корень. Поэтому  $\text{mi}_-(q, n) = (\text{mi}(q, n-1))^q - (\text{mi}_-(q, n-1))^q$ . Это равенство (используем ранее полученное равенство  $\text{mi}_+(q, n-1) = (\text{mi}(q, n-3))^{q^2}$ ) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{mi}_-(q, n) &= (\text{mi}(q, n-1))^q - (\text{mi}_-(q, n-1))^q = \\ &= (\text{mi}(q, n-1))^q - (\text{mi}(q, n-1) - \text{mi}_+(q, n-1))^q = \\ &= (\text{mi}(q, n-1))^q - (\text{mi}(q, n-1) - (\text{mi}(q, n-3))^{q^2})^q. \end{aligned}$$

Объединяя ранее полученные соотношения для  $\text{mi}_+(q, n)$  и  $\text{mi}_-(q, n)$ , получаем равенство

$$\text{mi}(q, n) = (\text{mi}(q, n-2))^{q^2} + (\text{mi}(q, n-1))^q - (\text{mi}(q, n-1) - (\text{mi}(q, n-3))^{q^2})^q. \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что  $\text{mi}(q, 0) = 1$ ,  $\text{mi}(q, 1) = 2$ ,  $\text{mi}(q, 2) = 2^q$ .

**2.2. Частичное решение полученного рекуррентного уравнения.** Для того, чтобы частично решить уравнение (1) с заданными начальными условиями, рассмотрим величину  $a(q, n) \triangleq \frac{\text{mi}(q, n)}{(\text{mi}(q, n-1))^q}$ .

Очевидно, что

$$\frac{(\text{mi}(q, n-2))^{q^2}}{(\text{mi}(q, n-1))^q} = \frac{1}{(a(q, n-1))^q} \text{ и } \frac{(\text{mi}(q, n-3))^{q^2}}{\text{mi}(q, n-1)} = \frac{1}{a(q, n-1) \cdot (a(q, n-2))^q}.$$

Поэтому равенство (1) и его начальные условия можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned} a(q, n) &= \frac{1}{(a(q, n-1))^q} + 1 - \left( 1 - \frac{1}{a(q, n-1) \cdot (a(q, n-2))^q} \right)^q, \\ a(q, 1) &= 2, \\ a(q, 2) &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Нетрудно показать (например, индукцией по  $n$ ), что для любого  $q$  последовательность  $\{a(q, n)\}$  ограничена сверху и снизу.

Поскольку  $a(q, n) = \frac{\text{mi}(q, n)}{(\text{mi}(q, n-1))^q}$ , то  $\ln(a(q, n)) = \ln(\text{mi}(q, n)) - q \cdot \ln(\text{mi}(q, n-1))$ . Поэтому при любом  $n \geq 3$  и любом  $i \in \{0, \dots, n-3\}$  выполнено равенство  $q^i \cdot \ln(a(q, n-i)) = q^i \cdot \ln(\text{mi}(q, n-i)) - q^{i+1} \cdot \ln(\text{mi}(q, n-i-1))$ . Значит,  $\ln(\text{mi}(q, n)) -$

$q^{n-2} \cdot \ln(\text{mi}(q, 2)) = \sum_{i=0}^{n-3} (\ln(a(q, n-i)) \cdot q^i)$  для любого  $n \geq 3$ . Иными словами,

$$\begin{aligned} \ln(\text{mi}(q, n)) &= \sum_{i=3}^n (\ln(a(q, i)) \cdot q^{n-i}) = q^n \cdot \sum_{i=3}^n (\ln(a(q, i)) \cdot q^{-i}) = \\ &= q^n \cdot \left( \sum_{i=3}^{\infty} (\ln(a(q, i)) \cdot q^{-i}) - \sum_{i=n+1}^{\infty} (\ln(a(q, i)) \cdot q^{-i}) \right) = \\ &= q^n \cdot \left( \sum_{i=3}^{\infty} (\ln(a(q, i)) \cdot q^{-i}) - \sum_{i=n+1}^{\infty} (\ln(a(q, i)) \cdot q^{n-i}) \right). \end{aligned}$$

Поскольку при любом  $q$  последовательность  $\{a(q, n)\}$  ограничена и сверху, и снизу некоторыми положительными константами (что с очевидностью следует из выполнения неравенств  $(\text{mi}(q, n-1))^q \leq \text{mi}(q, n) \leq 2 \cdot (\text{mi}(q, n-1))^q$ ), то определена сумма  $\sum_{i=3}^{\infty} (\ln(a(q, i)) \cdot q^{-i})$  сходящегося числового ряда, которую мы обозначим через  $\ln(\beta_q)$ . Поэтому  $\ln(\text{mi}(q, n)) = q^n \cdot \ln(\beta_q) + \ln(\alpha_{q,n})$  для некоторого числа  $\alpha_{q,n}$ , то есть справедливо соотношение

$$\text{mi}(q, n) = \alpha_{q,n} \cdot (\beta_q)^{q^n}. \quad (3)$$

Цель наших дальнейших рассуждений — доказать сходимость последовательности  $\{\alpha_{2,n}\}$  и сходимость подпоследовательности  $\{\alpha_{q,3k+r}\}$  для любого  $r \in \{0, 1, 2\}$  и любого достаточно большого  $q$ . Поскольку  $\ln(\alpha_{q,n}) = - \sum_{i=n+1}^{\infty} (\ln(a(q, i)) \cdot q^{n-i})$ , для доказательства данных двух фактов достаточно доказать сходимость последовательности  $\{a(2, n)\}$  и подпоследовательностей  $\{a(q, 3k)\}$ ,  $\{a(q, 3k+1)\}$ ,  $\{a(q, 3k+2)\}$  при больших  $q$ .

Тем самым, для некоторой константы  $\alpha_2$  при  $n \rightarrow \infty$  справедлива асимптотика  $\text{mi}(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$ .

Для любого достаточно большого  $q$  существуют такие попарно различные константы  $\alpha_q^{(1)}$ ,  $\alpha_q^{(2)}$ ,  $\alpha_q^{(3)}$ , что

$$\begin{aligned} \text{mi}(T_{q,3k}) &\sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, & \text{mi}(T_{q,3k+1}) &\sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}, \\ \text{mi}(T_{q,3k+2}) &\sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}} & \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**2.3. Случай  $q = 2$ .** В этом разделе мы докажем, что последовательность  $\{a(2, n)\}$  имеет предел. Введём обозначение:  $g(t_1, t_2) \triangleq 1 + \frac{1}{t_1^2} - (1 - \frac{1}{t_1 t_2^2})^2$ . На луче  $[1, +\infty)$  существует единственное такое  $l$ , что  $l = g(l, l)$ . Для этого достаточно заметить, что функция  $h(t) \triangleq t - g(t, t)$  имеет производную  $h'_t = 1 + \frac{2}{t^3} + 2 \cdot (1 - \frac{1}{t^3}) \cdot \frac{3}{t^4}$ , положительную и непрерывную в каждой точке этого луча, причём  $h(1) = -1$  и  $h(2) = \frac{97}{64}$ . Можно показать, что  $l = 1.29\dots$ , поскольку  $h(1.29) = -0.025\dots$  и  $h(1.3) = 0.005\dots$

Функция  $g(t_1, t_2)$  имеет частные производные

$$g'_{t_1}(t_1, t_2) = -\frac{2}{t_1^3} - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2^2}\right) \cdot \frac{1}{t_1^2 t_2^2} \quad \text{и} \quad g'_{t_2}(t_1, t_2) = -2 \cdot \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2^2}\right) \cdot \frac{2}{t_1 t_2^3}.$$

Определим числа  $A \triangleq g'_{t_1}(l, l) = -1.296\dots$  и  $B \triangleq g'_{t_2}(l, l) = -0.764\dots$ . Очевидно, что  $a(2, n) = g(a(2, n - 1), a(2, n - 2))$  для любого  $n \geq 3$ . Положим  $\epsilon_n \triangleq a(2, n) - l$ . Из формулы Тейлора следует, что  $\epsilon_n = A \cdot \epsilon_{n-1} + B \cdot \epsilon_{n-2} + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2)$ . Поэтому

$$\epsilon_{n+1} = A \cdot \epsilon_n + B \cdot \epsilon_{n-1} + O(\epsilon_n^2 + \epsilon_{n-1}^2) = (A^2 + B) \cdot \epsilon_{n-1} + AB \cdot \epsilon_{n-2} + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2)$$

и

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+2} &= A \cdot \epsilon_{n+1} + B \cdot \epsilon_n + O(\epsilon_{n+1}^2 + \epsilon_n^2) = (A^2 + B) \cdot \epsilon_n + AB \cdot \epsilon_{n-1} + O(\epsilon_n^2 + \epsilon_{n-1}^2) = \\ &= (A^3 + 2AB) \cdot \epsilon_{n-1} + (A^2B + B^2) \cdot \epsilon_{n-2} + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2). \end{aligned}$$

Значит, справедливо неравенство

$$|\epsilon_{n+2}| \leq (|A^3 + 2AB| + |A^2B + B^2|) \cdot \max(|\epsilon_{n-1}|, |\epsilon_{n-2}|) + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2). \quad (4)$$

Число  $|A^3 + 2AB| + |A^2B + B^2| = 0.896\dots$  меньше единицы. Константа  $C^*$ , скрытая в символе  $O$ , может быть оценена через максимум модулей значений вторых производных функции  $g(t_1, t_2)$  на квадрате  $[1, 2]^2$  и через числа  $A, B$ . Вычислив первые несколько членов последовательности  $\{a(2, n)\}$  (см. таблицу 2 из третьего раздела этой работы), можно убедиться в том, что существует такое  $n^*$ , для которого остаточный член  $C^* \cdot (\epsilon_{n^*-1}^2 + \epsilon_{n^*-2}^2)$  в формуле (4) не превосходит  $\frac{1}{10} \cdot \max(|\epsilon_{n^*-1}|, |\epsilon_{n^*-2}|)$ . Тем самым,  $|\epsilon_{n^*+2}| \leq (|A^3 + 2AB| + |A^2B + B^2| + \frac{1}{10}) \cdot \max(|\epsilon_{n^*-1}|, |\epsilon_{n^*-2}|)$ . Поэтому существует такое число  $0 < w < 1$ , что для любого  $n \geq n^*$  выполнено неравенство  $|\epsilon_{n+2}| \leq w \cdot \max(|\epsilon_{n-1}|, |\epsilon_{n-2}|)$ , из которого следует, что  $\epsilon_n = O(w^{-n})$ . Значит, последовательность  $\{a(2, n)\}$  сходится к  $l$  с экспоненциальной по  $n$  скоростью. Теорема 1 доказана.

**2.4. Разрешимость одной системы нелинейных уравнений.** В этом разделе мы рассматриваем систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x = f(z, y), \\ y = f(x, z), \\ z = f(y, x), \end{cases} \quad (5)$$

где  $f(t_1, t_2) \triangleq \frac{1}{t_1^q} + 1 - \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2^q}\right)^q$ , и показываем, что эта система имеет решение  $(x_q^*, y_q^*, z_q^*)$  при любом достаточно большом  $q$ . Отметим, что в обозначениях данной функции и производных от неё в списках аргументов мы не будем явно указывать аргумент  $q$ .

Мы будем работать со следующей системой уравнений, которая является следствием системы (5):

$$\begin{cases} x = f(f(y, x), y), \\ y = f(x, f(y, x)). \end{cases} \quad (6)$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_2) &\triangleq t_1 - f(f(t_2, t_1), t_2), \quad f_2(t_1, t_2) \triangleq t_2 - f(t_1, f(t_2, t_1)), \\ Tr &\triangleq \left\{ (t_1, t_2) : 1 \leq t_1 \leq 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-q}, 1 \leq t_2 \leq 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-q}, t_1 \leq t_2 \right\}. \end{aligned}$$

Докажем, что треугольник  $Tr$  содержит решение системы (6) в качестве своей внутренней точки. Очевидно, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_2) &= t_1 - \frac{1}{f^q(t_2, t_1)} - 1 + \left(1 - \frac{1}{f(t_2, t_1)t_2^q}\right)^q, \\ f_2(t_1, t_2) &= t_2 - \frac{1}{t_1^q} - 1 + \left(1 - \frac{1}{t_1 f^q(t_2, t_1)}\right)^q. \end{aligned} \quad (7)$$

Понятно, что при  $q \rightarrow \infty$  для любых  $(t_1, t_2) \in Tr$  справедливы асимптотики

$$f(t_1, t_2) \sim 2, \quad t_1^q \sim 1, \quad t_2^q \sim 1. \quad (8)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} f'_{t_1}(t_1, t_2) &= -\frac{q}{t_1^{q+1}} - q \cdot \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2^q}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{t_1^2 t_2^q}, \\ f'_{t_2}(t_1, t_2) &= -q \cdot \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2^q}\right)^{q-1} \cdot \frac{q}{t_1 t_2^{q+1}}, \\ \frac{df(t, t)}{dt} &= -\frac{q}{t^{q+1}} - q \cdot \left(1 - \frac{1}{t^{q+1}}\right)^{q-1} \cdot \frac{q+1}{t^{q+2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из равенств (7) и (9) и асимптотик (8) следует, что в любой точке  $(t_1, t_2) \in Tr$  для любого достаточно большого  $q$  одновременно выполнены неравенства

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t_1, t_2) > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t_1, t_2) > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t_1, t_2) > 0. \quad (10)$$

Докажем, что для любого  $t \in [1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$  выполнено неравенство

$$\frac{df_3}{dt}(t) < 0, \quad (11)$$

где  $f_3(t) \triangleq f_1(1, t) = -\frac{1}{f^q(t, 1)} + (1 - \frac{1}{f(t, 1)t^q})^q$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{df_3}{dt}(t) &= q \cdot \frac{f'_t(t, 1)}{f^{q+1}(t, 1)} + q \cdot \left(1 - \frac{1}{f(t, 1)t^q}\right)^{q-1} \cdot \frac{(f(t, 1)t^q)'_t}{f^2(t, 1)t^{2q}} = \\ &= q^2 \cdot \frac{-\frac{1}{t^{q+1}} - (1 - \frac{1}{t})^{q-1} \cdot \frac{1}{t^2}}{f^{q+1}(t, 1)} + q^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{f(t, 1)t^q}\right)^{q-1} \cdot \frac{t^{q-1} - (t-1)^{q-1}}{f^2(t, 1)t^{2q}} = \\ &= \frac{q^2}{f^2(t, 1)t^{q+1}} \cdot \left( \left(1 - \frac{1}{f(t, 1)t^q}\right)^{q-1} - \frac{1}{f^{q-1}(t, 1)} \right) - q^2 \cdot \frac{(1 - \frac{1}{t})^{q-1} \cdot \frac{1}{t^2}}{f^{q+1}(t, 1)} - \\ &\quad - q^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{f(t, 1)t^q}\right)^{q-1} \cdot \frac{(t-1)^q}{f^2(t, 1)t^{2q}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно, что  $1 - \frac{1}{f(t, 1)t^q} < \frac{1}{f(t, 1)}$  при любом  $t \in [1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$ . Отсюда и из формулы (12) следует, что  $\frac{df_3}{dt}(t) < 0$  для любого  $t \in [1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$ .

Рассмотрим функции  $f_1(t, t)$  и  $f_2(t, t)$ . При любом достаточно большом  $q$  они обе монотонно возрастают на отрезке  $[1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$ . Это следует из (7), (8) и (9). Оценим значения функций  $f_1(t_1, t_2)$  и  $f_2(t_1, t_2)$  в вершинах треугольника  $Tr$ . Имеем:  $f_1(P_1) = 0$  и  $f_2(P_1) = (1 - \frac{1}{2^q})^q - 1 < 0$ , где  $P_1 \triangleq (1, 1)$ . Значение функции  $f_1(t_1, t_2)$  в точке  $P_2 \triangleq (1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q})$  равно

$$\left(1 - \frac{1}{f(1 + (\frac{3}{2})^{-q}, 1) \cdot (1 + (\frac{3}{2})^{-q})^q}\right)^q - \frac{1}{f^q(1 + (\frac{3}{2})^{-q}, 1)}.$$

Это число является отрицательным, так как  $f(1 + (\frac{3}{2})^{-q}, 1) < 1 + \frac{1}{1 + (\frac{3}{2})^{-q}}$ . Значение функции  $f_2(t_1, t_2)$  в точке  $P_2$  равно  $(\frac{3}{2})^{-q} + \left(1 - \frac{1}{f^q(1 + (\frac{3}{2})^{-q}, 1)}\right)^q - 1$ . Из выполнения асимптотик (8) следует, что при любом достаточно большом  $q$  справедливо неравенство  $f_2(P_2) > 0$ . По аналогии можно показать, что для любого достаточно большого  $q$  выполняются неравенства  $f_1(P_3) > 0$  и  $f_2(P_3) > 0$ , где  $P_3 \triangleq (1 + (\frac{3}{2})^{-q}, 1 + (\frac{3}{2})^{-q})$ .

Отображение  $F(t_1, t_2) \triangleq (f_1(t_1, t_2), f_2(t_1, t_2))$  переводит катет  $P_1P_2$  треугольника  $Tr$  в некоторую кривую  $S_1$ , соединяющую точки  $F(P_1)$  и  $F(P_2)$ . По неравенствам (10) и (11) при проходе кривой  $S_1$  от  $F(P_1)$  до  $F(P_2)$  уменьшается абсцисса и возрастает ордината. Катет  $P_2P_3$  переводится в кривую  $S_2$ , при прохождении которой от  $F(P_2)$  до  $F(P_3)$  увеличиваются и абсцисса, и ордината (ввиду выполнения тех же неравенств). Поскольку для любого  $t \in [1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$  выполнены неравенства  $\frac{df_1(t, t)}{dt} > 0$  и  $\frac{df_2(t, t)}{dt} > 0$ , то  $P_1P_3$  отображением  $F$  переводится в кривую  $S_3$ , при прохождении которой от  $F(P_1)$  к  $F(P_3)$  растут и абсцисса, и ордината.

Точка  $F(P_1)$  лежит в нижней полуплоскости на оси ординат, точка  $F(P_2)$  лежит во втором квадранте, а точка  $F(P_3)$  — в первом. Поэтому криволинейный треугольник  $Tr'$ , ограниченный кривыми  $S_1, S_2$  и  $S_3$ , содержит начало координат в качестве своей внутренней точки. Отображение  $F$  является непрерывным на  $Tr$ , поэтому оно переводит  $Tr$  в  $Tr'$ . Значит, существует решение  $(x_q^*, y_q^*, z_q^*)$  системы (6), являющееся внутренней точкой  $Tr$ . Тем самым,  $1 < x_q^* < y_q^* < 1 + (\frac{3}{2})^{-q}$  и  $z_q^* = 2 - O((\frac{3}{2})^{-q})$ .

**2.5. Случай больших  $q$ .** В этом подразделе работы мы покажем, что для любого достаточно большого  $q$  при  $k \rightarrow \infty$  справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} a(q, 3k + 1) &\rightarrow z_q^*, \\ a(q, 3k + 2) &\rightarrow x_q^*, \\ a(q, 3k + 3) &\rightarrow y_q^*. \end{aligned}$$

Из формулы (2) и определения функции  $f(t_1, t_2)$  следует, что  $a(q, n) = f(a(q, n - 1), a(q, n - 2))$ . Введём обозначения

$$\begin{aligned} \zeta_{k,q} &\triangleq a(q, 3k + 1) - z_q^*, \\ \eta_{k,q} &\triangleq a(q, 3k + 2) - x_q^*, \\ \theta_{k,q} &\triangleq a(q, 3k + 3) - y_q^*. \end{aligned}$$



Из соотношений (2) следует, что  $\max(|\zeta_{0,q}|, |\eta_{0,q}|, |\theta_{0,q}|) \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow \infty$  и

$$\begin{aligned}\zeta_{k+1,q} + z_q^* &= f(\theta_{k,q} + y_q^*, \eta_{k,q} + x_q^*), \\ \theta_{k,q} + y_q^* &= f(\eta_{k,q} + x_q^*, \zeta_{k,q} + z_q^*), \\ \eta_{k,q} + x_q^* &= f(\zeta_{k,q} + z_q^*, \theta_{k-1,q} + y_q^*).\end{aligned}\quad (13)$$

Из (13), равенств  $z_q^* = f(y_q^*, x_q^*)$ ,  $y_q^* = f(x_q^*, z_q^*)$ ,  $x_q^* = f(z_q^*, y_q^*)$  и формулы Тейлора следует, что

$$\begin{aligned}\zeta_{k+1,q} &= f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot \theta_{k,q} + f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \cdot \eta_{k,q} + O(\theta_{k,q}^2 + \eta_{k,q}^2), \\ \theta_{k,q} &= f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot \eta_{k,q} + f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) \cdot \zeta_{k,q} + O(\eta_{k,q}^2 + \zeta_{k,q}^2), \\ \eta_{k,q} &= f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) \cdot \zeta_{k,q} + f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \cdot \theta_{k-1,q} + O(\zeta_{k,q}^2 + \theta_{k-1,q}^2).\end{aligned}\quad (14)$$

Из (2.5) следуют равенства

$$\begin{aligned}\eta_{k,q} &= f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) \cdot \zeta_{k,q} + f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \cdot \theta_{k-1,q} + O(\zeta_{k,q}^2 + \theta_{k-1,q}^2), \\ \theta_{k,q} &= (f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*)) \cdot \zeta_{k,q} + \\ &\quad + f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \cdot \theta_{k-1,q} + O(\zeta_{k,q}^2 + \theta_{k-1,q}^2), \\ \zeta_{k+1,q} &= (f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) + \\ &\quad + f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) \cdot f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*)) \cdot \zeta_{k,q} + (f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) + \\ &\quad + f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*)) \cdot \theta_{k-1,q} + O(\zeta_{k,q}^2 + \theta_{k-1,q}^2).\end{aligned}\quad (15)$$

Поскольку  $x_q^* = 1 + O((\frac{3}{2})^{-q})$ ,  $y_q^* = 1 + O((\frac{3}{2})^{-q})$  и  $z_q^* = 2 - O((\frac{3}{2})^{-q})$ , то согласно (9) справедливы равенства

$$\begin{aligned}|f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*)| &= O\left(\frac{q}{2q}\right), \quad |f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*)| = O\left(\frac{q^2}{2q}\right), \quad |f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*)| = O(q), \\ |f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*)| &= O\left(\frac{q^2}{2q}\right), \quad |f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*)| = O(q), \quad |f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*)| = O(q^2).\end{aligned}$$

Поэтому коэффициенты перед  $\zeta_{k,q}$  и  $\theta_{k-1,q}$  в формулах (2.5) являются экспоненциально убывающими по  $q$ . Напомним, что  $\lim_{q \rightarrow \infty} \max(|\zeta_{0,q}|, |\eta_{0,q}|, |\theta_{0,q}|) = 0$ . Значит, для любого достаточно большого  $q$  существует такое  $0 < w_q < 1$ , что  $\max(|\eta_{k,q}|, |\theta_{k,q}|, |\zeta_{k,q}|) = O((w_q)^k)$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} a(q, 3k+1) &= z_q^*, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a(q, 3k+2) &= x_q^*, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a(q, 3k+3) &= y_q^*\end{aligned}$$

для любого достаточно большого  $q$ .

Напомним, что  $\alpha_{q,n} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{\infty} (\ln(a(q, n+i)) \cdot q^{-i})\right\}$  и что при больших  $q$  справедливы соотношения  $1 < x_q^* < y_q^* < 1 + (\frac{3}{2})^{-q}$  и  $z_q^* = 2 - O((\frac{3}{2})^{-q})$ . Если  $n+1 \equiv 0$

(mod 3) и  $n, q$  достаточно велики, то

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} (\ln(a(q, n+i)) \cdot q^{-i}) \approx \\ & \approx \left( \frac{y_q^*}{q} + \frac{y_q^*}{q^4} + \frac{y_q^*}{q^7} + \dots \right) + \left( \frac{z_q^*}{q^2} + \frac{z_q^*}{q^5} + \frac{z_q^*}{q^8} + \dots \right) + \left( \frac{x_q^*}{q^3} + \frac{x_q^*}{q^6} + \frac{x_q^*}{q^9} + \dots \right). \end{aligned}$$

Последняя сумма равна  $y_q^* \cdot \frac{q^2}{q^3-1} + z_q^* \cdot \frac{q}{q^3-1} + x_q^* \cdot \frac{1}{q^3-1}$ . Аналогично, если  $n+1 \equiv 1 \pmod{3}$  и  $n, q$  достаточно велики, то  $\sum_{i=1}^{\infty} (\ln(a(q, n+i)) \cdot q^{-i})$  близко к  $z_q^* \cdot \frac{q^2}{q^3-1} + x_q^* \cdot \frac{q}{q^3-1} + y_q^* \cdot \frac{1}{q^3-1}$ . Наконец, если  $n+1 \equiv 2 \pmod{3}$  и  $n, q$  достаточно велики, то  $\sum_{i=1}^{\infty} (\ln(a(q, n+i)) \cdot q^{-i})$  близко к

$$x_q^* \cdot \frac{q^2}{q^3-1} + y_q^* \cdot \frac{q}{q^3-1} + z_q^* \cdot \frac{1}{q^3-1}.$$

Значит, при больших  $q$  три суммы близки к

$$\frac{q^2 + 2 \cdot q + 1}{q^3 - 1}, \frac{2 \cdot q^2 + q + 1}{q^3 - 1}, \frac{q^2 + q + 2}{q^3 - 1},$$

соответственно. Отсюда следует, что при  $q \rightarrow \infty$  подпоследовательности  $\{\alpha_{q,3k}\}, \{\alpha_{q,3k+1}\}, \{\alpha_{q,3k+2}\}$  сходятся к трём попарно различным пределам. Теорема 2 доказана.

### 3. Некоторые замечания

Интересен вопрос о том, начиная с какого значения параметра  $q$  соотношения в теореме 2 становятся приближенными равенствами с разными константами. Для ответа на него был проведён вычислительный эксперимент, который дал следующие результаты (в ячейках таблиц в дробной части чисел указаны первые три значащие цифры).

Из первой таблицы видно, что распадение последовательности  $\{a(q, n)\}$  на три сходящиеся подпоследовательности, номера членов которых соответствуют классам вычетов по модулю 3, маловероятно при  $3 \leq q \leq 10$ . Результаты вычислительного эксперимента для больших  $n$  и тех же  $q$  (не представленные в таблицах) подтверждают это наблюдение. Вместе с тем, по таблицам 2–4 просматривается, что  $\{a(q, 3k)\}, \{a(q, 3k+1)\}, \{a(q, 3k+2)\}$  сходятся при  $q \in \{11, 12, 13\}$ . Это же экспериментально наблюдается и при больших  $q$  и  $k$ . Тем самым, вычислительный эксперимент позволяет предположить, что теорема 2 (в части распада на три сходящиеся подпоследовательности) справедлива для любого  $q > 10$  и не имеет места при  $3 \leq q \leq 10$ .

q	n									
	10	20	30	40	50	600	700	800	900	1000
2	1.178	1.284	1.303	1.300	1.298	1.298	1.298	1.298	1.298	1.298
3	1.045	1.194	1.445	1.510	1.290	1.106	1.329	1.411	1.118	1.252
4	1.008	1.226	1.805	1.374	1.028	1.037	1.038	1.040	1.042	1.044
5	1.004	1.466	1.566	1.021	1.001	1.765	1.000	1.790	1.019	1.363
6	1.008	1.790	1.108	1.000	1.309	1.039	1.000	1.000	1.001	1.082
7	1.036	1.691	1.000	1.193	1.410	1.213	1.000	1.694	1.000	1.960
8	1.222	1.113	1.000	1.896	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.075
9	1.593	1.018	1.333	1.034	1.025	1.000	1.018	1.996	1.025	1.000
10	1.818	1.000	1.995	1.000	1.053	1.000	1.087	1.000	1.038	1.004

Таблица 1: Значения некоторых членов последовательности  $\{a(q, n)\}$ 

q	k									
	1	2	3	4	5	60	70	80	90	100
11	1.942	1.922	1.913	1.909	1.906	1.904	1.904	1.904	1.904	1.904
12	1.966	1.958	1.956	1.955	1.955	1.955	1.955	1.955	1.955	1.955
13	1.979	1.976	1.976	1.976	1.976	1.976	1.976	1.976	1.976	1.976

Таблица 2: Значения некоторых членов подпоследовательности  $\{a(q, 3k + 1)\}$ 

q	k									
	1	2	3	4	5	60	70	80	90	100
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.0008	1.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Таблица 3: Значения некоторых членов подпоследовательности  $\{a(q, 3k + 2)\}$ 

q	k									
	1	2	3	4	5	60	70	80	90	100
11	1.005	1.007	1.008	1.008	1.008	1.009	1.009	1.009	1.009	1.009
12	1.003	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004
13	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001

Таблица 4: Значения некоторых членов подпоследовательности  $\{a(q, 3k)\}$ 

## Список литературы

1. Воронин, В. П., Демакова, Е. В., “О числе независимых множеств для некоторых семейств графов”, Труды IV Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Красновидово, 19–25 июня 2000 г.), 2000, 145–149.
2. Дайняк, А. Б., “О числе независимых множеств в полных  $q$ -арных деревьях”, Учёные записки Казанского гос. ун-та. Серия Физ.-матем. науки, **151**, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 2009, 59–64.

3. Коршунов, А. Д., Сапоженко А. А., “О числе двоичных кодов с расстоянием 2”, *Проблемы кибернетики*, **40** (1983), 111–130.
4. Kalkin, N.J., Wilf, H.S., “The number of independent sets in a grid graph”, *SIAM J. Discr. Math.*, **11**:1 (1997), 54–60.
5. Kirschenhofer, P., Prodinger, H., Tichy, R., “Fibonacci numbers of graphs: II”, *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.

Статья поступила 16.06.2016.