УДК 551.46

Диденкулова И.И.[1,2], Пелиновский Д.Е.[1,3],
Тюгин Д.Ю.[1], Гиниятуллин А.Р.[1], Пелиновский Е.Н.[1,4]
[1]Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
[2]Институт кибернетики, Таллиннский технологический университет (Эстония)
[3]Университет Мак Мастера (г. Гамильтон, Канада)
[4]Институт прикладной физики РАН (г. Нижний Новгород)

БЕГУЩИЕ ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В ВОДНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

I. Didenkulova[1,2], D. Pelinovsky[1,3],
D. Tyugin[1], A. Giniyatullin[1], E. Pelinovsky[1,4]
[1]R.E. Alekseev Nizhnii Novgorod State Technical University, Russia
[2]Institute of Cybernetics, Tallinn University of Technology, Estonia
[3]McMaster University, Hamilton, Canada
[4]Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod

TRAVELLING LONG WAVES IN WATER RECTANGULAR CHANNELS OF VARIABLE CROSS SECTION

Аннотация. В рамках уравнений мелкой воды получено точное решение в виде бегущих длинных волн в водных каналах прямоугольной формы, глубина и ширина которых меняются в пространстве. Выведено дифференциальное уравнение, связывающее глубину и ширину канала для безотражательного распространения волны. Показано, что число конфигураций, допускающих существование бегущих волн, неограниченно, так что эффект сверхдальнего распространения волн является типичным. Рассмотренный эффект может оказаться важным для интерпретации случаев сильного проникновения волн цунами в глубь побережья.

Ключевые слова: бегущие длинные волны, уравнение мелкой воды, прямоугольные каналы.

Abstract. A rigorous travelling wave solution in water channels of rectangular cross section with variable depth and width is obtained in the framework of shallow water theory. The differential equation connecting depth and width of the channel for the case of non-reflecting wave propagation is derived. It is shown that the number of geometries and configurations, which allow non-reflecting wave propagation, is unlimited. Thus, the effect of very long-distance wave propagation is rather common and can play an important role in the interpretation of the observed extreme inundations caused by tsunami.

Key words: travelling long waves, shallow water theory, rectangular channels.

Решения волновых уравнений типа $u(x - ct)$ описывают бегущие волны, не меняющиеся с расстоянием. Здесь x – одна из координат (на плоскости, цилиндре или сфере), t – время и c – скорость распространения. Анализ таких решений является объектом математической физики и волновой теории, в том числе и нелинейной [13; 14; 15; 16; 17; 18]. Если среда является неоднородной или нестационарной в направлении распространения волны, то не удается обычно найти строгие решения волновых уравнений в виде бегущих волн. В тоже время, если среда меняется достаточно медленно во времени или плавно в пространстве, то бегущие волны с переменной амплитудой находятся приближенно с использованием методов типа геометрической оптики или акустики [1; 3]. Существует, однако, конечное число примеров, допускающих существование бегущих волн и в неоднородных средах со специальными законами изменения характеристик среды в пространстве. Такие примеры известны для поверхностных волн на воде [9; 10; 11; 2], внутренних волн в океане [6; 7], акустических волн в атмосфере Земли и Солнца [4; 5]. Для их нахождения используются различные методы, в том числе алгебра Ли и трансформационные методы [8; 12]. В настоящей работе подобный класс бегущих волн находится для водных относительно узких каналов переменного сечения, когда его глубина и сечение меняются произвольным образом вдоль оси канала.

Математическая модель

Рассмотрим узкий (ширина канала меньше длины волны) канал прямоугольной формы, глубина и ширина которого меняются вдоль оси x. Геометрия канала приведена ниже (см. рис). Динамика длинных (длина волны больше глубины) волн в таких каналах описывается нелинейными уравнениями теории мелкой воды:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uS) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \qquad (2)$$

где $u(x,t)$ – усредненная по поперечному сечению скорость течения, $\eta(x,t)$ – колебания водной поверхности вдоль оси x, $S(H)$ – переменное поперечное сечение канала и g – ускорение свободного падения. Ось канала предполагается не искривленной.

Площадь поперечного сечения прямоугольного канала естественно представима в виде:

$$S = H(x,t)B(x), \qquad (3)$$

где: $H(x,t) = \eta(x,t) + h(x)$ и $h(x)$ соответственно полная и невозмущенная глубина канала вдоль главной оси x, а $B(x)$ – переменная ширина канала.

Рассматривая волны малой амплитуды (амплитуда меньше глубины канала), уравнения (1) и (2) можно линеаризовать:

$$B\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uBh) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \qquad (4)$$

Уравнения (4) сводятся к волновому уравнению второго порядка для смещения водной поверхности с коэффициентами, зависящими от пространственных характеристик канала:

$$B\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial x}\left(Bh\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 0, \qquad (5)$$

или

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g\left(\frac{dh}{dx} + \frac{h}{B}\frac{dB}{dx}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} - gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \qquad (6)$$

Для нахождения решений уравнения (6) в виде бегущей волны будем использовать

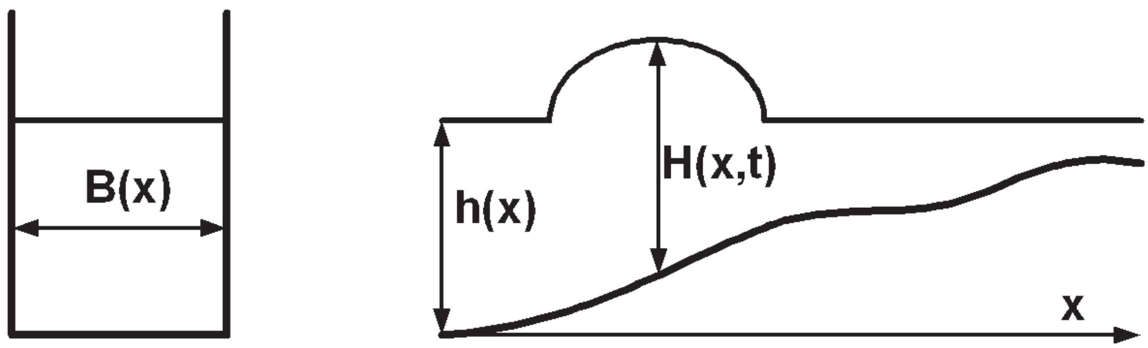

Рис. Геометрия канала

технику сведения волнового уравнения с переменными коэффициентами к волновому уравнению с постоянными коэффициентами [12]. Для этого проведем следующую замену в уравнении (6)

$$\eta(x,t) = A(x)\Phi[t,\tau(x)], \tag{7}$$

где: A(x), Φ(t,τ) и τ(x) – три неизвестные функции, подлежащие определению. Тогда уравнение (6) трансформируется в

$$A\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - g\left(\frac{dh}{dx}+\frac{h}{B}\frac{dB}{dx}\right)\left(\Phi\frac{dA}{dx}+A\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dx}\right) - \\ - gh\left(\Phi\frac{d^2A}{dx^2}+2\frac{dA}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dx}+A\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{d^2\tau}{dx^2}+A\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2\right) = 0 . \tag{8}$$

Уравнение (8) может быть сведено к волновому уравнению с постоянными коэффициентами в новых переменных:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} = 0\,, \tag{9}$$

если будут выполняться следующие условия:

$$\frac{d^2A}{dx^2} + \frac{1}{hB}\frac{d(hB)}{dx}\frac{dA}{dx} = 0 \tag{10}$$

$$2hB\frac{d\tau}{dx}\frac{dA}{dx} + \frac{d}{dx}\left(hB\frac{d\tau}{dx}\right)A = 0 \tag{11}$$

$$gh\left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2 = 1 \tag{12}$$

Из (12) ясен смысл величины τ – это время распространения волны, которое естественно не зависит от ширины канала:

$$\tau(x) = \int\frac{dx}{\sqrt{gh}} \tag{13}$$

Уравнение (11) интегрируется и дает закон сохранения потока волновой энергии:

$$Ah^{1/4}B^{1/2} = const\,. \tag{14}$$

Уравнение (11) представляет собой известный закон Грина для волн в жидкости с плавным изменением глубины и ширины канала, однако в нашем случае он выполняется и для волн в канале с произвольными (но непрерывными) изменениями параметров канала.

После однократного интегрирования уравнения (10) получаем:

$$hB\frac{dA}{dx} = const\,, \tag{15}$$

где, естественно, константа другая, чем в (14). Наконец, подставляя (14) в (15), получаем дифференциальное уравнение, связывающее глубину и ширину канала:

$$hB\frac{d\left(h^{-1/4}B^{-1/2}\right)}{dx} = const\,. \tag{16}$$

Итак, если глубина и ширина канала меняются в пространстве в соответствии с (16), то функция Φ является решением волнового уравнения с постоянными коэффициентами (9), и, следовательно, его решениями являются бегущие волны типа Φ(τ-t). Тогда и решения вида (7) естественно называть бегущими волнами с переменной амплитудой. Условия существования таких бегущих волн и обсуждаются ниже.

Формы безотражательных водных каналов

Уравнение (16) описывает формы каналов, в которых могут распространяться бегущие волны, которые не отражаются в неоднородной среде. Такие каналы мы будем называть безотражательными. Рассмотрим сначала некоторые частные случаи. Если ширина канала постоянна (B = const), то, помимо тривиального случая, когда волна распространяется в бассейне с постоянной шириной и глубиной, бегущая волна возможна еще и в бассейне, глубина которого меняется по следующему закону:

$$h \sim x^{4/3}, \qquad (17)$$

что соответствует одномерному случаю безотражательного пляжа, подробно рассмотренному в работе [10; 2]. Решение в виде бегущей волны, распространяющейся к берегу, описывается следующим выражением, вытекающим из (7):

$$\eta(x,t) = A_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^{1/3}\Phi\left[t-\tau_0\left(1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^{1/3}\right)\right], \qquad (18)$$

где: A_0 – начальная амплитуда волны на расстоянии x_0 от берега, τ_0 – время движения волны от начальной точки до берега (мы не приводим здесь выражения для него, легко находимого из (13)). Важно подчеркнуть, что форма бегущей волны может быть произвольной, в том числе и разрывной.

Другим важным частным случаем является канал переменного сечения и постоянной глубины. В этом случае решение уравнения (16) дает:

$$B \sim x^2. \qquad (19)$$

Бегущая волна в таком канале описывается выражением

$$\eta(x,t) = A_0\left(\frac{x_0}{x}\right)\Phi\left[t-\tau_0\left(1-\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)\right]. \qquad (20)$$

Амплитуда волны меняется в канале, в то время как ее скорость остается постоянной.

И наконец, третьим частным решением уравнения (16) является:

$$B \sim h^{-1/2}, \qquad (21)$$

при этом глубина в пространстве может описываться произвольной непрерывной функцией. Бегущая к берегу волна в этом случае описывается формулой:

$$\eta(x,t) = A_0\Phi\left[t-\int\frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}\right]. \qquad (22)$$

Волна не меняет свою амплитуду, несмотря на переменность глубины канала. Эффект неоднородности среды проявляется только в переменности скорости распространения волны.

В данной работе в рамках линейной теории мелкой воды показано существование бегущих волн, распространяющихся без отражения в прямоугольном канале переменного сечения. Форма бегущей волны остается неизменной в процессе распространения, хотя ее амплитуда и фаза, вообще говоря, меняются в пространстве. Как показало наше исследование, число конфигураций канала, допускающих существование бегущих волн, неограниченно (это, естественно, не означает, что все они реализуются в природных условиях), и, следовательно, эффект безотражательного распространения волны должен быть достаточно распространенным. Именно этим, на наш взгляд, объясняется сильное проникновение волн цунами в долинах рек на большие расстояния от берега [6; 10].

Представленные результаты получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. ЕНП выражает благодарность грантам РФФИ (11-05-00216 и 11-05-97006) и ИИД – грантам МК1440.2012.5, SF0140007s11 и ETF8870.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
2. Диденкулова И.И., Заибо Н., Пелиновский Е.Н. Отражение длинных волн от «безотражательного» донного профиля // Известия РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – 2008. – № 4. – С. 101-107.
3. Маслов В.П. Асимптотические методы решения псевдо-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1987. – 406 с.
4. Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Бацына Е.К. Безотражательные волны в атмосфере Земли // Письма в ЖЭТФ. – 2011. – Т. 93 (№ 10). – С. 625-628.

5. Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Бацына Е.К. Безотражательное распространение акустических волн в атмосфере Солнца // Письма в Астрономический журнал. – 2012. – Т. 38 (№ 6). – С. 439-445.
6. Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Петрухин Н.С. О проникновении длинной внутренней волны в толщу океана // Океанология. – 2009. – Т. 49 (№ 5). – С. 673-680.
7. Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н. Трансформация внутренних волн над неровным дном: аналитические результаты // Океанология. – 2011. – Т. 51 (№ 4). – С. 621-626.
8. Bluman G., Kumei S. On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys. – 1987. – V. 28. – P. 307-318.
9. Clements D.L., Rogers C. Analytic solution of the linearized shallow-water wave equations for certain continuous depth variations // J. Australian Math. Soc. – 1975. – V. 19. – P. 81-94.
10. Didenkulova I., Pelinovsky E., Soomere T. Long surface wave dynamics along a convex bottom // J. Geophysical Research: Oceans. – 2009. – V. 114, C07006 (doi:10.1029/2008JC005027). – 14 p.
11. Didenkulova I., Pelinovsky E. Traveling water waves along quartic bottom profile // Proc. Estonian Acad. Sciences. – 2010. – V. 59 (№ 2). – P. 166-171.
12. Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E. Homogenization of the variable-speed wave equation // Wave Motion. – 2010. – V. 47 (№ 12). – P. 496-507.
13. Groves M. D. and Haragus M. A bifurcation theory for three-dimensional oblique traveling gravity-capillary water waves. J. Nonl. Sci., 2003, 13, 397-447.
14. Iooss G., Kirchgassner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators // Comm. Math. Phys. – 2000. – V. 211. – P. 439-464.
15. Iooss G. Traveling waves in the Fermi-Pasta-Ulam lattice // Nonlinearity. – 2000. – V. 13. – P. 849–866.
16. Lenells J. Traveling wave solutions of the Camassa-Holm and Korteweg-de Vries equations // J. Nonl. Math. Phys. – 2004. – V. 11 (№ 4). – P. 508–520.
17. Mallet-Paret J. The global structure of traveling waves in spatially discrete dynamical systems // J. Dyn. Diff. Eqs. – 1999. – V. 11. – P. 49-127.
18. Pelinovsky D., Rothos V. M. Bifurcations of traveling wave solutions in the discrete NLS equations // Physica D (Nonlinear Phenomena). – 2005. – V. 202. – P. 16-36.