ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2010, том 432, № 1, с. 21–23

МАТЕМАТИКА

УДК 517.91

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И КОНЕЧНО-ГЛАДКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ НУЛЕВЫМ КОРНЕМ

© 2010 г.   В. С. Самовол

Представлено академиком Д.В. Аносовым 25.11.2009 г.

Поступило 10.12.2009 г.

В работе изучаются вопросы приводимости вещественной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к резонансной нормальной форме (далее – нормальной форме) в окрестности особой точки. Речь пойдет о системах, матрица линейной части которых имеет одно нулевое собственное число, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси. Также нас будет интересовать задача конечно-гладкой эквивалентности таких систем. Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1].

Нормальная форма систем обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно хорошо изучена. Аналитический случай исследован в работах А. Пуанкаре [2], К.Л. Зигеля [3], А.Д. Брюно [4]. В данной работе нас будет интересовать задача как о собственно нормальной форме, так и о приводимости к ней систем гладких дифференциальных уравнений. В большинстве работ, посвященных данной тематике, исследуются системы с невырожденной особой точкой (или инвариантным многообразием), в то время как даже слабо вырожденные системы весьма мало исследованы. Кроме того, большая часть работ охватывает задачи построения нормализующих преобразований конечной или бесконечной гладкости. Однако, как показывает анализ, ограничиваясь этим классом преобразований, не удается получить ответы на важные вопросы о свойствах частично вырожденных систем, в частности систем с одним нулевым корнем. Поэтому мы рассмотрим класс преобразований с особенностями и покажем, что с помощью таких преобразований можно получить весьма полезную информацию как о нормальной форме системы, так и о гладкой эквивалентности систем. По поводу частично вырожденных систем см. [5]. В работах [6, 7] показано, что из формальной эквивалентности следует бесконечно гладкая эквивалентность систем с одним нулевым корнем или двумя чисто мнимыми корнями матрицы линейной части. В данной работе будет решена проблема конечно-гладкой эквивалентности, а именно будет доказана такая эквивалентность для систем, ряды Тейлора которых отличаются членами достаточно высокого порядка, т.е. решена задача о конечной определенности ростков рассматриваемых векторных полей. Этот результат является аналогом теоремы Стернберга–Ченя для систем с одним нулевым корнем (см. теорему 12.2 из [8]). В сообщении будет существенно уточнено понятие резонанса для рассматриваемых систем и показана возможность приведения этих систем к полиномиальной резонансной нормальной форме.

Рассмотрим вещественную автономную систему

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \qquad (1)$$

где $\xi, Q(\xi) \in R^{n+1}$, $n > 0$, $Q(\xi)$ – функция класса C^∞ в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $A = Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси, и одно нулевое собственное число. Цель данной работы состоит в определении вида нормальной формы такой системы уравнений и в выяснении условий существования преобразования, приводящего систему (1) к нормальной форме в некоторой окрестности начала координат. Кроме того, нас будет интересовать задача существования локального конечно-гладкого преобразования, приводящего две системы указанного вида друг к другу.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – ненулевые собственные числа матрицы A, $\lambda_0 = 0$. С помощью стандартного линейного преобразования приведем систему (1) к следующему виду, где матрица A имеет жорданову форму:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, y), \\ \dot{y}_i &= \varepsilon_i y_{i-1} + \lambda_i y_i + f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Ниже координаты y_i будем называть невырожденными, а координату x – вырожденной. Известно, что без ограничения общности (за исключением случая, когда $g(x, 0)$ – плоская функция)

Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва

можно считать, что для функции $g(x, y)$ из системы (2) выполняется условие

$$g(x, 0) = bx^{m+1} + cx^{2m+1} + o(|x|^{2m+1}).$$

Кроме того, очевидно, что линейным преобразованием вырожденной переменной можно добиться того, чтобы выполнялось равенство $b = \pm 1$. Будем считать это условие выполненным.

Из [1] следует, что главным препятствием на пути приведения системы (1) к полиномиальной нормальной форме по всем переменным является наличие у матрицы A совпадающих собственных чисел. Поэтому вначале уделим внимание задаче о приведении к нормальной форме системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= bx^{m+1} + cx^{2m+1}, \\ \dot{y} &= A(x)y. \end{aligned} \tag{3}$$

Последние n уравнений системы (3) представляют собой линейную по невырожденным координатам часть системы (2). Анализу этой задачи посвящены первые главы книги [9], где вводятся и используются следующие преобразования.

Определение 1. Срезающим преобразованием (см. [9]) называется преобразование вида

$$y = S(x)z, \quad S(x) = \operatorname{diag}(1, x^{\delta}, x^{2\delta}, \ldots, x^{(n-1)\delta}),$$

где $\delta > 0$ – рациональное число.

Срезающим преобразованием будем также называть преобразование вида

$y = S(x), z, S(x) = \operatorname{diag}(E_1, xE_2)$, E_1, E_2 – единичные матрицы.

Определение 2. Слабо вырожденным преобразованием называется замена переменных вида

$$\begin{aligned} x &= du^h, \\ y &= T(x)z. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $T(x)$ является произведением конечного числа преобразований, одна часть которых является срезающими преобразованиями, а другая часть – это близкие к тождественным преобразования класса C^{∞}. Число h является натуральным числом, $d = \text{const} \neq 0$.

Теорема 1. *Существует слабо вырожденное преобразование* (4), *приводящее систему* (3) *к нормальной форме*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= bu^{p+1} + c_1u^{2p+1}, \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \ldots + u^{p-1}A_{p-1} + u^pA_p)z. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ – постоянные диагональные матрицы, A_p – постоянная матрица, имеющая жорданову форму, $p = mh$. При этом на диагонали матрицы A_0 расположены собственные числа матрицы $A(0)$, матрица A_p такова, что если числа λ_j^i и λ_r^i, стоящие на диагонали какой-либо матрицы A_i, $0 \le i \le p-1$, не равны друг другу, то соответствующие диагональные элементы жордановой матрицы A_p располагаются в ее разных жордановых клетках.

Замечание 1. Конечные отрезки рядов Тейлора преобразований класса C^{∞}, являющихся множителями слабо вырожденного преобразования (4) из теоремы 1, определяются конечными отрезками ряда Тейлора матрицы $A(x)$ системы (3). Общее количество множителей, составляющих преобразование (4), зависит только от m и n. Срезающие преобразования, входящие множителями в слабо вырожденное преобразование (4), определяются отрезком ряда Тейлора матрицы $A(x)$, длина которого равна некоторому числу $m_1(m, n)$. Число h зависит только от n.

После применения к системе (2) преобразования, приводящего ее линейную часть (3) к виду (5), и дополнительного преобразования $w = u^Lz$, L – натуральное число, она будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= bu^{p+1} + c_1u^{2p+1} + G(u, w), \\ \dot{w} &= (A_0 + uA_1 + \ldots + u^{p-1}A_{p-1} + u^pA_p)w + F(u, w). \end{aligned} \tag{6}$$

В данной системе ряды Тейлора функций $F(u, w)$ и $G(u, w)$ представляют собой сумму резонансных мономов по w с коэффициентами, являющимися функциями класса C^{∞}, зависящими от u.

Приведение линейной части системы к виду (5) открывает новые возможности для уточнения понятия резонанса.

Ниже мы рассмотрим мономы u^rw^s, суммой которых (с некоторыми постоянными коэффициентами) являются ряды Тейлора функций $F(u, w)$ и $G(u, w)$ из системы (6). Здесь и далее используются следующие обозначения: $w^s = w_1^{s_1} \ldots w_n^{s_n}$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ – неотрицательные целые числа, $|s| = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$, $\lambda^j = (\lambda_1^j, \lambda_2^j, \ldots, \lambda_n^j)$ – вектор, состоящий из элементов спектра матрицы A_j, $0 \le j \le p$, $(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Если моном u^rw^s входит в уравнение с номером i, $1 \le i \le n + 1$, то выполняется резонансное соотношение $s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 + \ldots + s_n\lambda_n = \lambda_{i-1}$ и моном w^s называем резонансным мономом. Здесь и ниже считается, что $\lambda_0 = \lambda_0^q = 0$, $0 \le q \le p$. Ниже мы рассматриваем только резонансные мономы w^s.

Определение 3. Уровнем резонансного монома w^s, входящего в уравнение с номером i, $1 \le i \le n + 1$ называется такое число q, $0 \le q \le p - 2$ для которого выполняются условия

$$(s, \lambda^j) = \lambda_{i-1}^j, \quad 0 \le j \le q, \quad (s, \lambda^{q+1}) \neq \lambda_{i-1}^{q+1}. \tag{7}$$

Если выполняются условия:

$$(s, \lambda^j) = \lambda^j_{i-1}, \quad 0 \le j \le p-1, \qquad (8)$$

то уровнем монома w^s называется число $p - 1$.

Определение 4. Моном $u^r w^s$ называется устранимым, если: либо моном w^s является мономом уровня q, $0 \le q \le p-2$ и $r \ge q+1$; либо моном w^s является мономом уровня $p-1$, $r \ge p$, и выполняется неравенство $(s, \lambda^p) - b(p-r) \ne \lambda^p_{i-1}$ (если моном $u^r w^s$ входит в одно из последних n уравнений системы с номером i) или же неравенство $(s, \lambda^p) - b(2p+1-r) \ne 0$ (если моном входит в первое уравнение).

Моном $u^r w^s$ называется неустранимым, если он не является устранимым мономом.

Из последнего определения ясно, что все резонансные (в традиционном смысле) мономы w^s являются неустранимыми. Новое состоит в классификации мономов $u^r w^s$ при $r > 0$.

Отметим, что для каждого резонансного набора s число неустранимых мономов $u^r w^s$ конечно. Это мономы, для которых $r \le q$ в случае $q < p-1$, где q – уровень монома, а также единственный возможный в каждом из уравнений системы неустранимый моном уровня $p-1$, для которого выполняется равенство $(s, \lambda^p) - b(p-r) = \lambda^p_{i-1}$ (если он входит в одно из последних n уравнений системы), либо равенство $(s, \lambda^p) - b(2p+1-r) = 0$ (если он входит в первое уравнение системы).

Теорема 2. *Существует близкое к тождественному преобразование класса C^∞, приводящее систему* (6) *к нормальной форме, ряд Тейлора которой представляет собой сумму неустранимых мономов. Если эту нормальную форму записать в виде ряда по резонансным мономам w^s, то коэффициенты ряда будут многочленами, зависящими от вырожденной переменной, при этом степень соответствующего многочлена линейно зависит от $|s|$.*

С учетом результатов работы [5] следствием теоремы 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любого целого числа $k > 0$ существует близкое к тождественному преобразование класса C^k, приводящее систему* (6) *к полиномиальной нормальной форме, представляющей собой конечную сумму неустранимых мономов с постоянными коэффициентами.*

Следующая теорема решает проблему конечно-гладкой эквивалентности систем вида (1).

Теорема 4. *Для любого целого числа $k > 0$ существует целое число N, обладающее следующим свойством: если ряды Тейлора правых частей двух систем вида* (1) *отличаются только членами порядка выше N* (*совпадают N-струи*), *то эти системы локально C^k-эквивалентны, т.е. существует близкое к тождественному преобразование класса C^k, приводящее одну систему к другой в малой окрестности начала координат. Число N зависит от k, m, n, а также от спектра матрицы $A = Q'(0)$.*

Теорема 4 обобщает теорему Стернберга–Ченя (теорема 12.2 из [8, гл. IX]) на случай систем с одним нулевым корнем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самовол В.С.* // Мат. заметки. 2004. Т. 75. В. 5. С. 711–720.
2. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
3. *Зигель К.Л.* // Математика. 1961. Т. 5. № 2. С. 119–128.
4. *Брюно А.Д.* // Тр. ММО. 1971. Т. 25. С. 119–262.
5. *Самовол В.С.* // Тр. ММО. 1982. Т. 44. С. 213–234.
6. *Кузнецов А.Н.* // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6. В. 2. С. 41–51.
7. *Белицкий Г.Р.* // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. В. 4. С. 1–8.
8. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
9. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.