ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.Б. Демешев, О.А. Малаховская

СРАВНЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ, VAR И BVAR ЛИТТЕРМАНА ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ ВЫПУСКА, ИНДЕКСА ЦЕН И ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Препринт WP12/2015/03
Серия WP12
Научные доклады
Лаборатории макроэкономического анализа

Москва
2015

Редактор серии WP12
«Научные доклады
Лаборатории макроэкономического анализа»
Л.Л. Любимов

Демешев, Б. Б., Малаховская, О. А.
Сравнение случайного блуждания, VAR и BVAR Литтермана при прогнозировании выпуска, индекса цен и процентной ставки * [Электронный ресурс]: препринт WP12/2015/03 / Б. Б. Демешев, О. А. Малаховская ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – Электрон. текст. дан. (1 Мб). – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. – (Серия WP12 «Научные доклады Лаборатории макроэкономического анализа»). – 21 с.

В работе проводилось сравнение прогнозных способностей моделей случайного блуждания, частотной (VAR) и байесовской векторных авторегрессий с априорным распределением Миннесоты (BVAR) при прогнозировании индекса промышленного производства, индекса потребительских цен и процентной ставки. В результате было показано, что байесовская векторная авторегрессия действительно позволяет получить прогноз с большей степенью точности, чем обычная VAR. Для всех трех макроиндикаторов, для которых строились прогнозы, на всех рассматриваемых прогнозных горизонтах и независимо от числа переменных в модели среднеквадратичная ошибка прогноза модели BVAR оказывается ниже, чем для обычной VAR. Кроме того, BVAR позволила получить прогноз с большей точностью, чем модель случайного блуждания (для ИПЦ) и белого шума (для процентной ставки). Однако предсказать индекс промышленного производства с помощью BVAR более точно, чем с помощью модели случайного блуждания, не удалось.

JEL codes: C11, E27, E37, E47

Ключевые слова: VAR, BVAR, априорное распределение Миннесоты

Демешев Борис Борисович, ст. преподаватель НИУ ВШЭ; boris.demeshev@gmail.com

Малаховская Оксана Анатольевна, научный сотрудник Научно-учебной лаборатории макроэкономического анализа НИУ ВШЭ; omalakhovskaya@hse.ru

*Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 г.

Препринты Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp

© Демешев Б. Б., 2015
© Малаховская О. А., 2015
© Оформление. Издательский дом Высшей школы экономики, 2015

Введение

Построение точных макроэкономических прогнозов является ключевым условием проведения верной политики центральными банками. В настоящее время широкое распространение для прогнозирования основных макроэкономических индикаторов получила модель векторной авторегрессии (VAR). Впервые предложенная в работе Sims [1980], она покорила исследователей своей относительной простотой, сочетающейся с неплохими прогнозными способностями. Примерами использования этого класса моделей для макропрогнозирования являются работы Funke [1990], Arino, Franses [2000], Cheong, Lee [2014] и многие другие[1]. При этом использование неограниченной VAR таит в себе опасность излишней параметризации, появляющейся из-за того, что количество оцениваемых параметров растет нелинейно с увеличением размерности модели и линейно с увеличением числа включаемых лагов, что может значительно увеличить дисперсию прогноза. Немаловажным фактором, требующим отражения в макромоделях, является то, что центральные банки развитых государств опираются на большое число макроиндикаторов при проведении политики [Bernanke, Boivin, 2003]. Распространенные методы анализа наборов данных большой размерности – это использование динамических факторов (DF) и байесовских VAR (BVAR).

Цель данной работы состоит в построении прогноза основных макроиндикаторов (выпуска, индекса цен и процентной ставки) для российской экономики. Задача осложняется отсутствием большого количества длинных временных рядов, что не позволяет провести построение DF-модели. Для достижения поставленной цели в работе были построены BVAR с эндогенным выбором параметра, отвечающего за относительный вес априорного распределения.

С технической точки зрения наложение априорных распределений на параметры означает появление дополнительных ограничений, что делает проблему избыточной параметризации менее выраженной. С практической точки зрения выбор модели BVAR для анализа обусловлен их потенциально более высокой точностью прогноза в сравнении с обычной неограниченной VAR. В частности, в работе Doan et al. [1984] показано, что BVAR обеспечивают более точный прогноз и чем неограниченные VAR, и чем одномерные модели. Статья Litterman [1986] демонстрирует, что прогнозы BVAR-модели успешно конкурируют с прогнозами структурных моделей большой размерности. В работе Clark, McCracken [2006] было построено 86 различных прогнозов для 18 моделей трехмерной регрессии (выпуск, инфляция и процентная ставка). Одним из наиболее точных методов авторы признают именно байесовское оценивание. Указанные работы – это лишь несколько примеров из большого числа

[1] Описание других методов прогнозирования временных рядов, используемых в экономике и финансах, можно найти в обзорной работе De Gooijer, Hyndman [2006].

работ, демонстрирующих преимущества BVAR. Однако байесовские методы на данный момент крайне редко используют для анализа российской статистики.

Обзор литературы

Пусть $Y_t = (y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{n,t})'$ вектор случайных переменных. Векторная авторегрессия в сокращенной форме имеет вид

$$Y_t = c + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_p Y_{t-p} + u_t, \quad (1)$$

где u_t – гауссовский белый шум размерности n с ковариационной матрицей $Eu_t u_t' = \Psi$, c – вектор констант размерности n и $A_1, A_2, \dots, A_p$ – матрицы параметров размерности $n \times n$, состоящие из элементов a_{ij}^k, где i– номер уравнения, j – номер переменной, k – номер лага, $i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p$.

Оценка неограниченной VAR может быть проведена последовательным применением МНК к каждому из уравнений системы. Байесовская оценка основана на идее о том, что апостериорная плотность распределения параметров пропорциональна произведению априорной плотности и функции правдоподобия[2]:

$$p(\theta|x) \propto p(x|\theta)p(\theta), \quad (2)$$

где $p(\theta|x)$ – апостериорная плотность параметров модели, обозначаемых θ, при условии имеющихся данных x, $p(x|\theta)$ – функция правдоподобия, $p(\theta)$ – априорная плотность распределения параметров.

Одним из наиболее известных и часто используемых для макроэкономического анализа априорных распределений является априорное Миннесота-распределение, предложенное в работах Doan et al. [1984] и Litterman [1986][3]. Распределение, представленное в работе Litterman [1986], не было построено ни на какой теоретической экономической модели, но отражало предположение, что макроэкономические ряды представляют собой случайное блуждание (возможно, с трендом или со сдвигом). Таким образом, указанное априорное распределение предполагает, что диагональные элементы матрицы A_1 имеют математическое ожидание, равное единице, а остальные элементы A_1 и все элементы матриц $A_2, \dots, A_p$ равны

[2] Концептуальное отличие байесовской эконометрики от обычной заключается в том, что сами параметры модели предполагаются случайными величинами.
[3] Так как распределение Миннесоты было предложено в работе Роберта Литтермана, то для экономии места в данной работе BVAR с априорным распределением Миннесоты мы называем BVAR Литтермана.

нулю. Априорное распределение, предложенное в работе Doan et al. [1984], представляет собой модификацию Litterman [1986]. Для BVAR небольшой размерности регуляризации, обеспечиваемой Миннесота-распределением, было достаточно для улучшения прогнозной силы модели. Однако до последнего времени считалось, что для выборок с большим числом временных рядов наложения только лишь априорного распределения недостаточно и необходимо применять дополнительные ограничения. Ключевую роль в развитии подхода сыграла статья De Mol et al. [2008], в которой было показано, что при увеличении размерности выборки достаточно наложения более узких априорных распределений. На первый взгляд может показаться, что сужение априорного распределения приведет к потере необходимой информации, но в реальности этого не происходит. В указанной работе авторы делают вывод, что если данные характеризуются высокой мультиколлинеарностью (что свойственно для выборок макрорядов большой размерности), то сужение априорных распределений при увеличении числа переменных дает больший вес нескольким первым главным компонентам. Другими словами, для данных с факторной структурой наложение более узких априорных распределений с увеличением размерности модели не приводит к потере важной информации, так как для описания данных достаточно небольшого количества первых факторов.

Эта точка зрения была подтверждена и развита в статье Banbura et al. [2010], в которой авторы строят VAR-модели для 3, 7, 20 и 131 переменных и показывают, что модели с большей размерностью демонстрируют лучшие прогнозные способности, чем модели малой размерности и даже FAVAR. Интересно отметить, что хорошая прогнозная способность достигается уже в модели с 20 переменными, поэтому как для прогнозирования, так и для структурного анализа достаточно сконцентрироваться на агрегированных данных. Важность полученного в данной работе вывода трудно переоценить. Он означает, что BVAR могут успешно применяться для анализа выборок высокой размерности, т.е. в области, в которой традиционно доминировали факторные модели. Дополнительным преимуществом BVAR по сравнению с факторными моделями в рамках структурного анализа (которого мы не касаемся в данном разделе исследования) является то, что функции отклика на импульс (IRF) обладают более простой интерпретацией для BVAR, чем для DFM или FAVAR.

Аналогичная модель для Новой Зеландии была построена в работе Bloor, Matheson [2010], в которой они использовали метод условного прогнозного оценивания Waggoner, Zha [1999]. Авторы строят три BVAR-модели (с 9, 13 и 35 переменными), делают вывод, что BVAR обладает более высокой предсказательной способностью, чем несколько одномерных и векторных авторегрессионных моделей. При этом, хотя результаты варьируют по разным переменным, в общем и целом BVAR с большим числом переменных характеризуется более высокой точностью прогноза.

Отталкиваясь от вывода, полученного в работе Banbura et al. [2010], о том, что модель BVAR на большой выборке продемонстрировала более точный прогноз, чем FAVAR, автор статьи [Koop, 2013] проанализировал прогнозные способности BVAR с другими априорными распределениями по отношению к факторным моделям и сделал вывод в пользу BVAR, хотя нельзя утверждать, что для любых выборок доминирует какой-то определенный вид априорного распределения.

В этом же ключе написана работа Beauchemin, Zaman [2011]. Авторы используют такое же априорное распределение, как Banbura et al. [2010] и Bloor, Matheson [2010] для оценки BVAR для 16 переменных по американским данным, однако выбор показателя жесткости априорного распределения происходит несколько по-иному, чем в указанных работах. В работе показано, что для всех переменных, кроме ставки по федеральным фондам, BVAR обеспечивает значительно более точный прогноз, чем случайное блуждание со смещением.

Метод анализа

В нашей работе мы строим байесовские векторные авторегрессии с априорным распределением Миннесоты. Незначительная модификация по отношению к Litterman [1986] выражается в том, что часть рядов предполагаются стационарными, что отражается в априорном распределении параметров матрицыA_1. Моменты априорного распределения элементов матриц A_i записываются следующим образом:

Диагональные элементы матрицы A_1:

$$a_{ii}^1 \sim N(\delta_i, \lambda^2) \tag{3}$$

Недиагональные элементы матрицы A_1:

$$a_{ij}^k \sim N\left(0, \frac{\upsilon\lambda^2\sigma_i^2}{\sigma_j^2}\right) \tag{4}$$

Диагональные элементы матриц $A_2, \dots, A_p$ (т. е. $k = 2, \dots, p$):

$$a_{ii}^k \sim N\left(0, \frac{\lambda^2}{k^2}\right), \tag{5}$$

Недиагональные элементы матриц $A_1, \dots, A_p$ (т. е. $k = 2, \dots, p$):

$$a_{ij}^k \sim N\left(0, \frac{\upsilon\lambda^2\sigma_i^2}{k^2\sigma_j^2}\right) \tag{6}$$

Все параметры предполагаются априорно независимыми. Ковариационная матрица остатков предполагается диагональной и известной: $\Psi = \Sigma$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Априорное распределение параметра при единичном векторе (c) предполагается неинформативным.

Мы следуем Banbura et al. [2010] и устанавливаем $\delta_i = 1$ для всех нестационарных рядов и $\delta_i = 0$ – для всех остальных. Ключевым параметром, отвечающим за «жесткость» априорного распределения (и, как следствие, за относительный вес априорного распределения при формировании апостериорного), является λ. Чем ближе λ к 0, тем меньшее влияние на апостериорное распределение оказывают фактические данные и тем ближе оно к априорному. При стремлении λ к бесконечности апостериорное среднее параметров приближается к оценке простого метода наименьших квадратов. Ключевой результат работы De Mol et al. [2008], подтвержденный Banbura et al. [2010], состоял в том, что λ должно зависеть от размерности выборки, т.е. от n. С увеличением n должно происходить сокращение λ, для того чтобы не происходило излишней параметризации модели.

Функция $\frac{1}{k^2}$ показывает, насколько быстро сокращается дисперсия параметров при увеличении номера лага. Это означает, что для лагов высоких порядков априорное распределение параметров становится более «сконцентрированным» вокруг нулевого значения и отражает предпосылку о том, что влияние более далеких лагов на сегодняшние значения менее вероятно, чем влияние более близких.

Соотношение дисперсий $\frac{\sigma_i^2}{\sigma_j^2}$ необходимо учесть при определении априорной дисперсии, так как разные ряды могут иметь разные единицы измерения и разную изменчивость.

Параметр υ показывает, насколько информация о лагах других переменных менее важна, чем информация о собственных лагах переменной.

Во всех подробно описанных выше работах [Banbura et al., 2010; Bloor, Matheson, 2010; Koop, 2010; Beauchemin, Zaman, 2011] авторы используют естественно-сопряженную версию Миннесоты-распределения [Kadiyala, Karlsson, 1997; Robertson, Tallman, 1999]. В данной работе мы накладываем только априорное распределение Миннесоты и оставляем анализ BVAR с сопряженным нормальным – обратным Уишарта-распределением для будущих исследований [Demeshev, Malakhovskaya, 2015].

Основная выборка состоит из 14 временных рядов с сентября 1995 г. по май 2014 г. (подробное описание рядов см. в следующем разделе), исходная выборка содержит 225 наблюдений. После перехода к логарифмам для всех рядов, кроме процентной ставки и уровня безработицы, мы устраняем сезонность в рядах, демонстрирующих сезонные колебания. Далее происходит проверка на стационарность, для чего используются ADF и KPSS тесты. Такая проверка необходима, для того чтобы определить априорное математическое ожидание параметров, стоящих на главной диагонали A_1. Следуя методологии базовой работы, мы назначаем δ_i = 1 для нестационарных рядов и δ_i = 0 для стационарных.

На втором этапе мы оцениваем три обычных VAR-модели в сокращенной форме для разного набора переменных и строим по ним прогнозы. Базовый период оценивания составляет 201 месяц (с сентября 1995 по май 2012 г.), период прогноза составляет 24 месяца (с июня 2012 по май 2014 г.). Мы строим VAR для 5 и 6 переменных по аналогии со многими монетарными моделями, использовавшимися для структурного анализа различных экономик [Sims, 1992; Kim, Roubini, 2000; Bjornland, 2008; Uhlig and Scholl, 2008]. В модель с 5 переменными мы включаем показатель деловой активности (индекс промышленного производства), индекс цен (подсчитанный с помощью ИПЦ), инструмент монетарной политики (в качестве прокси для которого мы берем процентную ставку межбанковского рынка), валютный курс и денежный агрегат M2. В модель с 6 переменными мы включаем дополнительно цены на нефть. Количество лагов определяется путем минимизации информационных критериев. Прогноз строится на 1, 3, 6 и 12 месяцев.

Для определения λ и относительного качества прогноза мы используем обычную для такого рода моделей схему [Banbura et al., 2010], предполагающую, что референтной моделью является та, для которой $\lambda = 0$. Это означает, что дисперсии всех параметров a_{ij}^k , $k = 1,..,p$ равны нулю, т.е. те переменные, которые были признаны стационарными, описываются моделью белого шума (WN) с константой ($y_{i,t} = c_i + u_{i,t}$), а те переменные, которые были признаны нестационарными, описываются моделью случайного блуждания (RW) со смещением ($y_{i,t} = c_i + y_{i,t-1} + u_{i,t}$). Мы будем называть эту модель $RWWN$ и обозначать индексом ноль (так как $\lambda = 0$). Выборка делится на обучающую (с сентября 1995 по май 2012 г.) и оценивающую (с июня 2012 по май 2014 г.).

Схема выбора λ и оценки качества прогноза состоит из следующих этапов:

1) На первом этапе строятся внутривыборочные одноопериодные прогнозы на обучающей выборке и рассчитывается среднеквадратичная ошибка прогноза для показателя деловой активности ($MSFE_{ip}^{0}$), индекса цен ($MSFE_{p}^{0}$) и процентной ставки ($MSFE_{r}^{0}$).
2) Затем на обучающей выборке оценивается обычная (не байесовская) VAR-модель для трех переменных. Так как оценки байесовской VAR совпадают с оценками метода наименьших квадратов при $\lambda = \infty$, то среднеквадратичные ошибки прогноза по этой модели для показателя деловой активности, индекса цен и процентной ставки мы будем обозначать как $MSFE_{ip}^{\infty}$, $MSFE_{p}^{\infty}$ и $MSFE_{r}^{\infty}$ соответственно.
3) Далее рассчитываются показатели $FIT_{\infty}^{(2)}$ и $FIT_{\infty}^{(3)}$.

$$FIT_{\infty}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{MSFE_{ip}^{\infty}}{MSFE_{ip}^{0}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{MSFE_{p}^{\infty}}{MSFE_{p}^{0}} \quad (8)$$

$$FIT_{\infty}^{(3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{MSFE_{ip}^{\infty}}{MSFE_{ip}^{0}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{MSFE_{p}^{\infty}}{MSFE_{p}^{0}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{MSFE_{r}^{\infty}}{MSFE_{r}^{0}} \quad (9)$$

В отличие от работ Banbura et al. [2010] и Bloor, Matheson [2011], где показатели соответствия рассчитывались только для трех переменных, мы хотим понять, насколько сильно изменятся результаты, если при нахождении оптимального λ не принимать во внимание процентную ставку.

4) На следующем этапе на обучающей выборке оцениваются BVAR-модели для 5, 6 и 14 переменных (обозначаем их индексом m) и для большого числа различных λ рассчитываются среднеквадратичные ошибки прогноза для индекса промышленного производства $MSFE_{ip}^{\lambda,m}$, индекса цен $MSFE_{p}^{\lambda,m}$ и процентной ставки $MSFE_{r}^{\lambda,m}$, а также показатели $FIT_{\lambda,m}^{(2)}$ и $FIT_{\lambda,m}^{(3)}$:

$$FIT_{\lambda,m}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{MSFE_{ip}^{\lambda,m}}{MSFE_{ip}^{0}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{MSFE_{p}^{\lambda,m}}{MSFE_{p}^{0}} \quad (10)$$

$$FIT_{\lambda,m}^{(3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{MSFE_{ip}^{\lambda,m}}{MSFE_{ip}^{0}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{MSFE_{p}^{\lambda,m}}{MSFE_{p}^{0}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{MSFE_{r}^{\lambda,m}}{MSFE_{r}^{0}} \quad (11)$$

5) Оптимальное λ рассчитывается как значение, при котором минимизируется отклонение $FIT_{\lambda,m}$ от FIT_{∞}:

$$\lambda_m^{(2)} = argmin\left|FIT_\infty - FIT_{\lambda,m}^{(2)}\right| \quad (12)$$

$$\lambda_m^{(3)} = argmin\left|FIT_\infty - FIT_{\lambda,m}^{(3)}\right| \quad (13)$$

После того как выбрано оптимальное значение λ для каждой модели, происходит построение вневыборочных прогнозов на оценивающей выборке.

6) Будем строить прогнозы на 1, 3 и 6 месяцев ($h = 1, 3, 6$). Тогда максимальная длина прогноза (H) равна 6. Обозначим начало прогнозной выборки (июнь 2012 г.) как T_0 и ее окончание (май 2014г.) за T_1. Вневыборочные прогнозы строятся для каждого $T = T_0 + H - h, \dots, T_1 - h$. Оценка байесовских VAR с заданным λ происходит с помощью скользящего окна по 120 наблюдениям (момент T и 119 наблюдений, предшествующих T).
7) Для каждой модели (m) и каждого прогнозного окна (h) рассчитываются вневыборочные среднеквадратичные ошибки прогноза для индикатора деловой активности ($OMSFE_{ip,h}^{\lambda,m}$) , индекса потребительских цен ($OMSFE_{p,h}^{\lambda,m}$) и процентной ставки ($OMSFE_{r,h}^{\lambda,m}$):

$$OMSFE_{ip,h}^{\lambda,m} = \frac{1}{T_1-T_0-H+1}\sum_{T=T_0+H-h}^{T_1-h}\left(y_{1,T+h|T}^{\lambda,m} - y_{1,T+h}\right)^2, \quad (14)$$

$$OMSFE_{p,h}^{\lambda,m} = \frac{1}{T_1-T_0-H+1}\sum_{T=T_0+H-h}^{T_1-h}\left(y_{2,T+h|T}^{\lambda,m} - y_{2,T+h}\right)^2, \quad (15)$$

$$OMSFE_{r,h}^{\lambda,m} = \frac{1}{T_1-T_0-H+1}\sum_{T=T_0+H-h}^{T_1-h}\left(y_{3,T+h|T}^{\lambda,m} - y_{3,T+h}\right)^2, \quad (16)$$

где $y_{1,T+h}$, $y_{2,T+h}$и $y_{3,T+h}$ – реализованные значения в момент $T + h$ индекса промышленного производства, индекса цен и процентной ставки соответственно и $y_{1,T+h|T}^{\lambda,m}$, $y_{2,T+h|T}^{\lambda,m}$и $y_{3,T+h|T}^{\lambda,m}$ – прогноз, построенный в момент Tна h периодов вперед по модели m с использованием параметра λ для индекса промышленного производства, индекса цен и процентной ставки соответственно.

8) По аналогии с предыдущим пунктом рассчитываются среднеквадратичные ошибки вневыборочного прогноза для индикатора деловой активности($OMSFE_{ip,h}^{0,m}$), индекса цен ($OMSFE_{p,h}^{0}$) и процентной ставки ($OMSFE_{r,h}^{0}$) по модели RWWN и по обычной VAR-модели ($OMSFE_{ip,h}^{\infty}$,$OMSFE_{p,h}^{\infty}$и $OMSFE_{r,h}^{\infty}$) соответственно.
9) Качество прогноза BVAR для индекса промышленного производства измеряется с помощью показателей $RW\_RMSFE_{ip,h}^{m}$ и$VAR_RMSFE_{ip,h}^{m}$, где в первом случае средне-

квадратичная ошибка прогноза по BVAR соотносится с ошибкой по RWWN, а во втором случае – с ошибкой по VAR. Аналогично рассчитываются показатели качества прогноза для индекса потребительских цен ($RW\_RMSFE^{m}_{p,h}$ и $VAR\_RMSFE^{m}_{p,h}$) и процентной ставки ($RW\_RMSFE^{m}_{r,h}$ и $VAR\_RMSFE^{m}_{r,h}$).

$$RW\_RMSFE^{m}_{ip,h} = \frac{OMSFE^{\lambda,m}_{ip,h}}{OMSFE^{0}_{ip,h}} \quad (17)$$

$$RW\_RMSFE^{m}_{p,h} = \frac{OMSFE^{\lambda,m}_{p,h}}{OMSFE^{0}_{p,h}} \quad (18)$$

$$RW\_RMSFE^{m}_{r,h} = \frac{OMSFE^{\lambda,m}_{r,h}}{OMSFE^{0}_{r,h}} \quad (19)$$

$$VAR\_RMSFE^{m}_{ip,h} = \frac{OMSFE^{\lambda,m}_{ip,h}}{OMSFE^{\infty}_{ip,h}} \quad (20)$$

$$VAR\_RMSFE^{m}_{p,h} = \frac{OMSFE^{\lambda,m}_{p,h}}{OMSFE^{\infty}_{p,h}} \quad (21)$$

$$VAR\_RMSFE^{m}_{r,h} = \frac{OMSFE^{\lambda,m}_{r,h}}{OMSFE^{\infty}_{r,h}} \quad (22)$$

Изменение $RMSFE^{m}_{ip,h}$ и $RMSFE^{m}_{p,h}$ с изменением числа переменных в модели и прогнозного окна помогает сделать выводы о качестве прогноза BVAR по отношению к RWWN и обычной VAR.

Данные

Для оценки модели и построения прогнозов использовалось 14 российских макроэкономических временных рядов. Источником данных послужили базы Федеральной службы государственной статистики (ФСГС), Центрального банка РФ, IFS Международного валютного фонда и Центра анализа данных НИУ ВШЭ[4]. Все ряды изначально не содержали сезонной корректировки. Начало и конец выборки определялись доступностью данных.

[4] Скачивание происходило из IFS и ЦАД НИУ ВШЭ, однако если данные был взяты из ЦАД, то в таблице указан первоначальный источник, т.е. либо Центральный банк, либо ФСГС. Индекс реальных инвестиций рассчитан ЦАД по данным ФСГС.

Таблица 1. Источники данных

Название макроиндикатора	Тип данных	База (если есть)	Источник
Индекс промышленного производства	Базисный индекс	2010	IFS
Индекс потребительских цен	Базисный индекс	2010	IFS
Индекс занятости в промышленности	Базисный индекс	2010	IFS
Процентная ставка межбанковского рынка	В процентах годовых		IFS
Индекс реальных денежных доходов	Базисный индекс	Январь 1992 г.	ФСГС
Уровень безработицы	В процентах		IFS
Индекс цен на нефть марки Brent	Базисный индекс	2010	IFS
Индекс цен производителей	Цепной индекс		IFS
Ввод в действие новых жилых домов	В тыс. кв. м		ФСГС
Индекс реальных инвестиций в основной капитал	Базисный индекс	Январь 1994 г.	ЦАД
Индекс реальных зарплат	Базисный индекс	Январь 1993 г.	ФСГС
Денежный агрегат М2	В млрд. руб.		ЦБ
Индекс РТС	В пунктах	Сентябрь 1995 г.	
Реальный эффективный валютный курс	Базисный индекс	2010	IFS

Цепной индекс цен производителей был для дальнейших расчетов превращен в базисный.

Результаты

Прежде всего мы берем логарифмы всех рядов, кроме тех, что выражены в процентах, т.е. всех, кроме процентной ставки и уровня безработицы. Далее проводится сезонная корректировка всех рядов, которые потенциально могут испытывать сезонные колебания (индекс промышленного производства, индекс потребительских цен, индекс занятости в промышленности, индекс реальных денежных доходов, индекс цен производителей, ввод в действие новых жилых домов, индекс реальных инвестиций в основной капитал и индекс реальных заработных плат). Корректировка производится программой X13-ARIMA-SEATS, т.е. наиболее современным из всех существующих методов сезонной корректировки, разработанным в Банке Испании и поддерживаемым сейчас бюро Census [U. S. Census Bureau, 2006].

Далее все ряды проверяются на нестационарность, для чего используются KPSS и ADF-тесты. В обоих случаях уровень значимости фиксируется на 5%. В случае несоответствия выводов указанных тестов мы ориентируемся на ADF-тест и получаем, что все ряды можно считать нестационарными, кроме межбанковской процентной ставки. Это означает, что при формировании вектора δ мы присваиваем значения $\delta_i = 1$ всем переменным, кроме процентной ставки, тогда как для процентной ставки $\delta_i = 0$.

На следующем этапе на обучающей выборке мы строим модель RWWN и считаем среднеквадратичную ошибку прогноза для индекса промышленного производства ($MSFE_{ip}^0$), индекса потребительских цен ($MSFE_p^0$) и процентной ставки ($MSFE_r^0$). Затем мы строим модели векторной авторегрессии на обучающей выборке и также считаем соответствующие ошибки прогноза ($MSFE_{ip}^{\infty}$, $MSFE_{p}^{\infty}$ и $MSFE_{r}^{\infty}$. В отличие от научных работ, на которые мы опираемся, мы считаем ($MSFE^{\infty}$) не только для различных моделей (содержащих 3, 5 и 6 переменных), но и для разного количества лагов (от 1 до 5). Максимальное количество лагов (5) было определено в соответствии с информационными критериями. Для моделей с тремя переменными в соответствии с критериями SC и HQ следовало выбрать 5 лагов, а в соответствии с AIC оптимальный выбор был равен 10 лагам. Мы ориентируемся на HQи SQ критерии, так как известно, что при небольшой размерности VAR модели AIC выбирает слишком большое число лагов с положительной вероятностью [Lutkepohl, 2005, p. 150]. Далее мы рассчитываем показатели $FIT_{\infty}^{(2)}$и $FIT_{\infty}^{(3)}$по формулам (8) и (9) для модели с тремя переменными и для каждого количества лагов:

Таблица 2. Переменная FIT_{∞}

Лаг	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$FIT_{\infty}^{(2)}$	0,928	0,857	0,808	0,676	0,524
$FIT_{\infty}^{(3)}$	0,736	0,683	0,629	0,521	0,419

Полученные величины показывают, во сколько раз прогноз, построенный по VAR, оказывается точнее (если мерой точности прогноза выступает $MSFE$). Мы получили не противоречащие логике результаты: с увеличением количества лагов в модели происходит увеличение количества оцениваемых параметров и точность прогноза возрастает. Для дальнейших расчетов мы используем количество лагов, равное 5.

Далее на обучающей выборке мы оцениваем BVAR-модели для 5, 6 и 14 переменных[5] для каждого возможного λ из промежутка от 0 до 2 с шагом 0,01 и для каждой модели рассчитываем $MSFE_{ip}^{\lambda,m}$, $MSFE_{p}^{\lambda,m}$, $MSFE_{r}^{\lambda,m}$, $FIT_{\lambda,m}^{(2)}$, $FIT_{\lambda,m}^{(3)}$. Таким образом мы получаем 603 значения $FIT_{\lambda,m}^{(2)}$ и столько же $FIT_{\lambda,m}^{(3)}$. Наконец, для каждой модели мы выбираем такие значения λ, которые минимизируют отклонение $FIT_{\lambda,m}^{(2)}$ от $FIT_{\infty}^{(2)}$ и $FIT_{\lambda,m}^{(3)}$ от $FIT_{\infty}^{(3)}$. Полученные результаты показаны в таблице.

Таблица 3. Оптимальные значения λ_m

	$\boldsymbol{n=3}$	$\boldsymbol{n=5}$	$\boldsymbol{n=6}$	$\boldsymbol{n=14}$
$\lambda_m^{(2)}$	∞	0,62	0,34	0,14
$\lambda_m^{(3)}$	∞	0,58	0,34	0,14

Далее мы переходим к шагам 6–8 из описанной выше схемы и с помощью скользящей векторной авторегрессии по 120 наблюдениям строим прогнозы на оценивающую выборку.

[5] Мы не проводим описанную далее процедуру поиска оптимального λ для модели по трем переменным, так как для нее по построению следует, что оптимальное λ равно бесконечности.

Например, если прогнозное окно равно 6, то для построения предсказания на 202-е наблюдение, оценивается BVAR по наблюдениям с 77 по 196, для построения предсказания на 203-е наблюдение, оценивается BVAR по наблюдениям с 78 по 197 и т.д. Таким образом, для каждой модели мы получаем по 25 прогнозов каждой переменной на один, три и шесть месяцев вперед.

На последнем этапе мы строим среднеквадратичные ошибки прогноза для каждой из 3 переменных, для каждого прогнозного окна и каждой модели. Эта процедура для каждой модели повторяется для оптимального λ, для $\lambda = 0$ (RWWN) и для $\lambda = \infty$ (обычная VAR).

Наконец, для каждого прогнозного окна и каждой переменной мы находим соотношения среднеквадратичной ошибки прогноза для BVAR к среднеквадратичной ошибке прогноза для RWWN и обычной VAR соответственно. Полученные значения показаны в таблицах.

Таблица 4. Отношение среднеквадратичных ошибок BVAR к RWWN

Переменная	h	$n = 3$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 14$
Индекс потребительских цен	1	0,73	0,56	0,63	0,80
Индекс потребительских цен	3	0,86	0,69	0,69	0,77
Индекс потребительских цен	6	0,76	0,60	0,56	0,64
Процентная ставка	1	0,15	0,27	0,22	0,16
Процентная ставка	3	0,20	0,40	0,47	0,36
Процентная ставка	6	0,26	0,37	0,47	0,42
Индекс промышленного производства	1	1,51	1,78	1,72	1,35
Индекс промышленного производства	3	1,33	1,85	1,89	2,41
Индекс промышленного производства	6	0,75	1,28	0,85	2,42

Таблица 5. Отношение среднеквадратичных ошибок BVAR к VAR

Переменная	h	$k = 3$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 14$
Индекс потребительских цен	1	1	0,90	1,00	0,44
Индекс потребительских цен	3	1	0,96	0,93	0,47
Индекс потребительских цен	6	1	0,94	0,92	0,45
Процентная ставка	1	1	0,81	0,57	0,19
Процентная ставка	3	1	0,94	0,79	0,38
Процентная ставка	6	1	0,90	0,79	0,38
Индекс промышленного производства	1	1	0,80	0,79	0,26
Индекс промышленного производства	3	1	0,78	0,68	0,41
Индекс промышленного производства	6	1	0,77	0,40	0,29

Таблица 5 показывает отношение среднеквадратичных ошибок прогноза для BVAR к RWWN. Для процентной ставки и индекса потребительских цен отношение $OMSFE$ для всех моделей и всех горизонтов прогнозирования меньше единицы, что свидетельствует о том, что для указанных переменных BVAR обеспечивает более высокую точность прогноза. Сле-

дует при этом отметить, что ни для одной переменной не прослеживается монотонного снижения относительной ошибки с увеличением количества включенных в модель переменных. Аналогично не прослеживается никакого монотонного изменения относительной ошибки ни с увеличением, ни с сокращением прогнозного окна. Что касается индекса промышленного производства, то практически во всех ячейках таблицы стоят величины больше единицы, что говорит о том, что предложенная модель не может улучшить качество прогноза этого показателя по сравнению с моделью случайного блуждания со сдвигом.

В табл. 6 показано отношение среднеквадратичных ошибок прогноза для BVAR к VAR. Здесь результаты более обнадеживающие. Для всех моделей с количеством переменных выше трех и всех прогнозных окон (за единственным исключением прогноза индекса потребительских цен на один период по модели с 6 переменными) полученное соотношение меньше единицы, что говорит о лучшей предсказательной способности модели с байесовской регуляризацией, чем без нее. Что касается прогноза индекса потребительских цен на один период по модели с 6 переменными, то соотношение ошибок прогноза равно единице, что говорит о том, что BVAR не уступает в качестве прогноза VAR. Важным результатом работы является то, что соотношение ошибок монотонно снижается с ростом переменных модели, при этом имеет место резкое снижение относительных ошибок прогноза для модели с 14 переменными по отношению к моделям с 5 и 6 переменными, что подтверждает на российских данных идею о привлекательности для прогноза моделей с большим количеством переменных.

Заключение

Данное исследование посвящено прогнозированию индекса промышленного производства, индекса цен и процентной ставки для российской экономики в модели байесовской векторной авторегрессии. Мы отталкивались от утверждения, высказанного в работе De Mol et al. [2008] и эмпирически проверенного в работе [Banbura et al., 2010] о том, что точность прогнозов возрастает с увеличением числа входящих в модель переменных при условии сокращения параметра, отвечающего за байесовскую регуляризацию, т.е. при условии сужения априорного распределения параметров.

Эта работа была построена на ежемесячных данных 1995–2014 гг. Для определения оптимального параметра регуляризации был использован механизм, описанный в работах [Banbura et al., 2010; Bloor, Matheson, 2011]. Интересный результат расчетов заключается в том, что в моделях с 6 и 14 переменными оптимальный параметр регуляризации не меняется (с точностью до одной сотой) в зависимости от того, ориентируемся ли мы на две (индекс промышленного производства и индекс потребительских цен) или три переменных (дополнительно добавляется процентная ставка межбанковского рынка). В модели с пятью переменными разница составляет всего 0,04.

Окончательные результаты данной работы мы расцениваем как смешанные. По отношению к обыкновенной векторной авторегрессии модель BVAR дает устойчиво лучшие прогнозы при числе переменных в модели не менее пяти. Более того, отношение среднеквадратичных ошибок прогноза уменьшается с ростом числа переменных в модели и значительно меньше для модели с 14, чем для модели с 5 и 6 переменными для трех рассматриваемых переменных и всех анализируемых прогнозных окон. Этот результат свидетельствует о высоком потенциале использования моделей с большим числом переменных.

Кроме того, BVAR обеспечивает более точный прогноз по сравнению с моделью случайного блуждания (белого шума для межбанковской процентной ставки) для процентной ставки и индекса потребительских цен. Этот результат верен для всех рассмотренных в работе моделей (с 3, 5, 6 и 14 переменными) и для всех прогнозных окон. При этом уменьшение среднеквадратичной ошибки прогноза может быть весьма значительным. К примеру, соотношение $MSFE$ для BVAR к RWWN для прогноза на 1 период составляет 0,15 для модели с тремя переменными, что свидетельствует о значительном повышении точности прогнозирования. Однако в данном случае не прослеживается монотонное снижение относительных ошибок прогноза с увеличением числа переменных в модели. Кроме того, для индекса промышленного производства модель BVAR дает устойчиво худший прогноз, чем модель случайного блуждания.

Продолжение данной работы может состоять в проверке робастности результатов по отношению к другим параметрам Миннесоты-распределения, другим априорным распределениям, числу включенных в модель лагов и т.д.

Литература

1. Arino, Franses (2000) “Forecasting the Level of Vector Autoregressions of Log Transformed,” *International Journal of Forecasting*, 16, 111–116.
2. Banbura, Giannone, Reichlin(2010) “Large Bayesian vector auto regressions”, *Journal of Applied Econometrics*, vol. 25, issue 1, 71–92
3. Beaucheman, Zaman (2011) “A medium scale forecasting model for monetary policy”, *Federal Reserve Bank of Cleveland working paper No 1128.*
4. Bernanke, Boivin (2003) Monetary policy in a data-rich environment, *Journal of Monetary Economics*, vol. 50, issue 3, 525–546.
5. Bjornland H. (2008) “Monetary Policy and Exchange Rate Interactions in Small Open Economy, *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 110, issue 1, 197–221.
6. Bloor, Matheson (2010) “Real-time conditional forecasts with Bayesian VARs: An application to New Zealand”, *The North American Journal of Economics and Finance*, vol. 22, issue 1, 26–42.
7. Cheong, Lee (2014) “Forecasting with a parsimonious subset VAR model”, *Economics Letters*, vol. 125, issue 2, 167–170.
8. Clark, McCracken (2006) “Forecasting with small macroeconomic VARs in the presence of instabilities”, *Finance and Economic Discussion Series from Board of Governors of Federal Reserve System.*
9. De Gooijer, Hyndman (2006)“25 years of time series forecasting”, *International Journal of Forecasting*, vol. 22, issue 3, 443–473.
10. De Mol, Giannone, Reichlin (2008) “Forecasting using a large number of predictors: is Bayesian regression a valid alternative to principal components?” *Journal of Econometrics*, 146, 318–328.
11. Demeshev, Malakhovskaya (2015) “Forecasting Russian Macroeconomic Indicators with BVAR”, manuscript.
12. Doan, Litterman, Sims(1984) “Forecasting and Conditional Projection Using Realistic Prior Distributions, *NBER Working paper No 1202.*
13. Funke (1990) “Assessing the forecasting accuracy of monthly vector autoregressive models: The case of five OECD countries”, *International Journal of Forecasting*, 1990, 6, (3), 363–378.
14. Kadiyala, Karlsson S. (1997) “Numerical methods for estimation and inference in Bayesian VAR-models”, *Journal of Applied Econometrics*, 12(2), 99–132.

15. Kim S., Roubini N. (2000) "Exchange rate anomalies in the industrial countries: A solution with a Structural VAR Approach", *Journal of Monetary Economics,* 45, 561–586.
16. Koop (2013) "Forecasting with Medium and Large Bayesian VARS*", Journal of Applied Econometrics*, 2013, vol. 28, issue 2, 177–203.
17. Litterman (1986) "Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions: five years of experience", *Journal of Business and Economic Statistics*, 4, 25–38.
18. Lutkepohl (2005) New Introduction to Multiple Time Series Analysis, Springer-Verlag, 764p.
19. Robertson, Tallman (1999) "Vector autoregressions: forecasting and reality", *Economic Review,* Q1, 4–18.
20. Scholl, Uhlig (2008) New evidence on the puzzles: Results from agnostic identification on monetary policy and exchange rates, *Journal of International Economics,* vol. 76, issue 1, 1–13.
21. Simkins (1995) Forecasting with vector autoregressive (VAR) models subject to business cycle restrictions, *International Journal of Forecasting*, vol. 11, issue 4, 569–583.
22. Sims C. (1980) "Macroeconomics and Reality"/*Econometrica*, vol. 48, issue 1, p. 1–48.
23. Sims C.(1992) Interpreting the macroeconomic time series facts, *European Economic Review,* 36, 975–1011.
24. U. S. Census Bureau (2006). X–13 A–S Reference Manual version 0.3. Statistical Research Division,Washington
25. Waggoner, Zha (1999) "A Gibbs sampler for structural vector autoregressions", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 349–366.

Demeshev, Boris, Malakhovskaya, Oxana

A comparison of random walk, VAR, and Litterman's BVAR models for forecasting output, price index, and interest rate [Electronic resource]: Working paper WP12/2015/03 / B. Demeshev, O. Malakhovskaya; National Research University Higher School of Economics. – Electronic text data (1 MB). – Moscow : Higher School of Economics Publ. House, 2015. – 21 p.

This paper compares the forecasting performance of random walk, frequentist vector autoregression (VAR), and Bayesian vector autoregression with Minnesota prior (BVAR) models while forecasting the industrial production index, consumer price index and the interbank interest rate. We show that the BVAR provides a more accurate forecast than the standard VAR. For all three macroindicators of interest, all forecasting horizons, and all model sizes, the mean squared error of the BVAR is lower than for the VAR. Moreover, the results show that the forecast made using the BVAR is more precise than the forecast made with a reference model (random walk – white noise) for the CPI and the interbank rate. But the BVAR cannot beat the random walk when forecasting the industrial production index.

Препринт WP12/2015/03
Серия WP12
Научные доклады
Лаборатории макроэкономического анализа

Демешев Борис Борисович, Малаховская Оксана Анатольевна

Сравнение случайного блуждания,
VAR и BVAR Литтермана при прогнозировании
выпуска, индекса цен и процентной ставки

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*
Изд. № 1944