

Секция «Математика и механика»

Локальная устойчивость круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при внешнем давлении и осевом сжатии

Михеев Артем Валерьевич

Кандидат наук

Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: por1011@ya.ru

Рассматривается задача локальной потери устойчивости тонкостенной круговой цилиндрической оболочки на упругом основании под действием комбинированного нагружения, состоящего из внешнего давления и осевого сжатия. При моделировании деформаций оболочки за основу взята классическая модель Кирхгофа – Лява. Для решения поставленной задачи применяется метод малых вариаций исследуемого напряженно - деформированного состояния в линейной постановке, подробно изложенный в работе [1] и использовавшийся автором в работах [2], [3], [4]. Получена зависимость формы потери устойчивости и параметра критической нагрузки от жесткости основания. Данные зависимости наглядно представлены в графической и табличной формах.

Литература

1. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании// Известия РАН, 2005, вып.1
2. Михеев А.В. Исследование локальной устойчивости пологих ортотропных оболочек на упругом основании// Вестник Санкт-Петербургского ун-та, сер. матем., механ., астрон. 2007, вып. 2.
3. Михеев А.В. Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих ортотропных оболочек на упругом основании// Вестник Санкт-Петербургского ун-та, сер. матем., механ., астрон. 2007, вып. 3.
4. Михеев А.В. Устойчивость оболочек на упругом основании, армированных системами малорастяжимых нитей // Вестник Санкт-Петербургского ун-та, сер. матем., механ., астрон. 2009, вып. 3.

Исходим из системы уравнений пологих оболочек

$$-D\Delta\Delta w + \Delta_T w + \Delta_R \Phi + p = 0, \quad (Eh)^{-1}\Delta\Delta\Phi + \Delta_R w = 0, \quad (2.2.1.1)$$

где Φ — функция усилий, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — жесткость оболочки, p — реакция основания.

Безмоментные начальные усилия появляются в формулах:

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \Delta_R w = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \Delta_T w &= T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.2.1.2)$$

Здесь R_1, R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности оболочки. Нагружение считаем однопараметрическим с параметром нагружения $\lambda > 0$, который вводим по формулам

$$\{T_1^0, T_2^0, S^0\} = -\lambda \{t_1, t_2, t_3\}, \quad (2.2.1.3)$$

где величины t_i считаем безразмерными и имеющими порядок единицы. При этом пренебрегаем начальными напряжениями в основании (заполнителе).

При локальном подходе решение системы (2.2.1.1) ищем в виде

$$w(x, y) = w_0 e^{iz}, \quad \Phi(x, y) = \Phi_0 e^{iz}, \quad z = (px + qy)/R, \quad (2.2.1.4).$$

Согласно [5] реакция основания для прогиба вида (2.2.1.4) равна

$$p = -E_0 a k w, \quad (2.2.1.5)$$

где

$$k = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad a = \frac{2(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(3-4\nu_0)}. \quad (2.2.1.6)$$

После подстановки (2.2.1.4) в (2.2.1.1) получаем явное выражение для $\Lambda = \frac{\lambda}{Eh}$, как функцию волновых чисел в безразмерных переменных (см. [5]):

$$\Lambda = \frac{\lambda}{Eh} = f(k, \varphi) = \frac{\mu^4 k^4 + e\mu^{-2}k + f_R(\varphi)}{k^2 f_T(\varphi)}, \quad (2.2.1.7)$$

где

$$\begin{aligned} f_T(\varphi) &= t_1 \cos^2 \varphi + 2t_3 \sin \varphi \cos \varphi + t_2 \sin^2 \varphi, \\ f_R(\varphi) &= (\rho_2 \cos^2 \varphi + \rho_1 \sin^2 \varphi)^2, \end{aligned} \quad (2.2.1.8)$$

$$p = k \cos \varphi, \quad q = k \sin \varphi, \quad \rho_1 = \frac{R}{R_1}, \quad \rho_2 = \frac{R}{R_2}, \quad (2.2.1.9)$$

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2}, \quad e = \frac{E_0 a}{E \sqrt{12(1 - \nu^2)}}. \quad (2.2.1.10)$$

Критическое значение $\lambda = \lambda_*$ получаем после минимизации λ по волновым числам p и q или

$$\Lambda_* = \min_{k, \varphi}^{(+)} f(k, \varphi) = f(k_*, \varphi_*), \quad (2.2.1.11)$$

где значок $(+)$ указывает на то, что ищется положительный минимум, а звездочкой отмечаем критические значения соответствующих величин. Предполагается, что величины t_i таковы, что при некоторых значениях угла φ будет $f_T > 0$, то есть существуют направления, в которых действуют сжимающие начальные усилия. Тогда минимум в (2.2.1.11) ищется по тем φ , для которых $f_T > 0$. Функция $f(k, \varphi)$ содержит малый параметр тонкостенности μ и малый параметр относительной жесткости основания e .

Область применимости локального приближения ограничена двумя неравенствами: длина волны при потере устойчивости $L = \pi R/k$ должна быть существенно больше толщины оболочки h и меньше ее радиуса кривизны R или в безразмерных переменных

$$\mu^2 \ll k^{-1} \ll 1. \quad (2.2.1.12)$$

При этом предполагается, что размер оболочки в плане не меньше R , а закрепление краев не является слабым, ибо только в этом случае можно рассчитывать на то, что влияние граничных условий несущественно.

Полагая в формулах (2.2.1.7)

$$\Lambda = f(k, \varphi) = \mu^2 g(r, \varphi), \quad k = r\mu^{-1}, \quad e = 2\mu^3 \omega, \quad (2.2.1.13)$$

приводим функцию f к виду, содержащему один совмещенный параметр ω

$$g(r, \varphi, \omega) = \frac{r^4 + 2\omega r + f_R(\varphi)}{r^2 f_T(\varphi)}. \quad (2.2.1.14)$$

2.2.2 Устойчивость безмоментного напряженного состояния круговой цилиндрической оболочки при внешнем давлении и осевом сжатии

Напряженное состояние определяется начальными усилиями $T_1^0 < 0$, $T_2^0 = -qR$, в общем случае присутствует начальное усилие сдвига S^0 , мы же ограничиваемся рассмотрением только частного случая, когда $S^0 = 0$. Размеры оболочки: радиус R , длина L_1 . Параметры основания и оболочки E_0, ν_0 и E, ν соответственно предполагаем постоянными. В этой задаче

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 1, \quad t_3 = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1 = \frac{L_1}{R}, \quad 0 \leq y \leq 2\pi. \quad (2.2.2.1)$$

Тогда из (2.2.1.8) получаем:

$$f_R(\varphi) = \cos^4 \varphi, \quad f_T(\varphi) = t_1 \cos^2 \varphi + t_2 \sin^2 \varphi. \quad (2.2.2.2)$$

откуда следует, что

$$g(r, \varphi, \omega) = \frac{r^4 + 2\omega r + \cos^4 \varphi}{r^2(t_1 \cos^2 \varphi + t_2 \sin^2 \varphi)}. \quad (2.2.2.3)$$

Проанализируем полученную в (2.2.2.3) формулу.

а) Рассмотрим случай, когда $\omega = 0$. При отсутствии основания получаем задачу рассмотренную в п.2.1.

б) Теперь рассмотрим случай, когда $\omega \neq 0$. Пусть сначала существует особый угол $\varphi = \varphi_*$, при котором $g(r, \varphi, \omega)$ принимает минимальное значение. Дифференцируя уравнение (2.2.2.3) и приравнявая полученный результат к нулю, найдем такой φ_* :

$$\cos^2 \varphi_* = \frac{-t_2 \pm \sqrt{t_2^2 + (r^4 + 2\omega r)(t_1 - t_2)^2}}{t_1 - t_2}. \quad (2.2.2.4)$$

Вспоминая о том, что:

$$0 \leq \cos^2 \varphi_* \leq 1, \quad (2.2.2.5)$$

найдем корни, удовлетворяющие этому условию. Проведем численные вычисления, рассматривая 2 случая:

б.1) Полагая для начала $t_2 = 1$, будем искать значения t_1 , при которых выполняется условие (2.2.2.5). В том случае, если данное неравенство не выполняется, исследуем при каких значениях ($\varphi = 0$ или $\varphi = \frac{\pi}{2}$) искомая функция $g(r, \varphi, \omega)$ принимает

минимальное значение. Полученные результаты при $\omega = 0.2$, $\omega = 1$ и $\omega = 5$ представлены на рис.2, откуда видно, что угол φ с ростом t_1 меняется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, это связано с изменением длин волн в окружном и продольном направлениях.

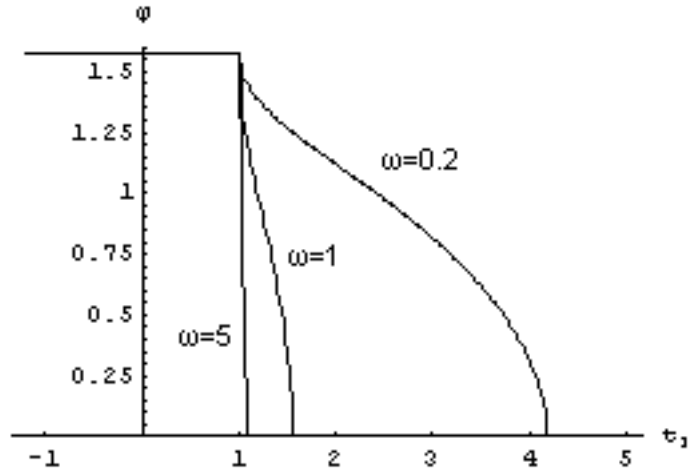


Рис. 2: Особый угол для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при постоянном внешнем давлении и переменном осевом сжатии

Найдем теперь зависимость $r = \mu k = \mu \sqrt{p^2 + q^2}$ от t_1 . Значение r мы будем брать такое, при котором функция $g(r, \varphi, \omega)$ будет принимать минимальное значение (рис.3).

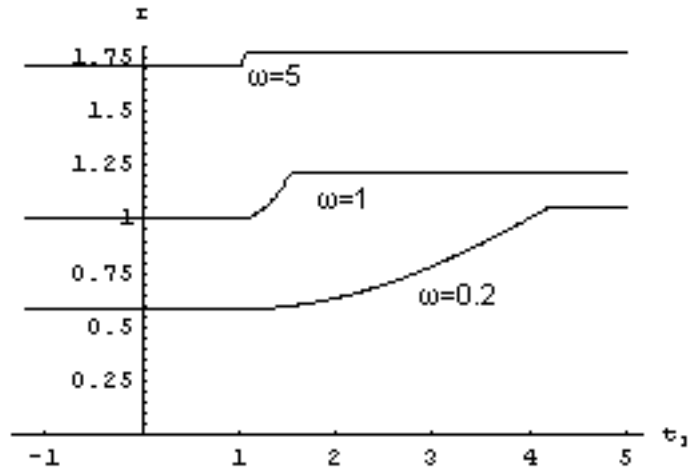


Рис. 3: Волновое число для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при постоянном внешнем давлении и переменном осевом сжатии

Видно что значения φ и r для каждого значения ω изменяются на равных интервалах по оси t_1 . Чем больше ω , тем быстрее происходит переход от максимального

значения к минимальному у φ и от минимального к максимальному у r .

С помощью полученных результатов построим графики минимальных значений функции g (рис.4).

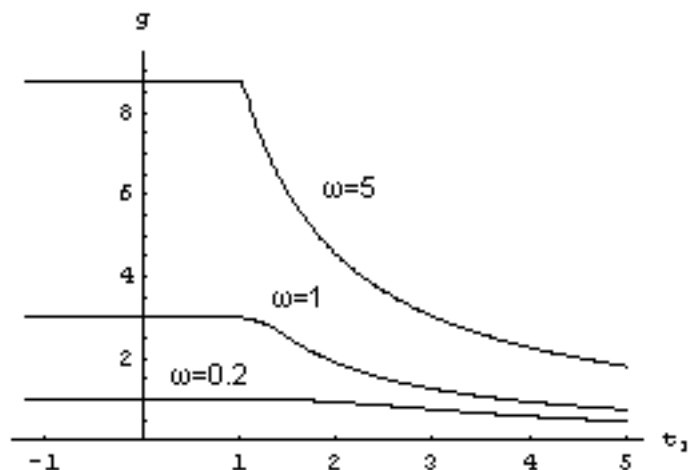


Рис. 4: Значение критической нагрузки для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при постоянном внешнем давлении и переменном осевом сжатии

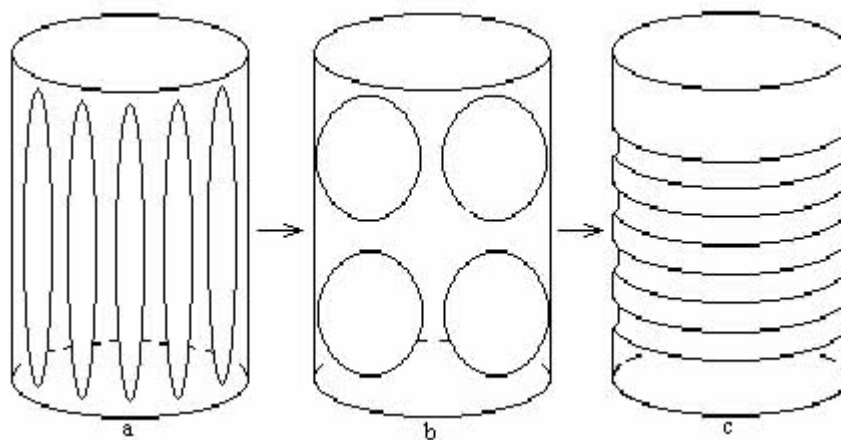


Рис. 5: Формы потери устойчивости для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при постоянном внешнем давлении и переменном осевом сжатии

При $t_1 \leq 1$ критическая нагрузка g не зависит от осевого параметра нагружения. Вмятины образуются от края до края вдоль образующих рис.5.a. С ростом t_1 зависимость g от t_1 начинает проявляться. Вмятины начинают менять свою форму рис.5.b, в итоге они станут кольцевыми рис.5.c (при $t_1 \gg t_2$). Что преведет к так называемой осесимметричной потере устойчивости. Чем больше ω тем быстрее происходит этот

переход. Чем больше ω , тем больше значение критической нагрузки. Стрелками на рис.5 обозначены переходы потери устойчивости.

б.2) Теперь положим $t_1 = 1$. Найдем значение t_2 , при котором будет выполняться условия (2.2.2.5). В том случае, если данное неравенство не выполняется, аналогично пункту б.1 будем рассматривать крайние значения $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис.6).

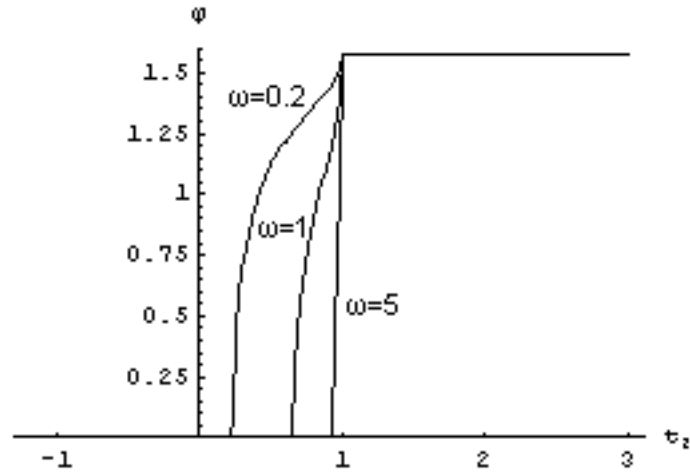


Рис. 6: Особый угол для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при постоянном внешнем давлении и переменном осевом сжатии

Построим график зависимости волнового числа r от кольцевого параметра нагружения t_2 (рис.7).

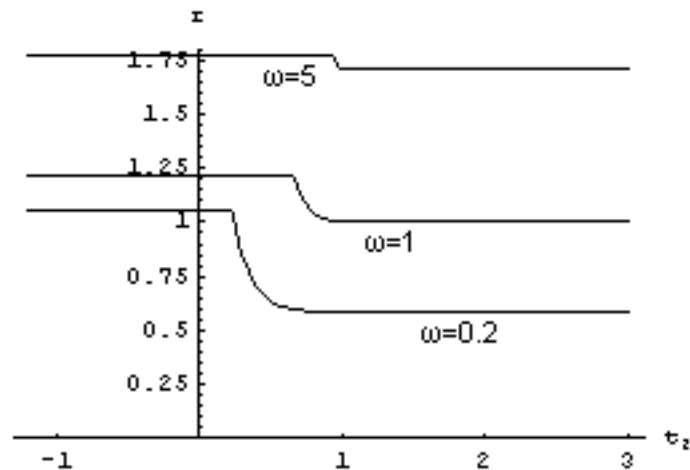


Рис. 7: Волновое число для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при переменном внешнем давлении и постоянном осевом сжатии

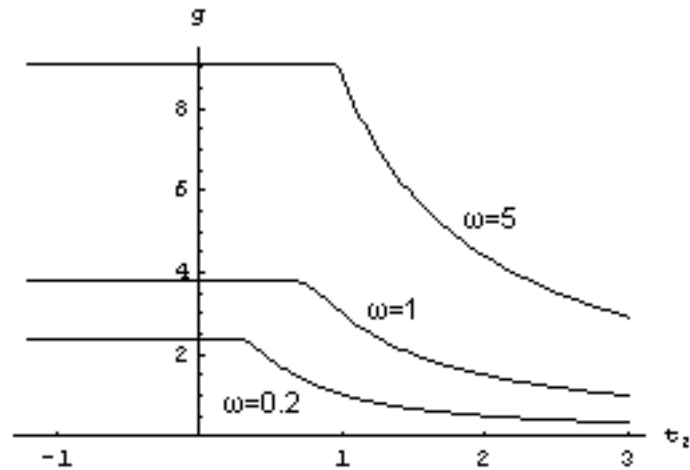


Рис. 8: Значение критической нагрузки для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при переменном внешнем давлении и постоянном осевом сжатии

На рис.8 представлен график для критической нагрузки. В отличие от б.1 в данном случае формы потери устойчивости переходят в обратном направлении(рис.9). Из рис.6 видно, что при отрицательном значении параметра, соответствующего кольцевым напряжениям, критическая нагрузка не зависит от него. А при положительных t_2 все зависит от величины ω . С возрастанием ω увеличивается интервал, на котором критическая нагрузка не зависит от параметра t_2 .

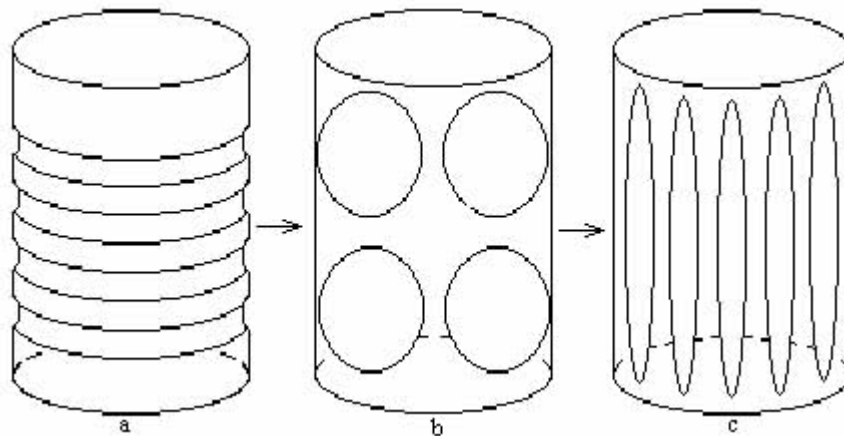


Рис. 9: Формы потери устойчивости для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при переменном внешнем давлении и постоянном осевом сжатии