**АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ МИЩЕНКО,**

доктор экономических наук, профессор кафедры логистики НИУ ВШЭ

**ALEKSANDER VLADIMIROVICH MISHENKO,**

***e-mail: nesterovich@gnext.ru***

**АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ СКОКОВ,**

аспирант кафедры математических методов в экономике,

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

**ALEXANDER ALEXANDROVICH SKOKOV,**

МОДИФИКАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОРТФЕЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СТРУКТУРУ ПОРТФЕЛЯ.

**АННОТАЦИЯ**

Важнейшую роль в управлении инвестициями играет теория оптимального портфеля, связанная с проблемой выбора эффективного соотношения активов. В классических моделях портфельных инвестиций предполагается, что активы, включаемые в портфель, бесконечно делимы, поэтому, получив оптимальные доли приобретения активов, задача формирования портфеля считалась решенной. Такой подход применим лишь в том случае, если цена акции сравнительно мала по отношению к объему самих инвестиций. В противном случае полученное решение может оказаться не только не оптимальным, но и недопустимым. Эти обстоятельства заставляют инвесторов при анализе эффективности портфеля рассматривать не только непрерывные, классические модели, но и их целочисленные модификации. Некоторые из этих моделей рассматриваются в предлагаемой статье.

В качестве новведения следует отметить предложенный авторами статьи алгоритм решения оптимизационных задач на базе модели Блэка-Литтермана, основанный на методе направленного перебора.

**ABSTRACT**

The theory of optimal portfolio is very important in the investment management. This theory decides the problem of choosing an optimal ratio of assets in portfolio. In classical investment models is assumed that the assets included in the portfolio are infinitely divisible. A portfolio was assumed to be well formed, if we have found the optimal proportion of assets. Such an approach is acceptable in case the share price is low relative to the volume of investment resources. Otherwise, the solution may be not only optimal, but unacceptable. These circumstances have led investors to consider not only the classical continuous portfolio investment models, but also modified analogues. Some of these models are considered in the proposed article.

As a novelty a proposed by paper’s authors algorithm for Black-Litterman model based optimal problem solution founded on directed sorting should be noticed.

**Ключевые слова:** портфель, инвестиции, Марковиц, Блэк-Литтерман, целочисленный, риск, доходность, устойчивость.

**Key words:** portfolio, investment, Markowitz, Black-Litterman, integer, risk, profitability, sustainability.

**Введение**

Важнейшую роль в управлении инвестициями играет теория оптимального портфеля, связанная с проблемой выбора эффективного соотношения активов, максимизирующих ограниченную доходность при некотором приемлемом для инвестора уровне риска.

Cтохастические методы и статистические данные позволяют дать оценку таких характеристик портфеля как его доходность и риск. В классических моделях портфельных инвестиций (модель Марковица, модель CAPM, модель Блэка-Литтермана) предполагается, что активы, включаемые в инвестиционный портфель, бесконечно делимы, поэтому, получив доли приобретения активов в оптимальном решении, задача формирования портфеля считалась решенной. Такой подход приемлем в том случае, если цена акции сравнительно мала по отношению объему самих. В противном случае полученное решение может оказаться не только не оптимальным, но и недопустимым. Попытки инвесторов получить оптимальное решение путем округления компонент решения далеко не всегда приводят к желаемому результату. Эти обстоятельства заставляют инвесторов при анализе эффективности портфеля рассматривать не только непрерывные, классические модели, но и их модификации с ограничениями на структуру портфеля.

**Модель портфельных инвестиций без учета риска**

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу, связанную с формированием инвестиционного портфеля.

Пусть инвестор обладает свободными денежными средствами в размере F на периоде времени [0, *T*] и может приобрести лоты акций
*V1, V2, …, Vn,* где *Vi* – объем лота по *i*-му виду ценных бумаг. (*i* = 1, ..., *n*). Необходимо выбрать такие лоты акций, купив которые в момент времени *t* ***=*** 0 и продав в момент времени *t* = *T*, инвестор обеспечивает наибольший прирост финансовых средств Δ*F*, или, проще говоря, наибольшую доходность. Формально эту задачу можно записать в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
| , | (2) |
| , *i* = 1…*n* | (3) |

Здесь *xi* = 1, если *i*-йлот ценных бумаг приобретается, и *xi* = 0 в противном случае.

В задаче (1)-(3) в качестве целевой функции выбрано выражение, состоящее из 2-х слагаемых. Первое слагаемое представляет собой выручку от продажи ценных бумаг по цене в момент времени *t* = *T,*приобретеных в момент времени *t* = 0 по цене . Второе слагаемое - это остаток финансовых ресурсов после формирования инвестиционного портфеля в количестве, заданном вектором *x* = (*x1*, …, *xn*).Учитывая тот факт, что эта сумма потенциально может быть размещена на депозите в банке под процент ***,*** появляется дополнительный множитель , где *k* – это количество периодов интервале (0, *T*), в которых происходит начисление процентов. Например, если (0, *T*) – это временной интервал продолжительностью в один год, а проценты начисляются раз в квартал, то *k* = 4.

В дальнейшем будем рассматривать лишь частный случай целевой функции (1), который предполагает, что интервал (0, *T*) достаточно короткий, и поэтому величина из-за малости и *k* близка к единице. Следовательно, целевая функция (1) может быть записана в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

.

Так как количество денег *F –* константа, то онане оказывает влияния на само решение. Поэтому, обозначив через , получим целевую функцию вида:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Эта задача принадлежит к числу задач, которые характеризуются экспоненциальным ростом объема вычислений при увеличении размерности самой задачи.

Для решения приведенной выше задачи может быть использована следующая схема метода ветвей и границ.

I. Вычисление верхней оценки оптимального значения целевой функции происходит в соответствии со следующим алгоритмом. Все лоты акций упорядочиваются по величине отношения . Пронумеруем лоты соответствующим образом и получим  Далее денежные средства расходуются в первую очередь для приобретения активов первого вида, далее – активов второго вида и т.д. до тех пор, пока остатка денежных средств станет недостаточно для приобретения лота акций вида 1-го вида в объеме *Vl*. В этой ситуации снимаются ограничения на приобретение всех акций пакета вида *l* и приобретаются акции вида *l* в максимально возможном объеме. Это количество  вычисляется из формулы , где *Fl-1 –* остаток финансовых средств после приобретения первых *l*-1 пакетов акций (). Далее производится вычисление верхней оценки прибыли по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

II. Осуществляем вычисление нижней оценки целевой функции в соответствии с формулой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

После вычисления верхней и нижней оценки доходности для оптимального решения, исследуются все варианты формирования инвестиционного портфеля с вычислением текущих верхних оценок для этого решения.

III. При анализе очередного варианта инвестиционного портфеля каждый раз осуществляется вычисление текущих верхних оценок *Рвтек* сразу после выделения средств на приобретение очередного лота. Эта оценка складывается из прибыли, полученной от приобретения ценных бумаг, на которые уже выделены деньги, и прибыли оставшихся ценных бумаг, вычисляемой по правилу получения *Рв.* Если при этом окажется, что ***,*** то данный инвестиционный портфель исключается из рассмотрения. Иначе в портфель включается очередной лот акций, и снова вычисляется *Рвтек.* В конечном итоге либо рассматриваемый вариант портфеля будет отвергнут, либо в результате будет сформирован инвестиционный портфель, прибыль которого будет превышать нижнюю оценку. Тогда в качестве нижней оценки принимаем уже полученное значение прибыли от последнего рассмотренного инвестиционного портфеля и переходим к анализу следующего варианта.

Работа этого метода заканчивается либо после перебора всех вариантов формирования портфеля, и тогда оптимальным будет тот вариант, которому соответствует последнее значение *Pн****,*** либо в том случае, когда получен вариант портфеля, прибыль по которому равна *Рв****.***

Алгоритм решения задачи (1)-(3) с учетом множителя  в целевой функции (1) будет отличаться от представленного выше тем, что лоты, для которых при формировании инвестиционного портфеля будут исключены из анализа.

При практическом использовании решения предложенной задачи может возникнуть ряд проблем, одной из которых является достоверность прогноза будущей стоимости ценных бумаг  (*i* = 1,…, *n*).Если известна функция распределения случайных величин, которые задают потенциально возможную прибыль по каждому виду ценных бумаг, то выбирается такой портфель, который максимизирует математическое ожидание выигрыша, либо минимизирует СКО или, другими словами, риск финансовых потерь.

Иным подходом в условиях неточного прогноза является анализ чувствительности решения к изменению величин . В этом случае возможны три варианта, в том числе:

1. Будем считать, что известны минимальные значения , и необходимо вычислить, насколько могут быть увеличены значения , чтобы оптимальное решение задачи сохранилось, т.е. необходимо определить такое, чтобы при увеличении всех  на любое решение задачи сохранилось.

Пусть множество X={x1, x2, …, xn} – множество всех возможных решений задачи и пусть эти значения упорядочены по значению величин .Пусть вектор *xl* является оптимальным, тогда при увеличении  на  для всех *i* = 1…*n* в качестве новых решений могут быть только решения *xl+1*…*xn*. Чтобы определить границу изменения  для решения *xl,* необходимо выяснить  из следующего соотношения:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (8) |

*k*= *l+1*, …, *n.*

Раскроем скобки и выразим  через параметры *Vi*, *βi*, *xil*,*xik*. Отсюда получаем:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (9) |

Допустим, что минимум достигается на каком-либо *l1* > *l*. В этом случае процедура изменения для решения повторяется до того момента, пока не будет произведен переход на решение *xn* (через некоторое конечное число шагов), когда дальнейшее увеличение всех значений  уже не приведет к новому решению.

1. Будем предполагать, что  меняются по правилу , где *mi* – коэффициент, разный для каждого вида *i*. В данной ситуации логика рассуждений аналогична, но упорядочивание решение происходит по величине .

Формула для вычисления , для которого оптимальным остается решение *xl*, будет иметь при этом следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (10) |

1. Предполагается, что  на момент времени *Т* могут быть равномерно распределены на некоем интервале , т.е. . В этом случае аналогично может быть представлена процедура деления множества, на котором изменяются значения β = (β1,…, βn), на подмножества S1,…, Sn. Причем, при изменении β на любом из подмножеств Sj (j=1,…,n) оптимальным на нем будет решение xj∈X.

Для предложенной выше задачи рассмотрим ситуацию, когда , т.е. будущая ожидаемая стоимость i-го актива может принимать любые значения из интервала . Рассмотрим для каждого актива интервалы . Строго говоря, в этом случае однозначно упорядочить активы по степени убывания доходности невозможно. Но можно сформировать все допустимые портфели и далее для каждого портфеля можно вычислить соответственно *Fj1*, *Fj2* (*j*=1,…,*N*). Здесь *N* – число допустимых портфелей, *Fj1* – значение целевой функции (5) при минимальном будущем значении стоимости *i*-го актива, *Fj2* – значение целевой функции (5) при максимально возможном значении стоимости *i*-го актива.

Выберем такие портфели, которые могут быть оптимальными при определенных значениях входящих в них будущих стоимостей активов. Для этого из множества всех допустимых портфелей *N* необходимо выделить те из них, которые определяются в соответствии с нижеописанным алгоритмом:

1. Определяем max *Fj2= Fp1* (*j*∈*N*).
2. Определяем *Fj1*= *Fk1* (*j*∈*N*).
3. Исключаем все портфели из множества *N*, для которых *Fj2 = Fk1*.

Оставшееся множество портфелей обозначим через *N1*. Очевидно, что только портфели множества *N1* могут быть оптимальными при изменении будущей стоимости активов в интервалах , . Значение целевой функции для каждого допустимого портфеля *j* может быть представлено в виде:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (11) |

где вектор с логическими переменными *xj* = (*x1i,…,xnj*) определяет те лоты, которые пошли в портфель *j*.

Множество будущих стоимостей активов, при которых оптимальным будет *j*-ый портфель, задается следующей системой линейных неравенств:

|  |  |
| --- | --- |
| ,,. | ((12) |

Рассмотрим далее формализованную выше модель с учетом риска.

**Дискретная ценовая модель рынка капиталов**

Рассмотрим модель CAPM с описанием метода ветвей и границ, используемого для нахождения оптимального инвестиционного портфеля с учетом ограничений на целочисленность. Необходимость разработки этого метода связана с наличием погрешности, возникающей путем округления при переходе от непрерывного решения к целочисленному, которая задается следующей формулой:

|  |  |
| --- | --- |
| ,,, | (13) |

где: Δ*F* – разница целевой функции на непрерывном решении минус значение целевой функции для целочисленного решения;

*xkN* – компоненты целочисленного решения, учитывая, что *xkN*=1, погрешность может составлять 100% при округлении.

Предположим, что известен перечень лотов, в которые входят ценные бумаги одного вида, объем которых задан числами *V1*, *V2*,…*, Vn*. Известна также начальная стоимость каждой акции  в момент времени *t* = 0, а также вероятностное распределение будущей стоимости акций каждого вида в момент времени *t* = *T*.

Будем предполагать, что заданы так называемые *β*-коэффициенты по каждому виду финансовых активов, которые обозначим *βi* (*i* = 1, 2, …, *n*). Эти коэффициенты задают количественную оценку риска по каждому виду ценных бумаг. В этих условиях инвестор, обладая ограниченным набором денежных средств *F*, хотел бы приобрести те лоты, продав которые в момент времени *t* = *T*, он получит максимальный ожидаемый прирост средств Δ*F*.

Сформируем оптимизационную задачу формирования инвестиционного портфеля с учетом приведенных выше предположений. Ниже будем считать, что будущая стоимость *i*-го актива задается распределением *γi1,…, γim* с вероятностями *p1,…, pm*. Тогда математическое ожидание будущей стоимости *i*-го актива есть величина .

С учетом этих обозначений, соответствующая оптимизационная задача формирования инвестиционного портфеля может быть представлена в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (14) |
| , | (15) |
| , | (16) |
| . | (17) |

Здесь *βгр*определяет граничное (максимально допустимое) значение риска инвестиционного портфеля.

В задаче (14)-(17) *xi*= 0, если лот *Vi* не вошел в портфель ценных бумаг, и *xi*= 1, если лот *Vi* входит в этот портфель. Для получения оптимального решения задачи (14)-(17) необходимо выбрать те лоты из множества *V1,…, Vn*, чтобы максимизировать целевую функцию (14), не нарушая при этом ограничений (15)-(17).

Для решения представленной задачи используется алгоритм, основанный на следующей схеме метода ветвей и границ.

I. Вычисление верхней оценки задачи (14)-(17). Для получения верхней оценки заменим в задаче (14)-(17) ограничение (17) на ограничение (18), имеющего следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

Тогда задача (14)-(18) является задачей непрерывного линейного программирования, следовательно, оптимальное решение такой задачи может быть получено с использованием симплекс метода.

Обозначим решение задачи (14)-(18) через *xопт*, вычислим значение целевой функции (14) на решение xопт и обозначим его *Fв*. Вообще говоря, *xопт* не является допустимым решением исходной задачи (14)-(17). Очевидно, что значение целевой функции (14) задачи (14)-(17) не может превышать величину *Fв* на оптимальном решении.

II. Вычисление нижней оценки задачи (14)-(17) *Fн*осуществляется путем выбора некоторого допустимого решения задачи (14)-(17) и вычисления значения целевой функции (14) на этом решении, которое и принимается за *Fн*. Тут важно отметить, что чем ближе значение *Fн* будет к значению *Fв*, тем более эффективно будет работать в дальнейшем схема метода. Выбранное выше решение является оптимальным, если *Fн* = *Fв*. Если же *Fн* < *Fв*, то осуществляем переход к следующему шагу.

III. Анализ текущих оценок при формировании инвестиционного портфеля.

В процессе формирования нового портфеля происходит вычисление текущих верхних оценок по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

Здесь *К* – множество лотов, которые уже вошли в портфель;

*N* – множество всех лотов;

*N/K* – остаток неприобретенных лотов;

*Fв (N/K)* – верхняя оценка задачи (14)-(17) на множестве лотов *N/K* и объеме финансовых ресурсов:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

Дальнейшее формирование инвестиционного портфеля происходит только в случае выполнения следующих двух условий:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |
|  | (22) |

Если условия (21)-(22) выполнены, то выбирается очередной лот для включения его в портфель. В результате получаем множество приобретенных лотов *K1*. Очевидно, что *K* ⊆ *K1.*

На множестве *K1* вычисляется *Fвтек(K1)* по формуле (19) и проверяется выполнение условий (21)-(22). Продолжая эту процедуру, получим в итоге, что либо рассматриваемый портфель будет отбракован, либо остатка денежных средств не хватит для приобретения ни одного лота. В этом случае вычисляем на полученном допустимом решении значение целевой функции (14) *F\**. Если *F\** > *Fн*, то, предполагая, что *Fн* = *F\**, переходим к формированию очередного инвестиционного портфеля. Метод заканчивает работу, если при очередной корректировке *Fн* получим, что *Fн* = *Fв*, либо если все варианты инвестиционных портфелей рассмотрены. Тогда оптимальным будет являться портфель, соответствующий максимальному значению *Fн*.

**Целочисленная модель Марковица минимизации риска портфеля**

В отличие от классической модели Марковица будем считать, что активы можно приобретать только лотами, значение которых определяется следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |

В этом случае задача Марковица минимизации риска с учетом введенных ранее обозначений может быть формализована следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |
|  | (25) |
|  | (26) |
|  | (27) |

В задаче (24)-(27) *yi* = 1, если *i*-ые лоты включены в инвестиционный портфель, и *yi* = 0, если этот лот в портфель не включен. Величина Δ*F* задает минимально необходимую доходность при реализации активов портфеля в момент *t = T*. Значения cov*ij* вычисляются как попарные ковариации актива *i* и актива *j* (*i* = 1,…, *n*; *j* = 1,…, *n, i ≠ j*).

Рассмотрим метод неявного перебора, который реализует схему метода ветвей и границ для решения данной задачи.

I. Вычисление верхней границы оптимального значения целевой функции (24). Для этого решается вспомогательная задача следующего вида:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |
|  | (29) |
|  | (30) |

Задача (28)-(30) является задачей линейного программирования с логическими переменными.

Получив решение *yопт* задачи (28)-(30), сравниваем значение целевой функции задачи (28) на этом решении с правой частью ограничения (26) и если оно меньше, чем *F +* Δ*F,* то задача (24)-( 27) решения не имеет.

Если значение целевой функции (28) на оптимальном решении *yопт* > *F +* Δ*F*, то вычисляем значение целевой функции (24) и принимаем это значение за величину верхней оценки *F* задачи (24)-( 27).

II. В качестве нижней оценки *Rн* можно использовать портфель, состоящий из одного лота, на котором *σ2 =* min *σp2*, *i* = 1, 2,…, *n*.

Если *Rн* < *Rв*, то переходим к шагу 3. Если *Rн* = *Rв*, то оптимальное решение не найдено.

III. Вычисление текущих нижних оценок при переборе различных вариантов формирования инвестиционных портфелей.

Вычисление текущей нижней оценки инвестиционного портфеля с учетом того, что в этот портфель уже вошли лоты множества *K ⊆ N* и выполняется условие , производится по следующей схеме.

Упорядочиваем все лоты множества *N/K* по соотношению:



И проверяем выполнение условия:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (31) |

Если неравенство (31) выполняется, то переходим к проверке выполнения следующего неравенства:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (32) |

Здесь: cov*mp* – минимальная отрицательная ковариация двух активов из множества активов *N/K*;

*dm, dp* – равномерное распределение остатка капитала в долях после приобретения акций множества *K*;

*σq2* – минимальная дисперсия для множества активов *N/K*;

*n-k* – число лотов в множестве активов *N/K*;

– это доля финансовых средств, оставшихся после приобретения лотов множества K, которая равномерно распределена между активами множества *N/K*. Если неравенство (31) выполняется, то происходит выбор очередного лота из множества *N/K*, включаемый в формируемый портфель. Таким образом, образуется множество лотов, включенных в портфель *K1* (*K* ⊆ *K1*), и происходит вычисление текущей верхней оценки для лотов множества *K1*.

Процесс формирования портфеля заканчивается, если при очередном включении нового лота в портфель не выполняется условие (31) или (32), либо за остаток средств нельзя приобрести ни один из оставшихся лотов, включенных в портфель.

В последнем случае проверяем значение целевой функции (24) на сформированном портфеле и если оно меньше, чем *Rв*, то полагаем в дальнейшем, что *Rв* равно полученному значению целевой функции (24).

Метод прекращает работу тогда, когда при очередной корректировке *Rв* получим, что *Rв* = *Rн,* или после того, как рассмотрены все возможные варианты портфелей ценных бумаг. В этом случае оптимальным является портфель, соответствующий минимальному значению *Rв*.

**Целочисленная задача оптимизации инвестиционного портфеля на максимум доходности**

Рассмотрим модификацию модели Марковица на максимум доходности с учетом ограничений на величину риска портфеля и на целочисленность лотов. Используя ранее принятые обозначения, она может быть записана в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (33) |
|  | (34) |
|  | (35) |
|  | (36) |

Будем применять для решения задачи используемую ранее схему метода ветвей и границ.

I. Вычисление верхней оценки оптимального значения целевой функции задачи (33)-(36).

Эта оценка может быть получена путем исключения ограничения (34) и замены ограничения (36) на ограничение вида:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (37) |

Тогда максимум доходности портфеля задачи (33), (35), (37) может быть получен, как указывалось ранее, путем упорядочения лотов по величине соотношения 

Перегруппируем лоты в порядке убывания величины  и получим . Далее будем приобретать лоты по убыванию величины  до тех пор, пока не будут израсходованы все деньги в размере *F*. Этот портфель, очевидно, будет оптимальным решением задачи (33), (35), (37).

Если этот портфель еще и удовлетворяет ограничениям (34), (36), то он также будет и решением исходной задачи (33)-(36). Если последнее условие не выполняется, то переходим к шагу 2.

II. Вычисление нижней оценки оптимального значения целевой функции задачи.

В качестве нижней оценки задачи (33)-(36) можно принять объем исходных инвестиционных ресурсов *F*. Содержательно это означает, что ни один лот не приобретается и, следовательно, величина риска равна 0.

III. Вычисление текущих верхних оценок оптимального значения целевой функции при формировании инвестиционного портфеля.

Вычисление текущей верхней оценки для частично сформированного портфеля при условии, что в портфель вошли уже лоты множества K, происходит по следующей формуле:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (38) |

Кроме того, формируемый портфель должен удовлетворять ограничениям по уровню риска, т.е. ограничению (34). Для этого, после того как в портфель включены лоты множества K, должно выполняться следующее неравенство:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (39) |

Здесь: cov*mp* – минимальная отрицательная ковариация двух активов из множества активов *N/K*;

*xm, xp* – равномерное распределение остатка капитала в долях после приобретения акций множества *K*;

*σq2* – минимальная дисперсия на множестве активов *N/K*;

*n-k* – число лотов множества акций *N/K*;

;

*dq* – это доля финансовых средств, оставшихся после приобретения лотов множества K, поровну распределенных между активами множества *N/K*. После того, как вычислено значение *Fвтек(K)*, проверяется выполнение следующего соотношения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (40) |

Если условия (39) и (40) выполняются, то происходит выбор очередного приобретаемого лота и формируется портфель ценных бумаг, в который входит множество лотов *K1 (K ⊆ K1)*. В противном случае этот портфель отбраковывается, и осуществляется переход к формированию следующего инвестиционного портфеля.

В том случае, если удалось сформировать с учетом описанной выше процедуры портфель, на котором выполняются все ограничения (26)-(28) и значение целевой функции *F\** (33) и даже больше, чем *Fн*, то полагает *Fн* = *F\** и переходим на формирование нового инвестиционного портфеля.

Работа описанного алгоритма завершается в том случае, когда после очередной корректировки *Fн* получено *Fв*, либо если перебраны все возможные варианты инвестиционных портфелей. В этом случае оптимальным будет являться портфель, соответствующий наибольшему значению *Fн*.

**Целочисленные задачи оптимизации на основе модели Блэка-Литтермана**

Для более адекватной оценки будущей стоимости активов может быть применена модель Блэка-Литтермана. В основе этой модели лежит метод построения ценных бумаг, который базируется на нахождении вектора равновесной доходности из весов рыночной капитализации инструментов (путем решения обратной оптимизационной задачи Марковица) и последующего комбинирования полученного результата с экспертным прогнозом доходностей составляющих портфель инструментов. Общая схема процесса представлена на рис.1.



**Рис. 1 – Процесс нахождения оптимальных весов распределения активов в портфеле на основе модели Блэка-Литтермана**

В модели Блэка-Литтермана в качестве нейтральной стартовой позиции выбраны «равновесные» доходности активов, получаемые из предположения, что рынок в настоящий момент является эффективным. Такой выбор объясняется одним из основных недостатков модели Марковица, в которой отправной точкой при построении портфеля ценных бумаг на основе оптимизации соотношения риска и доходности является вектор ожидаемой доходности. Тем не менее, давно показано, что относительно небольшое изменение ожидаемой доходности одного из активов в портфеле при применении оптимизации Марковица может привести к пересмотру структуры портфеля более чем на 50%. Именно по этой причине Блэк, Литтерман и Хи в своих исследованиях пытались использовать несколько альтернативных вариантов прогноза будущей доходности активов: прогноз на основе исторических данных, прогноз одинаковых доходностей для всех активов на рынке и прогноз одинаковых для всех активов доходностей на единицу риска. Было продемонстрировано, что все эти альтернативные прогнозы при применении оптимизации Марковица приводят, в случае отсутствия ограничений, к структуре портфелей с огромными длинными и короткими позициями. В случае же ограничений на короткую продажу, получившиеся портфели являются высококонцентрированными и содержат относительно небольшое количество различных типов активов.

В общем виде модель Блэка-Литтермана представляет собой сложную среднюю взвешенную вектора предполагаемой доходности и вектора прогнозов доходностей и определяется по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (41) |

где *µBL*- новый комбинированный вектор доходности (N x 1 вектор-столбец);

*τ* - масштабирующий фактор;

Σ - ковариационная матрица доходностей (N x N матрица);

*P -* матрица, идентифицирующая активы, являющиеся предметом прогнозов инвестора (K x N матрица либо 1 x N вектор-столбец в частном случае одного прогноза);

Ω - диагональная ковариационная матрица стандартных ошибок прогнозов, отражающая неопределенность прогнозов (K x K матрица);

П - вектор предполагаемой равновесной доходности (N x 1 вектор-столбец);

*Q* - прогнозный вектор (K x 1 вектор-столбец);

K - количество прогнозов инвестора;

N - количество активов в портфеле.

Сначала оценивается равновесная доходность активов в соответствии с моделью CAPM, которая отражает уровень капитализации каждого актива:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (42) |

где  - вектор предполагаемой равновесной доходности;

Σ - ковариационная матрица доходностей;

- премия за риск - характеризует готовность инвестора жертвовать потенциальной доходностью инвестиционного портфеля для снижения риска портфеля, выраженного через дисперсию ожидаемой доходности;

*wmkt* - удельный вес каждого актива в общем объеме рынка;

 - доходность рыночного портфеля, вычисленная для средней исторической доходности активов *µ*;

σM2 – дисперсия рыночного портфеля;

*Rf  -* величина безрисковой процентной ставки.

Величины *µ* и *Σ* имеют тот же смысл, что и в модели Марковица. Величина *δ* корректируется на основе исторических данных финансовых рынков.

Логика формулы (42) заключается в следующем: если предположить, что рынок является эффективным и матрица ковариаций известна, то нахождением  определяется, какую среднюю доходность ожидает получать средний участник рынка, если этот участник держит в своем портфеле активы в пропорциях .

Далее значение истинной доходности *µBL* предполагается неизвестным, но принимается следующая оценка:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (43) |
|  | (44) |
|  | (45) |
|  | (46) |

Здесь *τ* – эвристический параметр;

*P* - матрица экспертных оценок;

*q* – прогнозируемая доходность портфелей из *P*;

Ω - диагональная ковариационная матрица стандартных ошибок прогнозов, отражающая неопределенность прогнозов инвестора.

Одним из аспектов модели (43)-(46), вызывающим наибольшие затруднения на практике, является формализация прогнозов инвестора и формирование входящих в модель данных, отражающих эти прогнозы. Прежде всего, следует отметить, что в рамках модели наличие прогноза инвестора по каждому из активов не является обязательным. Неопределенность, связанная с прогнозами, выражается в случайном, независимом, нормально распределенном векторе ошибок , имеющим нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу Ω. В общем случае прогнозы в модели имеют следующую форму:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (47) |

За исключением гипотетической ситуации, когда инвестор на 100% уверен в своем прогнозе, ошибка *ε* имеет значение, отличное от нуля. Вектор ошибок *ε* не входит непосредственно в формулу (46), однако дисперсия каждой из ошибок  входит в указанную формулу в составе диагональной ковариационной матрицы стандартных ошибок прогнозов Ω. То, что матрица Ω является диагональной, означает, что все элементы данной матрицы, не лежащие на ее главной диагонали, равны 0, поскольку подразумевается, что прогнозы инвестора независимы друг от друга.

В общем виде матрица Ω может быть записана в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (48) |

Дисперсия  отражает неопределенность прогнозов инвестора: чем больше дисперсия, тем выше неопределенность результата прогноза.

Прогнозы, формирующие вектор-столбец *Q*, ставятся в соответствие конкретным активам с помощью матрицы *P*. Каждый из прогнозов выражается в 1 x N векторе-строке. Соответственно, K прогнозов формируют K x N матрицу. В общем случае матрица *P* имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (49) |

Элементы матрицы *P* рассчитываются следующим образом: относительный вес более доходного (менее доходного актива) определяется как доля капитализации этого актива в суммарной капитализации группы более доходных (менее доходных) активов из прогноза, при этом номинально более доходные инструменты получают положительные веса, в то время как номинально менее доходные – отрицательные.

После спецификации матрицы *P* появляется возможность посчитать дисперсию портфелей, соответствующих каждому из прогнозов. В соответствии с принципами среднедисперсионного анализа Марковица, искомые дисперсии будут равны , где  – 1 xN вектор-строка из матрицы *P*, который соответствует *k*-ому прогнозу и имеет *Σ* ковариационную матрицу доходностей.

Дисперсии индивидуальных прогнозов являются важным источником информации относительно неопределенности прогнозов инвесторов и служат для определения уровня уверенности, приписываемого каждому из прогнозов. Эта информация может использоваться для пересмотра и корректировки дисперсий ошибок индивидуальных прогнозов *w*, формирующих диагональные элементы матрицы Ω.

Следует отметить, что величина масштабирующего фактора *τ* обратно пропорциональна относительному весу вектора предполагаемой равновесной доходности . Однако мнения относительно величины этого параметра расходятся. Так, Блэк, Литтерман и Ли считают, что в силу низкой волатильности истинного вектора равновесной доходности величина этого параметра должна быть близка к 0. Ли в своих работах обычно придавал значение *τ* между 0,01 и 0,05. Напротив, Сатчелл и Скаукрофт часто придавали этому параметру значение 1. Блэймонт и Фарузи интерпретируют  как стандартную ошибку оценки вектора предполагаемой равновесной доходности : таким образом, величина *τ* примерно равна 1, деленной на количество исторических наблюдений. Хи и Литтерман при определении величины *τ* поступали следующим образом. Они определяли уверенность в прогнозе Ω таким образом, чтобы отношения  равнялись дисперсиям портфелей, соответствующих отдельным прогнозам (). В этом случае ковариационная матрица ошибок прогнозов Ω, отражающая неопределенность прогнозов (или уровень уверенности), имеет следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (50) |

Величина масштабирующего фактора *τ* при этом перестает оказывать влияние на конечный результат модели: масштабирующий фактор изменяет величину элементов матрицыΩ, однако новый комбинированный вектор доходностей  остается одинаковым при любых значениях *τ*, что напрямую следует из формулы (46).

Определив значение масштабирующего фактора *τ* и построив ковариационную матрицу ошибок прогнозов Ω, можно приступить к построению комбинированного вектора доходности  в соответствии с формулой (36).

При этом ковариационную матрицу доходностей активов, необходимую для построения матрицы ошибок прогнозов Ω, можно найти по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (51) |

где Σ - ковариационная матрица доходностей (N x N матрица);

*V* - диагональная матрица волатильностей доходностей активов;

*Q* - прогнозный вектор (K x 1 вектор-столбец), отражающий средние ожидаемые доходности активов.

Принимая во внимание тот факт, что , определим будущую стоимость *i*-го актива как

|  |  |
| --- | --- |
| , | (52) |

Тогда задачу оптимизации инвестиционного портфеля на основе модели Блэка-Литтермана с учетом целочисленности, используя ранее принятые обозначения, можно записать следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (53) |
|  | (54) |
|  | (55) |
|  | (56) |

где covij из (53) определяется на основе матрицы (50).

Очевидно, что задача (53)-(56) полностью аналогична задаче (33)-(36), следовательно, для ее решения применима используемая ранее схема метода ветвей и границ, которая подробно изложена выше.

Аналогичным образом можно формализовать и задачу на минимум риска, используя все ту же модель Блэка-Литтермана:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (57) |
|  | (58) |
|  | (59) |
|  | (60) |

Задача (57)-(60) также полностью повторяет задачу (24)-(27) и для ее решения используется уже известная схема метода ветвей и границ.

Надо сказать, что в отличие от предыдущих моделей, подробно рассмотренных в данной статье, оптимизационные задачи (53)-(56) и (57)-(60), построенные на основе модели Блэка-Литтермана, позволяют реплицировать поведение инвестора, формирующего портфель, с учетом его склонности к риску.

**Заключение**

Практика реальных торгов на фондовых рынках такова, что торговля ценными бумагами происходит только лотами фиксированного объема. В связи с этим требуется рассматривать оптимизационные задачи в условиях дискретных ограничений, что и было продемонстрировано в данной работе. Описанные в статье оптимизационные методы и алгоритмы могут успешно применяться при решении задач формирования инвестиционного портфеля.

**Используемая литература**

1. Шарп У. Ф. и др. – Инвестиции – М.: ИНФРА-М 1997.
2. Шапкин А. С. – Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций. – М.: Юнити, 2003.
3. Мищенко А. В. – Методы управления инвестициями в логических системах. – М.: ИНФРА-М, 2009.
4. Bevan, A., and Winkelmann, K. (1998). «Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience». Fixed Income Research, Goldman, Sachs & Company, December.
5. Black, F. and Litterman, R. «Asset Allocation: Combining Investors Views with Market Equilibrium». Fixed Income Research, Goldman, Sachs & Company, September 1990.
6. Black, F. and Litterman, R. «Global Portfolio Optimization». Financial Analysts Journal, September/October 1992, 28-43.
7. Blamont, D. and Firoozy, N. «Asset Allocation Model». Global Markets Research: Fixed Income Research, Deutsche Bank, July 2003.
8. He, G. and Litterman, R. «The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios». Investment Management Research, Goldman, Sachs & Company, December 1999.
9. Litterman, R. and Winkelmann, K. «Estimating Covariance Matrices». Risk Management Series, Goldman Sachs & Company, January 1998.

**List of references**

1. Bevan, A., and Winkelmann, K. (1998). «Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience». Fixed Income Research, Goldman, Sachs & Company, December.
2. Black, F. and Litterman, R. «Asset Allocation: Combining Investors Views with Market Equilibrium». Fixed Income Research, Goldman, Sachs & Company, September 1990.
3. Black, F. and Litterman, R. «Global Portfolio Optimization». Financial Analysts Journal, September/October 1992, 28-43.
4. Blamont, D. and Firoozy, N. «Asset Allocation Model». Global Markets Research: Fixed Income Research, Deutsche Bank, July 2003.
5. He, G. and Litterman, R. «The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios». Investment Management Research, Goldman, Sachs & Company, December 1999.
6. Litterman, R. and Winkelmann, K. «Estimating Covariance Matrices». Risk Management Series, Goldman Sachs & Company, January 1998.
7. Mishenko A. V. – Methods of investments control in logistics systems. – М.: INFRA-M, 2009.
8. Shapkin A. S. – Economic and financial risks. Assessment, management, investment portfolio – М.: Uniti, 2003.
9. Sharp U. F. – Investments – М.: INFRA-M 1997.