

УДК 517.938

## О динамике эндоморфизмов двумерного тора с одномерными базисными множествами<sup>1</sup>

Е. Д. Куренков

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики  
Нижний Новгород. E-mail: eugene2402@mail.ru

**Аннотация.** В настоящей заметке рассматриваются эндоморфизмы, заданные на замкнутом двумерном многообразии, удовлетворяющие аксиоме А. В работах Пшетьцкого (F. Przytycki) были получены необходимые и достаточные условия  $\Omega$ -устойчивости таких эндоморфизмов. Также он показал, что в любой окрестности  $\Omega$ -неустойчивого эндоморфизма существует счетное число попарно  $\Omega$ -несопряженных эндоморфизмов. В данной работе строится пример однопараметрического семейства  $\Omega$ -сопряженных, но топологически несопряженных эндоморфизмов двумерного тора.

**Ключевые слова:**  $\Omega$ -неустойчивый эндоморфизм, топологическая сопряженность

### Введение и формулировка результатов

Пусть  $M^2$  — замкнутое ориентируемое 2-многообразие и  $f: M^2 \rightarrow M^2$  —  $C^r$ -эндоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А. Напомним, что эндоморфизм  $f$  удовлетворяет аксиоме А, если выполнены следующие два условия:

- 1) множество периодических точек  $Per_f$  плотно в неблуждающем множестве  $\Omega_f$ ;
- 2) неблуждающее множество  $\Omega_f$  — гиперболично.

Гиперболичность  $\Omega_f$  означает, что существуют константы  $C > 0$ ,  $0 < \mu < 1$  и риманова метрика на  $TM$  такие, что для любой траектории из неблуждающего множества  $\bar{x} = \{x_i \mid f(x_i) = x_{i+1}, x_i \in \Omega_f, i \in \mathbb{Z}\}$  существует разложение касательного пространства в прямую сумму  $T_{\bar{x}} = E^s \oplus E^u$ , инвариантное относительно производной  $Df: T_{\bar{x}}M \rightarrow T_{\bar{x}}M$ , и для которого верны следующие неравенства:

1.  $\|Df^n(v)\| \leq C\mu^n\|v\|$ , для любых  $n \geq 0$ ,  $v \in E^s$ ;
2.  $\|Df^n(v)\| \geq (1/C)\mu^{-n}\|v\|$ , для любых  $n \geq 0$ ,  $v \in E^u$ .

В работе Пшетьцкого [3] получены необходимые и достаточные условия  $\Omega$ -устойчивости таких эндоморфизмов, при условии, что в неблуждающем множестве  $\Omega_f$  не содержится особых точек  $f$ , то есть точек, в которых производная  $Df: T_pM \rightarrow T_{f(p)}M$  не инъективна.

Кроме того, в [3] доказано, что если эндоморфизм  $f$  не является  $\Omega$ -устойчивым, то в любой его окрестности существует счетное число попарно  $\Omega$ -несопряженных эндоморфизмов.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»).

В данной работе мы воспользуемся представлениями:  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Рассмотрим прямое произведение следующих отображений  $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  и  $\psi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ :

$$\varphi(x) = 2x \pmod{1}, \quad \psi(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi x)e^{2\pi}) \pmod{1}.$$

Диффеоморфизм  $\psi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  представляет собой сдвиг на единицу времени вдоль потока  $\dot{x} = \sin(2\pi x)$ ,  $x \in \mathbb{S}^1$ . Каждое из этих отображений в отдельности является структурно устойчивым, в то время как их прямое произведение  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $f(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$  уже не является даже  $\Omega$ -устойчивым.

В силу результатов Пшетьцкого [3] для любого базисного множества  $\Omega_i$   $\Omega$ -устойчивого эндоморфизма  $f: M \rightarrow M$ , удовлетворяющего аксиоме А, необходимо выполнено одно из двух условий:

- 1) сужение  $f|_{\Omega_i}$  является взаимно-однозначным отображением;
- 2) сужение  $f|_{\Omega_i}$  является квазирасширяющим, то есть для любой траектории  $\bar{x} \in \Omega_i$   $\dim E_{x_0}^u = \dim M$ .

Очевидно, что аттрактор  $A = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid x = 1/2\}$  построенного эндоморфизма  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  не удовлетворяет ни одному из приведенных условий.

Нашей основной задачей здесь будет построение континуума попарно  $\Omega$ -сопряженных, но топологически несопряженных эндоморфизмов в окрестности  $f$ .

### Доказательство основного результата

**Лемма.** Если гомеоморфизм  $h: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  удовлетворяет условию  $h \circ \varphi = \varphi \circ h$ , то либо  $h(x) = x \pmod{1}$ , либо  $h(x) = -x \pmod{1}$ ,  $x \in \mathbb{S}^1$ .

*Доказательство.* Так как  $x = 0$  — единственная неподвижная точка эндоморфизма  $\varphi$ , то необходимо  $h(0) = 0$ . Далее, поскольку  $\varphi^{-1}(0) = \{0, 1/2\}$ , то необходимо  $h(1/2) = 1/2$ . Рассматривая прообразы точки  $x = 1/2$ , получаем, что либо  $h(1/4) = 1/4$  и  $h(3/4) = 3/4$ , либо  $h(1/4) = 3/4$  и  $h(3/4) = 1/4$ . В первом случае  $h$  оказывается сохраняющим ориентацию, а во втором — меняющим. Прообразы точки  $x = 0$  при отображении  $\varphi^n$  имеют вид  $\frac{k}{2^n}$ ,  $0 \leq k < 2^n - 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . В первом случае имеем единственное продолжение  $h$  на множество  $\varphi^{-n}(0)$ , то есть  $h\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{k}{2^n}$ , а во втором — единственное продолжение  $h\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{2^n - k}{2^n}$ . Так как множество  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-n}(0)$  всюду плотно, то получаем, что либо  $h(x) = x \pmod{1}$ , либо  $h(x) = -x \pmod{1}$ .  $\square$

Рассмотрим семейство  $f_\varepsilon: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , эндоморфизмов тора, непрерывно зависящее от параметра. Здесь и далее мы предполагаем, что  $\varepsilon \geq 0$ .

$$f_\varepsilon(x, y) = (\varphi(x), \psi^{t(x, \varepsilon)}(y)),$$

где

$$\psi^\tau(y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi y)e^{2\pi\tau}) \pmod{1}, \quad t(x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon e^{-\operatorname{tg}^2(\pi(x - \frac{1}{2}))}.$$

Отображение  $\psi^\tau(y)$  представляет собой сдвиг на время  $\tau$  вдоль потока  $\dot{y} = \sin(2\pi y)$ . Заметим также, что при  $\varepsilon = 0$   $f_\varepsilon$ , совпадая с  $f$ , приобретает вид прямого произведения. Кроме того, любой эндоморфизм из данного класса удовлетворяет аксиоме А.

**Теорема.** Эндоморфизмы  $f_{\varepsilon_1}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  и  $f_{\varepsilon_2}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  не являются топологически сопряженными при  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ .

*Доказательство.* Предположим, что эндоморфизмы  $f_{\varepsilon_1}$  и  $f_{\varepsilon_2}$  при условии  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  топологически сопряжены. То есть существует такой гомеоморфизм  $h: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , для которого  $h \circ f_{\varepsilon_1} = f_{\varepsilon_2} \circ h$ .

Поскольку блуждающее множество эндоморфизма  $f_\varepsilon$  состоит в точности из двух компонент связности  $\{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid y \in (0, 1/2)\}$  и  $\{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid y \in (1/2, 1)\}$ , а отображение  $f_\varepsilon$  на этих компонентах связности симметрично в смысле следующего соотношения  $\psi^\tau(y) = 1 - \psi^\tau(1 - y)$ ,  $y \in (0, 1)$ , то достаточно доказать, что не существует сопрягающего гомеоморфизма  $h: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  в классе гомеоморфизмов, переводящих компоненту связности блуждающего множества  $\{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid y \in (0, 1/2)\}$  в себя.

Заметим, что при любом  $\varepsilon \geq 0$  окружности  $R = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid y = 0\}$  и  $A = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid y = 1/2\}$  являются репеллером и аттрактором соответственно. Кроме того, так как сужение  $f_\varepsilon$  на аттрактор есть  $\varphi$ , то в силу леммы 1 либо  $h|_A(x, y) \equiv (x, y)$ , либо  $h|_A(x, y) \equiv (-x \bmod 1, y)$ .

Рассмотрим случай, когда  $h(x, y)|_A = (x, y)$ . Устойчивое многообразие неподвижной точки  $a = (0, 1/2)$  ( $W_a^s = \{p \in \mathbb{T}^2 \mid d(a, f_\varepsilon^n(p)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty\}$ ) не зависит от выбора  $\varepsilon$  и имеет вид  $W_a^s = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \setminus R \mid x = \frac{m}{2^n}, m, n \in \mathbb{Z}\}$ . Заметим, что устойчивое многообразие  $W_a^s$  плотно в  $\mathbb{T}^2$ , а его компоненты связности единственным образом доопределяются до  $f_\varepsilon$ -инвариантного слоения  $L = \{x = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{S}^1\}$  на  $\mathbb{T}^2$ . Из этого следует, что гомеоморфизм  $h$  необходимо сохраняет слоение  $L$ , а в силу трансверсальности  $A$  и  $L$ , и того, что сужение  $h|_A \equiv \text{id}$ , следует, что каждый слой слоения  $L$  инвариантен относительно  $h$ , то есть  $h(x, y_1) = (x, y_2)$ .

Таким образом, гомеоморфизм  $h$  представим в виде косоугольного произведения  $h(x, y) = (x, g_x(y))$ . Для любого  $\varepsilon$  имеет место тождество:  $f_\varepsilon(0, y) = (0, \psi^1(y))$ , поэтому верно соотношение:

$$g_0 \circ \psi^1 = \psi^1 \circ g_0. \quad (1)$$

Кроме того, поскольку  $\psi^\tau$  есть сдвиг вдоль потока, то

$$\psi^{\tau_1} \circ \psi^{\tau_2} = \psi^{\tau_1} \circ \psi^{\tau_2} = \psi^{\tau_1 + \tau_2} \text{ для любых } \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Если некоторое из отображений  $g_x(y)$  задано, то отображение  $g_{\varphi^{-1}(x)}(y)$  определяется единственным образом из условия:

$$g_{\varphi(x)} \circ \psi^{t(x, \varepsilon_1)} = \psi^{t(x, \varepsilon_2)} \circ g_x. \quad (3)$$

Из (3) получаем:

$$g_{\varphi^{-1}(x)} = \psi^{-t(\varphi^{-1}(x), \varepsilon_2)} \circ g_x \circ \psi^{t(\varphi^{-1}(x), \varepsilon_1)} \quad (4)$$

(здесь под  $\varphi^{-1}(x)$  понимается любая точка из полного прообраза).

Рассмотрим последовательность отображений  $g_{1/2}, g_{1/4}, \dots, g_{1/2^n}, \dots$ . Так как  $h$  является гомеоморфизмом, то данная последовательность отображений должна поточечно сходиться к отображению  $g_0$ .

Из (1) и (4) имеем:

$$g_{1/2^n} = \psi^{-\sigma(n, \varepsilon_2)} \circ g_0 \circ \psi^{\sigma(n, \varepsilon_1)}, \quad (5)$$

где

$$\sigma(n, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n \left[ t\left(\frac{1}{2^k}, \varepsilon\right) - 1 \right].$$

Данный ряд сходится при любом  $\varepsilon \geq 0$ . Действительно, поскольку  $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=0} t(x, \varepsilon) = 0$ , то  $t(x, \varepsilon) - 1 < x$  при  $x$  достаточно близких к нулю. Следовательно  $t\left(\frac{1}{2^n}, \varepsilon\right) - 1 < \frac{1}{2^n}$  для достаточно больших  $n$ , и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[ t\left(\frac{1}{2^k}, \varepsilon\right) - 1 \right]$  сходится. Отсюда в пределе получаем равенство

$$g_0 = \psi^{-\sigma(\infty, \varepsilon_2)} \circ g_0 \circ \psi^{\sigma(\infty, \varepsilon_1)}, \quad (6)$$

где

$$\sigma(\infty, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ t\left(\frac{1}{2^k}, \varepsilon\right) - 1 \right].$$

Из неравенства  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  следует, что  $t(x, \varepsilon_1) > t(x, \varepsilon_2)$  для любого  $x \in \mathbb{S}^1$ ,  $x \neq 0$ , но тогда и  $\sigma(\infty, \varepsilon_1) > \sigma(\infty, \varepsilon_2)$ .

Покажем, что при выполнении соотношения (1), равенство (6) выполняться не может, что и завершит наше доказательство. Выберем произвольную точку  $y$  из отрезка  $[0, 1/2]$  и рассмотрим системы отрезков  $\Delta_i = [\psi^{i-1}(y), \psi^i(y)]$  и  $\tilde{\Delta}_i = [\psi^{i-1}(g_0(y)), \psi^i(g_0(y))]$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . В силу соотношения (1) имеем  $g(\Delta_i) = \tilde{\Delta}_i$ . Выберем целое число  $k$  так, чтобы выполнялось неравенство  $k(\sigma(\infty, \varepsilon_1) - \sigma(\infty, \varepsilon_2)) > 1$ . Принимая во внимание равенство (2) получаем, что точки  $\psi^{k\sigma(\infty, \varepsilon_2)} \circ g_0(y)$  и  $g_0 \circ \psi^{k\sigma(\infty, \varepsilon_1)}(y)$  принадлежат разным отрезкам  $\tilde{\Delta}_i$ , что противоречит равенству (6).

Случай, когда  $h(x, y)|_A = (-x \bmod 1, y)$  рассматривается совершенно аналогично в силу того, что  $t(x, \varepsilon) \equiv t(-x \bmod 1, y)$ .  $\square$

Автор благодарит В.З.Гринеса за постановку задачи, а также Е.В.Жужому и О.В.Починку за полезные обсуждения.

### Список цитируемых источников

1. *Shub M.* Endomorphisms of compact differentiable manifolds // Amer. J. Math.— 1969.—Vol.91. — P.175-199.
2. *Przytycki F.* Anosov endomorphisms // Stud. Math. — 1976. — Vol.58(3). — P. 249–285.
3. *Przytycki F.* On  $\Omega$ -stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A // Stud. Math. — 1977. — LX. — P. 61-77.

Получена 19.06.2015