ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2010, № 1, с. 16–23

## УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 681.511.4

# КОНЦЕПЦИЯ ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

**© 2010 г. В. Н. Афанасьев**

*Москва, МИЭМ (технический ун-т)*

Поступила в редакцию 07.08.09 г.

Достаточно много инженерных задач, задач экологии, медицины, социальных наук характеризуются наличием факторов, вносящих неопределенность в соответствующие системы управления. Дополнительные трудности при построении управляющих воздействий возникают в случае, когда объекты описываются нелинейными эволюционными уравнениями высокого порядка. Важное подмножество таких объектов образуют объекты с интервальной параметрической неопределенностью с заданной целью управления и заданным временем окончания переходного процесса. Одним из возможных путей синтеза управляющих воздействий для подобных объектов является применение концепции гарантированного управления. Предлагается метод синтеза управления для одного класса нелинейных неопределенных объектов с использованием их робастных моделей, имеющих линейную структуру, и параметров, зависящих от состояния.

**Введение.** Сложность большого количества современных систем управления зачастую не позволяет получить заранее полное описание процессов, протекающих внутри системы, и ее взаимодействия со средой. Достаточно часто математическая модель системы управления учитывает лишь допустимые области изменения параметров управляемой системы и характеристик ее отдельных элементов без конкретизации самих этих параметров и характеристик. Указанные области могут определяться, например, интервальными ограничениями, соответствующими заданным техническим допускам на систему. В последние два десятилетия для построения управлений неопределенными объектами интенсивно развивается теория робастного управления. Наибольшие успехи в этой области достигнуты для анализа робастной устойчивости и робастной стабилизации линейных объектов.

Сравнительно недавно теория робастных систем пополнилась новыми инструментами синтеза регуляторов. Для линейных неопределенных систем – это алгебраическое неравенство Риккати (ARI), для нелинейных – неравенство Гамильтона-Якоби (HJI) [1, 2]. HJI является неравенством с частными производными, что затрудняет применение этого метода. Одним из возможных способов нахождения робастного управления с использованием HJI является метод, основанный на аппроксимации HJI рядом Тейлора вокруг точки равновесия. Однако этот метод не позволяет получить более общие решения. С другой стороны, применение нелинейных матричных неравенств дает возможность исследовать системы, параметры которых зависят от состояния (SDC) [3]. Этот тип нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет перейти при синтезе робастного управления от скалярного неравенства HJI к матричному неравенству ARI с параметрами, зависящими от состояния объекта.

Добавим, что ARI и HJI невозможно использовать для решения терминальных задач управления неопределенными объектами. В работе предлагается метод синтеза управления для одного класса нелинейных неопределенных объектов с применением их робастных моделей SDC, имеющих линейную структуру.

**1. Постановка задачи.** Пусть нелинейный нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным включением

$$\frac{d}{dt}x(t) \subset f(x,u,\alpha(t)),\ x(t_0) = x_0,\ x \in R^n,\ t \in [t_0,T]. \quad (1.1)$$

Здесь $\alpha(t) = \alpha(t_0,T) \in \Omega$ или $\alpha(t,x(t)) \in \Omega$, $\alpha \in R^k$; $D$ – область $(t,x)$ – пространства; $D_\alpha$ – область $(t,\ x,\ \alpha)$ – пространства, $D_\alpha : (t,x) \in D$, $\alpha \in \Omega$, $t \in [t_0,\ T]$; $f \in (C, Lip)$ в $D_\alpha$. Предполагается, что параметрические возмущения таковы, что сохраняется управляемость объекта (1.1). При синтезе закона управления для объектов из множества (1.1) с заданным условием на правом конце

$$|g(x(T))| \le d > 0 \quad (1.3)$$

будем использовать функционала вида

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\left[x^T(T)Fx(T) + \int_0^T \left\{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right\}dt\right]. \quad (1.4)$$

Применение аналитических методов в целях синтеза управлений для нестационарных объектов с неполной информацией о параметрах, входных воздействиях, помехах либо сопряжено с большими вычислительными трудностями, либо не представляется возможным (как в случае синтеза оптимальной системы). В связи с этим возникает задача построения управления не для одной конкретной, точно заданной системы, а целого семейства систем, параметры и характеристики элементов которых принадлежат заранее известным множествам. В современной литературе по теории управления соответствующая проблема получила название задачи робастного управления. Существует несколько определений робастного управления, в которых так или иначе отражается существо постановки задачи управления нестационарным объектом. Дадим определение робастного управления, использующее идею гарантированного управления [4, 5].

Задачей робастного управления [6] по отношению к множеству целей, функционалу качества, множеству допустимых управлений, множеству состояний, включая состояние объекта в момент начала управления, а также множеству возможных значений параметров и характеристик элементов объекта является отыскание управления, принадлежащего допустимому множеству управляющих воздействий, минимизирующего заданный функционал и обеспечивающего перевод системы из начального состояния в заданное множество целей при любых значениях параметров и характеристик элементов объекта, принадлежащих множеству возможных значений. Это означает, что гарантированным значением критерия качества при робастном управлении будет величина

$$J^0 = \inf_{u\in U}\sup_{\alpha\in\Omega} J(x,u)_{|g(x(T))|\le d}. \tag{1.5}$$

При синтезе робастного управления для нелинейных неопределенных объектов будут использоваться их робастные модели, имеющие линейную структуру. Поэтому рассмотрим вначале метод гарантированного управления в применении к неопределенным линейным моделям.

**2. Линейные робастные системы.** Введем следующую линейную систему $S_l$

$$S_l\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t),\\ x(0) = x_0,\\ z(t) = C_1(t)x(t) + D_{12}(t)u(t),\end{cases} \tag{2.1}$$

где $w(t)$ – неизвестное возмущение, $z(t)$ – управляемый выход системы, $u(t)$ – управление, подлежащее нахождению. Предположим, что параметры системы имеют интервальный характер неопределенности

$$\begin{gathered}\underline{A} \le A(t) \le \overline{A},\quad \underline{B_1} \le B_1(t) \le \overline{B}_1,\quad \underline{B_2} \le B_2(t) \le \overline{B}_2,\\ \underline{C_1} \le C_1(t) \le \overline{C_1},\quad \underline{D_{12}} \le D_{12}(t) \le \overline{D_{12}}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Синтез управления для объекта (2.1) может быть приведен в постановке задачи дифференциальной игры с заданной ценой $\|z(T)\| \le d$, $d > 0$, если возмущение $\omega(t)$ интерпретировать как антагонистическое управление. Тогда функционал качества можно представить в виде

$$\begin{gathered}J(z,u,\omega) =\\ = \frac{1}{2}\|z(T)\|_F^2 + \frac{1}{2}\int_0^T\left\{\|z(t)\|_Q^2 - \|w(t)\|_P^2 + \|u(t)\|_R^2\right\}dt,\end{gathered} \tag{2.3}$$

где интервал управления $[0,T]$ задан. Вопрос о выборе параметров положительно полуопределенных (определенных) матриц $F$, $Q$ и положительно определенных матриц $R$, $P$ будет обсуждаться ниже.

Положим, что $C_1^T(t)D_{12}(t) = 0$, $D_{12}^T(t)D_{12}(t) = I$, что упростит формулировку результата, но не изменит общности постановки задачи. Известно [7], что оптимальные управления $u(t)$ и $\omega(t)$ определяются соотношениями

$$u(t) = -R^{-1}B_2^TS(t)x(t),\quad \omega(t) = -P^{-1}B_1^TS(t)x(t), \tag{2.4}$$

где положительно определенная матрица $S$ является решением дифференциального уравнения Риккати (DRE)

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}S(t) = S(t)A(t) + A^T(t)S(t) + S(t)B_1(t)P^{-1}B_1^T(t)S(t) +\\ C_1^T(t)_1C(t) - S(t)B_2(t)R^{-1}B_2^T(t)S(t) + Q = 0,\\ S(T) = F.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Отметим, что матрицы $R$ и $P$ должны задаваться так, чтобы матрица $M = B_2(t)R^{-1}B_2^T(t) - B_1(t)P^{-1}B_1^T(t)$ была бы, по крайней мере, положительно полуопределенной. Понятно, что реализовать полученное решение не удастся, так как отсутствует информация о значениях параметров объекта (2.1) в каждый момент интервала управления.

Если время окончания переходного процесса не фиксировано (например, $T \to \infty$), а первое слагаемое функционала отсутствует, то алгебраическое неравенство ARI для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\begin{gathered}S(t)A(t) + A^T(t)S(t) + S(t)B_1(t)P^{-1}B_1^T(t)S(t) +\\ + C_1^T(t)_1C(t) < S(t)B_2(t)R^{-1}B_2^T(t)S(t).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Учитывая интервальный характер параметрической неопределенности, следует, что наибольшие сложности, связанные с выполнением неравенства (2.6), будут при следующих значениях параметров объекта:

$$A(t) = \overline{A},\quad B_1(t) = \overline{B}_1,\quad B_2(t) = \underline{B}_2,\quad C_1(t) = \overline{C}_1. \tag{2.7}$$

Задача синтеза управления вида (2.4) может быть сформулирована как проблема конструирования оптимального управления для робастной

модели объекта (2.1) при антагонистическом воздействии $w(t)$

$$S_l^{\text{м}}\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x_p(t) = \bar{A}x_p(t) + \bar{B}_1 w(t) + \underline{B}_2 u_p(t), \quad x_p(0) = x_0,\\ z(t) = \bar{C}_1 x_p(t) + D_{12}u_p(t),\end{cases} \tag{2.8}$$

с использованием функционала качества

$$J_{\text{м}}(z,u_{\text{м}},\omega) = \frac{1}{2}\|z(T)\|_F^2 + \\ + \frac{1}{2}\int_0^T\left\{\|z(t)\|_Q^2 - \|w(t)\|_P^2 + \|u_p(t)\|_R^2\right\}dt. \tag{2.9}$$

Напомним, что матрицы $R$ и $P$ должны задаваться так, чтобы матрица $M = \underline{B}_2 R^{-1}\underline{B}_2^T - \bar{B}_1 P^{-1}\bar{B}_1^T$ была бы, по крайней мере, положительно полуопределенной. В теории робастных систем при использовании $L_2$-нормы для отыскания управления, организованного по принципу обратной связи, вместо обратимой положительно определенной матрицы $P$ обычно вводится скалярный показатель $\|P\| = \gamma^2$, а $R = I$.

Учитывая интервальный характер параметрической неопределенности объекта (2.1) и условие выбора параметров робастной модели (2.8), определим структуру регулятора и действующего возмущения в виде

$$u(t) = -R^{-1}\underline{B}_2^T S_p x(t), \quad \omega(t) = -P^{-1}\bar{B}_1^T S_p x(t), \tag{2.10}$$

где положительно определенная матрица $S_p$, содержащая постоянные параметры, – решение алгебраического уравнения MRE

$$S_p\bar{A} + \bar{A}^T S_p + \bar{C}_1^T\bar{C}_1 + \\ + S_p\left[\bar{B}_1 P^{-1}\bar{B}_1^T - \underline{B}_2 R^{-1}\underline{B}_2^T\right]S_p + Q = 0, \tag{2.11}$$

которое является и решением дифференциального уравнения DRE, если $F = S$.

Структура управления для объекта (2.1) будет такая же, как (2.4), однако матрица $S$ заменяется на положительно определенную матрицу $S_P$

$$u(t) = -R^{-1}\underline{B}_2^T S_p x(t), \quad \omega(t) = -P^{-1}\bar{B}_1^T S_p x(t). \tag{2.12}$$

С учетом условия выбора параметров робастной модели объекта и $x_P(0) = x_0$, можно утверждать, что

$$\left\|\left\{\bar{A} - \left[\underline{B}_2 R^{-1}\underline{B}_2^T - \bar{B}_1 P^{-1}\bar{B}_1^T\right]S_p\right\}x_p(t)\right\| \geq \\ \geq \left\|\left\{A(t) - \left[B_2(t)R^{-1}\underline{B}_2^T - B_1(t)P^{-1}\bar{B}_1^T\right]S_p\right\}x(t)\right\|. \tag{2.13}$$

Оценим максимально возможное рассогласование траекторий объекта (2.1) и его робастной модели (2.8). Пусть $\bar{A} - \underline{A} = a$, $\bar{B}_1, - \underline{B_1} = b_1$, $\bar{B}_2 - \underline{B_2} = b_2$ и $\varepsilon(t) = x_{\text{м}}(t) - x(t)$, где

$$\frac{d}{dt}x(t) = \underline{A}x(t) + \underline{B}_1 w(t) + \bar{B}_2 u(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = L\varepsilon(t) - c(t), \quad \varepsilon(0) = 0, \tag{2.14}$$

где $L = \bar{A} + \left[\bar{B}_1 P^{-1}\bar{B}_1^T - \underline{B}_2 R^{-1}\underline{B}_2^T\right]S_p$ и

$$c(t) = \left\{a + \left[b_1 P^{-1}\bar{B}_1^T - b_2 R^{-1}\underline{B}_2^T\right]S_p\right\}x(t).$$

Запишем решение уравнения (2.14) в виде

$$\|\varepsilon(t)\| = \left\|\int_0^t\{\exp L[t-\tau]\}c(\tau)d\tau\right\|.$$

Учитывая, что корни характеристической матрицы $L$ являются действительными и отрицательными, можно назначить такие положительные постоянные $K$ и $\rho$, что $\|\exp Lt\| \leq Ke^{-\rho t}$ [8]. Тогда

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \int_0^t\|\exp L[t-\tau]\|\,\|c(\tau)\|d\tau \leq \\ \leq K\int_0^t e^{-\rho[t-\tau]}\|c(\tau)\|d\tau. \tag{2.15}$$

Как было показано, управления (2.12) обеспечивают системе свойства асимптотической устойчивости, т.е. $\|x(0)\| > \|x(t)\|$ при $t > 0$. Принимая во внимание, что параметрические возмущения принадлежат ограниченной области возможных значений, справедливо считать, что $\|c(0)\| > \|c(t)\|$ при $t > 0$. Тогда из (2.15) будем иметь оценку максимально возможного рассогласования траекторий объекта (2.1) и его робастной модели

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \frac{K}{\rho}\left[1 - e^{-\rho t}\right]\times \\ \times\left\|\left\{a + \left[b_1 P^{-1}\bar{B}_1^T - b_2 R^{-1}\underline{B}_2^T\right]S_p\right\}x(0)\right\|. \tag{2.16}$$

**3. Нелинейные робастные системы.** Рассмотрим следующую нелинейную систему $S_{nl}$

$$S_{nl}\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x(t) = f(x,t) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t), \quad x(0) = x_0,\\ z(t) = h_1(x) + j_{12}(x)u(t),\end{cases} \tag{3.1}$$

где $w(t)$, $z(t)$, $u(t)$ имеют тот же смысл, что и в (2.1). Цели робастного управления нелинейным объектом (3.1) те же, что и линейного объекта (2.1). Пусть [9]

$$f(t,x) = f_1(t,x) + f_2(t,x), \tag{3.2}$$

где $f_1(t,x)$ – нелинейность низкого порядка, т.е.

$$\frac{|f_1(t,x)|}{|x|} \leq \delta,$$

$\delta$ – малая величина; $f_2(t,x)$ – нелинейность высшего порядка, т.е.

$$\frac{|f_2(t,x)|}{|x|} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to 0.$$

Учитывая свойства рассматриваемых нелинейностей, перейдем от (3.2) к

$$f(t,x) = A_1(t)x(t) + A_2(x)x(t). \tag{3.3}$$

Предположим также, что

$$\begin{gathered} g_1(x) = B_1(x), \quad g_2(x) = B_2(x), \\ h_1(x) = C_1(x)x(t), \quad j_{12}(x) = D_{12}(x). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Следует отметить, что представление нелинейности $f(t,x)$ в виде (3.3) может оказаться неоднозначным [3]. Пусть количество возможных представлений этой нелинейности в виде (3.3), которые при заданных начальных условиях не обращаются в бесконечность, есть $k$. Тогда нелинейная система (3.1) может быть преобразована в $k$ систем, эквивалентных исходной, но не эквивалентных относительно друг друга, с параметрами, зависящими от состояния SDC

$$S_{nl}\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_i(t) = \left[A_1(t) + A_2^i(x_i)\right]x(t) + \\ + B_1(x_i)w(t) + B_2(x_i)u_i(t), \\ x_i(0) = x_0, \\ z(t) = C_1(x_i)x(t) + D_{12}(x_i)u(t), \quad i = 1,\ldots,k. \end{cases} \tag{3.5}$$

Синтез структуры управления произведем на $i$-модели системы с использованием функционала типа (2.9). Неравенство (2.6) запишется как

$$\begin{gathered} S_i(x_i)\left[A_1(t) + A_2^i(x_i)\right] + \left[A_1(t) + A_2^i(x_i)\right]S_i(x_i) + \\ + S_i(x_i)B_1(x_i)P^{-1}B_1^T(x_i)S_i(x_i) + C_1^T(x_i)C_1(x_i) < \\ < S_i(x_i)B_2(x_i)R^{-1}B_2^T(x_i)S_i(x_i). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Управления определяются выражениями

$$\begin{gathered} u_i(t) = -R^{-1}B_2^T(x_i)S_i(x_i)x_i(t), \\ \omega(t) = -P^{-1}B_1^T(x_i)S_i(x_i)x_i(t). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Основная система с управлениями вида (3.7) и ее $i$-модель будут иметь вид

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}x(t) = f(x,t) + \left[B_1(x)P^{-1}B_1(x) - \right. \\ \left. - B_2(x)R^{-1}B_2^T(x)S_i(x)\right]x(t), \quad x(0) = x_0, \\ \frac{d}{dt}x_i(t) = f(x_i,t) + \left[B_1(x_i)P^{-1}B_1(x_i) - \right. \\ \left. - B_2(x_i)R^{-1}B_2^T(x_i)S_i(x_i)\right]x_i(t), \quad x_i(0) = x_0. \end{gathered}$$

Учитывая, что исходная система (3.1) и ее $i$-модель описываются одними и теми же уравнениями с одинаковыми начальными условиями, то под воздействием управлений (3.7) в силу эквивалентности преобразования нелинейной функции будут иметь одинаковые переходные процессы, т.е.

$$\varepsilon_i(t) = x(t) - x_i(t) = 0, \quad i = 1,\ldots,k. \tag{3.8}$$

Отметим, что неоднозначное представление нелинейной функции в виде (3.3) приводит к тому, что и управления вида (3.7) будут отличаться для различных моделей. Таким образом, в общем случае траектории $x_i(t)$ и $x_j(t)$ не будут совпадать, т.е. $x_i(t) \neq x_j(t)$ если $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,k$, так как

$$\begin{gathered} A_2^i(x_i) \neq A_2^j(x_j), \quad B_1(x_i) \neq B_1(x_j), \\ C_1(x_i) \neq C_1(x_j), \quad B_2(x_i) \neq B_2(x_j) \end{gathered}$$

и, таким образом, $S_i(x) \neq S_j(x)$.

Как видно, найти положительно определенную матрицу $S_i(x)$, удовлетворяющую неравенству (3.6), не так легко. Но даже отыскание матрицы $S_i(x)$ не гарантирует существования стабилизирующего управления, так как не известна область X, содержащая одновременно начальную пару $(x_0, 0)$ и цель управления, "заполненную" траекториями, произведенными управлениями вида (3.7).

Сформулируем задачу робастного управления нелинейным неопределенным объектом. Пусть управляемый объект описывается соотношениями (3.3), где матрицы $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_1(t)$, $D_{12}(t)$ определены, так как это сделано в разд. 2. Необходимо построить управление, асимптотически переводящее систему за требуемое время из заданного начального состояния $x(0) = x_0$ в некоторую окрестность начала координат $\|x(0)\| > \|x(T)\| \leq d$, $d > 0$.

Предположим, что удастся построить такое управление. Допустим также, учитывая неоднозначность представления нелинейной системы (3.1) в виде системы, параметры которой зависят от состояния (3.5), что класс рассматриваемых систем таков, что их параметры в процессе управления изменяются в соответствующих интервалах

$$\begin{gathered} \left\|\underline{A}_1 + A_2^i(x_T^*)\right\| \leq \left\|A_1(t) + A_2^i(x(t))\right\| \leq \left\|\overline{A}_1 + A_2^i(x_0)\right\|, \\ \left\|B_1(x_T^*)\right\| \leq \|B_1(x(t))\| \leq \|B_1(x_0)\|, \\ \left\|B_2(x_T^*)\right\| \leq \|B_2(x(t))\| \leq \|B_2(x_0)\|, \\ \left\|C_1(x_T^*)\right\| \leq \|C_1(x(t))\| \leq \|C_1(x_0)\|, \\ \left\|D_{12}(x_T^*)\right\| \leq \|D_{12}(x(t))\| \leq \|D_{12}(x_0)\|, \\ t \in [t_0, T], \quad i = 1,\ldots,k. \end{gathered}$$

Здесь $\left\|x_T^*\right\| = d$. Учитывая (2.6), построим $i$-ю робастную модель системы

$$S_{nl}^p\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_p^i(t) = \left[\overline{A}_1 + A_2^i(x_0)\right]x_p^i(t) + \\ + B_1(x_0)w(t) + B_2(x_T^*)u_p^i(t), \\ z_p(t) = C_1(x_0)x_p(t) + D_{12}(x_T^*)u_p^i(t), \end{cases} \tag{3.9}$$

$$x_p^i(0) = x_0.$$

Организуем управления вида (3.7). Для того, чтобы матрица $S_p$ содержала информацию о начальном состоянии объекта, цели управления и заданном периоде управления, назначим весовые матрицы функционала (2.9) $Q$, $R$, $P$ следующим образом:

$$Q = diag\,[|x_1(0)|,\ldots,|x_n(0)|],\ \|R\| = Td,\ \|P\| = \gamma^2, \quad (3.10)$$

при этом выбор весового коэффициента $\gamma^2$ должен быть таким, чтобы матрица

$$M = \frac{1}{\gamma^2}B_1(x_0)B_1^T(x_0) - \frac{1}{d^2}B_2(x_n^*)R^{-1}B_2^T(x_T^*)$$

была бы отрицательно полуопределенной (определенной).

Положительно определенная матрица $S_p^i$ будет решением алгебраического уравнения ARE

$$S_p^i\left[\overline{A}_1 + A_2^i(x_0)\right] + \left[\overline{A}_1 + A_2^i(x_0)\right]^T S_p^i + C_1^T(x_0)C(x_0) + \\ + S_p^i\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1(x_0)B_1^T(x_0) - \frac{1}{d^2}B_2(x_T^*)B_2^T(x_T^*)\right]S_p^i + x_0x_0^T = 0. \quad (3.11)$$

Назначение матрицы $F$ в виде $F = S_p^i$ обеспечивает постоянство параметров робастного регулятора при терминальной постановке задачи. При таком определении матрицы усиления робастного регулятора будет выполняться следующее соотношение

$$\left\|\left\{\left[\overline{A}_1 + A_2^i(x_0)\right] + \left[\frac{1}{\gamma^2}B_1(x_p)B_1^T(x_0) - \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. - \frac{1}{d^2}B_2(x_p)B_2^T(x_T^*)\right]S_p^i\right\}x_p^i(t)\right\| \geq \quad (3.12)$$

$$\geq \left\|\left\{f(t,x) + \left[\frac{1}{\gamma^2}B_1(x)B_1^T(x_0) - \frac{1}{d^2}B_2(x)B_2^T(x_T^*)\right]S_p^i\right\}x(t)\right\|.$$

Другими словами, норма решения уравнения

$$\frac{d}{dt}x_p^i(t) = \left\{\left[\overline{A}_1 + A_2^i(x_0)\right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\gamma^2}B_1(x_p)B_1^T(x_0) - \frac{1}{d^2}B_2(x_p)B_2^T(x_T^*)\right]S_p^i\right\}x_p^i(t)$$

является мажорантой для нормы решения уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = \\ = \left\{f(t,x) + \left[\frac{1}{\gamma^2}B_1(x)B_1^T(x_0) - \frac{1}{d^2}B_2(x)B_2^T(x_T^*)\right]S_p^i\right\}x(t)$$

при $x_p^i(0) = x(0)$.

Условие (3.12) будет справедливым для всех моделей систем, т.е. для всех $i = 1,\ldots,k$. Полученные результаты позволяют сформулировать следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Пусть дифференциальное уравнение

$$S_{nl}\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x(t) = f(x,t) + g_2(x)u(t), \quad x(0) = x_0,\\ z(t) = h_1(x) + j_{12}(x)u(t)\end{cases}$$

допускает представление в виде линейного дифференциального уравнения с параметрами, зависящими от состояния,

$$S_{nl}^p\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x^i(t) = \left[A_1(t) + A_2^i(x^i)\right]x^i(t) + B_2(x^i)u^i(t),\\ x^i(0) = x_0,\\ z_p(t) = C_1(x^i)x^i(t) + D_{12}(x^i)u^i(t).\end{cases}$$

Тогда управление $u_i(t) = -R^{-1}B_2^T(x_i)S_i(x_i)x(t)$, где положительно определенная матрица $S_i(x_i)$ отвечает неравенству Риккати

$$S_i(x_i)\left[A_1(t) + A_2^i(x_i)\right] + \left[A_1(t) + A_2^i(x_i)\right]S_i(x_i) + \\ + C_1^T(x_i)C_1(x_i) < S_i(x_i)B_2(x_i)R^{-1}B_2^T(x_i)S_i(x_i),$$

является стабилизирующим, т.е. $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Т е о р е м а 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и параметры линейной модели объекта имеют интервальный характер. Тогда управление $u_i(t) = -R^{-1}B_2^T(x_i)S_p^ix(t)$, где положительно определенная матрица $S_p^i$ есть решение алгебраического уравнения Риккати

$$S_p^i\left[\overline{A}_1 + A_2^i(x_0)\right] + \left[\overline{A}_1 + A_2^i(x_0)\right]^T S_p^i + C_1^T(x_0)C(x_0) + \\ + S_p^iB_2(x_T^*)R^{-1}B_2^T(x_T^*)S_p^i + x_0x_0^T = 0,$$

является для исходной системы робастно стабилизирующим, т.е. $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

П р и м е р. Рассмотрим пример из [10] (координатное управление спутником), существенно усложнив его за счет введения параметрических возмущений. Исследуемый нелинейный объект описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{a_1(t)}{3}x_2(t)x_3(t)\\ -a_2(t)x_1(t)x_3(t)\\ a_3(t)x_1(t)x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1(t)u_1(t)\\b_2(t)u_2(t)\\b_3(t)u_3(t)\end{pmatrix},$$

$$x_1(0) = 200, \quad x_2(0) = 30, \quad x_3(0) = 40.$$

Параметры объекта имеют следующие номинальные значения

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1, \quad b_1 = 100, \quad b_2 = 25, \quad b_3 = 100.$$

Сформируем робастную модель объекта

$$\frac{d}{dt}m(t) = A(m)m(t) + Bu(t) + D\omega(t),$$

$$m(t_0) = x(t_0).$$

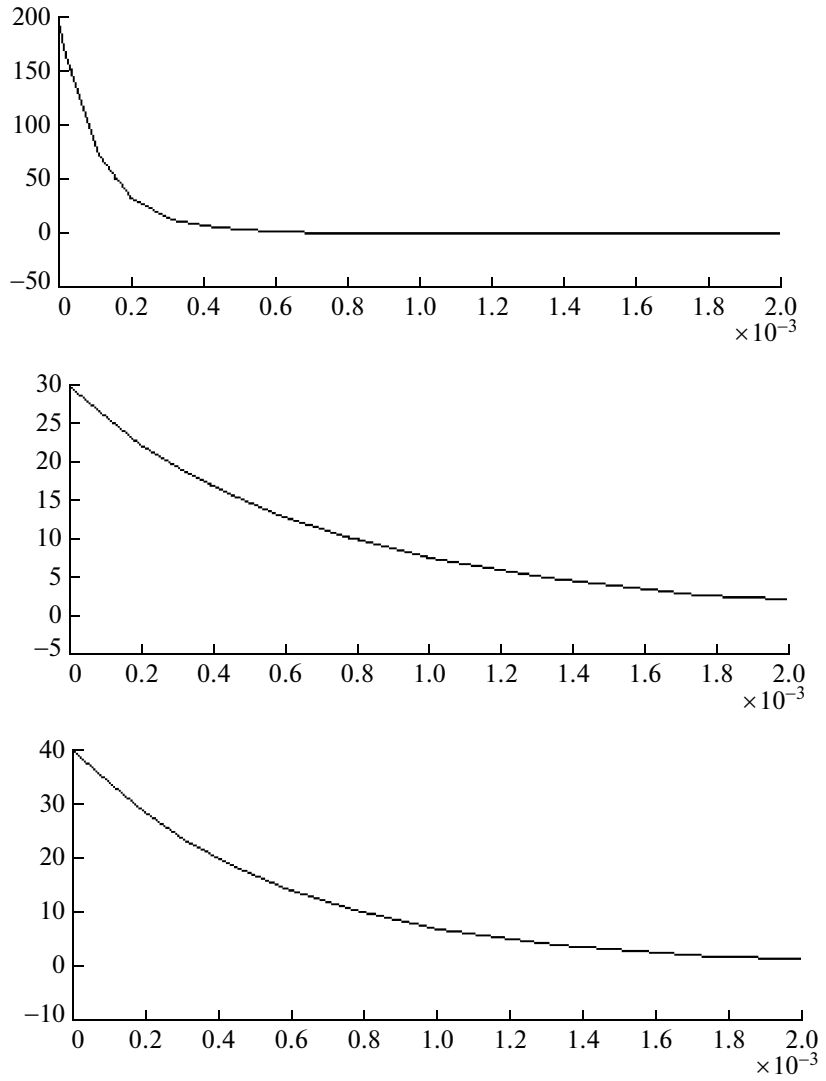


**Рис 1.** Переходные процессы $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ в исходном объекте с управлением, синтезированном на модели с параметрами, зависящими от состояния исходного объекта (интервал 0–0.02 с)

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m_3(t)/3 & 0 \\ 0 & 0 & -m_1(t) \\ m(_2t) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $Dw(x)$ содержит возмущения состояния объекта, вызванные отклонениями параметров от номинальных значений. Примем $\omega(x) = 15\sin 30t$. Такой уровень возмущений по отношению к начальным условиям составляет порядка 20% по каждой координате. Введем функционал качества

$$J(z,u,\omega) = \frac{1}{2}\int_0^T \left\{ \|m(t)\|_Q^2 - \|w(t)\|_P^2 + \|u(t)\|_R^2 \right\} dt.$$

С учетом материала разд. 2 оптимальное управление для исходного объекта, синтезированное на робастной модели объекта, и возмущения будут определяться следующими соотношениями

$$u(t) = -R^{-1}B^T S_p x(t), \quad \omega(t) = -15P^{-1}S_p \sin 30t,$$

$$S_p\bar{A} + \bar{A}^T S_p + S_p\left[P^{-1} - BR^{-1}B^T\right]S_p + Q = 0,$$

где $Q = diag\,[|x_1(0)|, |x_2(0)|, |x_3(0)|]$, $\|R\| = d^2$, $\|P\| = \gamma^2$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & m_3(t_0)/3 & 0 \\ 0 & 0 & -m_1(t_0) \\ m_2(t_0) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

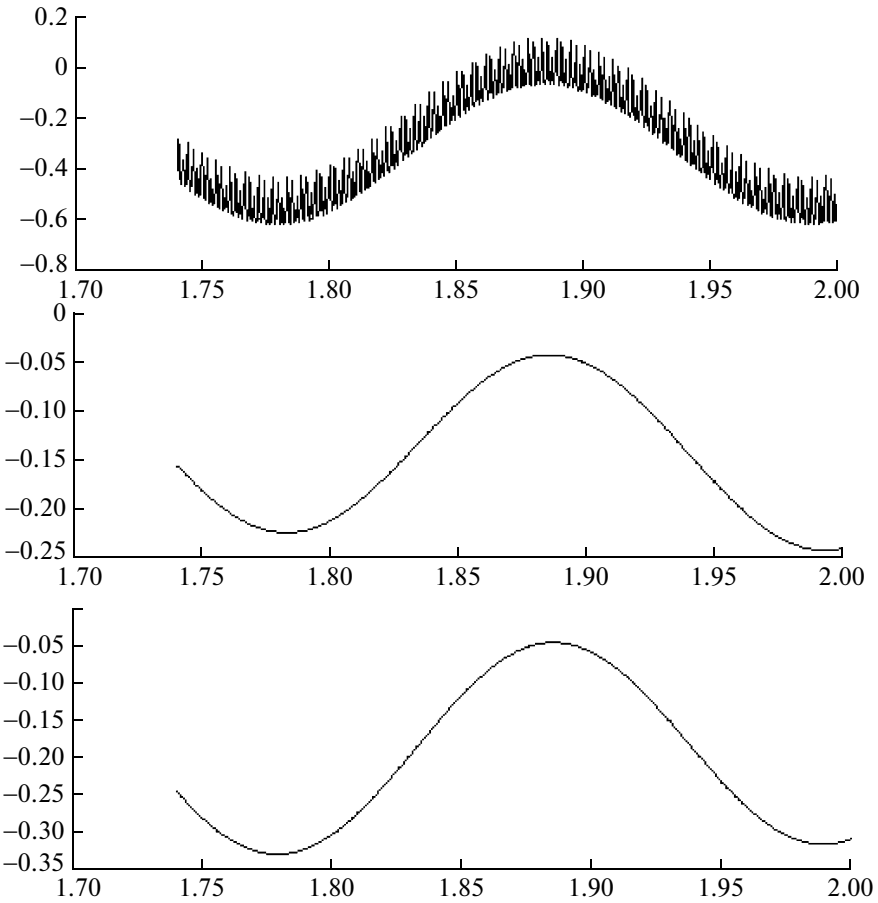


**Рис 2.** Переходные процессы $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ в исходном объекте с управлением, синтезированном на модели с параметрами, зависящими от состояния исходного объекта (интервал 0.5–2 с)

Матрица $S_p$, являясь решением MRE при заданных начальных условиях объекта, имеет вид

$$S_p = \begin{pmatrix} 0.0224 & 0.0000 & 0.0012 \\ 0.0000 & 0.999 & -0.0080 \\ 0.0012 & -0.0080 & 1.0001 \end{pmatrix}.$$

Управления определяются соотношением

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 44.7283 & -1.1836 & 0.6664 \\ -0.1775 & 45.8105 & 0.0069 \\ 0.1333 & 0.0092 & 44.7171 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Как видно из графиков (рис. 1, 2), исходный объект под воздействием синтезированного управления стабилизируется и при этом влияние возмущений, действующих на объект, подавляется достаточно успешно (амплитуды возмущений на выходе меньше амплитуд на входе приблизительно в 50 раз).

**Заключение.** Рассмотрены задачи синтеза робастных управлений для нелинейных неопределенных объектов. Дифференциальное уравнение, описывающее нелинейный объект, преобразуется в дифференциальное уравнение с параметрами, зависящими от состояния объекта. Это уравнение используется для построения робастной линейной модели с постоянными параметрами, что позволяет при синтезе управляющих воздействий перейти от нелинейного неравенства ARI к матричному уравнению MRE. Норма решения уравнения, описывающего модель объекта, является мажорантой для всех возможных решений уравнения, задающего исходную нелинейную систему.

Предложен способ назначения матриц весов квадратичного функционала, обеспечивающих независимость выполнения задачи стабилизации при любых заранее известных максимально возможных начальных условиях нелинейного объекта с параметрами, зависящими от состояния. Задача конструирования робастного регулятора сведена к стандартной постановке дифференциальной игры с квадратичным функционалом. Используемый подход можно отнести к минимаксным методам (концепции гарантированного управления). Приведен пример поведения объекта с параметрами, которые зависят от состояния, находящегося под воздействием управления,

синтезированного с использованием его робастной модели.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Van der Schaft A.J.* $L_2$-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback $H_\infty$ control // IEEE. Trans. On Automatic Control. 1992. V. 37. P. 770–784.
2. *Lu Wei-Min and Doyle John C.* $H_\infty$ control of nonlinear systems: A convex Characterization // IEEE. Trans. On Automatic Control. 1995. V. 40. P. 168–175.
3. *Sakayanagi Y., Nakayama D., Shigeki N. et al.* Clarification of Free Parameters of State-dependent Coefficient Form: Effect on Solving State-dependent Riccati Inequality // 17th WC IFAC. Seoul, 2008. P. 182–187.
4. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встречи движений. М.: Физматлит, 1970. 420 с.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Оптимальное гашение колебаний высотных сооружений при сейсмических воздействиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 5. С. 60–66.
6. *Афанасьев В.Н.* Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008. 208 с.
7. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическое конструирование систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 614 с.
8. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М. и др.* Теория показателей Ляпунова. М.: Физматлит, 1966. 576 с.
9. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 3-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 552 с.
10. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 486 с.