

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию
Московский государственный институт электроники и математики
(технический университет)**

**Кафедра алгебры
и математической логики**

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

**Методические указания
к домашней контрольной работе
по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»**

Часть 2

**Москва
2007**

Составители: канд. физ.-мат. наук И.К. Бусяцкая;
канд. физ.-мат. наук К.К. Андреев

УДК 512.8

Линейные операторы: Метод. указания к домашней контрольной работе по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Часть 2 / Моск. гос. ин-т электроники и математики; Сост.: И.К. Бусяцкая, К.К. Андреев. М., 2006. – 23 с.

На конкретных примерах излагаются способы решения задач домашней контрольной работы по теме «Линейные операторы». Приводится ряд дополнительных сведений из теории линейных операторов, некоторые из которых доказываются, а некоторые предоставляются для доказательства студентам.

Для студентов групп М-21 – 26, ЭМ-21 первого курса ФПМ и групп МЭ-21, 22 первого курса ФЭМ.

ISBN

Условия задач

Задача № 2

Общие условия ко всем вариантам

Дана матрица A , которая является матрицей оператора φ в стандартном базисе пространства $\mathbf{R}^3$.

1. Найти собственные числа и собственные векторы оператора φ .
2. Убедившись в существовании базиса пространства $\mathbf{R}^3$, состоящего из собственных векторов оператора φ , записать матрицу оператора φ в таком базисе.
3. Указать матрицу перехода к новому базису из собственных векторов и проверить справедливость формулы, связывающей матрицы оператора в разных базисах.

Условия вариантов (матрица A)

$$1. \begin{pmatrix} -11 & 0 & 12 \\ -3 & 1 & 3 \\ -9 & 0 & 10 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{pmatrix} -6 & -2 & 6 \\ -2 & -3 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad 3. \begin{pmatrix} -13 & -6 & 18 \\ -6 & -4 & 9 \\ -12 & -6 & 17 \end{pmatrix}. \quad 4. \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} -14 & -6 & 18 \\ -6 & -5 & 9 \\ -12 & -6 & 16 \end{pmatrix}. \quad 6. \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -3 & -5 & 6 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}. \quad 7. \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 12 & 1 & 12 \\ -9 & 0 & -8 \end{pmatrix}. \quad 8. \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$9. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}. \quad 10. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 11. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 12 \\ -3 & -3 & -8 \end{pmatrix}. \quad 12. \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. \begin{pmatrix} 13 & 0 & -12 \\ -6 & 1 & 6 \\ 15 & 0 & -14 \end{pmatrix}. \quad 14. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}. \quad 15. \begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & -7 \end{pmatrix}. \quad 16. \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$17. \begin{pmatrix} 7 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & -8 \end{pmatrix}. \quad 18. \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}. \quad 19. \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -15 & 1 & 15 \\ 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}. \quad 20. \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{21.} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -6 & -7 & -12 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{22.} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{23.} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -6 & -8 & -12 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{24.} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 9 & -8 & -27 \\ -3 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{25.} \begin{pmatrix} -8 & -9 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{26.} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{27.} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{28.} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{29.} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{30.} \begin{pmatrix} 7 & 12 & 6 \\ -6 & -11 & -6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

§7. Инвариантные подпространства. Собственные векторы

Пусть φ – линейный оператор в пространстве V ; $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ – некоторый фиксированный базис этого пространства. Тогда, как мы видели выше (см. § 2 первой части, стр. 10–11), $\varphi(\mathbf{x}) = A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, где A_φ –

матрица оператора φ в данном базисе, а $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец из координат вектора $\mathbf{x}$ в том же базисе.

Определение. Линейное подпространство $L \subseteq V$ называется *инвариантным* подпространством оператора φ , если из $\mathbf{x} \in L$ следует $\varphi(\mathbf{x}) \in L$.

Примеры.

1. $V = \mathbf{R}^3$, φ – нулевой оператор, L – линейное подпространство V . Если $\mathbf{x} \in L$, то $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in L$. Следовательно, в этом случае любое линейное подпространство инвариантно.

2. $V = \mathbf{R}^2$, $\varphi = \text{id}$ – тождественный оператор. Здесь также любое линейное подпространство инвариантно.

3. $V = \mathbf{R}^3$, φ – ортогональное проектирование на плоскость OXY (см. рис. 2 в первой части). Опишем инвариантные подпространства: всё пространство; нулевое подпространство; плоскость OXY ; прямые, лежащие в плоскости OXY и проходящие через начало координат; ось OZ ; плоскости, проходящие через ось OZ .

4. $V = \mathbf{R}^2$, φ – оператор поворота на угол α (см. рис. 1 в первой части). Если $\alpha \neq k\pi$, то нетривиальных (т.е. отличных от V и от $\{\mathbf{0}\}$) инвариантных подпространств нет. Если $\alpha = k\pi$, то все линейные подпространства инвариантны.

5. Пусть φ – произвольный линейный оператор в V , $L_1 = \text{Ker } \varphi$, $L_2 = \text{Im } \varphi$. Тогда линейные подпространства L_1 и L_2 инвариантны (это вытекает из их определения – докажите!).

6. Пусть V – линейное пространство, в котором действует линейный оператор φ , L_1 и L_2 – инвариантные подпространства оператора φ . Пусть также $V = L_1 \oplus L_2$, т.е. для любого вектора $\mathbf{v}$ из V имеем: $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in L_1$,

$y \in L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Выберем базис в V : $e_1, \dots, e_k$ – базис L_1 , $e_{k+1}, \dots, e_n$ – базис L_2 ; тогда $e_1, \dots, e_n$ будет базисом V . Найдем в этом базисе матрицу A_φ нашего оператора φ . Так как L_1 и L_2 инвариантны, то $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \in L_1$, а $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \in L_2$, и, следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= a_1^1 e_1 + \dots + a_k^1 e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \dots + 0 \cdot e_n; \\ \varphi(e_2) &= a_1^2 e_1 + \dots + a_k^2 e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \dots + 0 \cdot e_n; \\ &\dots \\ \varphi(e_k) &= a_1^k e_1 + \dots + a_k^k e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \dots + 0 \cdot e_n; \\ \varphi(e_{k+1}) &= 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_k + a_{k+1}^{k+1} e_{k+1} + \dots + a_n^{k+1} e_n; \\ &\dots \\ \varphi(e_n) &= 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_k + a_{k+1}^n e_{k+1} + \dots + a_n^n e_n.\end{aligned}$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_k^1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^k & \dots & a_k^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1}^{k+1} & \dots & a_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1}^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\varphi^1 & 0 \\ 0 & A_\varphi^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь A_φ^1 – матрица оператора φ , действующего в пространстве L_1 ; A_φ^2 – матрица оператора φ , действующего в пространстве L_2 .

Аналогично, если $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$ и $L_1, L_2, \dots, L_k$ – инвариантные подпространства оператора φ , то

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} A_\varphi^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_\varphi^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_\varphi^n \end{pmatrix}.$$

Здесь каждая матрица A_φ^i есть матрица оператора φ , действующего в пространстве L_i .

Рассмотрим одномерное линейное подпространство L , инвариантное относительно оператора φ , и его базисный вектор e , $L = \langle e \rangle$. Так как $\varphi(e) \in L$, то $\varphi(e) = \lambda e$.

Пусть $x \in L$ и, следовательно, $x = \alpha e$ для некоторого скаляра (числа из основного поля) α ; тогда

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha e) = \alpha \varphi(e) = \lambda \cdot \alpha e = \lambda x.$$

Значит, все векторы из L умножаются на одно и то же число λ , и оператор φ действует в L как гомотетия с коэффициентом λ .

Если, в частности, все $\langle e_k \rangle$ (линейные оболочки базисных векторов пространства V) суть инвариантные подпространства оператора φ , то, т.к. $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$, матрица A_φ диагональна:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Определение. Ненулевой вектор x называется *собственным вектором* оператора φ , если $\varphi(x) = \lambda x$; число λ (для данного вектора x оно определено однозначно – докажите!) называется *собственным значением* оператора φ , соответствующим собственному вектору x .

Если x – собственный вектор оператора φ , то $\langle x \rangle$ – инвариантное подпространство и оператор в нем действует как умножение на число λ – собственное значение.

Теорема 1. Множество всех собственных векторов оператора φ , соответствующих одному собственному значению λ , если присоединить к нему нулевой вектор 0 , является линейным подпространством, которое называется *собственным подпространством* оператора φ и обозначается V_{λ} .

Доказательство. V_{λ} содержит нулевой вектор по определению и тем самым непусто. Пусть $x, y \in V_{\lambda}$. Рассмотрим вектор $\alpha x + \beta y$ и покажем, что он является собственным вектором оператора φ с тем же самым собственным значением λ (либо равен 0).

Действительно, $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$, т.е. вектор $\alpha x + \beta y \in V_{\lambda}$.

Теорема 2. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство проведем методом математической индукции. Пусть k – число собственных векторов. При $k = 1$ $x_1 \neq 0$. Следовательно, x_1 – линейно независимая система из одного вектора. Пусть для k векторов утверждение верно. Выведем из этого, что теорема верна для $k + 1$ вектора. Пусть даны собственные векторы $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ с различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ и пусть выполняется соотношение

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0. \quad (1)$$

Требуется доказать, что все $\alpha_i = 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}) &= 0; \\ \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2) + \dots + \alpha_k \varphi(x_k) + \alpha_{k+1} \varphi(x_{k+1}) &= 0; \\ \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Умножим обе части равенства (1) на λ_{k+1} :

$$\alpha_1 \lambda_{k+1} x_1 + \alpha_2 \lambda_{k+1} x_2 + \dots + \alpha_k \lambda_{k+1} x_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0. \quad (3)$$

Вычитаем из равенства (3) равенство (2):

$$\alpha_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) x_1 + \alpha_2 (\lambda_{k+1} - \lambda_2) x_2 + \dots + \alpha_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) x_k = 0.$$

Так как $x_1, x_2, \dots, x_k$ – система k собственных векторов с различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, то по предположению индукции все коэффициенты в последнем равенстве равны нулю, т.е. при $i = 1, 2, \dots, k$ выполняются соотношения $\alpha_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0$, но тогда $\alpha_i = 0$, ибо $\lambda_{k+1} \neq \lambda_i$.

Подставив эти $\alpha_i = 0$ в равенство (1), получаем $\alpha_{k+1}x_{k+1} = 0$. Так как x_{k+1} – собственный вектор и, следовательно, ненулевой, то $\alpha_{k+1} = 0$. Теорема доказана.

§8. Метод нахождения собственных векторов линейного оператора

Рассмотрим базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V и запишем вектор x и матрицу оператора φ в этом базисе:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, A_\varphi = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Так как действие оператора φ на вектор x описывается с помощью матрицы A_φ следующим образом:

$$\varphi(x) = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то для собственного вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ оператора φ , соответствующего

собственному значению λ , имеем:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Умножая матрицу A_φ на вектор x , получаем:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \dots + a_1^n x_n = \lambda x_1; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 x_1 + \dots + a_n^n x_n = \lambda x_n. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) – это система линейных уравнений для нахождения собственных векторов оператора φ , соответствующих собственному значению λ . После приведения подобных членов получаем однородную систему из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} (a_1^1 - \lambda)x_1 + \dots + a_1^n x_n = 0; \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_n^1 x_1 + \dots + (a_n^n - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Матрица этой системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 - \lambda & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = A_\varphi - \lambda E.$$

Элементы этой матрицы зависят от λ . Так как по определению собственный вектор $x \neq 0$, то нас интересуют ненулевые решения системы (3).

Если $\det (A_\varphi - \lambda E) \neq 0$, то система (3) по теореме Крамера имеет единственное решение – нулевой вектор. Если же $\det (A_\varphi - \lambda E) = 0$, то $r = \text{rang } (A_\varphi - \lambda E) < n$ и размерность подпространства решений системы (3) равна $n - r > 0$, т.е. имеются ненулевые решения системы (3) – собственные векторы, соответствующие собственному значению λ . Линейное подпространство решений системы (3) оказывается в этом случае собственным подпространством V_λ линейного оператора φ . Оно состоит из собственных векторов, соответствующих собственному значению λ , дополненных вектором 0 , и, следовательно, является инвариантным подпространством оператора φ .

Рассмотрим теперь определитель матрицы $A_\varphi - \lambda E$. Это число, которое зависит от λ , т.е. $\det (A_\varphi - \lambda E)$ является функцией от λ . Используя определение детерминанта матрицы, легко понять, что $\det (A_\varphi - \lambda E)$ является многочленом степени n .

Действительно, при $n = 1$ $\det (a_1^1 - \lambda)$ – многочлен первой степени. Используя формулу

$$\det (A_\varphi - \lambda E) = (a_1^1 - \lambda)M_1^1 - a_1^2 M_1^2 + \dots + (-1)^{n+1} a_1^n M_1^n$$

и рассуждая по индукции, получаем:

$$P_{A_\varphi}(\lambda) = \det (A_\varphi - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + \dots + \det A_\varphi.$$

(Свободный член многочлена $P_{A_\varphi}(\lambda)$ равен $P_{A_\varphi}(0) = \det A_\varphi$.) Многочлен $P_{A_\varphi}(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A_φ . Так как собственные векторы существуют только для тех λ , для которых $\det (A_\varphi - \lambda E) = 0$, то собственные значения линейного оператора являются теми корнями уравнения $P_{A_\varphi}(\lambda) = 0$, называемого *характеристическим уравнением* матрицы A_φ , которые принадлежат полю P ($\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ – все комплексные корни характеристического уравнения (в случае поля $\mathbf{R}$ мы рассматриваем комплексные корни!), $k_1, k_2, \dots, k_s$ – их кратности. Множество $S = \{\lambda_1^{\mathbf{k}_1}, \lambda_2^{\mathbf{k}_2}, \dots, \lambda_s^{\mathbf{k}_s}\}$ называется *спектром* матрицы A_φ , т.е. спектр матрицы A_φ – множество корней

характеристического уравнения с указанием их кратностей. Заметим, что $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

Таким образом, чтобы найти собственные векторы оператора φ , нужно записать характеристический многочлен его матрицы и найти его корни. Если оператор φ действует в линейном пространстве V над полем $\mathbf{C}$, то все корни будут собственными значениями оператора φ . Соответствующие собственные векторы находятся из системы (3). Таким образом, если φ действует в пространстве над полем $\mathbf{C}$, то у него *всегда* есть собственные векторы.

Если оператор φ действует в линейном пространстве над полем $\mathbf{R}$, то только вещественным корням характеристического многочлена соответствуют собственные векторы оператора. Следовательно, оператор, действующий в линейном пространстве над полем $\mathbf{R}$, может вообще не иметь собственных векторов.

Примеры.

1. φ – оператор поворота на угол α в $\mathbf{R}^2$, $\alpha \neq k\pi$;

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} - \text{матрица } \varphi \text{ в базисе } \mathbf{i}, \mathbf{j};$$

$$P_{A_\varphi}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos \alpha - \lambda)^2 + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 2\lambda \cos \alpha + \lambda^2 + \sin^2 \alpha = \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha + 1.$$

$D = 4\cos^2 \alpha - 4 = 4(\cos^2 \alpha - 1) < 0$, и у характеристического уравнения вещественных корней нет, а, следовательно, нет и собственных векторов.

Отсутствие собственных векторов у оператора поворота вытекает также и из геометрического смысла собственного вектора. Вектор $\mathbf{x}$ собственный, если его образ $\varphi(\mathbf{x})$ ему коллинеарен. При повороте на угол $\alpha \neq k\pi$ $\varphi(\mathbf{x})$ не коллинеарен $\mathbf{x}$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

2. φ – ортогональное проектирование на плоскость OXY в пространстве $\mathbf{R}^3$.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{матрица оператора } \varphi \text{ в базисе } \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k};$$

$$P_{A_\varphi}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2;$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ – корни характеристического уравнения $-\lambda(1-\lambda)^2 = 0$; $S = \{0^{[1]}, 1^{[2]}\}$ – спектр матрицы A_φ . Все корни вещественны, и для каждого можно найти собственное подпространство. Пусть $\lambda_1 = 0$. Рассмотрим

систему (3) с этим λ . Матрица этой системы совпадает с $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и

имеет главный ступенчатый вид. Решения соответствующей системы $\begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = 0 \end{cases}$ – векторы вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{k},$$

то есть собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$, – ненулевые векторы, коллинеарные вектору $\mathbf{k}$. Собственное подпространство V_0 – ось OZ ; $\dim V_0 = 1$.

Для второго собственного значения $\lambda_2 = 1$ собственные векторы также находим из системы (3), матрица которой

$$A_\varphi - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т.е. система (3) имеет вид: $x_3 = 0$.

Отсутствующие неизвестные x_1, x_2 – свободные, а общее решение записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}.$$

Собственное подпространство V_1 – плоскость OXY ; $\dim V_1 = 2$.

Пусть V – n -мерное линейное пространство над полем P ($\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$), φ – линейный оператор и характеристический многочлен $P_{A_\varphi}(\lambda)$ имеет n различных корней в поле P ; тогда спектр матрицы A_φ имеет вид:

$$S = \{\lambda_1 \mathbf{E}, \lambda_2 \mathbf{E}, \dots, \lambda_n \mathbf{E}\}.$$

Пусть $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_n}$ – соответствующие собственные подпространства оператора φ и $\mathbf{e}_1 \in V_{\lambda_1}, \mathbf{e}_2 \in V_{\lambda_2}, \dots, \mathbf{e}_n \in V_{\lambda_n}$ – собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям; тогда по теореме 2 (§7) $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис пространства V , а все подпространства V_{λ_i} одномерны. Запишем матрицу оператора φ в этом новом базисе.

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{e}_n;$$

$$\varphi(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2 = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{e}_n;$$

...

$$\varphi(\mathbf{e}_n) = \lambda_n \mathbf{e}_n = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n.$$

Получаем:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A_φ диагональна, и на диагонали стоят соответствующие собственные значения. Вообще, если в пространстве V удастся найти базис из собственных векторов, то матрица оператора в этом базисе будет диагональной, а на диагонали будут стоять соответствующие собственные значения оператора φ .

§9. Канонический вид линейного оператора

Рассмотрим линейный оператор φ в пространстве V . Согласно определению (§2), матрица A_φ оператора зависит от выбора базиса в линейном пространстве. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ – различные базисы пространства V . Векторы $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$, как и все остальные векторы пространства V , имеют свои координаты в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и записываются как линейные комбинации базисных векторов:

$$\mathbf{f}_1 = p_1^1 \mathbf{e}_1 + p_2^1 \mathbf{e}_2 + \dots + p_n^1 \mathbf{e}_n;$$

$$\mathbf{f}_2 = p_1^2 \mathbf{e}_1 + p_2^2 \mathbf{e}_2 + \dots + p_n^2 \mathbf{e}_n;$$

...

$$\mathbf{f}_n = p_1^n \mathbf{e}_1 + p_2^n \mathbf{e}_2 + \dots + p_n^n \mathbf{e}_n.$$

Матрица $P = \begin{pmatrix} p_1^1 & \dots & p_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ p_n^1 & \dots & p_n^n \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса

$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$. Это матрица, в столбцах которой стоят координаты векторов второго базиса в первом базисе. Столбцы матрицы P – векторы $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$, которые являются линейно независимыми, т.к. образуют базис. Следовательно, $\text{rang } P = n$, $\det P \neq 0$ и существует обратная матрица P^{-1} .

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x}$ пространства V и разложим его по базисам $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i' \mathbf{f}_i.$$

$P = (p_i^j)$ – матрица перехода от первого базиса ко второму, и

$$\mathbf{f}_i = \sum_{k=1}^n p_k^i \mathbf{e}_k;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n x'_i \sum_{k=1}^n p_k^i \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x'_i p_k^i \mathbf{e}_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x'_i p_k^i \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x'_i p_k^i \right) \mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

Так как координаты вектора в данном базисе определены однозначно, то

$$x_1 = p_1^1 x'_1 + p_1^2 x'_2 + \dots + p_1^n x'_n;$$

$$x_2 = p_2^1 x'_1 + p_2^2 x'_2 + \dots + p_2^n x'_n;$$

...

$$x_n = p_n^1 x'_1 + p_n^2 x'_2 + \dots + p_n^n x'_n.$$

В матричном виде эти соотношения записываются как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) называются *формулами преобразования координат вектора* при переходе от одного базиса к другому.

Рассмотрим линейный оператор φ , и пусть A_φ и A'_φ – матрицы этого оператора в первом и во втором базисах. Пусть $\mathbf{x}$ – произвольный вектор пространства V и $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$; тогда в первом и во втором базисах можно записать:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix} = A'_\varphi \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (4), первое из равенств запишем в виде:

$$P \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix} = A_\varphi P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

или, так как матрица P обратима, в виде:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix} = P^{-1} A_\varphi P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$P^{-1}A_{\varphi}P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = A'_{\varphi} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$P^{-1}A_{\varphi}P = A'_{\varphi}. \quad (6)$$

Определение. Две матрицы A и B называются *подобными* ($A \sim B$), если существует невырожденная матрица P такая, что $B = P^{-1}AP$.

Отношение подобия обладает следующими свойствами.

1. $A \sim A$, т.к. $A = EAE$ ($E^{-1} = E$).
2. Если $A \sim B$, то $B \sim A$. Действительно, из $B = P^{-1}AP$ следует, что $A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$.
3. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$. Действительно, $B = P_1^{-1}AP_1$, $C = P_2^{-1}BP_2$; следовательно, $C = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = (P_1P_2)^{-1}AP_1P_2$. Заметим, что $(P_1P_2)^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}$, т.к. $P_1P_2 \cdot P_2^{-1}P_1^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}P_1P_2 = E$.

Из этих свойств следует, что подобие является отношением эквивалентности и множество всех квадратных матриц порядка n разбивается на непересекающиеся классы подобных матриц. Среди этих классов есть такие, которые состоят только из одной матрицы. Например, классы матриц, подобных матрице E или матрице 0 . (Найдите все такие классы!)

Из формулы (6) следует, что матрицы линейного оператора φ в различных базисах подобны. Верно и обратное. Пусть $B = P^{-1}AP$, т.е. $A \sim B$. Рассмотрим оператор φ в пространстве $\mathbf{R}^n$, действующий следующим образом:

$$\varphi: \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

т.е. оператор умножения на матрицу A . Матрица A_{φ} этого оператора в стандартном базисе совпадает с матрицей A . (См. §2.) Рассмотрим столбцы матрицы P . Это n векторов, записанных в координатном виде в стандартном базисе, причем эти n векторов линейно независимы, т.к. существует P^{-1} . Рассмотрим новый базис $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$, составленный из столбцов матрицы P . Матрица перехода от стандартного базиса к базису $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ совпадает с матрицей P , и, следовательно, по формуле (6) $A'_{\varphi} = P^{-1}A_{\varphi}P = P^{-1}AP = B$, то есть подобные матрицы суть матрицы одного оператора в различных базисах. Итак, имеется взаимно однозначное соответствие между линейными операторами, действующими в пространстве V ($\dim V = n$), и классами подобных матриц порядка n .

Теорема. Характеристические многочлены подобных матриц равны.

Доказательство. Обозначим характеристические многочлены: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda E)$; нам дано, что $A \sim B$, т.е. $B = C^{-1}AC$. Имеем: $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda E)C) = \det(C^{-1}(A - \lambda E)C) = \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det C = \det(A - \lambda E) = P_A(\lambda)$, что и требовалось доказать.

Следствие. Спектры подобных матриц совпадают.

Из этой теоремы следует, что можно ввести понятия характеристического многочлена $P_\varphi(\lambda)$, характеристического уравнения и спектра S_φ оператора φ , вычисляя их по матрице A_φ , взятой в произвольном базисе пространства V .

Определение. Оператор φ называется *диагонализируемым*, если существует базис, в котором его матрица диагональна.

Если A_φ – матрица такого оператора в произвольном базисе, то она подобна матрице

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$A_\varphi \sim D$.

Как же по матрице A_φ узнать, диагонализируем ли оператор φ ? Мы уже знаем, что если $S_\varphi = \{\lambda_1 \Gamma, \lambda_2 \Gamma, \dots, \lambda_n \Gamma\}$, то оператор диагонализируем. Если оператор диагонализируем, а характеристические многочлены подобных матриц равны, то

$$P_\varphi(\lambda) = P_D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

Мы видим, что характеристический многочлен диагонализируемого оператора разлагается на линейные множители в рассматриваемом поле (в последнем выражении возможны повторения сомножителей). Для поля $\mathbf{C}$ это условие, как известно, выполняется всегда. Для поля $\mathbf{R}$ оно означает, что все корни характеристического многочлена являются действительными числами, причем равными тем самым λ_i , которые стоят на диагонали матрицы D .

Заметим, однако, что условие принадлежности всех корней характеристического уравнения рассматриваемому полю еще не является достаточным для диагонализируемости оператора. Рассмотрим, например, матрицу порядка n :

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix},$$

называемую *жордановой клеткой*, и оператор φ умножения на эту матрицу в пространстве $\mathbf{R}^n$.

$$P_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^n,$$

α – корень характеристического уравнения кратности n , и спектр оператора φ имеет вид $S_\varphi = \{\alpha^{[n]}\}$. Если бы матрица $J_n(\alpha)$ была подобна диагональной матрице D , то

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix},$$

так как спектры подобных матриц совпадают, и, следовательно, оператор φ был бы гомотетией с коэффициентом α , что неверно, так как умножение на

матрицу $J_n(\alpha)$ переводит вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ в вектор

$$\mathbf{y} = J_n(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha x_2 + x_3 \\ \dots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Теорема. Оператор φ диагоналируем тогда и только тогда, когда выполняются два условия.

1. Характеристический многочлен разлагается на линейные множители в рассматриваемом поле.

2. Размерность каждого собственного подпространства равна кратности соответствующего корня характеристического многочлена.

Эту теорему мы оставляем без доказательства.

Отметим, что если матрица оператора φ в некотором базисе диагональна ($A_\varphi = D$), то этот базис состоит из собственных векторов оператора φ . Действительно, пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ – базис, в котором $A_\varphi = D$;

тогда $\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ (1 на i -м месте) и

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \mathbf{e}_i.$$

Следовательно, у диагонализируемого оператора должен быть базис из собственных векторов.

Рассмотрим снова оператор φ умножения на жорданову клетку и найдем собственные векторы оператора φ . Единственное собственное значение оператора φ – число α , и система (3) §8 в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} x_2 = 0; \\ \dots \\ x_n = 0, \end{cases}$$

x_1 – свободное неизвестное. Пространство $V_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim V_\alpha = 1$, и

собственных векторов не хватает, чтобы составить из них базис пространства $\mathbf{R}^n$. Второе условие теоремы о диагонализируемости оператора не выполняется, т. к. кратность корня α равна n , а $\dim V_\alpha = 1$ (мы предполагаем, что $n > 1$).

§10. Примеры

Рассмотрим конкретные примеры на применение изложенных методов.

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, и известно, что она в стандартном

базисе является матрицей некоторого линейного оператора φ , действующего в пространстве $\mathbf{R}^3$: $A = A_\varphi$. Найдём собственные числа и собственные векторы оператора φ .

Составляем матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

и вычисляем её определитель, т.е. характеристический многочлен оператора φ :

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -3-\lambda \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \\ + (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 2(2 - 3 - \lambda) - 2(4 + 2\lambda - 2) + \\ + (1 - \lambda)(6 + 5\lambda + \lambda^2 - 2) = 2(-1 - \lambda) - 2(2\lambda + 2) + (1 - \lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 4) = -2 - \\ - 2\lambda - 4\lambda - 4 + \lambda^2 + 5\lambda + 4 - \lambda^3 - 5\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2. \text{ (Мы} \\ \text{разложили определитель по третьему столбцу.)}$$

Собственные числа нашего оператора суть корни этого многочлена, Нам, стало быть, надо решить кубическое уравнение:

$$-\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0.$$

В надежде отыскать целый корень этого уравнения испытаем делители свободного члена. Немедленно обнаруживаем, что, например, число -1 является корнем. Для нахождения остальных корней делим наш многочлен «уголком» на $\lambda + 1$. Получаем в частном $-\lambda^2 - 3\lambda - 2$, а это уже квадратный трехчлен, и мы легко находим его корни: -1 и -2 . Имеем разложение: $-\lambda^2 - 3\lambda - 2 = -(\lambda + 1)(\lambda + 2)$, а характеристический многочлен разлагается так:

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = -(\lambda + 1)^2(\lambda + 2),$$

так что у нас два собственных значения, одно из которых двукратно, и спектр таков: $S = \{(-1)^{[2]}, (-2)^{[1]}\}$.

Теперь для каждого собственного значения надо найти соответствующие собственные векторы. Для $\lambda_1 = -1$ вычисляем:

$$A - \lambda_1 E = A + E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственных векторов мы должны решить однородную систему линейных уравнений с найденной матрицей. Для этого приводим матрицу к главному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (1 \ 2 \ -2).$$

Такой матрице соответствует система из одного уравнения:

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

Неизвестные x_2 и x_3 являются свободными, следовательно, подпространство решений двумерно. Находим его базис:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно множество всех собственных векторов с собственным значением -1 можно описать в виде следующей формулы:

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

А теперь всю эту работу надо проделать заново с собственным значением -2 . Вычисляем:

$$A - \lambda_2 E = A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и приводим матрицу к главному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система состоит из двух уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0; \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Теперь свободное неизвестное одно (x_3), и подпространство решений одномерно. Находим его базис:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Множество всех собственных векторов с собственным значением -2 можно описать в виде формулы:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0.$$

Мы видим, что у нас выполняются все условия теоремы из §9 (стр. 14), так что должен существовать базис из собственных векторов. Для

нахождения такого базиса достаточно объединить найденные нами базисы в подпространства решений двух однородных систем. Матрица перехода к такому базису есть матрица, столбцы которой суть найденные базисные векторы:

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица нашего линейного оператора в этом новом базисе будет диагональной:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Нам осталось только проверить выполнение формулы (6) на стр. 13. Вместо этой формулы удобнее, однако, проверять эквивалентную ей формулу:

$$AT = TA'.$$

Вычисляя обе части этой формулы, имеем:

$$AT = TA' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, которая является матрицей

линейного оператора φ в пространстве $\mathbf{R}^3$: $A = A_\varphi$. Требуется найти собственные числа и собственные векторы оператора φ .

Составляем матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

и вычисляем ее определитель:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1). \text{ (Мы разложили}$$

определитель по третьему столбцу.)

У нас два собственных значения, одно из которых двукратно, и спектр таков: $S = \{1^{[1]}, 2^{[2]}\}$.

Теперь для каждого собственного значения ищем соответствующие собственные векторы. Для $\lambda_1 = 1$ вычисляем:

$$A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приводим эту матрицу к главному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система состоит из двух уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0; \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

У нас одно свободное неизвестное (x_3), и подпространство решений одномерно. Находим его базис:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Множество всех собственных векторов с собственным значением 1 можно описать в виде формулы:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0.$$

Для $\lambda_2 = 2$:

$$A - \lambda_2 E = A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приводим матрицу к главному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такой матрице соответствует система из одного уравнения:

$$2x_1 - x_2 = 0.$$

Базис подпространства решений:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь также выполняются условия теоремы из §9, так что должен существовать базис из собственных векторов. Матрица перехода к такому базису:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица нашего линейного оператора в этом новом базисе будет диагональной:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение формулы: $AT = TA'$. Имеем:

$$AT = TA' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Учебное издание

Линейные операторы. Часть 2

Составители: БУСЯЦКАЯ Ирина Константиновна
АНДРЕЕВ Кирилл Кириллович

Редактор
Технический редактор

Подписано в печать

Бумага

Изд. № . Тираж 200 экз.

Усл. печ. л.

Заказ

Формат 60×84/16.

Уч.-изд. л.

Бесплатно.

Московский государственный институт электроники и математики.
109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., 3/12.

Отдел оперативной полиграфии Московского государственного
института электроники и математики.
113054, Москва, ул. М.Пионерская, 12.