УДК 330.42, 519.83

РАВНОВЕСИЯ В ИГРЕ НА СЕТИ С ПРОИЗВОДСТВОМ И ЭКСТЕРНАЛИЯМИ

Матвеенко Владимир Дмитриевич,
доктор физ.-мат наук, ординарный профессор Высшей школы экономики, г. Санкт-Петербург

Королев Алексей Васильевич,
канд. физ.-мат наук, доцент Высшей школы экономики, г. Санкт-Петербург

Бахтин Максим Алексеевич,
студент Высшей школы экономики, г. Санкт-Петербург

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается модель игрового взаимодействия с экстерналиями в сети, в которой участники принимают решение о величине инвестиций. Сравниваются две концепции равновесия: стандартное определение по Нэшу и «джекобианское» определение равновесия с экстерналиями. Для обоих случаев показано, что агенты могут быть пассивными, активными и гиперактивными, и выведены условия, при которых различные виды поведения будут оптимальными. Отдельно рассмотрен случай полной сети с одинаковыми агентами и показано, что увеличение числа участников способствует активному поведению агентов, но уменьшает их полезность.

Ключевые слова: сеть; структура сети; игра на сети; равновесие Нэша; экстерналия.

1. Введение

В современном мире процессы, происходящие во всех сферах жизни, включая экономику, характеризуются возрастающей взаимозависимостью агентов/акторов, которые действуют, находясь в некоторой сети взаимных связей, в которой решение одного агента оказывает влияние на его соседей. Это влияние обусловлено существованием экстерналий, создаваемых агентами в результате их деятельности. Ряд работ посвящен изучению экстерналий, связанных с потреблением, и их влиянию на олигопольных рынках (например, [1]). Другие работы показывают, что производственные экстерналии также необходимо учитывать при моделировании рынков [2]. С другой стороны, кроме самого факта существования экстерналий, важную роль играет то, как они распространяются в сети, то есть как устроены взаимосвязи между агентами. В [3] рассматривается применение сетей к экономическим вопросам: модели рынка труда, модели обмена, обучения, диффузии и игр, которые основаны на сетевой структуре, а также проводится обзор инструментов сетевого анализа, которые могут быть полезны для исследователей. В [4] дается обзор исследований игр на сетях, в частности, рассмотрены игры координации и игры со стратегической дополняемостью, в которых активные действия соседей агента создают стимулы к более активным действиям самого агента.

Данная работа является продолжением исследования [5], в котором изучается модель с производственными экстерналиями. Принципиальным новшеством [5] является использование «джекобианского» определения равновесия, состоящего в том, что агент, принимая решение о размере инвестиций, находится в некоторой среде, влияющей на его выигрыш, которая зависит от действий его соседей (экстерналий) и от действий его самого. При этом данная среда воспринимается агентом как экзогенная, то есть агент не принимает во внимает то, что его решение может изменить среду. Второй особенностью является динамический характер модели. В [5] показано, что равновесие зависит от структуры сети, и агент в равновесии может иметь один из трех видов поведения: быть пассивным (не инвестировать), активным (инвестировать часть дохода) или гиперактивным (инвестировать весь доход).

В данной статье исследуется модель [5] при обобщенном определении среды агента: мы допускаем, что влияние самого агента на свою среду имеет меньшее влияние, чем экстерналии, производимые его соседями, то есть его инвестиции входят в среду с понижающим коэффициентом. Мы сравниваем равновесные состояния при стандартном определении равновесия по Нэшу и «джекобианском» определении.

Показано, что и при стандартной концепции равновесия по Нэшу агент может быть пассивным, активным и гиперактивным, однако если влияние агента на свою среду достаточно высоко, то активное поведение не оптимально: агент будет либо пассивным, либо гиперактивным. Множества условий, при которых агент пассивен и при которых он активен, значительно сужаются, по сравнению с равновесием по «джекобианскому» определению. В отдельных областях значений понижающего коэффициента и экстерналии поведение совпадает по двум определениям равновесия, но уровень инвестиций агента в активном состоянии выше при стандартном определении равновесия по Нэшу.

Отдельно рассматривается внутреннее равновесие в полной сети. Показано, что при обоих определениях равновесия увеличение числа агентов ослабляет ограничения, необходимые для активного поведения, но приводит к снижению их полезности.

2. Описание модели

Имеется сеть из n вершин; $\mathbf{M}$ – ее матрица смежности: элементы M_{ij} и M_{ji} равны 1, если вершины i и j соединены между собой, и равны 0, если не соединены. В каждой вершине находится агент, чьи предпочтения описываются квадратичной функцией полезности: $U(c_1, c_2) = c_1(e - ac_1) + bc_2$, где $0 < a < 1/2$, $b > 0$.

В первом периоде каждый агент наделен запасом e, который он может потратить на потребление блага в текущем периоде и на инвестиции в производство блага для потребления во втором периоде ($e = c_1^i + k_i$). Благо во втором периоде производится в соответствии с билинейной производственной функцией: $F(k, K) = BkK$, где $B > 0$, k - уровень инвестиций агента, $K = \varphi k + \tilde{K}$ - среда агента, которая определяется как сумма инвестиции самого агента с понижающим коэффициентом φ и экстерналии $\tilde{K}$, равной сумме инвестиций всех его соседей. Содержательно φ отражает значимость инвестиций агента в формировании собственной среды. Чем ниже значение φ, тем слабее собственные инвестиции влияют на среду. Равенство $\varphi = 1$ соответствует рассмотренному в [5] случаю, в котором инвестиции самого агента имеют такой же вес в формировании среды, как и инвестиции его соседей. При $\varphi < 1$ среда агента формируется, в основном, инвестициями соседей, а собственные инвестиции имеют меньшее влияние. Для удобства обозначим $A = bB$ и будем полагать $a < A$.

Введем понятие платежной функция агента: $V(k, K) = U(e - k, F(k, K))$. При «джекобианском» определении равновесия, она имеет вид (индекс i опущен):

$$V(k, K) = e^2(1 - a) - ke(1 - 2a) - ak^2 + AkK.$$

При стандартном определении равновесия по Нэшу:

$$V(k, \tilde{K}) = e^2(1 - a) - ke(1 - 2a) - ak^2 + A\varphi k^2 + Ak\tilde{K}.$$

В матричной форме модель может быть записана следующим образом: вектор сред определяется как $\mathbf{K} = (\mathbf{M} + \varphi\mathbf{I})\mathbf{k}$, где $\mathbf{M}$ – матрица смежности, $\mathbf{I}$ – единичная матрица,

$\mathbf{k}$ – вектор-столбец инвестиций. $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{Mk}$ – вектор чистых экстерналий. Внутреннее равновесие (т.е. равновесие с активными агентами) описывается системой уравнений:

А) при стандартном определении равновесия: $(2A\varphi - 2a)\mathbf{k} + A\mathbf{Mk} = \bar{\mathbf{e}}$,

где $\bar{\mathbf{e}} = (1-2a)(e, e, ..., e)^T$.

Б) при «джекобианском» определении равновесия: $(A\varphi - 2a)\mathbf{k} + A\mathbf{Mk} = \bar{\mathbf{e}}$.

3. Сравнение равновесий при стандартном и «джекобианском» определениях и при различных значениях коэффициента φ

Следующее предложение 1 показывает, что при стандартном определении равновесия при $\varphi > \frac{a}{A}$ возможны лишь гиперактивное поведение (при достаточно высокой экстерналии) и пассивное (при достаточно низкой). При $\varphi < \frac{a}{A}$, помимо этого, агент становится активным при промежуточных значениях экстерналии.

Предложение 1. При стандартном определении равновесия при $\varphi < \frac{a}{A}$ оптимальным решением агента будет

А) быть пассивным: $k^N = 0$ при $\tilde{K} \le \frac{e(1-2a)}{A}$,

Б) быть активным: $k^N = k_s^N$ при $\frac{e(1-2a)}{A} < \tilde{K} < \frac{e(1-2A\varphi)}{A}$,

В) быть гиперактивным: $k^N = e$ при $\tilde{K} \ge \frac{e(1-2A\varphi)}{A}$.

При $\varphi > \frac{a}{A}$ оптимальным решением агента будет

А) быть пассивным: $k^N = 0$ при $\tilde{K} \le \frac{e(1-A\varphi-a)}{A}$,

Б) быть гиперактивным: $k^N = e$ при $\tilde{K} \ge \frac{e(1-A\varphi-a)}{A}$.

Чтобы понять причину различия в случаях большого и малого φ, заметим, что значение первой производной платежной функции, $D_1V(k, \tilde{K}) = -e(1-2a) - 2ak + 2A\varphi k + A\tilde{K}$, имеет смысл предельного эффекта инвестиций, а знак второй производной, $D_2V(k, \tilde{K}) = -2a + 2A\varphi$, показывает, возрастает или убывает этот эффект.

В случае $A\varphi > a$ предельный эффект инвестиций постоянно возрастает. Следовательно, как только экстерналия превышает пороговое значение, агент будет инвестировать максимально возможное количество, поскольку нет смысла остановиться на каком-либо промежуточном уровне инвестиций.

В случае $A\varphi < a$ вторая производная отрицательна, то есть предельный эффект инвестиций постоянно убывает. Следовательно, если агент не пассивен, то он будет увеличивать инвестиции лишь до уровня, при котором их предельный эффект опустится до нуля. В зависимости от экстерналии и параметров модели этот пороговый уровень инвестиций может лежать как выше, так и ниже максимально возможного. В случае, когда он лежит ниже максимально возможного, агент будет активен, то есть решение будет внутренним.

Для того, чтобы дать содержательную интерпретацию произведению $A\varphi$, можно разложить эффект от увеличения инвестиций на составляющие:

$$V_{+}(k+1,\widetilde{K}) = A(k+1)(\varphi(k+1)+\widetilde{K}) = Ak(\varphi k+\widetilde{K}) + A(\varphi k+\widetilde{K}) + Ak\varphi + A\varphi.$$

Здесь $Ak(\varphi k+\widetilde{K})$ – исходный уровень, $A(\varphi k+\widetilde{K})$ – чистый эффект инвестиций, $Ak\varphi$ – чистый эффект среды, $A\varphi$ – перекрестный эффект инвестиций и среды. Различие между двумя случаями становится интуитивно понятным. При достаточно малой и достаточно большой экстерналии решение будет угловым: пассивность или гиперактивность. При промежуточных значениях экстерналии, если перекрестный эффект инвестиций и среды достаточно велик ($A\varphi > a$), то для агента оптимальной будет гиперактивность, поскольку уменьшение потребления в первом периоде сполна компенсируется во втором: отдача от увеличения инвестиций дополняется значительным эффектом увеличения среды. Если перекрестный эффект инвестиций и среды низок ($A\varphi < a$), то при промежуточных значениях экстерналии агенту становится выгодно инвестировать и потреблять благо во втором периоде. Однако он не будет гиперактивным, потому что при достаточно больших инвестициях снижение потребления в первом периоде не будет компенсироваться во втором периоде из-за отсутствия достаточного эффекта инвестиций и среды.

Предложение 2. При «джекобианском» определении равновесия оптимальным решением агента будет

А) быть пассивным: $k^J = 0$ при $\widetilde{K} \le \dfrac{e(1-2a)}{A}$

Б) быть активным: $k_s^J = \dfrac{e(2a-1)+A\widetilde{K}}{2a-A\varphi}$ при $\dfrac{e(1-2a)}{A} < \widetilde{K} < \dfrac{e(1-A\varphi)}{A}$, если $\varphi < \dfrac{2a}{A}$, и при $\dfrac{e(1-A\varphi)}{A} < \widetilde{K} < \dfrac{e(1-2a)}{A}$, если $\varphi > \dfrac{2a}{A}$,

В) быть гиперактивным: $k^J = e$ при $\widetilde{K} \ge \dfrac{e(1-A\varphi)}{A}$.

Соотношения условий и оптимального поведения агента при двух определениях равновесия для случая $A > 1$ изображены на Рис. 1.

Существует 3 зоны, в которых агент ведет себя одинаково при обоих определениях равновесия: при достаточно низких влиянии на среду и экстерналии он пассивен; при низком влиянии на среду, но высокой экстерналии он активен; при достаточно высоком влиянии на среду и высокой экстерналии он гиперактивен. В остальных зонах при стандартном определении равновесия агент будет гиперактивен, а при «джекобианском» поведение будет различаться в зависимости от экстерналий и влияния на среду.

При стандартном определении равновесия, множества ограничений, при которых агент активен, а также при которых агент пассивен, значительно сужаются по сравнению со случаем «джекобианского» равновесия. Также можно заметить, что при «джекобианском» определении имеются области, где возможны различные равновесия при одной и той же экстерналии. Это вполне естественно, потому что смысл «джекобианского» определения равновесия именно в том, чтобы показать возможную «привязанность» агента к среде, в которой он находится. При стандартном определении равновесия такая ситуация невозможна. На Рис. 2 показаны возможные равновесные уровни инвестиций.

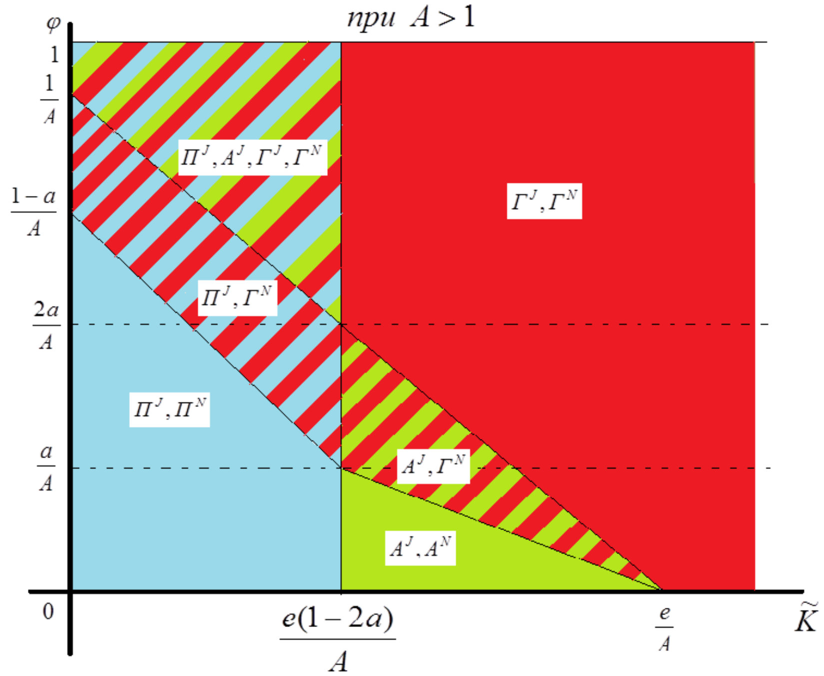

Рисунок 1 – Оптимальное поведение агента при стандартном и «джекобианском» определении равновесия при $A > 1$ в зависимости от сочетания φ и $\tilde{K}$

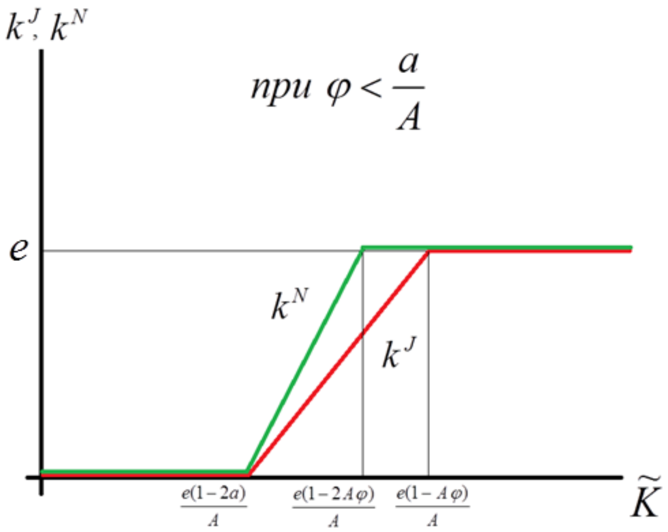

Рисунок 2 – Возможные равновесные уровни инвестиций при стандартном и «джекобианском» определении равновесия при $\varphi < \frac{a}{A}$ в зависимости от $\tilde{K}$

Мы видим, что при стандартном определении равновесия агент становится гиперактивным при меньшей экстерналии, чем при «джекобианском» определении равновесия. Причина в том, что агент осознает свое влияние на среду. При «джекобианском» определении агент получает некоторую экстерналию и принимает решение о собственных инвестициях, считая среду заданной. Если данная экстерналия (а следовательно и среда) недостаточно велика, то он не будет гиперактивным. При стандартном определении равновесия, агент получает такую же экстерналию, но принимает решение, осознавая свое влияние на среду. Даже если экстерналия достаточно мала, агент понимает, что его высокие инвестиции могут увеличить среду настолько, чтобы гиперактивность была выгодной. Т.е. агент будет гиперактивным при стандартном определении равновесия при меньшей получаемой экстерналии, поскольку он осознает, что его максимальные инвестиции увеличат среду, а не воспринимает её заданной, как в случае «джекобианского» определения равновесия.

Кроме того, значение инвестиций активного агента выше при стандартном определении равновесия, чем при «джекобианском». При стандартном определении, агент осознает дополнительный стимул к инвестированию – увеличение среды, а при «джекобианском» определении – нет. Поскольку стимул к инвестированию сильнее при стандартном определении, инвестиции находятся на более высоком уровне.

4. Равновесие в полных сетях

Теорема 1. При обоих определениях равновесия в полной сети поведение агентов в равновесии может быть только однородным, то есть уровень инвестиций всех агентов будет одинаковым.

Доказательство. Рассмотрим полную сеть из $n>1$ вершин при «джекобианском» определении равновесия. Предположим, что в равновесии для некоторых двух агентов $k_i > k_j$. Тогда для их сред $K_i > K_j$. Обозначим через $K_{-i,j}$ сумму инвестиций всех остальных агентов, кроме i, j. Тогда: $K_{-i,j} + k_j + \varphi k_i > K_{-i,j} + k_i + \varphi k_j$. Отсюда $(1-\varphi)k_j > (1-\varphi)k_i$, что противоречит исходному предположению. Следовательно $k_i = k_j$.

При стандартном определении равновесия в случае $\varphi < \frac{a}{A}$ доказательство аналогично, но вместо сред используется неравенство экстерналий. В случае $\varphi > \frac{a}{A}$ получаем два неравенства для пассивного и гиперактивного агентов: $K_{-i,j} + e \le \frac{e(1-A\varphi-a)}{A}$ и $K_{-i,j} + 0 \ge \frac{e(1-A\varphi-a)}{A}$, которые также дают очевидное противоречие.

Теорема 1 говорит о том, что в полной сети в равновесии имеет место «гомофилия»: могут существовать либо только пассивные, либо только активные, либо только гиперактивные агенты. Поэтому далее рассматриваются только случаи одинакового поведения всех агентов.

Замечание 1. Из предложения 1 следует, что в полной сети с n агентами при стандартном определении равновесия ситуация, когда все агенты пассивные, возможна всегда в случае $\varphi < \frac{a}{A}$ и при $A\varphi + a < 1$ в случае $\varphi > \frac{a}{A}$, а когда все агенты гиперактивные – при $n > \frac{1}{A} + (1-2\varphi)$ в случае $\varphi < \frac{a}{A}$ и при $n > \frac{1-a}{A} + (1-\varphi)$ в случае $\varphi > \frac{a}{A}$.

Замечание 2. Из предложения 2 следует, что в полной сети с n одинаковыми агентами при «джекобианском» определении равновесия ситуация, когда все агенты пассивные, может существовать при любых условиях, а когда все агенты гиперактивные – при $n > \frac{1}{A} + (1-\varphi)$.

В предыдущих двух замечаниях описаны условия, при которых все агенты в полной сети будут пассивными и гиперактивными при двух определениях равновесия. Мы видим, что условие пассивности в случае «джекобианского» определения равновесия более мягкое, а условие гиперактивности, наоборот, более жесткое.

Далее перейдем к рассмотрению внутреннего равновесия в полных сетях с однородным поведением агентов. Сначала рассмотрим случай изолированного агента.

Замечание 3. Из предложения 1 следует, что при стандартном определении равновесия изолированный агент никогда не будет активным.

Замечание 4. Из предложения 2 следует, что при «джекобианском» определении равновесия изолированный агент может быть активным при $\varphi > \frac{1}{A}$.

Эти результаты контрастируют между собой, что можно объяснить особенностью «джекобианского» равновесия – «привязанностью» агента к среде. Благодаря этому при условии $\varphi > \frac{1}{A}$ изолированный агент может в равновесии быть как пассивным или гиперактивным, так и активным.

Следующие предложения показывают, что чем крупнее сеть, тем слабее условия существования внутреннего равновесия, но полезность агентов при этом ниже.

Предложение 3. При стандартном определении равновесия, в полной сети равновесие будет внутренним при условии $\frac{1-A(n-1)}{2A} < \varphi < \frac{a}{A}$, где n – число вершин в сети. При этом увеличение числа агентов в сети приводит к уменьшению их полезности.

Предложение 4. При «джекобианском» определении равновесия, в полной сети равновесие будет внутренним при условии $\varphi > \frac{1-A(n-1)}{A}$. При этом увелчение числа агентов в сети приводит к снижению полезности агентов.

Данный эффект можно объяснить тем, что с ростом сети значительно снижаются инвестиции агентов. Это приводит к тому, что, несмотря на появление новых агентов, получаемые экстерналии и среды уменьшаются, из-за чего падает полезность агентов, так как блага для потребления во втором периоде производятся значительно меньше. В то же время, при более низких экстерналиях и среде, множество ограничений, при которых агенты будут гиперактивными, сужается, что делает условия активности более мягкими.

Список литературы

1. Katz M.L., Shapiro C. Network externalities, competition, and compatibility // American Economic Review. – 1985. – Vol. 75. – № 3. – P. 424-440.
2. Acemoglu D., Ozdaglar A. Competition and efficiency in congested markets // Math. Oper. Res. – 2007. – Vol. 32. – № 1. – P. 1-31.
3. Jackson M.O. An overview of social networks and economic applications // Benhabib J., Bisin A., Jackson M.O. (editors). Handbook of Social Economics Volume 1A. Amsterdam: Elsevier Science, 2010. – P. 511-579.
4. Jackson M.O., Zenou Y. Games on networks // Young P., Zamir S. (editors). Handbook of game theory. 2015. Vol. 4. Amsterdam: Elsevier Science, 2015. – P. 95-163.
5. Matveenko V.D., Korolev A.V. Network game with production and knowledge externalities // Contributions to Game Theory and Management. – 2015. – Vol. 8. – P. 199-222.