Многочлены Чебышёва, многочлены Золотарёва и плоские деревья*

Ю. Ю. КОЧЕТКОВ
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: yukochetkov@hse.ru, yuyukochetkov@gmail.com

УДК 519.1

Ключевые слова: многочлен Шабата, многочлен Золотарёва, гомотопия.

Аннотация

Многочлен, у которого ровно два критических значения, называется обобщённым многочленом Чебышёва (или многочленом Шабата). Многочлен, у которого ровно три критических значения, называется многочленом Золотарёва. Два многочлена Чебышёва f и g называются Z-гомотопными, если существует семейство многочленов p_α, $\alpha \in [0,1]$, где $p_0 = f$, $p_1 = g$ и p_α, $\alpha \in (0,1)$, — многочлен Золотарёва. Так как многочлен Чебышёва задаёт плоское дерево (и наоборот), то Z-гомотопия определена на множестве плоских деревьев. В этой работе будут доказаны геометрические условия существования Z-гомотопии, будет описана Z-гомотопия для деревьев с пятью и шестью рёбрами и будут разобран интересный пример в классе деревьев с семью рёбрами.

Abstract

Yu. Yu. Kochetkov, Chebyshev polynomials, Zolotarev polynomials, and plane trees, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 161—170.

A polynomial with exactly two critical values is called a generalized Chebyshev polynomial (or Shabat polynomial). A polynomial with exactly three critical values is called a Zolotarev polynomial. Two Chebyshev polynomials f and g are called Z-homotopic if there exists a family p_α, $\alpha \in [0,1]$, where $p_0 = f$, $p_1 = g$, and p_α is a Zolotarev polynomial if $\alpha \in (0,1)$. As each Chebyshev polynomial defines a plane tree (and vice versa), Z-homotopy can be defined for plane trees. In this work, we prove some necessary geometric conditions for the existence of Z-homotopy of plane trees, describe Z-homotopy for trees with five and six edges, and study one interesting example in the class of trees with seven edges.

1. Введение

1.1. Обобщённые многочлены Чебышёва

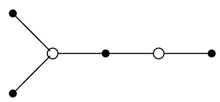
Многочлен $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ называется обобщённым многочленом Чебышёва, если он имеет ровно два конечных критических значения: α и β (в дальнейшем,

*Работа была поддержана РФФИ, грант № 11-01-00465a.

допуская неточность, обобщённые многочлены Чебышёва мы будем называть просто многочленами Чебышёва). Если $p(z)$ — многочлен Чебышёва, то множество $p^{-1}[\alpha, \beta]$ является плоским связным деревом T_p (см., например, [1]). Вершины дерева T_p — это прообразы точек α и β, а валентности вершин — кратности соответствующих критических точек (вершина v валентности 1 — это простой корень многочлена $p(z) - \alpha$ или $p(z) - \beta$). Обратно, для любого плоского связного дерева T найдётся многочлен Чебышёва $p(z)$, определённый с точностью до линейной замены переменной z и переменной $u = p(z)$, такой что дерево $p^{-1}[\alpha, \beta]$ изотопно T. Про такой многочлен мы будем говорить, что он *задаёт* дерево T. Далее через $[T]$ мы будем обозначать класс плоских деревьев, изотопных дереву T.

Вершины каждого плоского связного дерева T можно раскрасить в два цвета — белый и чёрный — так, чтобы смежные вершины имели разные цвета. Такую раскраску мы будем называть *бинарной структурой* на T. Очевидно, что вершины одного цвета — это прообразы точки α, а другого — прообразы точки β.

Типом плоского дерева с бинарной структурой мы будем называть наборы кратностей белых и чёрных вершин, записанные в порядке убывания. Так, дерево



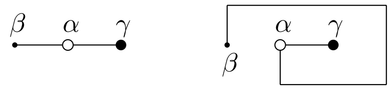
имеет тип $\langle 3, 2 \mid 2, 1, 1, 1 \rangle$.

Замечание 1. Часто требуют, чтобы критические значения α и β были числами 0 и 1.

1.2. Многочлены Золотарёва

Многочленом Золотарёва называется многочлен с ровно тремя конечными критическими значениями. Если p — многочлен Золотарёва степени n, α, β и γ — его критические значения, а C — простая дуга на комплексной плоскости, соединяющая точки α, β и γ, то $p^{-1}(C)$ — связное дерево с $2n$ рёбрами. Здесь точки из множества $p^{-1}\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — вершины дерева, а валентность вершины v, $p(v) = \alpha$, равна кратности критической точки v, если α — концевая точка дуги C, и удвоенной кратности, если α внутренняя. Пусть α — внутренняя точка дуги C. Вершины дерева $p^{-1}(C)$ допускают раскраску в три цвета: белый, чёрный и серый, где белые вершины — это прообразы точки α. Каждое ребро этого дерева имеет одну белую концевую вершину и одну чёрную или серую.

Замечание 2. Если C_1 и C_2 — две дуги, соединяющие точки α, β и γ, то деревья $p^{-1}(C_1)$ и $p^{-1}(C_2)$ в общем случае изотопически неэквивалентны. Например, потому, что дуги можно выбрать так:



C_1 C_2 .

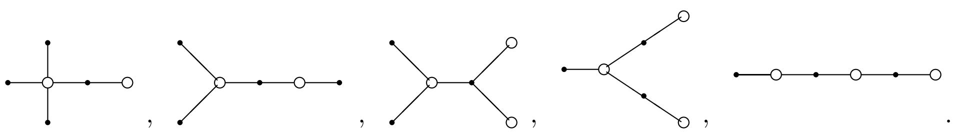
Паспортом многочлена Золотарёва мы будем называть наборы кратностей критических точек, отвечающих первому, второму и третьему критическому значению. Наборы кратностей мы будем записывать в порядке невозрастания в виде $\langle k_1, k_2, \ldots \mid l_1, l_2, \ldots \mid m_1, m_2, \ldots \rangle$. Так, критическими точками многочлена $x^2(x-1)^2(3x-1)$ являются 0, 1, 2/3, 1/5 со значениями 0, 0, 4/81, $-32/3125$ соответственно. Паспорт этого многочлена имеет вид $\langle 2, 2 \mid 2 \mid 2 \rangle$.

2. Z-гомотопия

Определение 1. Два дерева T_1 и T_2 мы будем называть Z-гомотопными, если существует непрерывное однопараметрическое семейство многочленов p_λ, $\lambda \in [0, 1]$, такое что

— многочлены p_λ имеют одну и ту же степень;
— многочлен p_0 является многочленом Чебышёва и задаёт дерево T_1;
— многочлен p_1 является многочленом Чебышёва и задаёт дерево T_2;
— многочлены p_λ при $\lambda \neq 0, 1$ являются многочленами Золотарёва и *не* являются многочленами Чебышёва.

Пример 1. Рассмотрим вопрос о Z-гомотопности деревьев с пятью рёбрами. Всего имеется пять таких деревьев:



T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , T_5 .

Положим

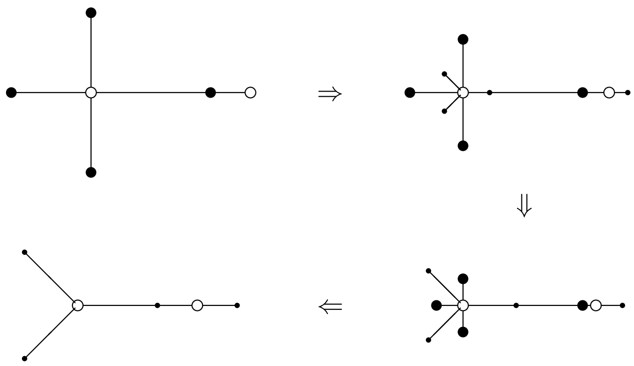
$$p = \int x^2(x-1)(x-a)\,dx.$$

Критические точки многочлена p — это 0, 1 и a, а соответствующие критические значения — 0, $5a - 3$ и $a^3(5 - 3a)$. Многочлен Золотарёва p становится многочленом Чебышёва, если:

— $a = 0$ — получаем дерево T_1;
— $a = 1$ — получаем дерево T_3;
— $p(1) = 0$, тогда $a = 3/5$, и мы получаем дерево T_2;

— $p(a) = 0$, тогда $a = 5/3$, и мы получаем дерево T_2;
— $p(1) = p(a)$, тогда $a = (-2 \pm \sqrt{5}\,i)/3$, и мы получаем дерево T_4.

Изменение параметра a позволяет реализовать Z-гомотопии между деревьями T_1, T_2, T_3 и T_4. Например, при увеличении параметра a от 0 до $3/5$ происходит следующая деформация дерева (дуга C в данном случае — это отрезок, соединяющий критические значения $5a - 3$ и $a^3(5 - 3a)$):



Деревья T_1, T_2 и T_4 Z-гомотопны дереву T_5. Действительно, рассмотрим многочлен

$$p(x) = \int x(x-1)(x-a)(x-b)\,dx.$$

Условие $p(a) = p(0)$ при $a \neq 2$ делает этот многочлен многочленом Золотарёва (из условия следует, что $b = (3a^2 - 5a)/(5a - 10)$). Однако при некоторых a этот многочлен вырождается в многочлен Чебышёва. А именно:

1) если $a = 0$, то $b = 0$, и мы получаем многочлен Чебышёва, задающий дерево T_1;
2) если $a = 1$, то $b = 2/5$ и $p(1) = 0$, и мы получаем многочлен Чебышёва, задающий дерево T_2;
3) если $a = 5/3$, то $b = 0$, и мы получаем многочлен Чебышёва, задающий дерево T_2;
4) если $a = \pm\sqrt{5}$, то $b = 1 \pm \sqrt{5}$ и $p(1) = p(b)$, и мы получаем многочлен Чебышёва, задающий дерево T_5;
5) если $a = (5 \pm \sqrt{5})/4$, то $b = -(1 \pm \sqrt{5})/4$ и $p(1) = p(b)$, и мы получаем многочлен Чебышёва, задающий дерево T_5;
6) если $a = (5 \pm \sqrt{5}\,i)/3$, то $b = 1$, и мы получаем многочлен Чебышёва, задающий дерево T_4.

Теперь мы видим, что изменение параметра a позволяет построить Z-гомотопию между деревьями T_1 и T_5, T_2 и T_5, T_4 и T_5.

Деревья T_3 и T_5 не являются Z-гомотопными. Это утверждение будет обосновано в следующем разделе, оно следует также из результатов раздела 4.

3. Геометрия пространства многочленов Золотарёва степени 5

Пусть
$$q = x^4 + ax^2 + bx + c, \quad p = \int q\,dx.$$
Многочлен p является многочленом Золотарёва, если среди чисел $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$, $p(x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — корни многочлена q, имеется лишь три различных, т. е. многочлен $s(y) = \big(y - p(x_1)\big)\big(y - p(x_2)\big)\big(y - p(x_3)\big)\big(y - p(x_4)\big)$ имеет кратный корень, а значит, его дискриминант равен нулю.

Это даёт нам соотношение на параметры a, b и c:
$$(1280a^6 - 32256a^4c + 9504a^3b^2 + 269568a^2c^2 - 69984ab^2c - 19683b^4 - 746496c^3) \times \\ \times (16a^4c - 4a^3b^2 - 128a^2c^2 + 144ab^2c - 27b^4 + 256c^3) = 0.$$
Мы видим, что пространство многочленов Золотарёва состоит из двух компонент: C_1 и C_2. Соотношение
$$16a^4c - 4a^3b^2 - 128a^2c^2 + 144ab^2c - 27b^4 + 256c^3 = 0,$$
задающее компоненту C_2, — это просто условие равенства нулю дискриминанта многочлена q.

Пересечение $C_1 \cap C_2$ состоит из трёх компонент: $C_1 \cap C_2 = C_3 \cup C_4 \cup C_5$.

— Многочлены из компоненты C_3 являются многочленами Чебышёва и задают дерево T_4.
— Многочлены из компоненты C_4 являются многочленами Чебышёва и задают дерево T_2.
— Многочлены из компоненты C_5 являются многочленами Чебышёва и задают дерево T_1.

Многочлены Чебышёва, задающие дерево T_5, принадлежат только компоненте C_1. Многочлены же Чебышёва, задающие дерево T_3, принадлежат только компоненте C_2. Таким образом, семейство многочленов Золотарёва, связывающее два таких многочлена должно содержать многочлен Чебышёва из пересечения $C_1 \cap C_2$. Но тогда это семейство не является Z-гомотопией.

4. Теоремы

В этом разделе будет доказано достаточное условие того, что дерево не Z-гомотопно «цепочке».

Лемма 1. *Пусть p_λ, $0 < \lambda < 1$, — непрерывное семейство многочленов Золотарёва степени n. Тогда паспорта многочленов p_λ одинаковы.*

Доказательство. Обозначим через a_λ, b_λ и c_λ критические значения многочлена p_λ, непрерывно зависящие от параметра λ. Изменения паспорта при изменении (возрастании или убывании) параметра λ могут происходит только при слиянии корней многочлена $p_\lambda - a_\lambda$ (или $p_\lambda - b_\lambda$, или $p_\lambda - c_\lambda$): два корня x'_λ и x''_λ многочлена $p_\lambda - a_\lambda$ кратностей k' и k'' соответственно сближаются при $\lambda \to \mu$ и образуют один корень x_μ многочлена $p_\mu - a_\mu$ кратности $k' + k'' - 1$.

Пусть паспорт многочлена p_λ имеет вид $\langle k_1, \ldots, k_r \mid l_1, \ldots, l_s \mid m_1, \ldots, m_t \rangle$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = n, \quad \sum_{i=1}^{s} l_i = n, \quad \sum_{i=1}^{t} m_i = n,$$

$$\sum_{i=1}^{r}(k_i - 1) + \sum_{i=1}^{s}(l_i - 1) + \sum_{i=1}^{t}(m_i - 1) = n - 1.$$

Следовательно, $r + s + t = 2n + 1$. Но слияние корней уменьшает число r, что противоречит полученному равенству. $\square$

Замечание 3. Таким образом, следует говорить не просто о Z-гомотопии, но о Z-гомотопии в классе многочленов Золотарёва с заданным паспортом. Так, пятирёберные деревья T_1, T_2, T_3 и T_4 попарно Z-гомотопны в классе многочленов Золотарёва с паспортом $\langle 3 \mid 2 \mid 2 \rangle$, а деревья T_1 и T_5, T_2 и T_5, T_4 и T_5 Z-гомотопны в классе многочленов Золотарёва с паспортом $\langle 2, 2 \mid 2 \mid 2 \rangle$.

Лемма 2. *Пусть p_λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, — непрерывное семейство многочленов степени n, причём p_0 — многочлен Чебышёва, а p_λ при $\lambda > 0$ — многочлены Золотарёва, но не многочлены Чебышёва. Предположим, что критическая точка a многочлена p_0 кратности k распалась в семействе p_λ, $\lambda > 0$, на m критических точек $a_1(\lambda), \ldots, a_m(\lambda)$ кратностей $k_1, \ldots, k_m$. Тогда числа $p_\lambda\bigl(a_1(\lambda)\bigr), \ldots, p_\lambda\bigl(a_m(\lambda)\bigr)$ не могут все быть одинаковыми.*

Доказательство. Предположим противное:

$$p_\lambda\bigl(a_1(\lambda)\bigr) = \ldots = p_\lambda\bigl(a_m(\lambda)\bigr) = \alpha(\lambda).$$

Тогда при $\lambda \to 0$

$$a_i(\lambda) \to a, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \alpha(\lambda) \to \alpha = p_0(a).$$

Но так как $k - 1 = (k_1 - 1) + \ldots + (k_m - 1)$, из этого следует, что a является корнем кратности $k + m - 1$ многочлена $p_0 - \alpha$. Противоречие. $\square$

Определение 2. Дерево называется цепочкой, если валентности всех его вершин не больше 2.

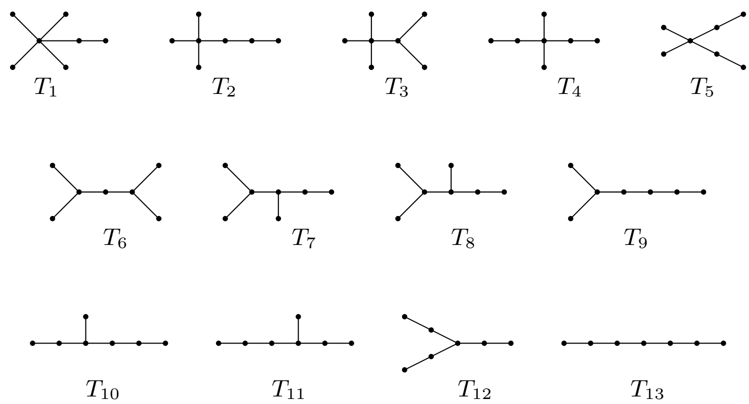
Теорема 1. *Если у дерева T есть белая вершина a валентности не меньше 3 и чёрная вершина b валентности не меньше 3, то оно не может быть Z-гомотопно цепочке.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует Z-гомотопия, связывающая многочлен Чебышёва p_0, отвечающий дереву T, с многочленом p_1, который отвечает цепочке. Это означает, что критические точки a и b в семействе p_λ распались на точки $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_n$ соответственно кратности 2. Пусть $p_0(a) = \alpha$ и $p_0(b) = \beta$. При малых λ значения $p_\lambda(a_1), \ldots, p_\lambda(a_m)$ близки к α и не могут быть все одинаковы, а значения $p_\lambda(b_1), \ldots, p_\lambda(b_n)$ близки к β и также не могут быть все одинаковы. Но тогда у многочлена p_λ не менее четырёх критических значений. Противоречие. □

Следствие 1. *Деревья T_3 и T_5 не являются Z-гомотопными.*

5. Деревья с шестью рёбрами

Приведём список всех шестирёберных деревьев.



Деревья T_3 и T_{13}, T_7 и T_{13} и T_8 и T_{13} не являются Z-гомотопными (см. теорему 1). Однако есть ещё одна негомотопная пара.

Предложение 1. *Деревья T_6 и T_{12} не являются Z-гомотопными.*

Доказательство. Предположим противное. Обозначим через a и b вершины валентности 3 в дереве T_6 и будем считать их белыми.

Случай 1. В семействе p_λ распалась лишь одна белая вершина b на точки b_1 и b_2 кратности 2. Тогда $p_\lambda(b_1) \neq p_\lambda(b_2)$ и число $p_\lambda(a)$ совпадает с числом $p_\lambda(b_1)$ или $p_\lambda(b_2)$. Но это означает, что в дереве T_{12}, кроме белой вершины валентности 3, будет ещё одна белая вершина валентности 2. Противоречие.

Случай 2. Белые вершины a и b распались в семействе p_λ на точки a_1 и a_2 и точки b_1 и b_2 соответственно. Тогда $p_\lambda(a_1) = p_\lambda(b_1)$, $p_\lambda(a_2) = p_\lambda(b_2)$ и $p_\lambda(b_1) \neq p_\lambda(b_2)$. Пусть пятая критическая точка кратности 2 находится в $c = c(\lambda)$. Образование вершины валентности 3 в дереве T_{12} не может происходить за счёт слияния точек a_1 и b_1 (или a_2 и b_2), иначе вершина валентности 3 в дереве T_{12} распадается на две критические точки с одинаковыми критическими значениями (при уменьшении параметра λ от 1 до 0). Также вершина валентности 3 не может быть образована слиянием точек a_1 (например) и c, иначе у дерева T_{12}, кроме вершины валентности 3, была бы вершина валентности 2 того же цвета. □

Остальные пары деревьев Z-гомотопны. Построение гомотопии, как правило, трудностей не представляет. Остановимся на нескольких интересных случаях.

1. Дерево T_4 и дерево T_{12}. Вершины дерева T_4 валентности 2 находятся в точках ± 1, а вершина валентности 4 — в начале координат. Вершина дерева T_{12} валентности 3 находится в начале координат, а вершины валентности 2 — в корнях третьей степени из единицы.

Рассмотрим многочлен

$$p = \int x^2(x-1)(x-a)(x-b)\,dx.$$

Условие $p(a) = p(b)$ делает его многочленом Золотарёва. При $a = 0$, $b = -1$ мы получаем многочлен Чебышёва, задающий дерево T_4. При изменении параметра a по маршруту $0 \to -i \to 2 - i \to 2 \to 2 + \sqrt{3}i/2 \to (-1 + \sqrt{3}i)/2$ параметр b меняется от -1 до $(-1 - \sqrt{3}i)/2$

2. Дерево T_{10} и дерево T_{13}. Вершина валентности 3 дерева T_{10} находится в начале координат, а вершины валентности 2 в точках 1, $a_1 \approx 1{,}57 - 0{,}03\,i$ и $b_1 \approx -0{,}57 + 0{,}58\,i$. Вершины дерева T_{13} находятся в точках 0, ± 1 и $\pm\sqrt{3}$.

Рассмотрим многочлен

$$p = \int x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)\,dx.$$

Условия $p(a) = 0$ и $p(b) = p(c)$ делают его многочленом Золотарёва. При $a = a_1$, $b = b_1$ и $c = 0$ мы получаем многочлен Чебышёва, задающий дерево T_{10}. При изменении параметра b от b_1 до -1 параметр a меняется от a_1 до $\sqrt{3}$, а параметр c — от 0 до $-\sqrt{3}$, перемещаясь по дуге в нижней полуплоскости.

3. Дерево T_{12} и дерево T_{13}. Вершина валентности 3 дерева T_{12} находится в точке $i/\sqrt{3}$, в вершины валентности 2 — в точках ± 1 и $\sqrt{3}\,i$. Вершины дерева T_{13} находятся в точках 0, ± 1 и $\pm 1/\sqrt{3}$.

Рассмотрим многочлен

$$p = \int (x^2-1)(x-a)(x-b)(x-c)\,dx.$$

Условия $p(-1) = p(1) = p(c)$ делают его многочленом Золотарёва. При $a = b = i/\sqrt{3}$ и $c = \sqrt{3}\,i$ мы получаем многочлен Чебышёва, задающий дерево T_{12}. При изменении параметра a от $i/\sqrt{3}$ до $1/\sqrt{3}$ параметр b меняется от $i/\sqrt{3}$ до $-1/\sqrt{3}$, а параметр c — от $\sqrt{3}\,i$ до 0.

6. Деревья с семью рёбрами

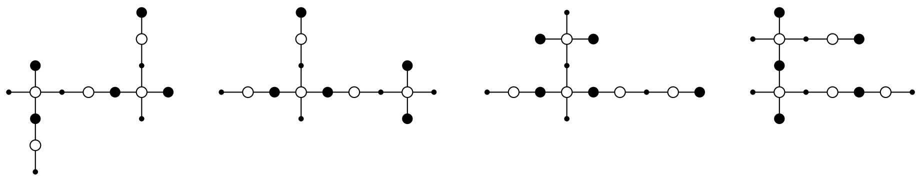
Многочлены Золотарёва степени 7 с паспортом $\langle 2,2 \mid 2,2 \mid 2,2 \rangle$ дают нетривиальный пример отсутствия $\mathbb{Z}$-гомотопии (нетривиальный в том смысле, что факт отсутствия не объясняется леммой 2 и теоремой 1). Не уменьшая общности, будем считать, что первым критическим значением является 0 и что соответствующие критические точки — это 0 и 1. Тогда такой многочлен имеет вид

$$p(x) = \int x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,dx,$$

причём выполнены условия

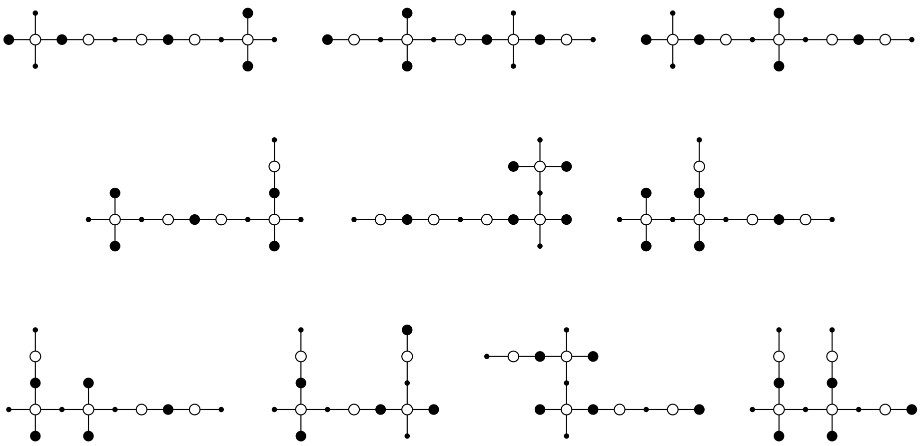
$$p(1) = 0, \quad p(a) = p(b), \quad p(c) = p(d).$$

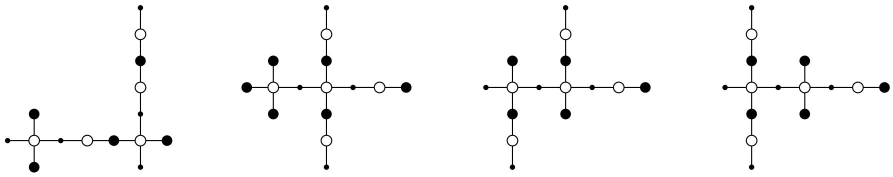
Алгебраическое многообразие C в четырёхмерном пространстве с координатами a, b, c, d, заданное тремя этими условиями, оказывается приводимым: оно распадается на две компоненты $C = C_1 \cup C_2$ степени 8 и 16. Перечислим деревья, отвечающие многочленам Золотарёва из компоненты C_1 (с точностью до зеркальной симметрии).



Группа монодромии многочленов Золотарёва из C_1 имеет порядок 168.

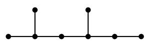
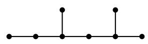
Перечислим деревья, отвечающие многочленам Золотарёва из компоненты C_2 (с точностью до зеркальной симметрии).



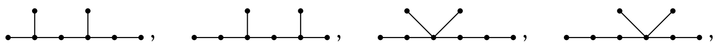


Группа монодромии многочленов Золотарёва из C_2 имеет порядок 2520.

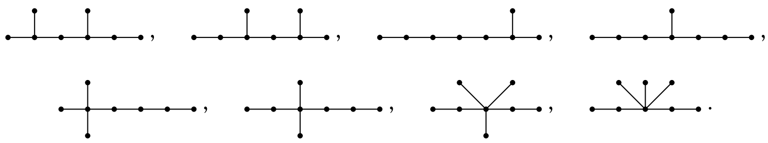
Многочлены из пересечения $C_1 \cap C_2$ являются многочленами Чебышёва, отвечающими деревьям

 или .

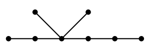
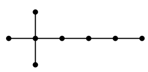
Компонента C_1, однако, содержит многочлены Чебышёва, отвечающие деревьям



а компонента C_2 содержит многочлены Чебышёва, отвечающие деревьям



Мы видим, что, например, деревья

 и 

не являются Z-гомотопными в классе многочленов Золотарёва с паспортом $\langle 2,2 \mid 2,2 \mid 2,2 \rangle$, хотя они являются Z-гомотопными в классе многочленов Золотарёва с паспортом $\langle 4 \mid 2 \mid 2 \rangle$.

Литература

[1] Звонкин А. К., Ландо С. К. Графы на поверхностях и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010.