

АНАЛИЗ РАВНОВЕСИЙ НА ЦЕПЯХ В СЕТЕВОЙ ИГРЕ С ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ЭКСТЕРНАЛИЯМИ

Матвеенко Владимир Дмитриевич,

докт. физ.-мат. наук, профессор Высшей школы экономики, г. Санкт-Петербург

Королев Алексей Васильевич,

канд. физ.-мат. наук, доцент Высшей школы экономики, г. Санкт-Петербург

Скоблова Юлия Александровна,

студент Высшей школы экономики, г. Санкт-Петербург

АННОТАЦИЯ

Продолжается начатое в работе (Matveenko, Korolev, 2015) исследование равновесий по Нэшу в сетевой игре с производством и экстерналиями знаний. Доказано, что в полной сети возможны только равновесия с однородным поведением всех агентов. Изучены условия возможности присоединения новой вершины к вершине находящейся в равновесии сети. На основе этих общих результатов получены условия существования равновесия в широко распространенных сетях – диадах и триадах, в зависимости от параметров.

Ключевые слова: сеть; игра на сети; равновесие Нэша; экстерналия.

В последние десятилетия особую роль приобрели сетевые отношения в экономических и социальных системах различного уровня и связанные с ними экстерналии (внешние эффекты) (см., например, [1]). В связи с этим важная задача состоит в исследовании игровых равновесий на сети при различных условиях, относящихся как собственно к структурным свойствам сети, так и к параметрам экономики, расположенной на сети.

В [2] введена модель игрового равновесия в системе производства и экстерналий на сети с двумя периодами времени. Эта модель позволяет объяснить поведение участников в типичных экономических, социальных и политических ситуациях, когда в первом периоде времени участники делают денежные или временные затраты, а во втором периоде получают выигрыш, который зависит не только от собственного поведения, но и от поведения ближайших соседей по сети.

На базе модели [2], в настоящей работе проводится исчерпывающий анализ равновесий для двух широко распространенных простых типов сетей: диад (цепей из 2 вершин) и триад (связных сетей из 3 вершин).

Пусть имеется сеть, т.е. неориентированный граф с n вершинами. В каждой вершине $i = 1, 2, \dots, n$ располагается агент, и экономика описывается простой двухпериодной моделью эндогенного роста [3]. В первом периоде времени у агента имеется начальный запас продукта, равный e , который он может либо потратить (c_1^i), либо инвестировать в знания (k_i). Инвестиции используются для производства блага, потребляемого во втором периоде (c_2^i); производственная функция имеет билинейную форму: $F(k_i, K_i) = B(k_i, K_i)$, где $K_i = k_i + \tilde{K}_i$ – среда агента, $\tilde{K}_i$ – получаемая им чистая экстерналия, т.е. сумма инвестиций его ближайших соседей по сети. Предпочтения описываются квадратичной функцией полезности:

$$U(c_1^i, c_2^i) = c_1^i(e - ac_1^i) + bc_2^i,$$

где $a \in (0, 1/2)$ – коэффициент насыщения, $B, b > 0$ – параметры. Далее используем обозначение $A = Bb$ и полагаем $A > a$. Будем говорить, что, если $A < 2a$, то имеет место случай отсутствия продуктивности, а если $A > 2a$ – случай наличия продуктивности.

Каждый агент максимизирует свою функцию полезности при соответствующих ограничениях. Набор инвестиций $\kappa = (k_1^*, k_2^* \dots k_n^*)$ называется равновесием по Нэшу с экстерналиями, если каждый агент i , принимая среду K_i^* , определяемую набором κ , как экзогенно заданную и максимизируя при этом функцию полезности, выбирает значение k_i^* .

Различаются три вида поведения: агент называется пассивным (П), если $k_i = 0$, активным (А), если $k_i \in (0, e)$, гиперактивным (Г), если $k_i = e$. Важную роль при анализе равновесий играет следующее утверждение работы [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Поведение агента связано с получаемой им чистой экстерналией $\tilde{K}$ следующими условиями. При поведении П: $\tilde{K} \leq e(1-2a)/A$; при поведении Г: $\tilde{K} \geq e(1-A)/A$; при поведении А: $e(1-2a)/A < \tilde{K} < e(1-A)/A$ при отсутствии продуктивности, $e(1-A)/A < \tilde{K} < e(1-2a)/A$ при наличии продуктивности. При поведении А, инвестиции агента равны

$$k = \frac{e(2a-1) + A\tilde{K}}{2a-A}.$$

Рассмотрим присоединение вершины к сети. Будем использовать обозначение $i \rightarrow j$, если вершина i имеет единственную связь, а именно – связь с вершиной j , а вершина j может, помимо связи с i , иметь (или не иметь) другие связи в сети. Имеют место следующие утверждения (приводятся без доказательства).

ЛЕММА 1. Ситуация $П \rightarrow П$ возможна без дополнительных условий.

ЛЕММА 2. Ситуация $П \rightarrow Г$ возможна лишь при условии $A + 2a \leq 1$.

ЛЕММА 3. Ситуация $П \rightarrow А$ возможна только если либо $\tilde{K}_A \leq \frac{2ae(1-2a)}{A^2}, A < 2a$, либо $\tilde{K}_A \geq \frac{2ae(1-2a)}{A^2}, A > 2a$.

ЛЕММА 4. Ситуация $Г \rightarrow П$ возможна лишь при условии $A \geq 1$.

ЛЕММА 5. Ситуация $Г \rightarrow Г$ возможна лишь при условии $A \geq 1/2$.

ЛЕММА 6. Ситуация $Г \rightarrow А$ возможна лишь при $2a < A < \frac{1}{2}$, $\tilde{K}_A > \frac{e(1-A)}{A}$.

ЛЕММА 7. Ситуация $А \rightarrow П$ возможна лишь при условии $A > 1$; при этом $k_a^s = \frac{e(1-2a)}{A-2a}$.

ЛЕММА 8. Ситуация $А \rightarrow Г$ возможна только если либо $1 - 2a < A < \frac{1}{2}$ (тогда $2a > \frac{1}{2}$), либо $\frac{1}{2} < A < 1 - 2a$ (тогда $A > 2a$).

Леммы 1-8 могут быть применены при изучении равновесий в различных сетях, и, в частности, в диадах и триадах. Однако, диады и треугольники проще проанализировать как частные случаи полной сети, пользуясь следующей общей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. В полной сети с n вершинами возможны лишь равновесия, в которых поведение всех агентов однородно: ППП (это равновесие существует всегда), ААА (существует при $A > 1/n$), ГГГ (существует при $A \geq 1/n$).

Доказательство. В полной сети все вершины имеют одинаковую среду; отсюда следует, что инвестиции во всех вершинах одинаковы. Условия существования получаем, пользуясь предложением 1.

Следующие теорема 2 и предложения 2-4 устанавливают условия существования для всевозможных равновесий в цепи из трех вершин.

ТЕОРЕМА 2.

1. Триада ППП возможна при любых условиях.
2. Триады ГПП (ППГ), ПГП, ГПГ невозможны.

3. Триада ГГП (ПГГ) возможна при условии $\frac{1}{2} \leq A \leq 1 - 2a$.
4. Триада ГГГ возможна при условии $A \geq \frac{1}{2}$.
5. Триады ПГА (АГП), ГАП (ПАГ) невозможны.
6. Триады АПП (ППА), ПАП, АПА невозможны.
7. Триада АПГ (ГПА) невозможна.
8. Триада ААП (ПАА) возможна при условии $A > 1/2$ и $A > 2a$
9. Триада АГГ (ГГА) возможна при условии $\frac{1}{2} < A < 1 - 2a$.
10. Триада АГА возможна при выполнении одного из наборов неравенств

$$0 < a \leq \frac{1}{4}, \frac{1}{2} < A \leq \frac{1 - 6a + \sqrt{36a^2 - 4a + 1}}{2}$$

или

$$\frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{2}, \frac{1 - 6a + \sqrt{36a^2 - 4a + 1}}{2} \leq A < \frac{1}{2}.$$

Доказательство.

1. Следует из предложения 1.
2. Условия, указанные в леммах 2 и 4, противоречат друг другу.
3. Следует из лемм 2 и 5.
4. Обозначим вершины $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$. Агент Γ_2 получает экстерналию $\tilde{K} = 2e$. В силу предложения 1, условием гиперактивности является $2e \geq \frac{e(1-A)}{A}$, т.е. $A \geq 1/3$. По лемме 5, условием гиперактивности для Γ_1 и Γ_3 является неравенство $A \geq \frac{1}{2}$.
5. Условия, указанные в леммах 6 и 8, противоречат друг другу.
6. Условия, указанные в леммах 3 и 7, противоречат друг другу.
7. Условия, указанные в леммах 2 и 4, а также в леммах 3 и 7 противоречат друг другу.
8. По теореме 1, диада АА возможна при условии $A > \frac{1}{2}$. При этом $k_2 = \frac{e(1-2a)}{(2A-2a)}$.

Также должно выполняться условие леммы 3; оно дает $A > 2a$.

9. Следует из лемм 5 и 8.
10. Агент А получает экстерналию e . По предложению 1,

$$k_A = \frac{e(2a-1) + Ae}{2a-A}.$$

Условие для Г принимает вид:

$$2 \frac{e(2a-1) + Ae}{2a-A} \geq \frac{e(1-A)}{A}.$$

При наличии продуктивности, по лемме 8,

$$\frac{1}{2} < A < 1 - 2a.$$

Условие для Г сводится к

$$6Aa - 2a \leq A - A^2.$$

Решая систему неравенств, получаем

$$\frac{1}{2} < A \leq \frac{1 - 6a + \sqrt{36a^2 - 4a + 1}}{2}.$$

Аналогично, при отсутствии продуктивности,

$$1 - 2a < A < \frac{1}{2}, 6Aa - 2a \geq A - A^2.$$

Решая систему неравенств, получаем

$$\frac{1 - 6a + \sqrt{36a^2 - 4a + 1}}{2} \leq A < \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует утверждение пункта 10).

Следующие результаты, относящиеся к триадам ГАГ, ААГ (ГАА) и ААА, не вытекают из лемм 1-8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Триада ГАГ невозможна.*

Доказательство: Если бы равновесие ГАГ существовало, то при добавлении новой связи, достраивающей цепь до треугольника, равновесие сохранилось бы. Но в треугольнике, по теореме 1, не может быть равновесия ГАГ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Триада $A_1 - A_2 - \Gamma$ (ГАА) невозможна.*

Доказательство: Заметим, что при одинаковой получаемой экстерналии, агент A_1 активен, а Γ гиперактивен. При отсутствии продуктивности, это противоречит возрастанию инвестиций по размеру экстерналии.

При наличии продуктивности, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{e(2a-1) + Ak_2}{2a-A} \\ k_2 = \frac{e(2a-1) + A(k_1 + e)}{2a-A} \end{cases}$$

Следовательно, $k_2 = k_1 + \frac{Ae}{2a}$, и значит $k_2 > k_1$, что, при наличии продуктивности, противоречит убыванию по экстерналии (у A_2 экстерналия больше, чем у A_1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Триада $A_1 - A_2 - A_1$ возможна при условии*

$$A > \frac{1 - 6a + \sqrt{36a^2 - 4a + 1}}{2}$$

Доказательство. Согласно предложению 1, выполняется система двух уравнений

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{e(2a-1) + Ak_2}{2a-A}, \\ k_2 &= \frac{e(2a-1) + 2Ak_1}{2a-A}. \end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{2ae(2a-1)}{4a^2 - 4Aa - A^2}, \\ k_2 &= \frac{e(2a-1)(2a+A)}{4a^2 - 4Aa - A^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, $k_2 > k_1$, поэтому проверять надо условие $k_2 < e$, и из него будет следовать автоматически $k_1 < e$. Наоборот, условие >0 нужно проверить для k_1 , тогда для k_2 оно будет следовать автоматически.

Проверяем, что

$$0 < k_1 = \frac{2ae(2a-1)}{4a^2 - 4Aa - A^2}.$$

Легко убедиться, что как числитель, так и знаменатель всегда отрицательны, значит всегда $k_1 > 0$ и, следовательно, $k_2 > 0$.

Проверяем, что

$$k_2 = \frac{e(2a-1)(2a+A)}{(4a^2 - 4Aa - A^2)} < e.$$

Приходим к неравенству

$$A^2 + A(6a - 1) - 2a > 0,$$

решение которого имеет вид

$$A > \frac{1 - 6a + \sqrt{36a^2 - 4a + 1}}{2}.$$

Список литературы

1. Jackson M.O. An overview of social networks and economic applications // Handb. Soc. Econ. Citeser. – 2010. – Vol. 1. – P. 511-585.
2. Matveenko V.D., Korolev A.V. Network game with production and knowledge externalities // Contributions to Game Theory and Management. – 2015. – Vol. 8. – P. 199-222.
3. Romer P.M. Increasing returns and long-run growth // Journal of Political Economy. – 1986. – Vol. 94. – P. 1002-1037.

УДК 331.5

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЫНКА ТРУДА В УСЛОВИЯХ ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ САМАРСКОГО РЕГИОНА

Афанасьева Елена Андреевна,

студент ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», г. Самара

Еремичева Оксана Юрьевна,

*доцент, канд.экон.наук, доцент кафедры «Национальная и мировая экономика»,
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», г. Самара,*

Косякова Инесса Вячеславовна,

*профессор, докт.экон.наук, зав.кафедрой «Национальная и мировая экономика»,
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», г. Самара*

АННОТАЦИЯ

Основываясь на официальные данные территориального органа федеральной службы государственной статистики по Самарской области, проведен анализ динамики ключевых показателей рынка труда за десятилетний период, построена эконометрическая модель рынка труда и определен ряд нестандартных ситуаций, характеризующих трудовую сферу региона.

Ключевые слова: рынок труда; занятость населения; регион; инновационная экономика; экономически активное население; корреляционно-регрессионный анализ; модель; трудоспособное население.

Рынок труда – важная и несомненно многогранная сфера экономической, социальной и политической жизни общества. Особенности развития рынка труда отражаются в значимых тенденциях движения основных количественных и качественных структурных показателей занятости, движения рабочей силы, масштабы безработицы. Кроме того, рынок труда это один из показателей национального благополучия и эффективности социально-экономических преобразований. Складывающаяся многоукладная экономика со значительной долей инновационных перестроек предъявляет новые требования к качественной стороне рабочей силы, ее профессиональному составу и уровню подготовки, обостряя конкурентные преимущества между работниками.