ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ (ТЕОРИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ)

к.т.н., профессор М.П.Туманов (МИЭМ НИУ ВШЭ),
доцент С.Р Абдуллин., (МГУЛ)

Аннотация: В статье показано, что в типовой системе автоматического управления возможно значительное падение точности регулирования за счёт того, что частотная характеристика разомкнутой системы имеет ряд нулей (частот, на которых модуль этой характеристики мал). Модуль частотной характеристики разомкнутой системы автоматического управления позволяет эффективно исследовать точность замкнутой системы при любом виде задающего воздействия, поэтому является часто применяемым объектом в инженерной практике. В статье рассмотрен случай компенсации запаздывания с помощью неточной модели запаздывания в случае, когда модель самого объекта управления считается достаточно точной. Показано, что (даже в случае, когда система без компенсирующей модели запаздывания имеет частотную характеристику без существенных провалов) возможно появление таких провалов при компенсации. Но главный интерес в статье представляет связь между частотами этих провалов и соизмеримостью времён запаздывания. При соизмеримых временах появляются нули частотной характеристики, а при несоизмеримых сколь угодно глубокие провалы, положение которых на оси частот определяется соотношением запаздываний.
Тэги: распределённые системы управления, Временн'ое запаздывание, маршрутизатор, буферирование, компенсация запаздывания, передаточные функции, ЛАЧХ, обмотка тора

Abstract: The article shows that in a typical automatic control system may be a significant drop in the accuracy of regulation due to the fact that the frequency response of open-loop system has a number of zeros (frequencies at which the module this characteristic is small). The module open-loop frequency characteristics of the automatic control system allows you to effectively investigate the accuracy of the closed-loop system with any type of desired behavior, therefore, is frequently used object in engineering practice. The article describes a case of lag compensation using inaccurate models of delay in the case when the model of the control object is considered to be sufficiently accurate. It is shown that (even in the case where the system without compensating lag model has a frequency response with no significant dips) possible emergence of such failures in compensation. But the main interest in the article is the relationship between the frequency of these failures and the commensurability of time lag. At comparable times appear zeros of the frequency response, and incommensurable with arbitrarily deep holes, the position of which on the frequency axis is determined by the ratio of the delay.

Tags: distributed control systems, Vremenn’y delay, router, buffering, delay compensation, transfer functions, LAChH, winding Torah

Временн'ое запаздывание в современных распределённых системах управления [6]является практически неизбежным злом, с которым приходится считаться и бороться. Основная причина наличия такого запаздывания – передача информации через сеть. Особенно значительных величин это запаздывание достигает при использовании большого числа маршрутизаторов и связанного с этим буферирования.

Такое запаздывание обычно является переменным [7,8], но в данной статье рассмотрен эффект, не связанный с переменностью времени запаздывания, а возникающий при плохо определённом (недостаточно точно известном) времени запаздывания.

В таком контексте обычно либо используют экстраполятор функций на время запаздывания, либо встроенную модель объекта управления с запаздыванием [3]. Причём оба этих подхода плохо работают при плохо известном запаздывании.

Кроме того, наличие помех вообще делает систему управления [1] с компенсацией запаздывания плохореализуемой при сложных (широкополосных и интенсивных) помехах. Рассмотрим типовую систему замкнутую управления [2] с запаздыванием в цепи обратной связи и с помехой, действующей на объект управления. Будем предполагать (это реалистично), что выход объекта без запаздывания и без помехи физически получен быть не может, поэтому будем предполагать наличие в системе компенсации запаздывания.

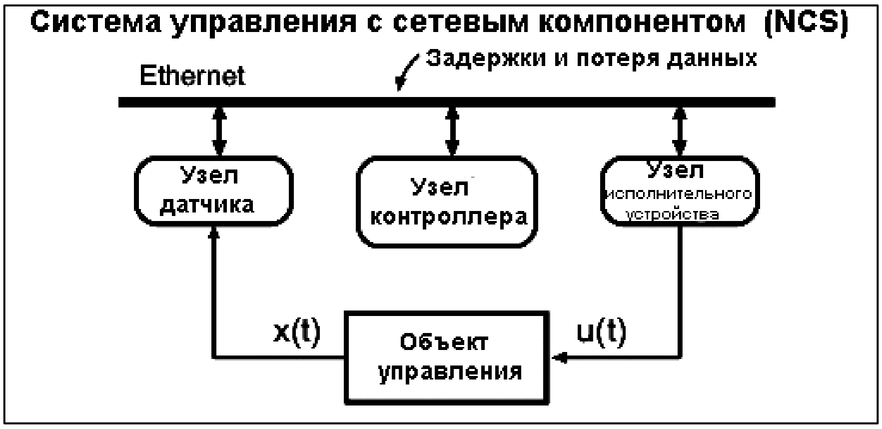


Рис.1. Типовая распределённая система автоматического управления.

Ограничимся случаем линейной системы с постоянными коэффициентами, так как даже в такой системе рассмотренный ниже эффект проявляется в полной мере. Пусть **W(p)рег , W(p)o и W(p)oc** - соответственно передаточные функции регулятора, объекта управления и обратной связи [1].

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$\mathbf{W(p)_{pc} = W(p)_{рег} \bullet W(p)_{o} \bullet W(p)_{oc}} \qquad (1)$$

(и соответствующая частотная характеристика **W(jω)pc** определяет величину ошибки слежения в системе по следующей формуле [2]:

$$\mathbf{e(p) = \frac{1}{1 + W(p)_{pc}} u(p)} \qquad (2)$$

В частотной области получим оценку спектральных составляющих ошибки, поэтому стремятся к тому, чтобы $|\mathbf{W(j\omega)_{pc}}|^{-1} < \varepsilon$ – требуемой точности системы. Будем предполагать, что это требование выполнено, если отсутствует (поэтому и не учитывается) запаздывание. Типичный вид логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) [1,2] такой системы (в разомкнутом виде) приведён ниже (Рис 2.):

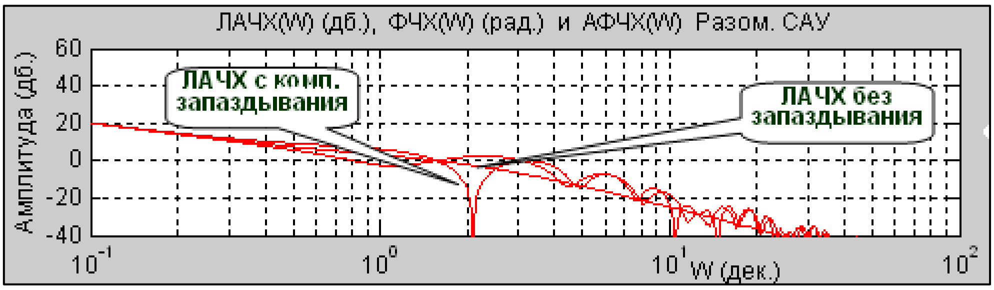


Рис.2. ЛАЧХ разомкнутой системы без запаздывания и с последующей неточной компенсацией запаздывания.

ЛФЧХ, проходя на достаточно высоком уровне, обеспечивает малую ошибку.

Теперь введём компенсацию запаздывания, для чего добавим в систему модели объекта, помехи и, наконец, запаздывания, которые входят в виде программных модулей в ПО регулятора. Мы не можем заранее предполагать, что все эти модели точны, кроме того, помеха может иметь стохастическую природу. Будем для определённости считать, что модель объекта достаточно точна, а вот модель запаздывания отличается от реального запаздывания. Всё это отражено на Рис.3.

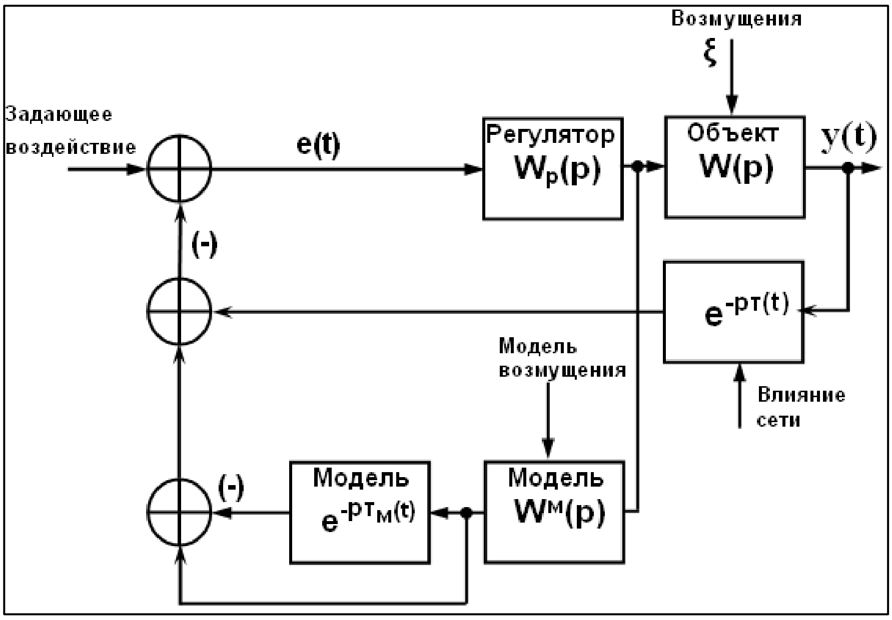


Рис.3. Компенсация запаздывания.

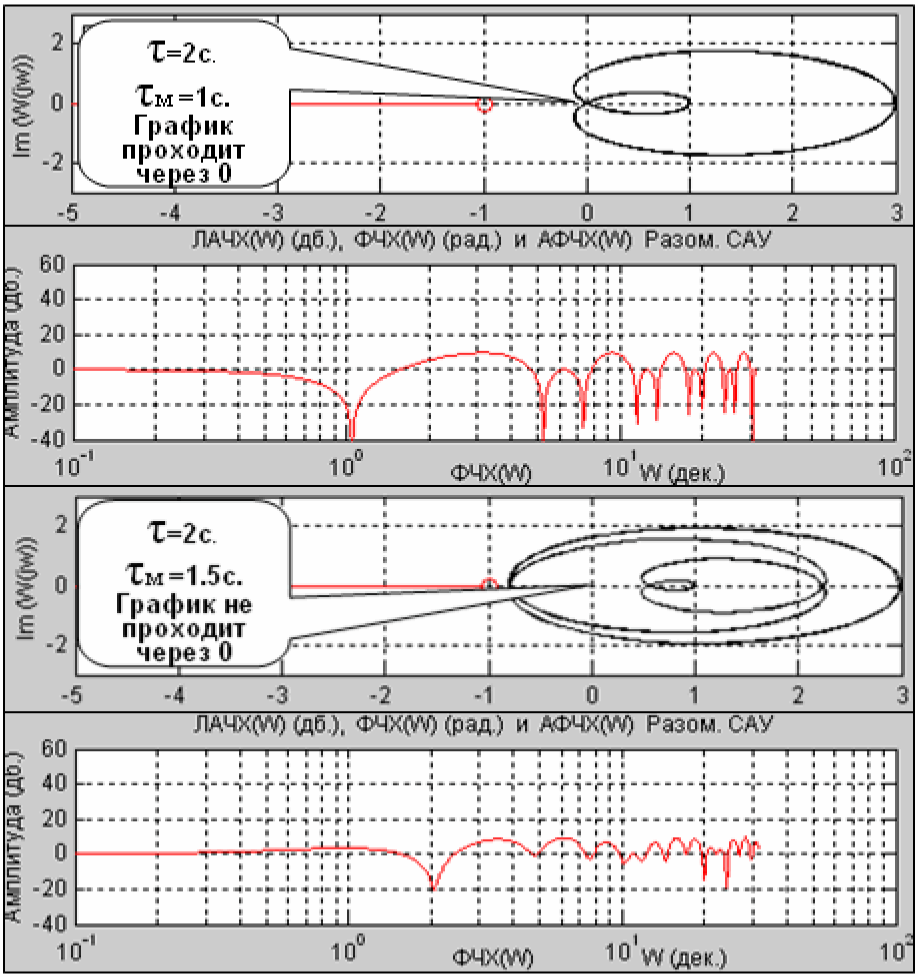
Очевидно, если модель запаздывания точна, то происходит его (запаздывания) полная компенсация [9] и ЛАЧХ разомкнутой скомпенсированной системы не отличается от ЛАЧХ системы вообще без запаздывания. Но, к сожалению, точная компенсация

невозможна.

Этот эффект хорошо виден на Рис.2, где приведены несколько случаев неточной компенсации запаздывания. В некоторых случаях провалы ЛАЧХ достигают -60дб., но это наблюдается далеко не всегда. Точными нулями будут частоты, удовлетворяющие уравнению:

$$\mathbf{F(\omega) = 1 + e^{-j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau_м} = 0} \qquad (3)$$

Наличие или отсутствие корней этого уравнения связано с соотношением между **τ** и **$\tau_м$**. Если эти числа рационально соизмеримы (**$n\cdot\tau=m\cdot\tau_м$**), то (3), являясь в этом случае периодической функцией может иметь решение, но может и не иметь. Примеры приведёны на Рис.4. Здесь отображен годограф **F(ω)** [2] при неотрицательных частотах на комплексной плоскости. Обращать внимание следует на прохождение годографа вблизи точки 0. Также приведены графики ЛАЧХ этой функции (по оси ординат - децибелы).



Но, если времена запаздывания рационально несоизмеримы, то привлечение теории почти периодических функций позволяет сформулировать следующее:

Утверждение: *При неточной компенсации ЛАЧХ имеет набор частот, на которых модуль падает до величин сколь угодно малых.*

Доказательство: свяжем с (3) двухмерный тор T^2 , тогда при изменении ω от 0 до ∞ образуется обмотка тора, если рассматривать входящие в (3) экспоненты, как циклы – образующие тора. Известно [5], что при несоизмеримости частот вращения такая обмотка всюду плотна на торе. Осталось лиша заметить симметрию при изменении знака частоты, из чего вытекает достаточность рассмотрения только неотрицательных частот.

Итак: $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}; \exists \boldsymbol{\omega}^* : |\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}^*)| \le \boldsymbol{\varepsilon}$.

Возможно, что такие частоты окажутся слишком большими, чтобы иметь практическое значение, но рассмотренные примеры из практики показывают, что это чаще всего не так.

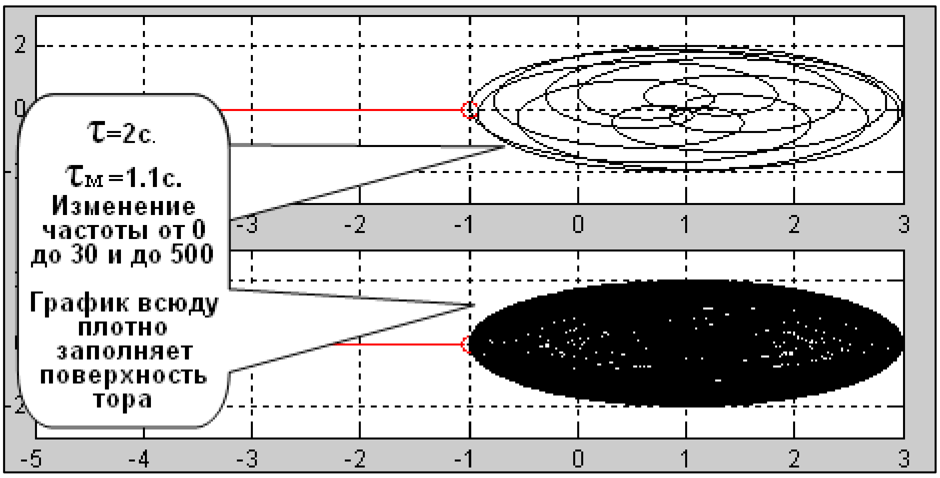


Рис 5. Случай несоизмеримых запаздываний. График всюду плотен

на двухмерном торе, проходит сколь угодно близко от точки 0.

.

Можно дать оценки расстояния по частоте между точками провалов ЛАЧХ . В случае соизмеримых запаздываний такая оценка равна периоду функции (3), Хотя, как видно из Рис.4, внутри периода могут наблюдаться множественные нули, расположенные гораздо ближе друг к другу, чем на соотвентствующую долю периода.

В случае несоизмеримости запаздываний для получения такой оценки необходимо знать порядок приближения иррационального отношения периодов (возможно, сами периоды трансцендентны!) рациональными числами[10]. Имеется следующая, известная оценка скорости приближения иррациональных чисел рациональными [5]:

$$\left| \boldsymbol{\mu} - \mathbf{m/n} \right| < \mathbf{0.447214(n)^{-2}} \qquad (4)$$

где: $\boldsymbol{\mu}$ – рационально приближаемое дробью **m/n**. Если в качестве $\boldsymbol{\mu}$ взять отношение запаздываний $\boldsymbol{\mu = \tau/\tau_M}$,то эту оценку можно использовать для получения оценки сверху для периода *почти повторения* квазипериодической функции **F(ω).** Действительно, из (4) можно получить оценку **n,** обеспечивающую нужную точность приближения $\mathbf{n\tau \approx m\tau_M}$.

При этом *периодом почти повторения* естественно считать величину $\mathbf{T = 2\pi/n\tau}$.

Заметим**,** что в случае соизмеримых запаздываний по этой формуле получается истинный период периодической функции.

Список литературы.

1. Цыпкин, Я.З. Основы теории автоматических систем./
Я.З. Цыпкин; курс лекций, М.: Наука, 1970, - 560 стр.
2. Красовский А.А. Основы автоматики и технической кибернетики/ А.А. Красовский, Г.С. Поспелов; М., ГОСЭНЕРГОИЗДАТ, 1962, - 600 стр. с черт.
3. Колмановский, В.Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием./ В.Б. Колмановский, В.Р. Носов; М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981, - 448 стр. с илл.
4. Емельянов, С.В. Новые типы обратной связи./ С.В. Емельянов, С. К. Коровин; М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. Арнольд, В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений./ В.И. Арнольд; М.: изд. МЦНМО, 2012.
6. Эльсгольц, А.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом./ А.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин; М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1971, - 296 стр. с илл.
7. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений./Дж. Хейл; М.: Мир, 1984
8. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения./Э. Пинни; М.: ИЛ, 1961.
9. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения. / Беллман Р., Кук К. Л.; пер. с англ., М., Мир, 1967, - 548 с.
10. Нивен, А. Числа рациональные и иррациональные./ А. Нивен; М: Мир, 1966,- 200 стр.

REFERENCES

1. Cypkin, Ja.Z. Osnovy teorii avtomaticheskih sistem.
course of lectures,[Bases of the theory automatic system] Moscow, Nauka, 1970, - 560 pp

2. Krasovskij, A.A. Osnovy avtomatiki i tehnicheskoj kibernetiki [Bases of automatic equipment and technical cybernetics] A.A. Krasovskij, G.S. Pospelov; Moscow, GOSJeNERGOIZDAT, 1962, 600 pp.
3. Kolmanovskij, V.B. Ustojchivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyh sistem s posledejstviem.[Stability and the periodic modes of adjustable systems with an after-effect] V.B. Kolmanovskij, V.R. Nosov; Moscow, Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoj literatury, 1981, 448 pp.
4. Emel'janov, S.V. Novye tipy obratnoj svjazi.[New types of feedback] S.V. Emel'janov, S. K. Korovin; Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1997
5. Arnol'd, V.I. Geometricheskie metody v teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. [Geometrical methods in the theory of the ordinary differential equations]
Moscow, izd. MCNMO, 2012.
6. Jel'sgol'c, A.Je. Vvedenie v teoriju differencial'nyh uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom.[Introduction to the theory of the differential equations with the deviating argument] A.Je. Jel'sgol'c, S.B. Norkin; Moscow, Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoj literatury, 1971, 296 pp.
7. Hale Dzh. Teorija funkcional'no-differencial'nyh uravnenij [Theory of the functional and differential equations] Moscow, Mir, 1977
8. Pinni Je. Obyknovennye differencial'no-raznostnye uravnenija [Ordinary differential-difference equations], Moscow, izd. Inostrannaja literature, 1961
9. Bellman R. Differencial'no-raznostnye uravnenija.[Differential-difference equations;] Bellman R., Kuk K. L. Moscow, Mir, 1967, 548 pp.
10. Niven, A. Chisla racional'nye i irracional'nye. [Numbers rational and irrational], Moscow, Mir, 1966, 200 pp.