

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

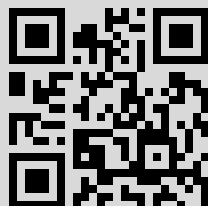
В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 12, 81–104

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.120.192.92

25 февраля 2015 г., 00:08:09



УДК 517.938

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка

О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток

В настоящей работе для многообразий размерности 3 решена проблема Дж. Палиса о нахождении необходимых и достаточных условий включения каскада Морса–Смейла в топологический поток. Множество таких потоков открыто в пространстве всех диффеоморфизмов, в то время как множество произвольных диффеоморфизмов, включающихся в гладкий поток, является нигде не плотным. Кроме того, в работе выделен класс диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток, для которых полным топологическим инвариантом является граф, аналогичный схеме Е. А. Андроновой, А. Г. Майера и графу М. Пейкшото.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса–Смейла, каскад Морса–Смейла, включение в поток, динамические системы на многообразиях.

§ 1. Введение и формулировка результатов

Пусть M^n – гладкое связное замкнутое многообразие размерности n . C^m -поток ($m \geq 0$) на многообразии M^n называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство C^m -диффеоморфизмов $X^t: M^n \rightarrow M^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $X^0(x) = x$ для любой точки $x \in M^n$;
- 2) $X^t(X^s(x)) = X^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$.

C^0 -поток еще называют *топологическим потоком*.

Будем говорить, что *диффеоморфизм* $f: M^n \rightarrow M^n$ *включается в C^m -поток*, если f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий некоторого C^m -потока X^t ($f = X^1$).

Основным объектом рассмотрения являются *диффеоморфизмы Морса–Смейла* $f: M^n \rightarrow M^n$, которые определяются следующим образом:

- неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
- устойчивые и неустойчивые многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-12056-офи-м-2011, № 12-01-00672), гранта правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

Везде далее рассматривается класс $MS(M^n)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла на ориентируемых многообразиях.

Проблема включения диффеоморфизма в поток является классической. Детальный обзор результатов, полученных в этой области, изложен в [1]. В работе [2] доказано, что множество C^r -диффеоморфизмов ($r \geq 1$), включающихся в C^1 -поток, является подмножеством первой категории в $\text{Diff}^r(M^n)$. В [3] показано, что любая окрестность $U \in \text{Diff}^r(M^n)$ тождественного диффеоморфизма содержит открытое множество V диффеоморфизмов, не включающихся в топологический поток. Согласно [4] множество C^2 -диффеоморфизмов, включающихся в C^1 -гладкий поток, нигде не плотно в пространстве диффеоморфизмов Морса–Смейла. В то же время, из работ [3], [5], в которых доказана структурная устойчивость диффеоморфизмов Морса–Смейла, следует, что для любого многообразия M^n существует открытое в $\text{Diff}^1(M^n)$ множество диффеоморфизмов Морса–Смейла, включающихся в топологический поток.

В работе [3] также найдены следующие необходимые условия включения диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ в топологический поток:

- 1) неблуждающее множество Ω_f совпадает с множеством неподвижных точек Fix_f ;
- 2) ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию;
- 3) если для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ непусто (такое пересечение называется *гетероклиническим*), то оно не содержит компактных компонент связности.

В дальнейшем условия 1)–3) будем называть *условиями Палиса*. В работе [3] также показано, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными и поставлена задача обобщения этого результата на случай большей размерности. Как оказалось, в размерности $n = 3$ дополнительным препятствием для включения диффеоморфизма Морса–Смейла в топологический поток является возможность дикого вложения сепаратрис седловых точек (компонент связности инвариантных многообразий этих точек без самих точек). Поясним, что понимается под диким вложением сепаратрис.

Пусть α – источниковая точка диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$. Будем обозначать через L_α объединение всех одномерных устойчивых сепаратрис седловых точек диффеоморфизма f , принадлежащих W_α^u . Положим $F_\alpha = L_\alpha \cup \alpha$ и назовем F_α *пучком одномерных устойчивых сепаратрис*. Из гиперболичности источника α следует, что W_α^u гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^3$, при этом пучки одномерных сепаратрис гомеоморфны стандартному одномерному пучку в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}^3$ будем называть *стандартным одномерным пучком*, если оно состоит из конечного числа прямолинейных лучей с началом в точке $O(0, 0, 0)$. Подмножество $F \subset \mathbb{R}^3$, снабженное индуцированной топологией и гомеоморфное $\mathbb{F}$, будем называть *одномерным пучком*. При этом пучок F будем называть *ручным*, если существует гомеоморфизм $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такой, что $H(F) = \mathbb{F}$; в противном случае пучок F будем называть *диким*.

Частным случаем одномерного пучка является дуга. Первые примеры диких дуг были построены Е. Артином и Р. Фоксом в 1948 г. Отметим, что ручность

каждого из элементов, входящих в пучок $F \subset \mathbb{R}^3$, еще не является гарантией того, что пучок в целом будет ручным. Например, в работе [6] построен пример так называемого *умеренно дикого одномерного пучка*, т.е. такого дикого пучка, что любой содержащийся в нем пучок из меньшего числа дуг является ручным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пучок одномерных устойчивых сепаратрис F_α назовем *ручным*, если существует гомеоморфизм $h_\alpha: W_\alpha^u \rightarrow \mathbb{R}^3$, отображающий F_α на стандартный одномерный пучок. В противном случае будем говорить, что пучок сепаратрис F_α является *диким*. Если ручной (дикий) пучок F_α содержит только одну сепаратрису, то будем называть эту сепаратрису *ручной (дикой)*.

Аналогично определяется *ручной (дикий) пучок* одномерных неустойчивых сепаратрис F_ω , состоящий из стоковой точки ω и всех одномерных неустойчивых сепаратрис L_ω седловых точек диффеоморфизма f , принадлежащих W_ω^s .

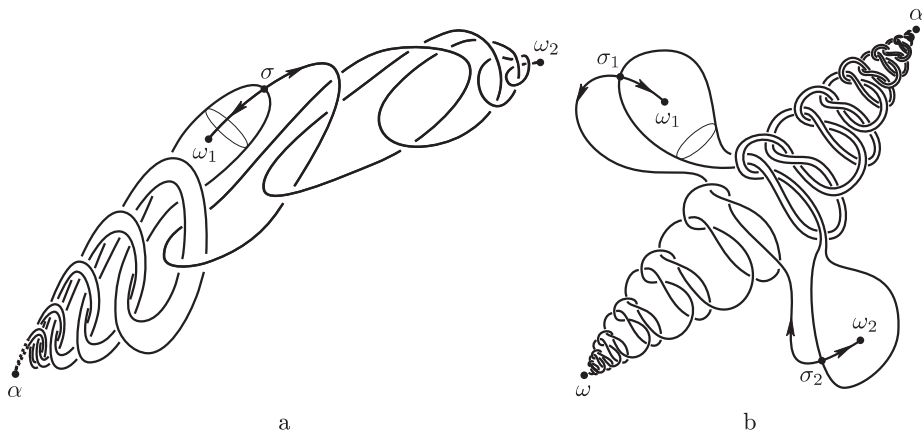


Рис. 1. Диффеоморфизмы с дико вложенными сепаратрисами

В работах [7], [8] построены примеры диффеоморфизмов из класса $MS(\mathbb{S}^3)$, имеющих дико вложенную одномерную сепаратрису седла, а в работе [9] в том же классе построены диффеоморфизмы, одномерные сепаратрисы которых образуют умеренно дикие пучки. Фазовые портреты этих диффеоморфизмов приведены на рис. 1, а) и 1, б) соответственно. Как будет следовать из леммы 1.1 ниже, такие диффеоморфизмы не включаются ни в какие потоки¹. Как оказалось, необходимое условие включения диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ в поток заключается даже в более сильном, нежели ручность, требовании, использующем линейное растяжение евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, определяемое формулой $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пучок одномерных сепаратрис F_α называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм $H_\alpha: W_\alpha^u \rightarrow \mathbb{R}^3$ такой, что

$$f|_{W_\alpha^u} = H_\alpha^{-1} A H_\alpha|_{W_\alpha^u}$$

и $H_\alpha(F_\alpha)$ – стандартный одномерный пучок.

¹Заметим, что в силу результатов работы К. Куперберг [10], дикая дуга может быть траекторией некоторого топологического потока на 3-многообразии.

Аналогично определяется *тривиальный пучок* одномерных сепаратрис F_ω .

ЛЕММА 1.1. Пусть диффеоморфизм f из класса $MS(M^3)$ включается в топологический поток. Тогда все пучки его одномерных сепаратрис являются тривиальными.

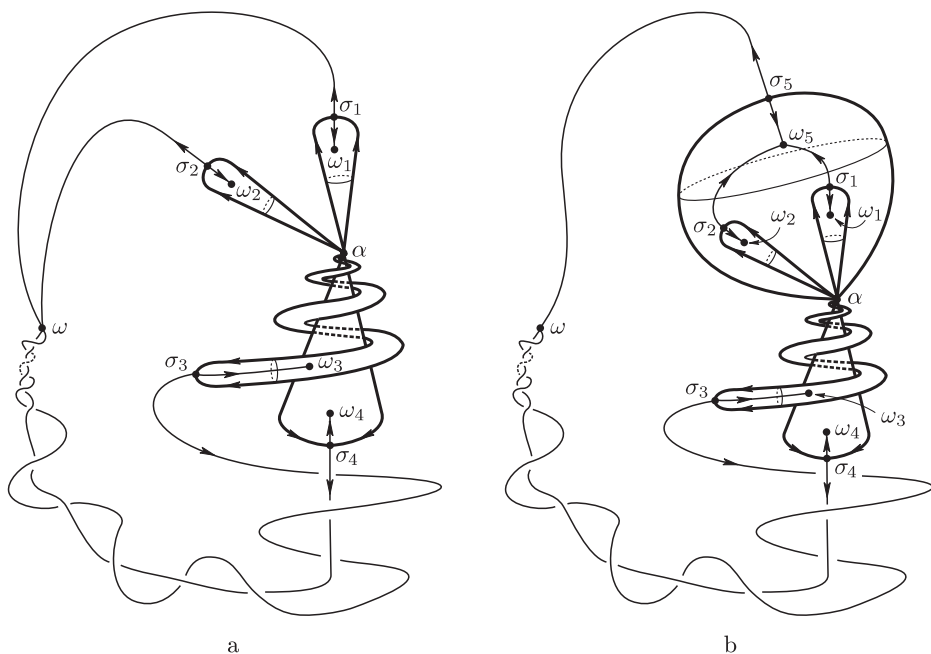


Рис. 2. Фазовые портреты диффеоморфизмов из класса $MS(S^3)$, не включающихся ни в какие топологические потоки: а) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но пучок F_ω не является тривиальным; б) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются тривиальными

В § 4 построен диффеоморфизм из класса $MS(S^3)$, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но среди них есть пучок, не являющийся тривиальным (см. рис. 2, а)). Сюрпризом оказался тот факт, что добавление к списку Палиса условия тривиальности всех пучков одномерных сепаратрис седловых точек диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ не приводит к достаточным условиям его включения в топологический поток. Иллюстрирующий этот факт пример также построен в § 4, а на рис. 2, б) изображен его фазовый портрет. В действительности ключом к решению проблемы Палиса о включении диффеоморфизма Морса–Смейла $f: M^3 \rightarrow M^3$ в поток является схема диффеоморфизма f , введенная в работах [11]–[13] и определяемая следующим образом.

Пусть $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ и Ω_q – множество периодических точек p диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ таких, что $\dim W_p^u = q$. Положим $A_f = W_{\Omega_0 \cup \Omega_1}^u$, $R_f = W_{\Omega_2 \cup \Omega_3}^s$ и $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$. Оказывается, что объемлющее многообразие является объединением трех попарно непересекающихся множеств:

$M^3 = R_f \cup V_f \cup A_f$. При этом множества A_f и R_f являются связными аттрактором и репеллером² соответственно, множество V_f также является связным и состоит из блуждающих точек таких, что для α - и ω -предельных множеств любой точки $x \in V_f$ выполняются условия $\alpha(x) \subset R_f$, $\omega(x) \subset A_f$.

Установлено, что пространство орбит $\widehat{V}_f = V_f/f$ действия f на V_f является простым многообразием³, а естественная проекция $p_f: V_f \rightarrow \widehat{V}_f$ является накрытием. При этом накрытие p_f индуцирует эпиморфизм $\eta_f: \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие гомотопическому классу $[c] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$ целое число n такое, что поднятие кривой c на V_f соединяет точку x с точкой $f^n(x)$. Обозначим через L_f^u (L_f^s) объединение всех неустойчивых (устойчивых) двумерных сепаратрис седловых точек. Положим

$$\widehat{L}_f^s = p_f(L_f^s \setminus A_f), \quad \widehat{L}_f^u = p_f(L_f^u \setminus R_f).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \eta_f, \widehat{L}_f^s, \widehat{L}_f^u)$ называется *схемой* диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^3)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in \text{MS}(M^3)$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}: \widehat{V}_f \rightarrow \widehat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:

- 1) $\eta_f = \eta_{f'} \widehat{\varphi}_*$;
- 2) $\widehat{\varphi}(\widehat{L}_f^s) = \widehat{L}_{f'}^s$ и $\widehat{\varphi}(\widehat{L}_f^u) = \widehat{L}_{f'}^u$.

В работах [11]–[13] также доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Диффеоморфизмы $f, f' \in \text{MS}(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.

Положим $g_f = (|\Omega_1 \cup \Omega_2| - |\Omega_0 \cup \Omega_3| + 2)/2$, где $|P|$ означает мощность множества P . Обозначим через $\mathbb{S}_{g_f}$ ориентируемую замкнутую поверхность рода g_f . Положим $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{S}^1$. Множество $\widehat{\lambda} = c_{\widehat{\lambda}} \times \mathbb{S}^1$, где $c_{\widehat{\lambda}}$ – простая гладкая замкнутая кривая на поверхности $\mathbb{S}_{g_f}$, назовем *тривиальным тором* на многообразии $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Схему S_f диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^3)$ назовем *тривиальной*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\psi}_f: \widehat{V}_f \rightarrow \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ такой, что каждая компонента связности множеств $\widehat{\psi}_f(\widehat{L}_f^s)$ и $\widehat{\psi}_f(\widehat{L}_f^u)$ является тривиальным тором на многообразии $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$.

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Диффеоморфизм $f \in \text{MS}(M^3)$ включается в топологический поток тогда и только тогда, когда его схема является тривиальной.

Топологический поток, в который включается диффеоморфизм Морса–Смейла на 3-многообразии, близок по своим свойствам к градиентно-подобному

²Компактное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, если существует окрестность U множества A такая, что $f(U) \subset \text{int } U$ и $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$, окрестность U при этом называется захватывающей. Множество $R \subset M^n$ называется *репеллером* для f , если оно является аттрактором для f^{-1} .

³Гладкое связное замкнутое ориентируемое 3-многообразие называется *простым*, если оно гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ или неприводимо (любая гладко вложенная 2-сфера ограничивает в нем 3-шар).

потоку (потоку Морса–Смейла без периодических орбит). В 1971 г. М. Пейкшото [14] доказал, что для потоков Морса–Смейла на поверхностях полным топологическим инвариантом является класс изоморфности ориентируемого графа, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с состояниями равновесия и замкнутыми траекториями, а ребра соответствуют некоторым компонентам связности инвариантных многообразий состояний равновесия и замкнутых траекторий, при этом изоморфность графов включает в себя сохранение выделенных специальным образом подграфов (различающих множеств)⁴. Непосредственное обобщение этого инварианта на трехмерный случай не решает проблему топологической классификации в общем случае. Однако в работе [16] показано, что в некотором подмножестве потоков на n -многообразиях ($n > 2$) изоморфность графов является необходимым и достаточным условием их топологической эквивалентности. Мы покажем, что аналогичный результат имеет место для диффеоморфизмов, включающихся в топологические потоки. Именно, рассмотрим класс $G_k(M^n)$ ($n > 2$) сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла таких, что для любого $f \in G_k(M^n)$ выполняются следующие условия:

- 1) $\Omega_f = \text{Fix}_f$;
- 2) множество седловых точек состоит в точности из $k > 0$ седловых неподвижных точек⁵, причем устойчивое многообразие W_σ^s любой седловой неподвижной точки $\sigma \in \Omega_f$ имеет размерность $n - 1$;
- 3) для любых двух различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ пусто.

В п. 3.1 (см. теорему 4) показано, что из условий, выделяющих класс $G_k(M^n)$, следует, что неблуждающее множество любого диффеоморфизма $f \in G_k(M^n)$ содержит в точности 1 источник и $k + 1$ стоковую точку, а несущее многообразие M^n диффеоморфно n -сфере. Графом Γ_f диффеоморфизма $f \in G_k(M^n)$ назовем ориентированный граф, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с неподвижными точками, а ребра – во взаимно однозначном соответствии с сепаратрисами седловых точек диффеоморфизма f . В работах [17], [18] доказано, что при $n > 3$ класс изоморфности графа Γ_f диффеоморфизма $f \in G_k(M^n)$ является полным топологическим инвариантом, а также выделено множество допустимых графов, по каждому из которых построен диффеоморфизм из $G_k(M^n)$, включающийся в топологический поток. При этом множество построенных диффеоморфизмов имеет непустое пересечение с каждым классом топологической сопряженности в $G_k(M^n)$. Отсюда непосредственно получается следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in G_k(M^n)$ и $n > 3$. Тогда диффеоморфизм f включается в топологический поток.

То, что аналогичная теорема не имеет места для $n = 3$, следует из примеров не включающихся в поток диффеоморфизмов из классов $G_4(M^3)$, $G_5(M^3)$, построенных в § 4 (см. также рис. 2). Также из этих примеров становится

⁴В работе [15] была замечена неточность инварианта Пейкшото, связанная с тем, что изоморфизм графов не различает неэквивалентного расслоения на траектории областей, ограниченных двумя периодическими орбитами.

⁵Если $k = 0$, то Ω_f состоит в точности из одного стока и одного источника, все диффеоморфизмы с таким неблуждающим множеством включаются в топологический поток.

понятным, что класс изоморфности графа не есть полный топологический инвариант для диффеоморфизмов множества $G_k(M^3)$. Однако в подмножестве диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток, этот факт удастся доказать.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in G_k(M^3)$ включаются в топологические потоки. Тогда диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ изоморфны.*

Авторы благодарят Ф. Лауденбаха за чрезвычайно полезные и плодотворные обсуждения.

§ 2. Необходимые и достаточные условия включения диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^3)$ в топологический поток

Этот параграф посвящен доказательству леммы 1.1 и теоремы 1. Необходимость условий теоремы 1 будет следовать из леммы 2.1, достаточность – из леммы 2.2. В доказательствах мы будем использовать поток $A_{g_f}^t$ на многообразии $\mathbb{V}_{g_f} = \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{R}$, заданный формулой $A_{g_f}^t(s, r) = (s, r + t)$, а также свойства группы преобразований, действующей разрывно на некотором гладком многообразии.

2.1. Разрывные действия групп преобразований. Пусть $g: X \rightarrow X$ – диффеоморфизм, заданный на гладком связном многообразии X такой, что группа $\mathcal{G} = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$ действует на X разрывно⁶. Будем обозначать через X/g пространство орбит этого действия и через $p_g: X \rightarrow X/g$ естественную проекцию. В силу [19; теорема 3.5.7] естественная проекция $p_g: X \rightarrow X/g$ является накрывающим отображением, а пространство X/g является гладким многообразием.

Предположим, что многообразие X/g является связным (в противном случае все рассуждения можно провести для каждой компоненты связности), и обозначим через $\eta_g: \pi_1(X/g) \rightarrow \mathbb{Z}$ гомоморфизм, определенный следующим образом. Пусть $\hat{c} \in X/g$ – петля в X/g и $[\hat{c}] \in \pi_1(X/g)$ – ее класс гомотопической эквивалентности. Выберем произвольную точку $\hat{x} \in \hat{c}$, обозначим через $p_g^{-1}(\hat{x})$ полный прообраз точки $\hat{x}$ и зафиксируем точку $x \in p_g^{-1}(\hat{x})$. Так как p_g – накрытие, то существует единственный путь $c(t)$ с началом в точке x ($c(0) = x$), накрывающий петлю $\hat{c}$ (т.е. такой, что $p_g(c) = \hat{c}$). Поэтому существует элемент $k \in \mathbb{Z}$ такой, что $c(1) = g^k(x)$. Положим $\eta_g([\hat{c}]) = k$. Из [20; гл. 18] следует, что отображение η_g является гомоморфизмом. Следующее утверждение доказано в работе [12].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Пусть X, X' – связные гладкие многообразия и $g: X \rightarrow X, g': X' \rightarrow X'$ – диффеоморфизмы такие, что группы $\mathcal{G} = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}, \mathcal{G}' = \{g'^k, k \in \mathbb{Z}\}$ действуют разрывно на X, X' соответственно. Тогда:*

⁶Группа H действует на многообразии X , если задано отображение $\zeta: H \times X \rightarrow X$, обладающее следующими свойствами:

- 1) $\zeta(e, x) = x$ для всех $x \in X$, где e – нейтральный (единичный) элемент группы H ;
- 2) $\zeta(g, \zeta(h, x)) = \zeta(gh, x)$ для всех $x \in X$ и $g, h \in H$.

Группа H действует разрывно на многообразии X , если для каждого компактного подмножества $K \subset X$ множество элементов $h \in H$ таких, что $\zeta(h, K) \cap K \neq \emptyset$, конечно.

- 1) если $\varphi: X \rightarrow X'$ – гомеоморфизм (диффеоморфизм), сопрягающий диффеоморфизмы g и g' , то отображение $\widehat{\varphi}: X/g \rightarrow X'/g'$, заданное формулой $\widehat{\varphi} = p_{g'} \varphi p_g^{-1}$, является гомеоморфизмом (диффеоморфизмом); кроме того, $\eta_g = \eta_{g'} \widehat{\varphi}_*$, где $\widehat{\varphi}_*: \pi_1(X/g) \rightarrow \pi_1(X'/g')$ – гомеоморфизм, индуцированный отображением $\widehat{\varphi}$;
- 2) если $\widehat{\varphi}: X/g \rightarrow X'/g'$ – гомеоморфизм (диффеоморфизм) такой, что $\eta_g = \eta_{g'} \widehat{\varphi}_*$, $\widehat{x} \in X/g$, $x \in p_g^{-1}(\widehat{x})$, $\widehat{x}' = \widehat{\varphi}(\widehat{x})$ и $x' \in p_{g'}^{-1}(\widehat{x}')$, то существует единственный гомеоморфизм (диффеоморфизм) $\varphi: X \rightarrow X'$, сопрягающий диффеоморфизмы g и g' и такой, что $\varphi(x) = x'$.

2.2. Доказательство леммы 1.1. Докажем, что все пучки одномерных сепаратрис диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^3)$, включающегося в топологический поток, являются тривиально вложенными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если диффеоморфизм f включается в некоторый топологический поток X^t ($f = X^1$), то неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f совпадает с множеством состояний равновесия потока X^t , при этом устойчивое (неустойчивое) многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ совпадает с устойчивым (неустойчивым) многообразием соответствующего состояния равновесия потока X^t . Покажем, что любой пучок F_α одномерных устойчивых сепаратрис диффеоморфизма f тривиален (доказательство тривиальности любого пучка F_ω одномерных неустойчивых сепаратрис проводится аналогично).

Обозначим через X_α^t ограничение потока X^t на множество $V_\alpha = W_\alpha^u \setminus \alpha$. Поскольку диффеоморфизм $f|_{V_\alpha}$ топологически сопряжен с линейным растяжением, то для любых различных точек $p, q \in V_\alpha$ существуют окрестности $U_p, U_q \subset V_\alpha$ и константа $T > 0$ такие, что $X_\alpha^t(U_p) \cap U_q = \emptyset$ для любого $|t| > T$. Это означает согласно определению, данному в работе [21; ч. I, §1], что поток X_α^t является дисперсивным. Тогда из [21; теорема 3] следует, что поток X_α^t является параллелизуемым, т.е. существуют множество $\Sigma_\alpha \subset V_\alpha$ и гомеоморфизм $\xi_\alpha: V_\alpha \rightarrow \Sigma_\alpha \times \mathbb{R}$ такие, что $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_\alpha^t(\Sigma_\alpha) = V_\alpha$ и $\xi_\alpha(X_\alpha^t(z)) = (z, t)$ для любых $z \in \Sigma_\alpha$, $t \in \mathbb{R}$.

Из [22; теорема III.4, теорема IV.3] следует, что топологическая размерность Σ_α равна двум. Тогда в силу [23; теорема 2] Σ_α является многообразием без края. Таким образом, Σ_α – замкнутая ориентируемая поверхность. Согласно [21; лемма 1] множество Σ_α является деформационным ретрактом многообразия V_α . Поскольку V_α односвязно, то Σ_α – 2-сфера.

Поскольку каждая одномерная сепаратриса l множества L_α является траекторией потока X_α^t , то существует точка $\gamma_l \in \Sigma_\alpha$ такая, что $\xi_\alpha(l) = \gamma_l \times \mathbb{R}$. Пусть $g_\alpha: \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{S}^2$ – произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Положим $c_l = g_\alpha(\gamma_l)$. Определим гомеоморфизм $G_\alpha: V_\alpha \rightarrow \mathbb{V}_0$ соотношением $G_\alpha(X_\alpha^t(z)) = A_0^t(g_\alpha(z))$. По построению гомеоморфизм G_α сопрягает потоки X_α^t и A_0^t , а следовательно, и их сдвиги на единицу времени. При этом $G_\alpha(l) = c_l \times \mathbb{R}$.

Определим гомеоморфизм $q: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus O$, поставив в соответствие каждой точке $(s, t) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $s = (x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, точку $q(s, t) = (2^t x_1, 2^t x_2, 2^t x_3)$. Наконец, определим гомеоморфизм $H_\alpha: W_\alpha^u \rightarrow \mathbb{R}^3$ соотношениями $H_\alpha(\alpha) = O$, $H_\alpha(x) = q(G_\alpha(x))$, где $x \in W_\alpha^u \setminus \alpha$. Непосредственно

проверяется, что гомеоморфизм H_α сопрягает диффеоморфизм $f|_{W_\alpha^u}$ с диффеоморфизмом A и отображает пучок одномерных сепаратрис F_α на стандартный одномерный пучок, следовательно, пучок F_α тривиален.

2.3. Критерий включения диффеоморфизма из класса $MS(M^3)$ в топологический поток.

ЛЕММА 2.1. *Схема S_f диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$, включающегося в топологический поток, является тривиальной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если диффеоморфизм f включается в некоторый топологический поток X^t ($f = X^1$), то неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f совпадает с множеством состояний равновесия потока X^t , при этом устойчивое (неустойчивое) многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ совпадает с устойчивым (неустойчивым) многообразием соответствующего состояния равновесия потока X^t .

Обозначим через X_f^t ограничение потока X^t на множество V_f . Из построения множества V_f следует, что для любой точки $x \in V_f$ имеют место включения $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_f^t(x) \in A_f$ и $\lim_{t \rightarrow -\infty} X_f^t(x) \in R_f$. Таким образом, для любых точек $p, q \in V_f$ существуют окрестности $U_p, U_q \subset V_f$ и константа $T > 0$ такие, что $X_f^t(U_p) \cap U_q = \emptyset$ для любого $|t| > T$. Как и в доказательстве леммы 1.1, это означает, что поток X_f^t является дисперсивным и, следовательно, существуют ориентируемая замкнутая поверхность $\Sigma_f \subset V_f$ и гомеоморфизм $\xi_f: V_f \rightarrow \Sigma_f \times \mathbb{R}$ такие, что $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_f^t(\Sigma_f) = V_f$ и $\xi_f(X_f^t(z)) = (z, t)$ для любых $z \in \Sigma_f, t \in \mathbb{R}$. Обозначим через ρ_f род этой поверхности. Покажем теперь, что $\rho_f = g_f$.

По построению поверхность Σ_f делит многообразие на две части, замыкания которых обозначим через P_{A_f}, P_{R_f} , полагая, что $A_f \subset \text{int } P_{A_f}, R_f \subset \text{int } P_{R_f}$. Более того, аттрактор A_f является деформационным ретрактом P_{A_f} и, следовательно, они имеют одинаковый гомотопический тип, а значит и эйлерову характеристику. При этом $\chi(P_{A_f}) = 1 - \rho_f$, поскольку P_{A_f} – 3-многообразие с краем Σ_f , и $\chi(A_f) = |\Omega_0| - |\Omega_1|$, поскольку A_f – клеточный комплекс, состоящий из $|\Omega_0|$ нульмерных и $|\Omega_1|$ одномерных клеток. Таким образом, $|\Omega_0| - |\Omega_1| = 1 - \rho_f$. Из аналогичных рассуждений для аттрактора получаем, что $|\Omega_3| - |\Omega_1| = 1 - \rho_f$. Складывая два последних равенства, получаем, что

$$|\Omega_0| - |\Omega_1| + |\Omega_3| - |\Omega_2| = 2 - 2\rho_f.$$

Откуда $\rho_f = (|\Omega_1 \cup \Omega_2| - |\Omega_0 \cup \Omega_3| + 2)/2$ и, следовательно, $\rho_f = g_f$.

Поскольку каждая двумерная сепаратриса λ диффеоморфизма f является объединением траекторий потока X_f^t , гомеоморфным $S^1 \times \mathbb{R}$, то существует простая замкнутая кривая $\gamma_\lambda \subset \Sigma_f$ такая, что $\xi_f(\lambda) = \gamma_\lambda \times \mathbb{R}$. Тогда существует гомеоморфизм $h_f: \Sigma_f \rightarrow S_{g_f}$ такой, что $c_\lambda = h_f(\gamma_\lambda)$ – простая гладкая замкнутая кривая для любой двумерной сепаратрисы λ . Определим гомеоморфизм $\psi_f: V_f \rightarrow \mathbb{V}_{g_f}$ соотношением $\psi_f(X_f^t(z)) = A_{g_f}^t(h_f(z))$. По построению гомеоморфизм ψ_f сопрягает потоки X_f^t и $A_{g_f}^t$, а следовательно, и их сдвиги на единицу времени. При этом $\psi_f(\lambda) = c_\lambda \times \mathbb{R}$. По построению $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{V}_{g_f}/A_{g_f}^1$. Тогда в силу утверждения 2.1 гомеоморфизм $\widehat{\psi}_f = p_{g_f} \psi_f p_f^{-1}: \widehat{V}_f \rightarrow \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ удовлетворяет условию определения 6. Таким образом, схема S_f является тривиальной.

ЛЕММА 2.2. *Если схема диффеоморфизма $f \in \text{MS}(M^3)$ является тривиальной, то диффеоморфизм f включается в топологический поток.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы состоит в построении топологического потока $\tilde{X}^t$ на многообразии M^3 , сдвиг на единицу времени которого топологически сопряжен с диффеоморфизмом f посредством некоторого гомеоморфизма $h: M^3 \rightarrow M^3$. Откуда будет следовать, что диффеоморфизм f включается в топологический поток $X^t = h\tilde{X}^th^{-1}$.

Построение топологического потока $\tilde{X}^t$. Идея построения потока аналогична идее, предложенной в работе [11] (см. также [12] для деталей), поэтому некоторые утверждения этих работ используются без доказательства. Разобьем построение на шаги.

Шаг 1. Из определения тривиальной схемы и утверждения 2.1 следует, что существует гомеоморфизм $\psi_f: V_f \rightarrow V_{g_f}$ такой, что:

- 1) $f|_{V_f} = \psi_f^{-1} A_{g_f}^1 \psi_f$, где $A_{g_f}^1$ – сдвиг на единицу времени потока $A_{g_f}^t$;
- 2) для любой двумерной сепаратрисы λ диффеоморфизма f существует простая гладкая замкнутая кривая c_λ на поверхности $\mathbb{S}_{g_f}$ такая, что $\psi_f(\lambda) = c_\lambda \times \mathbb{R}$.

Напомним, что L_f^s, L_f^u – объединение всех устойчивых, неустойчивых соответственно двумерных сепаратрис диффеоморфизма f . Положим $\mathbb{L}^s = H_f(L_f^s)$ и $\mathbb{L}^u = H_f(L_f^u)$. Для множества цилиндров $\mathbb{L}^\delta = \lambda_1^\delta \cup \dots \cup \lambda_{l^\delta}^\delta$, $\delta \in \{s, u\}$ обозначим через $N(\mathbb{L}^\delta) = N(\lambda_1^\delta) \cup \dots \cup N(\lambda_{l^\delta}^\delta)$ множество их попарно непересекающихся гладких трубчатых окрестностей таких, что $N(\lambda_i^\delta) = K_i^\delta \times \mathbb{R}$, где $K_i^\delta \subset \mathbb{S}_{g_f}$ – гладкое двумерное кольцо для каждого $i = 1, \dots, l^\delta$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим подмножество

$$N = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 < 1\}$$

и зададим на нем поток B^t формулой $B^t(x_1, x_2, x_3) = (2^{-t}x_1, 2^{-t}x_2, 2^tx_3)$. Положим $\hat{N}^s = (N \setminus Ox_3)/B^1$. По построению многообразие $\hat{N}^s$ диффеоморфно $K \times \mathbb{R}$, где K стандартное двумерное кольцо. Тогда существует диффеоморфизм $\mu_i^s: N(\lambda_i^s) \rightarrow (N \setminus Ox_3)$, сопрягающий потоки $A_{g_f}^t|_{N(\lambda_i^s)}$ и $B^t|_{N \setminus Ox_3}$. Обозначим через $\mu^s: N(\mathbb{L}^s) \rightarrow (N \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{l^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_1^s, \dots, \mu_{l^s}^s$. Положим $Q^s = V_{g_f} \cup_{\mu^s} (N \times \mathbb{Z}_{l^s})$. Тогда топологическое пространство Q^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{Q}^s = V_{g_f} \cup (N \times \mathbb{Z}_{l^s})$ и обозначим через $p_s: \bar{Q}^s \rightarrow Q^s$ естественную проекцию. Положим $p_{s,1} = p_s|_{V_{g_f}}$, $p_{s,2} = p_s|_{N \times \mathbb{Z}_{l^s}}$. Тогда поток $\tilde{Y}_s^t$ на многообразии Q^s определяется формулой

$$\tilde{Y}_s^t(x) = \begin{cases} p_{s,1}(A_{g_f}^t(p_{s,1}^{-1}(x))), & x \in p_{s,1}(V_{g_f}), \\ p_{s,2}(B^t(p_{s,2}^{-1}(x))), & x \in p_{s,2}(N \times \{i\}), \quad i \in \mathbb{Z}_{l^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{Y}_s^t$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным единице.

Шаг 2. Снова обозначим через $\mathbb{L}^u, N(\mathbb{L}^u)$ образы этих множеств относительно проекции p_s . Положим $\hat{N}^u = (N \setminus Ox_3)/(B^1)^{-1}$. Тогда существует диффеоморфизм $\mu_i^u: N(\lambda_i^u) \rightarrow (N \setminus Ox_3)$, сопрягающий потоки $X_s^t|_{N(\lambda_i^u)}$ и $B^{-t}|_{N \setminus Ox_3}$

для любого $i = 1, \dots, l^u$. Обозначим через $\mu^u: N(\mathbb{L}^u) \rightarrow (N \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{l^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_1^u, \dots, \mu_{l^u}^u$. Положим $Q^u = Q^s \cup_{\mu^u} (N \times \mathbb{Z}_{l^u})$. Тогда топологическое пространство Q^u является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{Q}^u = Q^s \cup (N \times \mathbb{Z}_{l^u})$ и обозначим через $p_u: \bar{Q}^u \rightarrow Q^u$ естественную проекцию. Положим $p_{u,1} = p_u|_{Q^s}$, $p_{u,2} = p_u|_{N \times \mathbb{Z}_{l^u}}$. Тогда поток $\tilde{Y}_u^t$ на многообразии Q^u определяется формулой

$$\tilde{Y}_u^t(x) = \begin{cases} p_{u,1}(\tilde{Y}_s^t(p_{u,1}^{-1}(x))), & x \in p_{u,1}(Q^s), \\ p_{u,2}(B^{-t}(p_{u,2}^{-1}(x))), & x \in p_{u,2}(N \times \{i\}), \quad i \in \mathbb{Z}_{l^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{Y}_u^t$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным единице и l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным двум.

Шаг 3. Положим $R^s = Q^u \setminus W_{\Omega_{\tilde{Y}_u^t}}^s$ и обозначим через $\rho_1^s, \dots, \rho_{n^s}^s$ компоненты связности множества R^s . Определим на многообразии $\mathbb{R}^3$ топологический поток D^t формулой $D^t(x_1, x_2, x_3) = (2^{-t}x_1, 2^{-t}x_2, 2^{-t}x_3)$. Тогда каждая компонента ρ_i^s диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и поток $\tilde{Y}_u^t|_{\rho_i^s}$ гладко сопряжен с потоком $D^t|_{\mathbb{R}^3 \setminus O}$ посредством некоторого диффеоморфизма ν_i^s . Обозначим через $\nu^s: R^s \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{n^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_1^s, \dots, \mu_{n^s}^s$. Положим $M^s = Q^u \cup_{\nu^s} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$. Тогда топологическое пространство M^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{M}^s = Q^u \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$ и обозначим через $q_s: \bar{M}^s \rightarrow M^s$ естественную проекцию. Положим $q_{s,1} = q_s|_{Q^u}$, $q_{s,2} = q_s|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s}}$. Тогда поток $\tilde{X}_s^t$ на многообразии M^s определяется формулой

$$\tilde{X}_s^t(x) = \begin{cases} q_{s,1}(\tilde{Y}_u^t(q_{s,1}^{-1}(x))), & x \in q_{s,1}(Q^u), \\ q_{s,2}(B^{-t}(q_{s,2}^{-1}(x))), & x \in q_{s,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), \quad i \in \mathbb{Z}_{n^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{X}_s^t$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным единице, l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным двум и n^s стоковых неподвижных гиперболических точек.

Шаг 4. Положим $R^u = M^s \setminus W_{\Omega_{\tilde{X}_s^t}}^u$ и обозначим через $\rho_1^u, \dots, \rho_{n^u}^u$ компоненты связности множества R^u . Тогда каждая компонента ρ_i^u диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и поток $\tilde{X}_s^t|_{\rho_i^u}$ гладко сопряжен с потоком $D^{-t}|_{\mathbb{R}^3 \setminus O}$ посредством некоторого диффеоморфизма ν_i^u . Обозначим через $\nu^u: R^u \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{n^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_1^u, \dots, \mu_{n^u}^u$. Положим $M^u = M^s \cup_{\nu^u} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$. Тогда топологическое пространство M^u является гладким связным замкнутым ориентируемым 3-многообразием.

Положим $\bar{M}^u = M^s \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$ и обозначим через $q_u: \bar{M}^u \rightarrow M^u$ естественную проекцию. Положим $q_{u,1} = q_u|_{M^s}$, $q_{u,2} = q_u|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u}}$. Тогда поток $\tilde{X}_u^t$ на многообразии M^u определяется формулой

$$\tilde{X}_u^t(x) = \begin{cases} q_{u,1}(\tilde{X}_s^t(q_{u,1}^{-1}(x))), & x \in q_{u,1}(M^s), \\ q_{u,2}(B^{-t}(q_{u,2}^{-1}(x))), & x \in q_{u,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), \quad i \in \mathbb{Z}_{n^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{X}_u^t$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным единице, l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным двум, n^s стоковых неподвижных гиперболических точек и n^u источниковых неподвижных гиперболических точек.

Шаг 5. Положим $\tilde{f} = \tilde{X}_u^1$. По построению диффеоморфизм $\tilde{f}$ является диффеоморфизмом Морса–Смейла на многообразии M^u и его ограничение $\tilde{f}|_{V_{\tilde{f}}}$ топологически сопряжено с диффеоморфизмом $f|_{V_f}$ посредством гомеоморфизма, переводящего двумерные сепаратрисы диффеоморфизма $\tilde{f}$ в двумерные сепаратрисы диффеоморфизма f с сохранением устойчивости. Согласно утверждениям 2.1 и 1.1 диффеоморфизмы $\tilde{f}$ и f топологически сопряжены. Следовательно, $M^u = M^3$ и $\tilde{X}^t = \tilde{X}_u^t$ – искомый поток.

§ 3. Включающиеся в поток диффеоморфизмы, для которых граф – полный инвариант

В этом параграфе рассмотрен класс $G_k(M^3)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла таких, что для любого $f \in G_k(M^3)$ выполняются следующие условия:

- 1) $\Omega_f = \text{Fix}_f$;
- 2) множество седловых точек состоит в точности из $k > 0$ седловых неподвижных точек⁷, причем устойчивое многообразие W_σ^s любой седловой неподвижной точки $\sigma \in \Omega_f$ имеет размерность 2;
- 3) для любых двух различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ пусто.

3.1. Структура несущего многообразия и динамика диффеоморфизмов из класса $G_k(M^3)$. В этом пункте мы приводим ряд свойств диффеоморфизмов из класса $G_k(M^3)$, играющих важную роль в доказательстве теоремы 3. Для $n > 3$ аналогичные результаты следуют из [17].

Нижеприведенное утверждение следует из [24].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Для любой точки $\sigma \in \Omega_1$ диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ замыкание $\text{cl } l$ ($\text{cl } \Sigma$) неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы l (Σ) является компактной дугой (2-сферой), состоящей из объединения сепаратрисы l (Σ), точки σ и единственной точки $\omega \in \Omega_0$ ($\alpha \in \Omega_3$).

Поскольку множество Ω_2 является пустым для любого диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ и все компоненты разложения объемлющего многообразия $M^3 = A_f \cup V_f \cup R_f$ являются связными, то репеллер R_f состоит из одной источниковой точки α и $V_f = W_\alpha^u \setminus \alpha$. Более детальную информацию дает следующая

ТЕОРЕМА 4. Неблуждающее множество любого диффеоморфизма f из класса $G_k(M^3)$ содержит в точности 1 источник и $k + 1$ стоковую точку, а несущее многообразие M^3 диффеоморфно 3-сфере.

⁷Если $k = 0$, то Ω_f состоит в точности из одного стока и одного источника, все диффеоморфизмы с таким неблуждающим множеством вкладываются в топологический поток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой седловой точки σ диффеоморфизма f сферы $\Sigma = \text{cl } W_\sigma^s$ является топологическим репеллером, следовательно, существуют окрестность $U(\Sigma) \in M^3$ и целое положительное число $r(\Sigma)$ такое, что $U(\Sigma) \subset \text{int } f^{r(\Sigma)}(U(\Sigma))$. Не уменьшая общности, можно считать, что $r(\Sigma) = 1$ для любого σ (в противном случае перейдем к некоторой степени диффеоморфизма f , при этом многообразие M^3 останется прежним).

Из [25; предложение 0.1] следует, что для каждой седловой точки σ диффеоморфизма f существует замкнутая окрестность $V(\Sigma) \subset U(\Sigma)$ сферы Σ , ограниченная гладко вложенными сферами S_1^2 , S_2^2 и гомеоморфная прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]$. Обозначим через l_1 и l_2 неустойчивые сепаратрисы точки σ , через ω_1 и ω_2 – стоковые точки, принадлежащие замыканиям l_1 и l_2 соответственно (возможно, $\omega_1 = \omega_2$). Из локальной сопряженности диффеоморфизма f с линейным отображением следует, что дуги $\text{cl } l_1 \cap V(\Sigma)$ и $\text{cl } l_2 \cap V(\Sigma)$ лежат в разных компонентах связности множества $V(\Sigma) \setminus \Sigma$.

Удалим из многообразия M^3 внутренность окрестности $V(\Sigma)$. Многообразие $M^3 \setminus \text{int } V(\Sigma)$ является гладким компактным многообразием с краем, состоящим из сфер S_1^2 , S_2^2 . Обозначим через M_1^3 компактное многообразие без края, полученное из многообразия $M^3 \setminus \text{int } V(\Sigma)$ приклеиванием вдоль его края двух замкнутых шаров B_1^3 и B_2^3 . Зададим диффеоморфизм $\tilde{f}_1: M_1^3 \rightarrow M_1^3$ таким образом, что:

- 1) $\tilde{f}_1|_{M_1^3 \setminus (B_1^3 \cup B_2^3)} = \tilde{f}|_{M_1^3 \setminus (B_1^3 \cup B_2^3)}$;
- 2) $\tilde{f}_1|_{B_1^3 \cup B_2^3}$ имеет только две неподвижные точки $\alpha_1 \in B_1^3$, $\alpha_2 \in B_2^3$, каждая из которых является отталкивающей.

Неблуждающее множество $\Omega_{\tilde{f}_1}$ диффеоморфизма $\tilde{f}_1$ содержит в точности две отталкивающие точки и $k - 1$ седловую точку, при этом общее количество неподвижных точек диффеоморфизма $\tilde{f}_1$ совпадает с числом неподвижных точек диффеоморфизма f . Так как неблуждающее множество $\Omega_{\tilde{f}_1}$ содержит два источника, то многообразие M_1^3 состоит из двух компонент связности N_1^3 и N_2^3 . Так как $\text{cl } l_i \setminus U_\Sigma \subset N_i^3$, то $\omega_i \subset N_i^3$, $i = 1, 2$.

Проделаем описанную процедуру еще $k - 1$ раз. В результате получим компактное многообразие без края M_k^3 и диффеоморфизм $\tilde{f}_k: M_k^3 \rightarrow M_k^3$ со следующими свойствами. Многообразие M_k^3 состоит из $k + 1$ компоненты связности $N_1^3, \dots, N_{k+1}^3$, каждая из которых содержит 1 источник и 1 сток диффеоморфизма $\tilde{f}_k$. Следовательно, каждое многообразие N_i^3 гомеоморфно 3-сфере, а многообразие M^3 является связной суммой $k + 1$ экземпляра 3-сфер⁸. Поэтому M^3 гомеоморфно 3-сфере.

Неблуждающее множество диффеоморфизма $\tilde{f}_k$ содержит только притягивающие и отталкивающие неподвижные точки, и их общее количество равно числу неподвижных точек диффеоморфизма f . Следовательно, неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит $2k + 2$ точки: 1 источник, k седловых точек и $k + 1$ сток.

Для любого диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ аттрактор A_f состоит из замыканий неустойчивых одномерных сепаратрис и в силу утверждения 3.1 является

⁸Связной суммой $M_1^3 \sharp M_2^3$ двух ориентируемых связных 3-многообразий M_1^3 , M_2^3 называется многообразие $M_1^3 \sharp M_2^3$, полученное удалением из M_1^3 , M_2^3 шаров $B_1^3 \subset M_1^3$, $B_2^3 \subset M_2^3$ и склеиванием оставшихся многообразий с краем при помощи гомеоморфизма $\phi: \partial B_1^3 \rightarrow \partial B_2^3$, обращающего естественную ориентацию ∂B_1^3 .

связным одномерным клеточным комплексом. Следующая лемма уточняет его топологическую структуру.

ЛЕММА 3.1. *Аттрактор A_f не содержит подмножеств, гомеоморфных окружности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть множество $s \subset A_f$ гомеоморфно окружности. Обозначим через σ седловую неподвижную точку, принадлежащую s . Сфера $\text{cl } W_\sigma^s$ делит многообразие M^3 на две компоненты связности. Тогда существует точка $x \neq \sigma$, принадлежащая пересечению $s \cap \text{cl } W_\sigma^s$. Точка x не может быть стоковой или седловой точкой, так как замыкание $\text{cl } W_\sigma^s$ является объединением устойчивого многообразия W_σ^s и источниковой точки α . Следовательно, точка x принадлежит неустойчивому многообразию некоторой седловой точки $\tilde{\sigma}$ (возможно, совпадающей с σ). Получили противоречие, так как в силу условий, определяющих класс $G_k(M^3)$, $W_\sigma^s \cap W_\sigma^u = \sigma$ и $W_\sigma^s \cap W_{\tilde{\sigma}}^u = \emptyset$ для любых точек $\sigma \neq \tilde{\sigma}$.

Обозначим через ξ_f изоморфизм между неблуждающим множеством Ω_f диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ и множеством вершин графа Γ_f . Напомним, что *маршрутом*, соединяющим вершины b_0, b_s графа Γ_f , называется последовательность ребер $(b_0, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_{s-1}, b_s)$. Маршрут называется *простым*, если все его ребра попарно различны. Будем обозначать через $\Gamma_f \setminus a$ граф, полученный из графа Γ_f удалением вершины a и всех инцидентных ей ребер.

Следующее утверждение является элементарным следствием теоремы 4 и леммы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Для любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ многообразие $\text{cl } W_\sigma^s$ делит 3-сферу M^3 на две компоненты связности B_1^3, B_2^3 такие, что любые неподвижные точки $p, q \in (\Omega_f \setminus (\sigma \cup \alpha))$ принадлежат одной и той же компоненте связности B_1^3 (B_2^3) тогда и только тогда, когда вершины $\xi_f(p), \xi_f(q)$ графа Γ_f можно соединить простым маршрутом из ребер, принадлежащих графу $(\Gamma_f \setminus \xi_f(\alpha)) \setminus \xi_f(\sigma)$.*

3.2. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов из класса $G_k(M^3)$. Этот пункт посвящен доказательству теоремы 3, утверждающей, что класс изоморфности графа диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$, включающегося в топологический поток, является полным топологическим инвариантом. Необходимость условий теоремы следует непосредственно из определения топологической сопряженности и определения графа диффеоморфизма, достаточность – из леммы 3.2.

ЛЕММА 3.2. *Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in G_k(M^3)$ включаются в топологические потоки и их графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ изоморфны. Тогда диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждений 2.1 и 1.1 для доказательства леммы достаточно показать, что ограничения $f|_{V_f}, f'|_{V_{f'}}$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма φ , переводящего двумерные сепаратрисы диффеоморфизма f в двумерные сепаратрисы диффеоморфизма f' .

Представим множество L_f^s в виде объединения двумерных сепаратрис седловых точек $L_f^s = \lambda_1 \cup \dots \cup \lambda_k$. Из теоремы 4 следует, что для диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ имеет место равенство $g_f = 0$. Так как диффеоморфизм f

включается в топологический поток, то в силу теоремы 1 его схема S_f является тривиальной. Тогда согласно утверждению 2.1 существует гомеоморфизм $\psi_f: V_f \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ такой, что для любого $i = 1, \dots, k$ существует простая гладкая замкнутая кривая c_i на сфере $\mathbb{S}^2$ такая, что $\psi_f(\lambda_i) = c_i \times \mathbb{R}$ и $f|_{V_f} = \psi_f^{-1} A_0^1 \psi_f$. Аналогичные обозначения со штрихом введем для диффеоморфизма f' .

Обозначим через $\pi_f, (\pi_{f'})$ взаимно однозначное соответствие между неподвижными точками, сепаратрисами диффеоморфизма f (f') и вершинами, ребрами его графа Γ_f ($\Gamma_{f'}$) и через ζ изоморфизм графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$. Не уменьшая общности, предположим, что нумерация сепаратрис множества $L_{f'}^s$ выбрана таким образом, что $\lambda'_i = \pi_{f'}^{-1}(\zeta(\pi_f(\lambda_i)))$, $i = 1, \dots, k$. Покажем, что существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\phi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ такой, что $\phi(c_i) = c'_i$ для любого $i = 1, \dots, k$. Тогда искомый гомеоморфизм $\varphi: V_f \rightarrow V_{f'}$ определяется формулой $\varphi = \psi_{f'}^{-1} \Phi \psi_f$, где $\Phi: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ – гомеоморфизм такой, что $\Phi(s, t) = (\phi(s), t)$. Докажем требуемое утверждение индукцией по числу $l \leq k$.

Для $l = 1$ утверждение является следствием теоремы Шенфлиса (см., например, [26; введение, раздел А, утверждение 4]). Предположим, что для любого $1 \leq l < k$ существует гомеоморфизм $\phi_l: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ такой, что $\phi_l(c_i) = c'_i$ для $i = 1, \dots, l$, и докажем, что существует гомеоморфизм $\phi_{l+1}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ такой, что $\phi_{l+1}(c_i) = c'_i$ для $i = 1, \dots, l + 1$.

В силу следствия 3.1 дуга c_{l+1} (c'_{l+1}) делит сферу $\mathbb{S}^2$ на два диска D_1, D_2 (D'_1, D'_2) такие, что дуги c_i, c_j (c'_i, c'_j) принадлежат одному и тому же диску, если соответствующие им вершины графа $\Gamma(f)$ ($\Gamma(f')$) можно соединить маршрутом, составленным из ребер графа $\Gamma(f) \setminus (\xi_f(\alpha) \cup \xi_f(\sigma_{l+1}))$ ($\Gamma(f') \setminus (\xi_{f'}(\alpha') \cup \xi_{f'}(\sigma'_{l+1}))$). Так как графы $\Gamma(f), \Gamma(f')$ изоморфны, то (с точностью до обозначения дисков D'_1, D'_2) выполняется следующее условие: если для некоторого $i = 1, \dots, l$ $c_i \subset D_1$ ($c_i \subset D_2$), то $c'_i \subset D'_1$ ($c'_i \subset D'_2$).

Так как ϕ_l – гомеоморфизм, то существуют диски $\tilde{D}_1 \subset D'_1, \tilde{D}_2 \subset D'_2$ такие, что

$$(\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2) \cap (c'_{l+1} \cup \varphi(c_{l+1})) = \emptyset$$

и если $c'_i \in D'_1$ ($c'_i \in D'_2$), то $c'_i \in \tilde{D}_1$ ($c'_i \in \tilde{D}_2$), $i = 1, \dots, l$. Обозначим через $U \subset \mathbb{S}^2$ множество, ограниченное дугами $\partial\tilde{D}_1, \partial\tilde{D}_2$. Из двумерной теоремы о кольце следует, что множество U гомеоморфно кольцу $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ и существует гомеоморфизм $g_U: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, тождественный вне U и такой, что $g_U(\phi_l(c_{l+1})) = c'_{l+1}$ (см. для справки, например, [26; введение, раздел А, утверждения 10 и 11]). Тогда $\phi_{l+1} = g_U \phi_l$ является искомым гомеоморфизмом.

§ 4. Построение диффеоморфизмов из класса $G_k(M^3)$ с различными типами вложения пучков сепаратрис

Цель этого параграфа – доказательство предложений 1 и 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует диффеоморфизм $f \in G_4(S^3)$, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но среди них есть нетривиальный пучок.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует не включающийся в поток диффеоморфизм $f \in G_5(S^3)$, все пучки одномерных сепаратрис которого являются тривиальными.*

Построение анонсированных диффеоморфизмов существенно опирается на некоторые алгебраические инварианты замкнутых кривых на торе.

4.1. Вспомогательные сведения из гомологической теории кривых на торе. Пусть $\widehat{Q}$ – многообразие, гомеоморфное $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$, $Q = \mathbb{R}^2 \times [-1, 1]$ – универсальное накрытие и $p: Q \rightarrow \widehat{Q}$ – естественная проекция. Каждой петле $\widehat{l}: [0, 1] \rightarrow \widehat{Q}$ поставим в соответствие пару целых чисел $\langle a_l, b_l \rangle$ таких, что если $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_3 \in [-1, 1]$, – фиксированная точка такая, что $p(\tilde{x}) = \widehat{l}(0)$, и $\tilde{l}$ – поднятие петли l с началом в точке $\tilde{x}$, то $\tilde{l}(1) = (x_1 + a_l, x_2 + b_l, x_3)$. Из [20; гл. 19, 29] следует, что пара $\langle a_l, b_l \rangle$ не зависит от выбора точки $\tilde{x}$ и определяет гомологический класс петли l .

Пусть $\widehat{Q}, \widehat{Q}'$ – многообразия, гомеоморфные $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$. Любой гомеоморфизм $h: \widehat{Q} \rightarrow \widehat{Q}'$ индуцирует изоморфизм $h_*: H_1(\widehat{Q}) \rightarrow H_1(\widehat{Q}')$, заданный целочисленной унимодулярной матрицей

$$H_* = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что многообразие V называется *заполненным тором*, если существует гомеоморфизм $\psi: V \rightarrow \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$. Будем называть *средней линией* заполненного тора V замкнутую кривую $\widehat{l} = \psi^{-1}(\{O\} \times \mathbb{S}^1)$.

Пусть $V_1, V_2 \in \widehat{Q}$, $(V'_1, V'_2 \in \widehat{Q}')$ – непересекающиеся заполненные торы и $\widehat{l}_i$ ($\widehat{l}'_i$) – средняя линия тора V_i (V'_i), $i = 1, 2$. Кривая $\widehat{l}_i$ ($\widehat{l}'_i$), оснащенная некоторой ориентацией, представляет петлю в $\widehat{Q}$, которой поставим в соответствие ее гомологический класс $\langle a_i, b_i \rangle$ ($\langle a'_i, b'_i \rangle$). Отметим, что при смене ориентации кривой $\widehat{l}_i$ пара $\langle a_i, b_i \rangle$ переходит в пару $-\langle a_i, b_i \rangle = \langle -a_i, -b_i \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Если существует гомеоморфизм $h: \widehat{Q} \rightarrow \widehat{Q}'$ такой, что $h(V_i) = V'_i$, $i = 1, 2$, то*

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a'_i \\ b'_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения следует из того, что при соответствующем выборе ориентации петли $h(\widehat{l}_i)$, $\widehat{l}'_i$ гомологичны в V'_i и, следовательно, в $\widehat{Q}'$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Если существует гомеоморфизм $h: \widehat{Q} \rightarrow \widehat{Q}'$ такой, что $h(V_i) = V'_i$, $i = 1, 2$, и кривые $\widehat{l}_1, \widehat{l}_2$ гомологичны в $\widehat{Q}$, то кривые $\widehat{l}'_1, \widehat{l}'_2$ гомологичны в $\widehat{Q}'$.*

4.2. Доказательство предложения 1. Доказательство предложения 1 ведется по шагам и представляет из себя реализацию пучка дуг в $\mathbb{R}^3$ пучком одномерных сепаратрис диффеоморфизма с помощью конструкции Черри.

Шаг 1. Определение модельного пучка дуг. Пусть $\rho \in (0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$ – сферические координаты в $\mathbb{R}^3$. Положим

$$\gamma_i^0 = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in (0, +\infty), \varphi = 0, \theta = \frac{\pi(i-1)}{3} \right\}, \quad i = 1, \dots, 4,$$

$$\gamma_i = \gamma_i^0, \quad i = 1, 2, 4,$$

$$\gamma_3 = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in (0, +\infty), \varphi = 2\pi(\log_2 \rho \bmod 1), \theta = \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

Ориентируем дуги γ_i^0 , γ_i в направлении возрастания ρ , $i = 1, \dots, 4$. На рис. 3 изображены фундаментальные области пучков $F_O^0 = (\bigcup_{i=1}^4 \gamma_i^0) \cup \{O\}$ и $F_O = (\bigcup_{i=1}^4 \gamma_i) \cup \{O\}$.

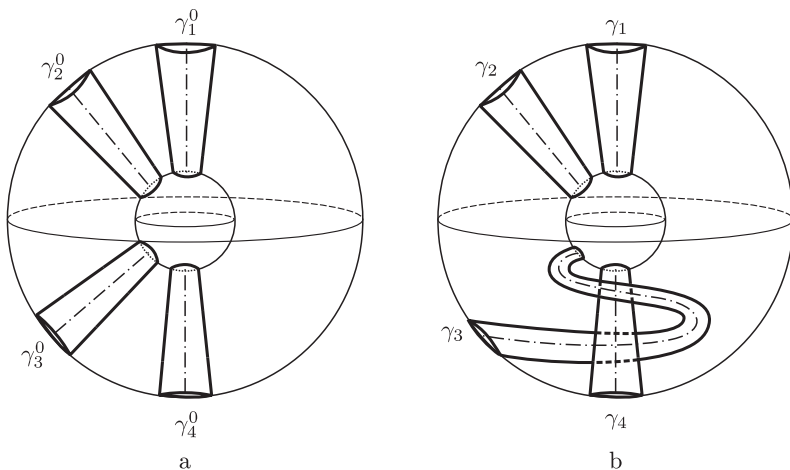


Рис. 3. Фундаментальные области пучков F_O^0 и F_O

Выберем окрестности Γ_i^0 , Γ_i дуг γ_i^0 , γ_i соответственно следующим образом. Положим

$$\Gamma_1^0 = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in (0, +\infty), \varphi \in [0, 2\pi), |\theta| \leq \frac{\pi}{12} \right\}, \quad \Gamma_i^0 = r_i(\Gamma_1^0),$$

где $r_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – вращение на угол $\pi(i-1)/3$ с осью вращения

$$\left\{ (\rho, \varphi, \theta) \mid \rho \in [0, +\infty), \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}, \theta = \frac{\pi}{2} \right\}, \quad i = 2, 3, 4.$$

Определим $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ следующим образом: $\Gamma_i = \Gamma_i^0$ для $i = 1, 2, 4$, а $\Gamma_3 = \chi(\Gamma_3^0)$, где $\chi: \Gamma_3^0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – топологическое вложение, определенное формулой $\chi(\rho, \varphi, \theta) = (\rho, \varphi + 2\pi(\log_2 \rho \bmod 1), \theta)$.

Шаг 2. Построение диффеоморфизма $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. По построению множество Γ_i , $i = 1, \dots, 4$, является A^{-1} -инвариантной окрестностью кривой γ_i , гомеоморфной $\mathbb{R} \times \mathbb{D}^2$, и Γ_i/A^{-1} – заполненный тор. Представим $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ как пространство орбит действия группы $G = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$ на многообразии $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$, где $g: \Gamma \rightarrow \Gamma$ – диффеоморфизм, заданный формулой $g(x_1, (x_2, x_3)) = (x_1 - 1, (x_2, x_3))$. Согласно утверждению 2.1 существует диффеоморфизм $\zeta_i: \Gamma_i \rightarrow \Gamma$, сопрягающий диффеоморфизмы $A^{-1}|_{\Gamma_i}$, g и переводящий кривую γ_i в прямую Ox_1 .

Положим

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in C : |x_1| \leq 1\}, \\ B_2 &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \frac{1}{16} \right\}, \\ B_3 &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in C : |x_1| \leq \frac{1}{2}, x_2^2 + x_3^2 \leq \frac{1}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Модифицируем диффеоморфизм g следующим образом.

Пусть $\psi_1: C \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция такая, что:

- (а) $\psi_1(x_1, x_2, x_3) = -1$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in (C \setminus \text{int } B_1)$;
- (б) $\psi_1(x_1, x_2, x_3) < 0$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in (B_1 \setminus B_2)$;
- (с) $\psi_1(x_1, x_2, x_3) > 0$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in \text{int } B_2$;
- (д) $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(\pm \frac{1}{4}, 0, 0) \neq 0$.

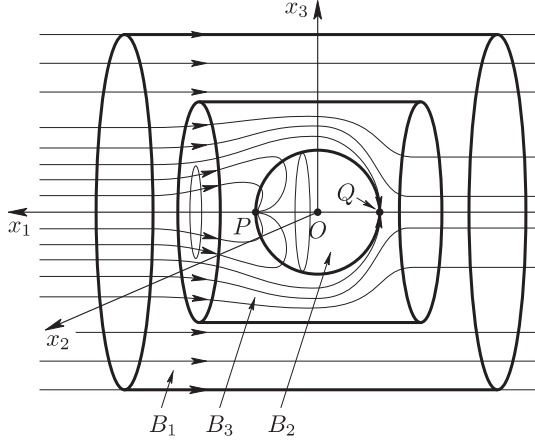


Рис. 4. Траектории потока ϕ^t

Пусть $\psi_2: C \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- (а) $\psi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in (C \setminus \text{int } B_1)$;
- (б) $\psi_2(x_1, x_2, x_3) < 0$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in \text{int } B_1$;
- (с) $\psi_2(x_1, x_2, x_3) = -1$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in B_3$.

Определим на C поток ϕ^t следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \psi_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = x_2 \psi_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = x_3 \psi_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Поток ϕ^t имеет в точности две неподвижные точки: сток $P(1/4, 0, 0)$ и седло $Q(-1/4, 0, 0)$ (см. рис. 4). Обе точки являются гиперболическими. Неустойчивые сепаратрисы точки Q совпадают с интервалом $(-1/4, 1/4) \times \{(0, 0)\}$, принадлежащим бассейну стока P , и с полупрямой $(-\infty, -1/4) \times \{(0, 0)\}$.

Пусть ϕ – сдвиг на единицу времени потока ϕ^t . По построению ϕ совпадает с диффеоморфизмом g вне B_1 . Определим диффеоморфизм $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ так, что $\bar{f}$ совпадает с A^{-1} вне Γ_i и для каждого $i = 1, \dots, 4$ совпадает с $\zeta_i^{-1} \phi \zeta_i$ на Γ_i . Тогда диффеоморфизм $\bar{f}$ имеет в Γ_i в точности две неподвижные точки: сток $w_i = \zeta_i^{-1}(P)$ и седло $s_i = \zeta_i^{-1}(Q)$. Обе точки являются гиперболическими и неустойчивые сепаратрисы точки s_i лежат на кривой γ_i . Таким образом, неблуждающее множество $\Omega_{\bar{f}}$ состоит в точности из девяти гиперболических неподвижных точек: стока w , находящегося в начале координат, четырех седловых точек $s_1, \dots, s_4$ и четырех стокowych точек $w_1, \dots, w_4$.

Шаг 3. Построение диффеоморфизма $f \in G_4(M^3)$. Отождествим пространство $\mathbb{R}^3$ с гиперплоскостью $x_4 = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^4$. Напомним, что стереографическая проекция $\vartheta_+ : \mathbb{S}^3 \setminus (0, 0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ определяется формулой

$$\vartheta_+(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right).$$

Определим диффеоморфизм $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} (0, 0, 0, 1), & \text{если } x = (0, 0, 0, 1), \\ \vartheta_+^{-1}(\bar{f}(\vartheta_+(x))), & \text{если } x \neq (0, 0, 0, 1). \end{cases}$$

По построению ограничение диффеоморфизма f на множество $\mathbb{S}^3 \setminus (0, 0, 0, 1)$ топологически сопряжено с диффеоморфизмом $\bar{f}$, а точка $(0, 0, 0, 1)$ является для диффеоморфизма f гиперболическим источником. Обозначим этот источник α и для $i = 1, \dots, 4$ положим $\omega = \vartheta_+^{-1}(w)$, $\omega_i = \vartheta_+^{-1}(w_i)$ и $\sigma_i = \vartheta_+^{-1}(s_i)$. Фазовый портрет диффеоморфизма f приведен на рис. 2, а).

Шаг 4. Покажем, что для построенного диффеоморфизма f пучки $F_{\omega_1}, \dots, F_{\omega_4}$ одномерных неустойчивых сепаратрис являются тривиальными, а пучок F_ω является ручным, но не является тривиальным.

Так как диффеоморфизм $f|_{\mathbb{S}^3 \setminus \alpha}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $\bar{f}$, то достаточно доказать аналогичное утверждение для пучков $F_{w_1}, \dots, F_{w_4}$ и F_w .

Для $i = 1, \dots, 4$ пучок F_{w_i} состоит из одномерной сепаратрисы l_i^+ седловой точки s_i . При этом диффеоморфизм $\bar{f}$ в окрестности стока w_i гладко сопряжен с диффеоморфизмом ϕ посредством диффеоморфизма ζ_i , который переводит дугу l_i^+ в интервал на оси Ox_1 . Это означает, что сепаратриса l_i^+ является ручной, а следовательно, и тривиальной.

Для доказательства ручности пучка сепаратрис F_w заметим, что диффеоморфизмы $\bar{f}$ и A^{-1} имеют общую фундаментальную область в бассейне точки $w = O$ и совпадают на ней. Тогда из утверждения 2.1 следует существование гомеоморфизма $b : W_\omega^s \rightarrow \mathbb{R}^3$, сопрягающего диффеоморфизмы $\bar{f}|_{W_\omega^s}$ и A^{-1} и переводящего пучок F_w в пучок F_O . Поэтому достаточно доказать ручность и нетривиальность последнего. Для этого положим

$$\Lambda = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) : \left| \theta - \frac{2\pi}{3} \right| < \frac{\pi}{6} \right\}.$$

Тогда $(\gamma_3^0 \cup \gamma_3) \subset \Lambda$ и $\gamma_i \cap \Lambda = \emptyset$ для всех $i = 1, 2, 4$. Пусть $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция такая, что $\tau(\theta) = 1$ при $|\theta - 2\pi/3| \leq \pi/12$, $\tau(\theta) = 0$ при $|\theta - 2\pi/3| \geq \pi/6$ и τ монотонно возрастает (убывает) при $-\pi/6 < \theta - 2\pi/3 < -\pi/12$ ($\pi/12 < \theta - 2\pi/3 < \pi/6$). Определим гомеоморфизм $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$\Psi(\rho, \varphi, \theta) = \begin{cases} (\rho, \varphi, \theta), & \text{если } (\rho, \varphi, \theta) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Lambda) \cup \{O\}, \\ (\rho, \varphi - 2\pi\tau(\theta)(\log_2 \rho \bmod 1), \theta), & \text{если } (\rho, \varphi, \theta) \in \Lambda. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $\Psi(\gamma_i) = \gamma_i^0$ для каждого $i = 1, \dots, 4$. Поскольку пучок F_O^0 является стандартным, то F_O – ручной пучок.

Покажем, что пучок F_O не является тривиальным.

Предположим противное. Тогда существует гомеоморфизм $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, коммутирующий с диффеоморфизмом A^{-1} и такой, что $H(F_O^0) = F_O$. Обозначим через $j_1, \dots, j_4 \in \{1, \dots, 4\}$ индексы такие, что $H(\gamma_{j_i}^0) = \gamma_i$. Не уменьшая общности, будем считать, что $H(\Gamma_{j_i}^0) = \Gamma_i$.

Положим $\widehat{W} = (\mathbb{R}^3 \setminus O)/A$ и обозначим через $p_{\widehat{W}}: \mathbb{R}^3 \setminus O \rightarrow \widehat{W}$ естественную проекцию. Положим $\widehat{\gamma}_i^0 = p_{\widehat{W}}(\gamma_i^0)$, $\widehat{\gamma}_i = p_{\widehat{W}}(\gamma_i)$, $\widehat{\Gamma}_i^0 = p_{\widehat{W}}(\Gamma_i^0)$, $\widehat{\Gamma}_i = p_{\widehat{W}}(\Gamma_i)$. Тогда в силу результатов п. 2.1 пространство $\widehat{W}$ является гладким 3-многообразием, проекция $p_{\widehat{W}}$ является накрытием и отображение $\widehat{H} = p_{\widehat{W}} H p_{\widehat{W}}^{-1}: \widehat{W} \rightarrow \widehat{W}$ является гомеоморфизмом таким, что $\widehat{H}(\widehat{\Gamma}_{j_i}^0) = \widehat{\Gamma}_i$, $\widehat{H}(\widehat{\Gamma}_{j_i}) = \widehat{\Gamma}_i$. Более того, $\widehat{W}$ получается из трехмерного кольца на рис. 3 отождествлением граничных сфер в силу диффеоморфизма A^{-1} . Следовательно, $\widehat{W}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\widehat{\gamma}_i^0$ ($\widehat{\gamma}_i$) гомеоморфно окружности и $\widehat{\Gamma}_i^0$ ($\widehat{\Gamma}_i$) является ее трубчатой окрестностью, гомеоморфной заполненному тору.

Положим

$$\widehat{Q} = \widehat{W} \setminus (\text{int } \widehat{\Gamma}_1 \cup \text{int } \widehat{\Gamma}_4), \quad \widehat{Q}^0 = \widehat{W} \setminus (\text{int } \widehat{\Gamma}_{j_1}^0 \cup \text{int } \widehat{\Gamma}_{j_4}^0).$$

В силу выбора полноториев $\widehat{\Gamma}_1, \widehat{\Gamma}_4$ многообразие $\widehat{Q}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$. Тогда и $\widehat{Q}^0$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$, при этом $\widehat{H}(\widehat{Q}^0) = \widehat{Q}$. Так как все полнотории $\widehat{\Gamma}_1^0, \dots, \widehat{\Gamma}_4^0$ вложены в $\widehat{W}_A$ стандартным образом, то существует заполненный тор $V \in \widehat{Q}^0$ такой, что $\widehat{\Gamma}_{j_2}^0 \cup \widehat{\Gamma}_{j_3}^0 \subset \text{int } V$, причем $e_*: \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(\widehat{W})$ – изоморфизм, где $e: V \rightarrow \widehat{W}$ – отображение включения. Отсюда следует, что петли $\widehat{\gamma}_{j_2}^0, \widehat{\gamma}_{j_3}^0$ гомологичны в $\widehat{Q}^0$. Вычислим гомологические классы петель $\widehat{\gamma}_2, \widehat{\gamma}_3$. Для этого определим гомеоморфизм $\zeta: \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \rightarrow p_{\widehat{W}}^{-1}(\widehat{Q})$ и накрытие $p: \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \rightarrow \widehat{Q}$ формулами

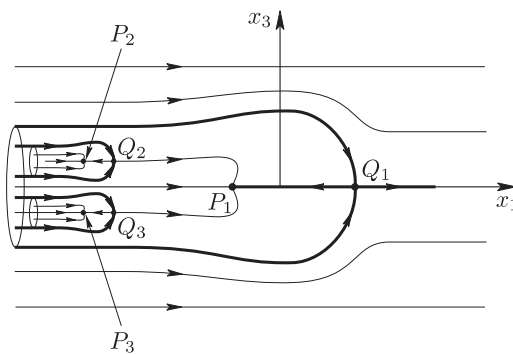
$$\begin{aligned} \zeta(x_1, x_2, x_3) &= (\rho, \varphi, \theta), \\ \rho &= 2^{x_1}, \quad \varphi = 2\pi(x_2 \bmod 1), \quad \theta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{5x_3}{6} + 1 \right), \quad p = p_{\widehat{W}} \zeta. \end{aligned}$$

Петля $\widehat{\gamma}_2$ накрывается путем в $\mathbb{R}^2 \times [-1, 1]$ с началом в точке $(0, 0, -2/5)$ и концом в точке $(1, 0, -2/5)$, поэтому $[\widehat{\gamma}_2] = \langle 1, 0 \rangle$; петля $\widehat{\gamma}_3$ накрывается путем в $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$ с началом в точке $(0, 0, 2/5)$ и концом в точке $(1, 1, 2/5)$, поэтому $[\widehat{\gamma}_3] = \langle 1, 1 \rangle$. В силу следствия 4.1 получаем противоречие.

4.3. Доказательство предложения 2. Идея доказательства аналогична идее доказательства предложения 1, поэтому мы приводим только основные его штрихи, опуская детали.

Шаг 1. Построение диффеоморфизма $f \in G_5(M^3)$. Начнем с модельного пучка $\widetilde{F}_O = \gamma_1 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup O$. Затем заменим гомеоморфизм $A^{-1}|_{\Gamma_i}$, $i = 3, 4$, гомеоморфизмом $\zeta_i^{-1} \phi \zeta_i$, а гомеоморфизм $A^{-1}|_{\Gamma_1}$ гомеоморфизмом $\zeta_i^{-1} \widetilde{\phi} \zeta_i$, где $\widetilde{\phi}$ – сдвиг на единицу времени потока $\widetilde{\phi}^t$ на Γ , фазовый портрет которого изображен на рис. 5. После этого мы получим диффеоморфизм $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Далее, определим диффеоморфизм $f: S^3 \rightarrow S^3$ соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} (0, 0, 0, 1), & \text{если } x = (0, 0, 0, 1), \\ \vartheta_+^{-1}(\widetilde{f}(\vartheta_+(x))), & \text{если } x \neq (0, 0, 0, 1). \end{cases}$$

Рис. 5. Поток $\tilde{\phi}^t$

Неблуждающее множество Ω_f состоит в точности из 12 гиперболических неподвижных точек: источника $\alpha = (0, 0, 0, 1)$, пяти седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ и шести стоковых точек $\omega_1, \dots, \omega_5, \omega$, причем $\omega = (0, 0, 0, -1)$ (см. рис. 2, b)).

Шаг 2. Доказательство тривиальности одномерных пучков сепаратрис диффеоморфизма f . Для $i = 1, \dots, 4$ пучок F_{ω_i} состоит из одной сепаратрисы седловой точки σ_i , пучок F_{ω_5} (F_ω) состоит из трех неустойчивых сепаратрис седловых точек $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5$ ($\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$). Для $i = 1, \dots, 4$ тривиальность пучка F_{ω_i} доказывается так же, как и тривиальность одноименного пучка в шаге 4 доказательства предложения 1.

Пучок F_{ω_5} состоит из трех одномерных сепаратрис седловых точек $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5$. По определению диффеоморфизм $f|_{W_{\omega_5}^s}$ топологически сопряжен со сдвигом $\tilde{\phi}^1$ на единицу времени вдоль траекторий потока $\tilde{\phi}^t|_{W_{P_1}^s}$, следовательно, в силу леммы 1.1 является тривиальным.

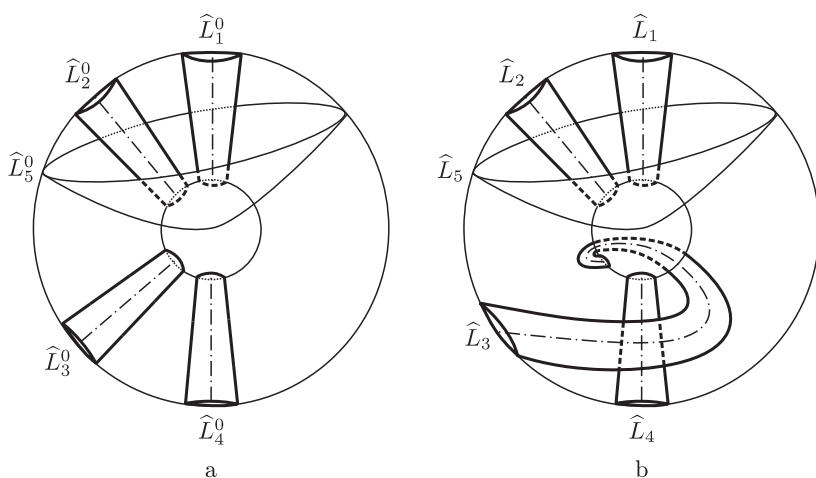
Пучок F_ω состоит из трех одномерных сепаратрис седловых точек $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$. Как и в шаге 4 доказательства предложения 1 показывается, что тривиальность пучка F_ω равносильна тривиальности пучка $\tilde{F}_O$. Докажем, что пучок $\tilde{F}_O$ тривиален, построив гомеоморфизм $\hat{H}: \hat{W} \rightarrow \hat{W}$ такой, что $\hat{H}(\hat{\gamma}_i^0) = \hat{\gamma}_i$ для $i = 1, 2, 4$.

Положим

$$\hat{Q} = \hat{W} \setminus (\text{int } \hat{\Gamma}_1 \cup \text{int } \hat{\Gamma}_4).$$

Тогда $\hat{Q}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$. При этом $\hat{\gamma}_3^0 \subset \hat{Q}$, $\hat{\gamma}_3 \subset \hat{Q}$ и гомологические классы петель $\hat{\gamma}_3^0, \hat{\gamma}_3$ имеют вид $\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$, соответственно. Пусть $\hat{H}: \hat{Q} \rightarrow \hat{Q}$ гомеоморфизм такой, что $\hat{H}(\hat{\gamma}_3^0) = \hat{\gamma}_3$. Тогда $\hat{H}$ переводит меридиан тора $\hat{\Gamma}_i, i = 1, 4$, в меридиан того же тора и, следовательно, продолжается до искомого гомеоморфизма $\hat{H}$.

Шаг 3. Доказательство нетривиальности схемы S_f . По построению схема построенного диффеоморфизма f получается из трехмерного кольца на рис. 6, b) отождествлением граничных сфер в силу диффеоморфизма A^{-1} , при этом она содержит пять торов $\hat{L}_1, \dots, \hat{L}_5$. На рис. 6, a) изображена тривиальная схема с пятью торами $\hat{L}_1^0, \dots, \hat{L}_5^0$. При этом $\hat{L}_i^0 = \hat{L}_i = \partial \hat{\Gamma}_i$ для $i = 1, 2, 4$, $\hat{L}_3^0 = \partial \hat{\Gamma}_3^0$ и $\hat{L}_3 = \partial \hat{\Gamma}_3$.

Рис. 6. Схема диффеоморфизма f и тривиальная схема

Предположив, что схема S_f является тривиальной, мы приходим к существованию гомеоморфизма $\hat{H}: \hat{W} \rightarrow \hat{W}$ такого, что $\hat{H}(\hat{L}_1^0 \cup \dots \cup \hat{L}_5^0) = \hat{L}_1 \cup \dots \cup \hat{L}_5$. Тор $\hat{L}_5^0$ ($\hat{L}_5$) делит многообразие $\hat{W}$ на два полнотория, каждый из которых содержит пару непересекающихся полноториев из множества $\hat{\Gamma}_1^0, \dots, \hat{\Gamma}_4^0$ ($\hat{\Gamma}_1, \dots, \hat{\Gamma}_4$). Поэтому $\hat{H}(\hat{L}_5^0) = T_5$. Возможны два случая:

- 1) $\hat{H}(\hat{\Gamma}_1^0 \cup \hat{\Gamma}_2^0) = \hat{\Gamma}_1 \cup \hat{\Gamma}_2$;
- 2) $\hat{H}(\hat{\Gamma}_1^0 \cup \hat{\Gamma}_2^0) = \hat{\Gamma}_3 \cup \hat{\Gamma}_4$.

Рассмотрим случай 1) (в случае 2) рассуждения аналогичны). Обозначим через $j_1, \dots, j_4$ индексы такие, что $\hat{H}(\hat{\Gamma}_{j_i}^0) = \hat{\Gamma}_i$, $i = 1, \dots, 4$. Положим

$$\hat{Q}_1^0 = \hat{\Gamma}_5^0 \setminus \text{int } \hat{\Gamma}_1^0, \quad \hat{Q}_2^0 = \hat{W} \setminus \text{int}(\hat{\Gamma}_5^0 \cup \hat{\Gamma}_4^0), \quad \hat{Q}_1 = \hat{H}(\hat{Q}_1^0), \quad \hat{Q}_2 = \hat{H}(\hat{Q}_2^0).$$

Многообразия $\hat{Q}_m^0$, $\hat{Q}_m$ гомеоморфны многообразию $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$, $m = 1, 2$. Аналогично вычислениям гомологических классов дуг на шаге 4 доказательства предложения 1 можно показать, что $[\hat{\gamma}_2^0] = [\hat{\gamma}_2] = [\hat{\gamma}_3^0] = \langle 1, 0 \rangle$, $[\hat{\gamma}_3] = \langle 1, 1 \rangle$. Отсюда и из утверждения 4.1 следует, что ограничение гомеоморфизма $\hat{H}$ на $\hat{Q}_1^0$ индуцирует гомоморфизм $h_*^1: H_1(\hat{Q}_1^0) \rightarrow H_1(\hat{Q}_1)$, определяемый единичной матрицей. Так как T_5 – деформационный ретракт многообразий $\hat{Q}_1^0$ и $\hat{Q}_2^0$, то гомоморфизм $h_*^2: H_1(\hat{Q}_2^0) \rightarrow H_1(\hat{Q}_2)$, индуцированный ограничением гомеоморфизма $\hat{H}$ на множество $\hat{Q}_2^0$, также задается единичной матрицей. Применяя утверждение 4.1 к полноториям $\hat{\Gamma}_{i3}^0 \in \hat{Q}_2^0$, $\hat{\Gamma}_3 \in \hat{Q}_2$, получаем противоречие.

Список литературы

- [1] W. R. Utz, “The embedding of homeomorphisms in continuous flows”, *Topology Proc.*, **6:1** (1982), 159–177.
- [2] J. Palis, “Vector fields generate few diffeomorphisms”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80** (1977), 503–505.

- [3] J. Palis, “On Morse–Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404.
- [4] М. И. Брин, “О включении диффеоморфизма в поток”, *Изв. вузов. Матем.*, 1972, № 8, 19–25.
- [5] Дж. Палис, С. Смейл, “Теоремы структурной устойчивости”, *Математика. Сб. пер.*, **13**:2 (1969), 145–155; пер. с англ.: J. Palis, S. Smale, “Structural stability theorems”, *Global analysis* (Berkeley, CA, 1968), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 223–231.
- [6] H. Debrunner, R. Fox, “A mildly wild imbedding of an n -frame”, *Duke Math. J.*, **27**:3 (1960), 425–429.
- [7] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
- [8] C. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.
- [9] O. Pochinka, “Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices”, *Univ. Iagel. Acta Math.*, 2009, № 47, 149–154.
- [10] K. Kuperberg, “2-wild trajectories”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, suppl. vol., 518–523.
- [11] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43**:2 (2004), 369–391.
- [12] Х. Бонатти, В. З. Гринес, О. В. Починка, “Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 5–53; англ. пер.: C. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **250** (2005), 1–46.
- [13] О. Починка, “Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *Докл. РАН*, **440**:6 (2011), 747–750; англ. пер.: O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **84**:2 (2011), 722–725.
- [14] M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems* (Salvador, Brasil, 1971), Academic Press, New York, 1973, 389–419.
- [15] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, “Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds”, *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1205–1250.
- [16] С. Ю. Пилюгин, “Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах”, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254; англ. пер.: S. Ju. Piljugin, “Phase diagrams determining Morse–Smale systems without periodic trajectories on spheres”, *Differential Equations*, **14**:2 (1978), 170–177.
- [17] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 61–86; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, “Peixoto graph of Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than three”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **261** (2008), 59–83.
- [18] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “О классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 62–85; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of unstable separatrices”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270**:1 (2010), 57–79.

- [19] У. Терстон, *Трёхмерная геометрия и топология*, МЦНМО, М., 2001; пер. с англ.: W.P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton Math. Ser., **35**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1997.
- [20] Ч. Косневски, *Начальный курс алгебраической топологии*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: С. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980.
- [21] J. Dugundji, H. A. Antosiewicz, “Parallelizable flows and Lyapunov’s second method”, *Ann. of Math.* (2), **73** (1961), 543–555.
- [22] В. Гуревич, Г. Волмэн, *Теория размерности*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Math. Ser., **4**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941.
- [23] G. S. Young, “On the factors and fiberings of manifolds”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 215–223.
- [24] С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1 (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
- [25] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology Appl.*, **117**:3 (2002), 335–344.
- [26] D. Rolfsen, *Knots and links*, Amer. Math. Soc. Chelsea Publ., Providence, RI, 2003.

В.З. Гринес (V. Z. Grines)

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступила в редакцию
15.12.2011 и 02.05.2012

Е.Я. Гуревич (E. Ya. Gurevich)

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: elena_gurevich@list.ru

В.С. Медведев (V. S. Medvedev)

Нижегородский научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
E-mail: medvedev@uic.nnov.ru

О.В. Починка (O. V. Pochinka)

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru