Упражнения

261. Дана случайная величина X, и известна её дисперсия: $DX = 8$. Найдите дисперсию случайной величины Y:

а) $Y = 2X$; б) $Y = X + 3$; в) $Y = 2X + 3$; г) $Y = \frac{1}{2}X - 1$.

262. Дана случайная величина X, и известна её дисперсия: $DX = 3$. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $Y = -5X$; б) $W = 12 - 0{,}5X$; в) $U = -2X - 4$; г) $Z = 3 - X$.

263. Рост человека, выраженный в сантиметрах, — случайная величина X. Для некоторой совокупности людей известно, что $EX = 172$, $DX = 36$. Найдите математическое ожидание и дисперсию роста этой же совокупности людей, если выразить рост:

а) в метрах; б) в дюймах (1 дюйм = 2,54 см).

264. Случайная величина X — масса шоколадки в граммах. При этом $EX = 50$, $DX = 1{,}2$ (для некоторой партии). Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y — массы шоколадки в унциях (1 унция = 31 г).

265. Измерение некоторого электронного термометра (в градусах Цельсия) — случайная величина с дисперсией 0,25. Найдите дисперсию и стандартное отклонение этого измерения, выраженного в градусах Фаренгейта (1°F = 1,8°C).

266. Система навигации определяет высоту полёта самолёта в футах. Ошибка имеет математическое ожидание 0 и дисперсию 10 000. Найдите дисперсию и стандартное отклонение ошибки определения высоты полёта, выраженной в метрах (1 фут = 0,305 м).

267. Спидометр автомобиля определяет скорость в километрах в час. Дисперсия показаний 4. Найдите дисперсию и стандартное отклонение показаний скорости, выраженной в милях в час (1 миля = 1609 м).

268. Про случайную величину X известно, что $EX = 5$, $DX = 6{,}25$. Найдите значения a и b такие, что случайная величина $Y = \frac{X - b}{a}$ имеет математическое ожидание 0 и дисперсию 1.

Глава V

Несколько случайных величин

Случайный эксперимент заканчивается случайным событием. Связывая с элементарным событием число, мы получаем случайную величину. С тем же самым исходом эксперимента мы можем связать другое число и в результате получить другую случайную величину.

Например, при двух бросаниях игральной кости можно говорить о случайных величинах X_1 и X_2, где X_1 — число очков, выпавшее при первом бросании, а X_2 — число очков, выпавшее при втором бросании.

В этом опыте можно рассматривать и другие случайные величины, например сумму очков или наибольшее выпавшее число. Все эти случайные величины мы наблюдаем одновременно, в одном случайном опыте. Обычно на практике приходится поступать именно так — рассматривать несколько случайных величин в одном опыте.

Пример 1. У человека есть рост, вес, возраст и т. д. Если этот человек выбран случайно из некоторой совокупности, то эти величины тоже случайны. Они появляются в нашем эксперименте одновременно, совместно.

Пример 2. При выполнении контрольной работы учащимися класса можно рассмотреть долю учащихся, получивших отличную отметку, отметку «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно». Каждая из этих долей есть случайная величина. Здесь случайным экспериментом является проведение контрольной работы.

§ 10. Совместные распределения

10.1. Таблица совместного распределения

Рассмотрим случайный эксперимент, в котором наблюдается одновременно несколько случайных величин. Для простоты ограничим обсуждение двумя случайными величинами X и Y. Каждая из них имеет свои наборы значений. Пусть

случайная величина X принимает m значений $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а величина Y принимает n значений $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Предположим, что в результате случайного эксперимента величины X и Y приняли какие-то значения. Иными словами, происходит одно из возможных событий

$$(X = a_i, Y = b_j).$$

Индекс i принимает одно из значений $1, 2, \ldots, m$, индекс j — одно из значений $1, 2, \ldots, n$. Событие $(X = a_i, Y = b_j)$ случайное. Оно имеет вероятность $\mathrm{P}(X = a_i, Y = b_j)$.

Какое-то из событий $(X = a_i, Y = b_j)$ в эксперименте непременно происходит, и никакие два одновременно произойти не могут, поэтому сумма всех вероятностей $\mathrm{P}(X = a_i, Y = b_j)$, взятая по всем возможным парам i и j, равна 1.

Получается, что единичная вероятность распределяется между событиями $(X = a_i, Y = b_j)$. Так возникает ***совместное распределение вероятностей***. Его удобно записать в виде таблицы.

$X \backslash Y$	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
a_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	p_{1n}
a_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
a_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...	p_{in}
...	...	...	...	...	...	...
a_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mj}	...	p_{mn}

Примем для вероятностей короткие обозначения:

$$\mathrm{P}(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij}.$$

В первом столбце указаны значения X, в первой строке — значения Y. В остальных ячейках таблицы записаны вероятности событий p_{ij}, то есть $\mathrm{P}(X = a_i, Y = b_j)$.

Пример 3. Бросим две игральные кости. Рассмотрим случайные величины X — наименьшее из выпавших очков и Y — наибольшее из выпавших очков. Найдём совместное распределение вероятностей для случайных величин X, Y и представим его в виде таблицы.

Сразу заметим, что $X \leqslant Y$. Поэтому все ячейки таблицы, где $X > Y$, содержат нулевые вероятности. Возможен случай, когда на обеих костях выпало одно и то

же, например пара $(1; 1)$. Тогда $X = Y = 1$. Вероятность такого события равна $\frac{1}{36}$. Предположим теперь, что выпали неравные числа, например, выпала одна из пар $(3; 5)$ или $(5; 3)$. Тогда $X = 3$ и $Y = 5$. Это событие имеет вероятность $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Заполним таблицу совместного распределения случайных величин X и Y:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Убедитесь самостоятельно, что сумма всех вероятностей в таблице равна единице.

Упражнения

269. Монету бросают дважды. Случайная величина X — число орлов, выпавших при первом броске, а Y — число орлов, выпавших при втором броске.

а) Какие значения принимают случайные величины X и Y?

б) Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин.

270. Монету бросают дважды. Случайная величина X — число орлов, выпавших при первом броске, а Y — общее число выпавших орлов.

а) Какие значения принимают случайные величины X и Y?

б) Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин.

271. Монету бросают трижды. Случайная величина X — число орлов, выпавших при первом броске, а Y — число бросков до момента, когда одна из сторон выпадет во второй раз.

а) Какие значения принимают случайные величины X и Y?

б) Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин.

272. Дана таблица совместного распределения случайных величин X и Y. Найдите вероятность:

а) $P(X=0, Y=2)$; б) $P(X=-1)$;

в) $P(Y=2)$; г) $P(X>-1, Y=1)$.

$X \backslash Y$	1	2
−1	0,3	0,1
0	0,1	
2	0,2	0,05

273. Рассмотрим случайные величины «число единиц» и «число шестёрок» в опыте с двумя бросаниями игральной кости.

а) Какие значения принимают эти случайные величины?

б) Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин.

274. Монету бросают два раза. Случайная величина X — число выпавших орлов, Y — число выпавших решек. Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин

275. Монету бросают три раза. Случайная величина X — число выпавших орлов, Y — число выпавших решек. Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин

10.2. Выделение случайной величины из совместного распределения

В случайном эксперименте наблюдаются две совместно распределённые случайные величины. Вместе с тем каждая из них имеет своё собственное распределение. Как оно связано с совместным распределением двух величин?

Значения случайных величин X и Y известны и указаны в таблице. Чтобы получить распределение случайной величины X, нужно указать вероятности $P(X=a_1)$, $P(X=a_2)$, ..., $P(X=a_m)$.

Событие $X=a_1$ является объединением попарно несовместных событий $(X=a_1, Y=b_1)$, $(X=a_1, Y=b_2)$ ..., $(X=a_1, Y=b_n)$. Поэтому

$$P(X=a_1)=p_{11}+p_{12}+...+p_{1n}.$$

Это число — сумма вероятностей первой строки таблицы совместного распределения.

Аналогично находим вероятности $P(X=a_2)$, $P(X=a_3)$ и т. д. Полученные вероятности удобно записать дополнительным столбцом справа от таблицы совместного распределения.

Точно так же можно получить распределение случайной величины Y. Для этого нужно суммировать столбцы таблицы и записать полученное распределение в дополнительной строке.

Пример 4. Рассмотрим случайные величины X — наименьшее из выпавших очков и Y — наибольшее из выпавших очков в опыте с двумя бросаниями игральной кости. Таблица распределения уже построена (см. § 1). Просуммируем таблицу по

строкам и столбцам. Суммы запишем в дополнительном столбце. Так получаются распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	Распр. X
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Распр. Y	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

Полезно проверить, не допущены ли ошибки при вычислении вероятностей. Следует убедиться, что сумма вероятностей в полученном распределении случайной величины X равна единице. Точно так же проверьте, что сумма вероятностей в распределении Y равна единице.

Упражнения

276. Найдите распределения случайных величин X и Y из таблицы их совместного распределения:

а)

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,2	0,1	0,1
2	0	0,15	0,05
3	0,05	0	0,15
4	0	0,1	0,1

б)

$X \backslash Y$	1	3	5	7
−2	0,07	0,04	0,01	0,08
−1	0,05	0,03	0,08	0,08
1	0,08	0,08	0,09	0,02
2	0,08	0,04	0,09	0,08

в)

$X \backslash Y$	−1	−0,5	0,5	1
0,5	0,09	0,02	0,09	0,09
1,5	0,06	0,08	0,07	0,08
2,5	0,06	0,05	0,05	0,05
3,5	0,09	0,05	0,01	0,06

277. Найдите распределения случайных величин X и Y из таблицы их совместного распределения:

а)

$X \backslash Y$	-1	0	3
1	0,03	0,12	0,15
3	0,07	0,28	0,35

б)

$X \backslash Y$	0	2	4
-6	0,1	0,2	0,1
-3	0,3	0	0,3

в)

$X \backslash Y$	a	b
x_1	$\frac{1}{9}$	0
x_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

278. Бросают три игральные кости. Случайная величина X — число, выпавшее на первой кости, Y — число, выпавшее на второй кости. Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин и найдите распределение каждой из них, если известно, что сумма очков на всех трёх костях равна 16.

279. Бросают три игральные кости. Случайная величина X — количество выпавших шестёрок, Y — число, выпавшее на первой кости. Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин и найдите распределение каждой из них, если известно, что сумма очков на всех трёх костях равна 16.

§ 11. Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных величин

11.1. Математическое ожидание

Со случайными величинами, которые наблюдаются в одном случайном эксперименте, можно производить различные действия. Можно получать из них новые случайные величины. Например, новой случайной величиной будет сумма $X+Y$ или произведение XY.

Не всякое действие с физическими случайными величинами осмысленно. Например, если X обозначает возраст, а Y — зарплату человека, то можно формально умножить X на Y, но результат не имеет смысла.

В тех случаях, когда результат сложения или умножения имеет смысл, часто нужно знать математическое ожидание и дисперсию новой случайной величины. Рассмотрим подробно, как вычислить математическое ожидание суммы случайных величин, если известно их совместное распределение.

Совместное распределение двух случайных величин позволяет указать не только возможные значения их суммы, но и их вероятности.

Пример 5. Монету бросают дважды. Случайная величина X — число орлов при первом броске, случайная величина Y — число орлов при втором броске. Совместное распределение этих случайных величин даётся таблицей:

$X \backslash Y$	0	1
0	0,25	0,25
1	0,25	0,25

Случайная величина $X+Y$ может принимать значения 0, 1 и 2. Вероятности этих значений соответственно равны

$$\mathrm{P}(X+Y=0)=\mathrm{P}(X=0,Y=0)=0{,}25,$$
$$\mathrm{P}(X+Y=1)=\mathrm{P}(X=1,Y=0)+\mathrm{P}(X=0,Y=1)=0{,}5$$

и

$$\mathrm{P}(X+Y=2)=\mathrm{P}(X=1,Y=1)=0{,}25.$$

В результате мы получили уже известное нам распределение случайной величины «число орлов при двух бросаниях монеты»:

$$X+Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25\end{pmatrix}.$$

Теперь легко найти математическое ожидание:

$$\mathrm{E}(X+Y)=0\cdot 0{,}25+1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}25=1.$$

Однако значение математического ожидания суммы двух случайных величин можно найти и без вычисления распределения суммы. Для этого достаточно знать математическое ожидание каждой из случайных величин X и Y и воспользоваться свойством

$$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}X+\mathrm{E}Y,$$

которое мы прежде сформулировали, но не доказали (гл. IV, § 9, п. 9.2). Докажем это утверждение теперь.

Теорема. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}X+\mathrm{E}Y.$$

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — значения случайной величины X, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — значения Y. Тогда значения $X+Y$ — это суммы вида a_k+b_j, которые получаются при наступлении события $X=a_k$, $Y=b_j$.

Тогда по определению $\mathrm{E}(X+Y)$ равно сумме всех произведений

$$(a_k+b_j)\mathrm{P}(X=a_k,\,Y=b_j).$$

Запишем это подробнее. Произведения $(a_k+b_j)\ \mathrm{P}(X=a_i, Y=b_j)$ будем записывать в определённом порядке, чтобы ни одно из них не пропустить и не учесть дважды. Чтобы формулы записывались короче, для вероятностей $\mathrm{P}(X=a_k,\,Y=b_j)$ используем обозначения p_{kj}.

Итак,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X+Y) = {} & (a_1+b_1)p_{11}+(a_1+b_2)p_{12}+\ldots+(a_1+b_n)p_{1n}+\\ & +(a_2+b_1)p_{21}+(a_2+b_2)p_{22}+\ldots+(a_2+b_n)p_{1n}+\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +(a_m+b_1)p_{m1}+(a_m+b_2)p_{m2}+\ldots+(a_m+b_n)p_{mn}.\end{aligned}$$

Следующий шаг — сгруппировать слагаемые в этой сумме. Раскроем скобки и соберём вместе все слагаемые, содержащие общий множитель a_1. Все эти слагаемые находятся в первой строке суммы:

$$a_1p_{11}+a_1p_{12}+\ldots+a_1p_{1n} = a_1(p_{11}+p_{12}+\ldots+p_{1n}) = a_1\mathrm{P}(X=a_1).$$

Все слагаемые, содержащие a_2, находятся во второй строке. Их сумма равна $a_2\mathrm{P}(X=a_2)$ и т. д.

В итоге сумма произведений, в которых встречается то или иное значение a_k, равна

$$a_1\mathrm{P}(X=a_1)+a_2\mathrm{P}(X=a_2)+a_3\mathrm{P}(X=a_3)+\ldots+a_m\mathrm{P}(X=a_m).$$

По определению это $\mathrm{E}X$.

Сходным образом рассмотрим произведения, в которых участвуют значения случайной величины Y. Все слагаемые, содержащие b_1, располагаются в первом столбце нашей суммы. Вот они:

$$b_1p_{11}+b_2p_{21}+\ldots+b_1p_{m1} = b_1(p_{11}+p_{21}+\ldots+p_{m1}) = b_1\mathrm{P}(Y=b_1).$$

Все слагаемые, содержащие множитель b_2, находятся во втором столбце и дают в сумме $b_2\mathrm{P}(Y=b_2)$ и т. д. В итоге сумма произведений, в которых встречается то или иное значение b_j, равна

$$b_1\mathrm{P}(Y=b_1)+b_2\mathrm{P}(Y=b_2)+\ldots+b_n\mathrm{P}(Y=b_n) = \mathrm{E}Y.$$

Мы ничего не пропустили в нашей таблице. Поэтому

$$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}X+\mathrm{E}Y. \qquad ◄$$

Пример 6. Найдём математическое ожидание суммы случайных величин, заданных таблицей совместного распределения:

X \ Y	0	1	2
−1	0,1	0,2	0,3
1	0,1	0,2	0,1

Решение. Для вычисления $\mathrm{E}(X+Y)$ достаточно найти $\mathrm{E}X$ и $\mathrm{E}Y$. Составим распределения величин X и Y:

X \ Y	0	1	2	Распр. X
−1	0,1	0,2	0,3	0,6
1	0,1	0,2	0,1	0,4
Распр. Y	0,2	0,4	0,4	

Вычислим математические ожидания:

$$\mathrm{E}X = -1\cdot 0{,}6+1\cdot 0{,}4 = -0{,}2, \quad \mathrm{E}Y = 0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}4 = 1{,}2.$$

Тогда $\mathrm{E}(X+Y) = -0{,}2+1{,}2 = 1$.

Упражнение. Покажите, что $\mathrm{E}(X+Y+Z) = \mathrm{E}X+\mathrm{E}Y+\mathrm{E}Z$.

Упражнения

280. Дано совместное распределение двух случайных величин X и Y:

X \ Y	0	1	2
1	0,3	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,2

Найдите распределение случайной величины:
а) $X+Y$; б) $X-Y$; в) XY.

281. Дано совместное распределение двух случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	2
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

Найдите распределение случайной величины:

а) $X+Y$; б) $X-Y$; в) XY.

282. Найдите математическое ожидание суммы случайных величин X и Y, совместное распределение которых задано таблицей:

а)

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0,2	0,1	0,4
1	0,1	0	0,2

б)

$X \backslash Y$	-2	-1	1	2
0	0,16	0,12	0,08	0,04
1	0,04	0,08	0,08	0,04
3	0,12	0,04	0,12	0,08

в)

$X \backslash Y$	0	2	4	6
1	0,06	0,04	0,04	0,06
2	0,08	0,07	0,08	0,07
3	0,12	0,12	0,13	0,13

283. Бросили игральные кости. Найдите математическое ожидание суммы очков, выпавшей при бросании:

а) трёх; б) восьми; в) ста правильных игральных костей.

284. Монету бросили 10 раз. Найдите математическое ожидание числа выпавших орлов.

285. Игральную кость бросили n раз. Найдите математическое ожидание:

а) числа выпавших шестёрок;

б) числа выпавших троек;

в) суммы выпавших очков.

286. Горожане составляют 75% общей численности населения региона, остальные — сельские жители. В ходе социологического обследования опрошено

1014 случайно выбранных жителей региона. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) число опрошенных горожан; б) число опрошенных сельских жителей.

287. В некотором регионе математическое ожидание балла ЕГЭ по русскому языку равно 45, а математическое ожидание балла по математике в этом же регионе равно 34. Общий балл равен сумме баллов по математике и по русскому языку. Найдите математическое ожидание общего балла в этом регионе.

11.2. Ковариация и дисперсия суммы случайных величин

Важной характеристикой изменчивости является дисперсия. Теперь встал вопрос о дисперсии суммы случайных величин. Мы вычислим дисперсию суммы двух случайных слагаемых. Пусть X и Y — две случайные величины, наблюдаемые в одном случайном эксперименте и такие, что их сумма $X+Y$ имеет смысл. Вычислим $\mathrm{D}(X+Y)$. По определению дисперсии

$$\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{E}((X+Y)-\mathrm{E}(X+Y))^2.$$

Воспользуемся тем, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X+Y) &= \mathrm{E}((X-\mathrm{E}X)+(Y-\mathrm{E}Y))^2 = \\ &= \mathrm{E}((X-\mathrm{E}X)^2+2(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)+(Y-\mathrm{E}Y)^2) = \\ &= \mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^2+2\mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\big)+\mathrm{E}(Y-\mathrm{E}Y)^2.\end{aligned}$$

Два слагаемых в этом выражении нам знакомы: это $\mathrm{D}X$ и $\mathrm{D}Y$. Ранее не встречавшееся выражение $\mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\big)$ называется ковариацией случайных величин X и Y. Его обозначение $\mathrm{cov}(X,Y)$.

Определение 1. ***Ковариацией*** случайных величин X и Y называют число

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\big).$$

Заметим, что ковариация не зависит от порядка, в котором взяты случайные величины:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X).$$

Это видно из определения. К обсуждению ковариации мы вернёмся в следующей главе.

Итак, для дисперсии $X+Y$ получено равенство

$$\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}X+\mathrm{D}Y+2\,\mathrm{cov}(X,Y).$$

Свойства ковариации

1°. Для ковариации справедлива формула

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y.$$

2°. Для любых случайных величин X и Y и любого числа a верно равенство

$$\operatorname{cov}(X, aY) = \operatorname{cov}(aX, Y) = a\operatorname{cov}(X, Y).$$

3°. Для любых трёх случайных величин X, Y и Z верно равенство

$$\operatorname{cov}(X, Y + Z) = \operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{cov}(X, Z).$$

Доказательство свойства 1. Воспользуемся свойствами математического ожидания:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)) = \mathrm{E}(XY - Y \cdot \mathrm{E}X - X \cdot \mathrm{E}Y + \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y) =$$
$$= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y \cdot \mathrm{E}X - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y + \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y. \quad ◄$$

Свойства 2° и 3° докажите самостоятельно (см. упражнение 288).

Пример 7. Найдём ковариацию и дисперсию суммы двух случайных величин X и Y, заданных таблицей совместного распределения:

$X \backslash Y$	0	1	2
−1	0,1	0,2	0,3
1	0,1	0,2	0,1

Решение. Найдём математические ожидание произведения величин:

$$\mathrm{E}(XY) = 0 \cdot 0{,}1 + (-1) \cdot 0{,}2 + (-2) \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 = -0{,}5.$$

При составлении этой суммы мы каждую вероятность из таблицы умножали на произведение соответствующих значений X и Y. Например, вероятность события $(X = 1, Y = 2)$ равна 0,1 (правый нижний угол таблицы). Отсюда в сумме появляется последнее слагаемое $2 \cdot 0{,}1$.

Составим распределения X и Y:

$X \backslash Y$	0	1	2	Распр. X
−1	0,1	0,2	0,3	0,6
1	0,1	0,2	0,1	0,4
Распр. Y	0,2	0,4	0,4	

Найдём ожидания самих величин и их квадратов:

$$\mathrm{E}X = -1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = -0{,}2; \qquad \mathrm{E}Y = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}4 = 1{,}2;$$
$$\mathrm{E}X^2 = 1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 1; \qquad \mathrm{E}Y^2 = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}4 = 2.$$

Найдём дисперсии и ковариацию:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = 1 - (-0{,}2)^2 = 0{,}96;$$
$$\mathrm{D}Y = \mathrm{E}Y^2 - (\mathrm{E}Y)^2 = 2 - (1{,}2)^2 = 0{,}56;$$
$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y = -0{,}5 - (-0{,}2) \cdot 1{,}2 = -0{,}26.$$

Следовательно, дисперсия суммы равна

$$\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + 2\operatorname{cov}(X, Y) + \mathrm{D}Y = 0{,}96 - 2 \cdot 0{,}26 + 0{,}56 = 1.$$

Упражнения

288. Докажите свойства 2° и 3° ковариации.

289. Дано совместное распределение двух случайных величин:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1
2	0,2	0,3	0,1

Найдите: а) распределение случайной величины $X + Y$;
б) распределение случайной величины $X \cdot Y$;
в) ковариацию $\operatorname{cov}(X, Y)$.

290. Дано совместное распределение двух случайных величин:

$X \backslash Y$	−1	0	1
−1	0,1	0,1	0,3
1	0,2	0,2	0,1

Найдите: а) дисперсию величины X; б) дисперсию величины Y;
в) дисперсию суммы $X + Y$.

291. Дано совместное распределение двух случайных величин:

$X \backslash Y$	1	2
1	0,3	0
2	0	0,7

Найдите: а) $\mathrm{E}(X + Y)$; б) $\operatorname{cov}(X, Y)$; в) $\mathrm{D}(X + Y)$.

292. Дано совместное распределение двух случайных величин X и Y. Найдите ковариацию этих величин.

а)

X \ Y	0	1	2
−1	0,2	0,1	0,3
1	0,1	0,2	0,1

б)

X \ Y	−2	−1	1	2
0	0,12	0,11	0,03	0,05
1	0,05	0,03	0,11	0,04
3	0,17	0,03	0,15	0,11

в)

X \ Y	0	2	4	6
1	0,03	0,04	0,05	0,06
2	0,07	0,13	0,06	0,07
3	0,15	0,08	0,14	0,12

293. Ковариация случайных величин X и Y равна 4. Найдите ковариацию случайных величин:

а) X и $Z = 2 + 3Y$; б) X и $Z = 2Y - 5$; в) Y и $Z = -3X - 4$; г) $Z = 2X - 1$ и $T = 5 - 3Y$.

294. Ковариация случайных величин X и Y равна 2, а дисперсия величины X равна 3. Найдите ковариацию случайных величин:

а) X и $Z = 2 + 3X$; б) X и $Z = 2X - Y$; в) $Z = 2X - 1$ и $T = 2X - 3Y + 2$.

Глава VI

Независимые случайные величины

§ 12. Независимость случайных величин

12.1. Определение независимых случайных величин

Независимость случайных величин так же важна, как и независимость событий. Эти два понятия тесно связаны.

Говоря описательно, случайные величины X и Y независимы, если независимы любые два события, которые по отдельности можно выразить через величины X и Y.

Напомним, что события A и B называются независимыми, если

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Пусть, как и прежде, случайная величина X принимает значения $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а случайная величина Y принимает значения $b_1, b_2, \ldots, b_n$ с некоторыми вероятностями.

Тогда можно рассмотреть события $X = a_k$ и $Y = b_j$. В дальнейшем для краткости вместо $\mathrm{P}((X = a) \cap (Y = b))$ будем писать $\mathrm{P}(X = a,\ Y = b)$, по-прежнему подразумевая под этим вероятность пересечения событий.

Определение. Случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если события $X = a_k$ и $Y = b_j$ независимы для любых возможных значений a_k и b_j, то есть выполняется равенство

$$\mathrm{P}(X = a_k,\ Y = b_j) = \mathrm{P}(X = a_k) \cdot \mathrm{P}(Y = b_j).$$

Если это равенство не выполняется ***хотя бы для какой-нибудь пары значений***, то величины X и Y не являются независимыми. Тогда их называют взаимно зависимыми[1].

[1] Иногда определение независимости случайных величин дают иначе, в более общем виде, пригодном не только для дискретных случайных величин.

Определение 2. Случайные величины X и Y называются независимыми, если независимы два любых события A и B, выражающиеся соответственно только через случайные величины X и Y. Можно показать, что определения 1 и 2 эквивалентны, то есть приводят к одинаковому пониманию независимости случайных величин.